Verifica di fine parte V · Distribuzioni di probabilità

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi. Per i valori di $\Phi(z)$ usa la tavola della normale standard del *Formulario e tavole*, alla fine del volume; dai le probabilità con quattro cifre decimali.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 15)* Una variabile aleatoria X ha $\mathrm{E}(X) = 2$ ed $\mathrm{E}(X^2) = 13$. La deviazione standard di $5 - 3X$ vale:
   A. -9
   B. 81
   C. 9
   D. 3

2. ● *(0,5 punti · cap. 15)* Il numero X di chiamate che un centralino riceve in un minuto è una variabile di Poisson, e la probabilità che in un minuto non arrivi alcuna chiamata è 0,25. Il valore atteso di X è:
   A. $\ln 4 \approx 1{,}39$
   B. 4
   C. 0,25
   D. $e^{-4} \approx 0{,}018$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 16)* La densità di una variabile normale X ha i punti di flesso di ascisse 7 e 13. Allora $p(X > 16)$ vale circa:
   A. 0,1587
   B. 0,0456
   C. 0,9772
   D. 0,0228

4. ●● *(0,5 punti · cap. 16)* Il tempo di attesa T (in minuti) del primo cliente a uno sportello ha distribuzione esponenziale, e la sua mediana è 10 minuti. Il valore atteso di T è circa:
   A. 10 minuti
   B. 14,4 minuti
   C. 6,9 minuti
   D. 20 minuti

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 15)* A una festa di classe (dati inventati) si pagano 3 € per lanciare un dado equilibrato: se esce 6 si vincono a euro, se esce 4 o 5 se ne vincono 4, negli altri casi nulla. Sia G il guadagno netto del giocatore (vincita meno posta). a) Determina a in modo che il gioco sia equo. b) Con il valore trovato, scrivi la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione di G, e calcola $p(G > 0)$. c) Calcola la deviazione standard di G.

6. ●● *(1 punto · cap. 15)* Un'azienda produce componenti difettosi con probabilità 0,03, indipendentemente l'uno dall'altro (dati inventati), e li spedisce in scatole da 100. Sia X il numero di componenti difettosi in una scatola. a) Qual è la distribuzione di X? Calcolane il valore atteso e la deviazione standard. b) Calcola $p(X \le 2)$ con la distribuzione esatta. c) Calcola la stessa probabilità con la distribuzione di Poisson che la approssima, spiegando perché l'approssimazione è lecita, e confronta i due risultati.

7. ●● *(1 punto · cap. 16)* Sia $f(x) = kx(3 - x)$ per $0 \le x \le 3$ e $f(x) = 0$ altrove. a) Determina k in modo che f sia una densità di probabilità. b) Scrivi la funzione di ripartizione F e calcola $p(X \le 1)$. c) Calcola il valore atteso e la varianza di X, e giustifica senza calcoli il valore della mediana.

8. ●● *(1 punto · cap. 16)* Il peso (in grammi) delle confezioni di pasta riempite da una macchina ha distribuzione $N(250; 4)$ (dati inventati); sull'etichetta è dichiarato un peso di 245 g. a) Quale frazione delle confezioni pesa meno di 245 g? b) Calcola la probabilità che una confezione pesi fra 246 e 258 g. c) Quale peso è superato soltanto dal 5% delle confezioni?

Quesiti

9. ●● *(1 punto · cap. 15–16)* Si lancia n volte una moneta equilibrata e si indica con F_n la frequenza relativa delle teste. a) Usando la disuguaglianza di Čebyšev, determina quanti lanci bastano per garantire che $p(|F_n - 0{,}5| < 0{,}02) \ge 0{,}95$. b) Usando invece l'approssimazione normale (senza correzione di continuità), stima il numero di lanci sufficiente per la stessa condizione. c) Spiega perché i due risultati sono così diversi.

10. ●● *(1 punto · cap. 16)* Si lancia 180 volte un dado equilibrato e si indica con X il numero di volte in cui esce il 6. a) Verifica che si può approssimare la distribuzione di X con una normale e indica i parametri della normale. b) Stima, con la correzione di continuità, $p(X \ge 35)$ e $p(X \le 25)$. c) Le due stime coincidono: perché? Ti aspetti che coincidano anche i valori esatti?

11. ●● *(1 punto · cap. 15)* **Dimostrazione.** Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori x_1, …, x_n con probabilità p_1, …, p_n, con valore atteso μ e deviazione standard $\sigma > 0$, e siano a e b numeri reali. Dimostra, a partire dalle definizioni, che $\mathrm{E}(aX + b) = a\mu + b$ e che $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$. Deduci che la variabile standardizzata $Z = (X - \mu)/\sigma$ ha valore atteso 0 e varianza 1.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 15–16)* La durata T (in ore) di una lampadina ha distribuzione esponenziale con valore atteso 1000 ore (dati inventati). a) Calcola la probabilità che una lampadina funzioni ancora dopo 500 ore. b) Un lampadario monta 6 lampadine di questo tipo, che si guastano indipendentemente l'una dall'altra. Calcola la probabilità che dopo 500 ore ne funzionino ancora almeno 5. c) Sia M il tempo fino al primo guasto fra le 6 lampadine. Dimostra che $p(M > t) = e^{-6t/1000}$ per $t \geq 0$, deduci la distribuzione di M e calcolane il valore atteso.

