Verifica di fine parte IV · Geometria analitica dello spazio e metodo assiomatico

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 13)* La retta r: $x = 2 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3t$ e il piano α: $3x + 3y - z + 1 = 0$:
   - **A.** sono incidenti, ma non perpendicolari
   - **B.** sono perpendicolari
   - **C.** sono paralleli: la retta non ha punti in comune con il piano
   - **D.** la retta è contenuta nel piano

2. ● *(0,5 punti · cap. 13)* La sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$ ha:
   - **A.** centro $(-3; 1; -2)$ e raggio 3
   - **B.** centro $(3; -1; 2)$ e raggio $\sqrt{19}$
   - **C.** centro $(3; -1; 2)$ e raggio 9
   - **D.** centro $(3; -1; 2)$ e raggio 3

3. ● *(0,5 punti · cap. 14)* Per dimostrare che un assioma A di un sistema di assiomi non è conseguenza degli altri assiomi del sistema basta:
   - **A.** ricavare A dagli altri assiomi con una dimostrazione
   - **B.** esibire un modello in cui gli altri assiomi sono veri e A è falso
   - **C.** verificare che A è vero nel piano euclideo
   - **D.** osservare che A non è un enunciato evidente

4. ● *(0,5 punti · cap. 14)* In un piano iperbolico con $k = 1$ (l'area di un triangolo è il suo difetto in radianti) un triangolo ha area $\frac{\pi}{4}$. I suoi angoli possono essere:
   - **A.** 45°, 45°, 45°
   - **B.** 90°, 45°, 45°
   - **C.** 30°, 30°, 30°
   - **D.** 75°, 60°, 90°

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 13)* Sono dati i punti $A(2; 1; 0)$, $B(4; -1; 1)$, $C(3; 3; 2)$ e $D(0; 0; 2)$. a) Verifica che il triangolo ABC è rettangolo isoscele in A e calcolane l'area con il prodotto vettoriale. b) Scrivi l'equazione del piano α che passa per A, B, C e la sua equazione segmentaria. c) Calcola la distanza di D da α, trova il piede H della perpendicolare condotta da D ad α e calcola il volume del tetraedro $ABCD$.

6. ●● *(1 punto · cap. 13)* La retta r ha equazioni cartesiane $x - y + z - 1 = 0$, $2x + y - z - 5 = 0$. a) Scrivi le equazioni parametriche di r. b) Trova il punto in cui r incontra il piano γ: $x + y + 2z - 9 = 0$ e l'angolo fra r e γ. c) Calcola la distanza del punto $P(3; 4; -1)$ da r e trova il piede della perpendicolare condotta da P a r.

7. ●● *(1 punto · cap. 13)* È data la sfera S: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$. a) Determina il centro e il raggio di S. b) Verifica che il punto $T(3; -3; 5)$ appartiene a S e scrivi l'equazione del piano tangente a S in T. c) Verifica che il piano β: $2x + 2y - z + 4 = 0$ è secante e determina il centro e il raggio della circonferenza secondo cui taglia S.

8. ●● *(1 punto · cap. 14)* a) Su una sfera di raggio 6 cm calcola l'area di un fuso di angolo 40° e la frazione della superficie sferica che esso occupa. b) Verifica che la circonferenza $4x^2 + 4y^2 - 17x + 4 = 0$ rappresenta una retta del disco di Poincaré di centro O e raggio 1; trova i suoi punti all'infinito e il punto in cui