Soluzioni

1. C. $\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2 = 13 - 4 = 9$, quindi $\sigma(X) = 3$. Per la proprietà $\text{Var}(aX + b) = a^2\,\text{Var}(X)$ si ha $\text{Var}(5 - 3X) = 9 \cdot 9 = 81$ e $\sigma(5 - 3X) = |-3| \cdot 3 = 9$. (81 è la varianza; una deviazione standard non è mai negativa.)

2. A. Per una variabile di Poisson $p(X = 0) = e^{-\lambda}$; da $e^{-\lambda} = 0{,}25$ si ricava $\lambda = -\ln 0{,}25 = \ln 4 \approx 1{,}386$, e $\text{E}(X) = \lambda = \ln 4 \approx 1{,}39$ chiamate al minuto.

3. D. I flessi della densità normale sono in $\mu \pm \sigma$: $\mu - \sigma = 7$ e $\mu + \sigma = 13$ danno $\mu = 10$ e $\sigma = 3$. Allora $Z = (16 - 10)/3 = 2$ e $p(X > 16) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$.

4. B. Per l'esponenziale di parametro λ la mediana è $\ln 2/\lambda$: da $\ln 2/\lambda = 10$ si ha $\lambda = \ln 2/10 \approx 0{,}0693$ e $\text{E}(T) = 1/\lambda = 10/\ln 2 \approx 14{,}4$ minuti. ($6{,}9 = 10 \cdot \ln 2$ nasce dall'aver invertito il rapporto.) La media supera la mediana per la lunga coda a destra della densità.

5. a) G vale $a - 3$ con probabilità $\frac{1}{6}$, $4 - 3 = 1$ con probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, -3 con probabilità $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Il gioco è equo se $\text{E}(G) = 0$: $(a - 3) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0$, cioè $a - 3 + 2 - 9 = 0$, $a = 10$ €. b) Con $a = 10$: $p(G = -3) = \frac{1}{2}$, $p(G = 1) = \frac{1}{3}$, $p(G = 7) = \frac{1}{6}$ (somma 1). Funzione di ripartizione: $F(x) = 0$ per $x < -3$; $\frac{1}{2}$ per $-3 \le x < 1$; $\frac{5}{6}$ per $1 \le x < 7$; 1 per $x \ge 7$. Quindi $p(G > 0) = 1 - F(0) = \frac{1}{2}$. c) $\text{E}(G^2) = 9 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{1}{6} = \frac{78}{6} = 13$; poiché $\text{E}(G) = 0$, $\text{Var}(G) = 13$ e $\sigma(G) = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ €.

6. a) X conta i successi («componente difettoso») in 100 prove indipendenti con la stessa probabilità 0,03: $X \sim \text{B}(100;\, 0{,}03)$, con $\text{E}(X) = 100 \cdot 0{,}03 = 3$ e $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} = \sqrt{2{,}91} \approx 1{,}71$. b) $p(X = 0) = 0{,}97^{100} \approx 0{,}0476$; $p(X = 1) = 100 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{99} \approx 0{,}1471$; $p(X = 2) = \text{C}_{100,2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{98} = 4950 \cdot 0{,}0009 \cdot 0{,}97^{98} \approx 0{,}2252$. Quindi $p(X \le 2) \approx 0{,}4198$. c) n è grande e p è piccolo: si usa la Poisson con $\lambda = np = 3$: $p(X \le 2) \approx e^{-3}(1 + 3 + \frac{3^2}{2}) = 8{,}5\, e^{-3} \approx 0{,}4232$. La differenza è di circa 3 millesimi (meno dell'1% del valore).

7. a) Per $k > 0$ si ha $f \ge 0$ su $[0;\, 3]$. $\int_0^3 x(3 - x)\,\text{d}x = [\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$, quindi $k \cdot \frac{9}{2} = 1$ e $k = \frac{2}{9}$. b) Per $0 \le x \le 3$: $F(x) = \frac{2}{9}(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}) = \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}$; $F(x) = 0$ per $x < 0$ e $F(x) = 1$ per $x > 3$. Allora $p(X \le 1) = F(1) = \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{7}{27} \approx 0{,}2593$. c) $\text{E}(X) = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x^2 - x^3)\,\text{d}x = \frac{2}{9}(27 - \frac{81}{4}) = \frac{3}{2}$; $\text{E}(X^2) = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x^3 - x^4)\,\text{d}x = \frac{2}{9}(\frac{243}{4} - \frac{243}{5}) = \frac{27}{10}$; $\text{Var}(X) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20} = 0{,}45$. La densità è simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{3}{2}$, perché $f(3 - x) = f(x)$: la retta divide l'area sotto il grafico in due parti uguali, quindi la mediana è $\text{Me} = 1{,}5$, uguale alla media. (Controllo: $F(1{,}5) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$.)

8. Si standardizza con $z = (x - 250)/4$. a) $z = (245 - 250)/4 = -1{,}25$: $p(X < 245) = \Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$, circa il 10,6% delle confezioni. b) $z_1 = -1$, $z_2 = 2$: $\Phi(2) - \Phi(-1) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$. c) Si cerca z con $\Phi(z) = 0{,}95$: $z \approx 1{,}645$, quindi $x = 250 + 1{,}645 \cdot 4 \approx 256{,}6$ g.

9. a) $E(F_n) = 0{,}5$ e $\text{Var}(F_n) = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n} = \dfrac{1}{4n}$. Per Čebyšev $p(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}02) \leq \dfrac{1}{4n \cdot 0{,}02^2} = \dfrac{1}{0{,}0016n}$; la probabilità dell'evento contrario è almeno 0,95 se $\dfrac{1}{0{,}0016n} \leq 0{,}05$, cioè $n \geq 12\,500$. b) Per il teorema del limite centrale F_n è approssimativamente $N(0{,}5;\ 0{,}5/\sqrt{n})$, e $p(|F_n - 0{,}5| < 0{,}02) \approx 2\Phi(0{,}04\sqrt{n}) - 1$. Serve $\Phi(0{,}04\sqrt{n}) \geq 0{,}975$, cioè $0{,}04\sqrt{n} \geq 1{,}96$, $\sqrt{n} \geq 49$, $n \geq 2401$. c) La disuguaglianza di Čebyšev vale per ogni distribuzione con quella media e quella varianza, quindi deve tenere conto anche delle più sfavorevoli e dà una stima molto prudente; l'approssimazione normale usa la forma effettiva della distribuzione (circa 5 volte meno lanci).

10. a) $X \sim B(180;\ \dfrac{1}{6})$: $np = 30 \geq 5$ e $n(1-p) = 150 \geq 5$, quindi la regola pratica consente l'approssimazione con la normale di media 30 e deviazione standard $\sqrt{180 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6}} = \sqrt{25} = 5$, cioè $N(30;\ 5)$. b) $p(X \geq 35) \approx 1 - \Phi(\dfrac{34{,}5 - 30}{5}) = 1 - \Phi(0{,}9) = 1 - 0{,}8159 = 0{,}1841$; $p(X \leq 25) \approx \Phi(\dfrac{25{,}5 - 30}{5}) = \Phi(-0{,}9) = 0{,}1841$. c) I due intervalli $[34{,}5;\ +\infty[$ e $]-\infty;\ 25{,}5]$ sono simmetrici rispetto alla media 30, e la curva normale è simmetrica rispetto alla media. La binomiale con $\dfrac{1}{6}$ invece non è simmetrica (ha una coda più lunga verso destra), quindi i valori esatti sono vicini ma diversi: $p(X \geq 35) \approx 0{,}1828$ e $p(X \leq 25) \approx 0{,}1851$ (calcolati con un foglio di calcolo).

11. La variabile $aX + b$ assume il valore $ax_i + b$ con probabilità p_i, e $\Sigma\, p_i = 1$. Quindi $E(aX + b) = \Sigma\,(ax_i + b)p_i = a\,\Sigma\, x_i p_i + b\,\Sigma\, p_i = a\mu + b$. Lo scarto di $aX + b$ dalla sua media è $(ax_i + b) - (a\mu + b) = a(x_i - \mu)$, perciò, per la definizione di varianza, $\text{Var}(aX + b) = \Sigma\, a^2(x_i - \mu)^2 p_i = a^2\,\Sigma\,(x_i - \mu)^2 p_i = a^2\,\text{Var}(X)$. c.v.d. Per la variabile standardizzata si prende $a = 1/\sigma$ e $b = -\mu/\sigma$: $E(Z) = \mu/\sigma - \mu/\sigma = 0$ e $\text{Var}(Z) = (1/\sigma^2) \cdot \sigma^2 = 1$.

12. a) $\lambda = 1/1000$ guasti all'ora e $p(T > 500) = e^{-500/1000} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$. b) Il numero Y di lampadine ancora accese dopo 500 ore conta i successi in 6 prove indipendenti con probabilità $q = e^{-0{,}5}$: $Y \sim B(6;\ e^{-0{,}5})$. Allora $p(Y \geq 5) = 6q^5(1 - q) + q^6 = 6e^{-2{,}5}(1 - e^{-0{,}5}) + e^{-3} \approx 0{,}1938 + 0{,}0498 = 0{,}2436$. c) Il primo guasto arriva dopo l'istante t se e solo se tutte e 6 le lampadine funzionano ancora all'istante t; per l'indipendenza $p(M > t) = (e^{-t/1000})^6 = e^{-6t/1000}$. Quindi la funzione di ripartizione di M è $1 - e^{-6t/1000}$ per $t \geq 0$, quella di un'esponenziale di parametro 6/1000: $E(M) = 1000/6 \approx 166{,}7$ ore, un sesto della durata media di una lampadina.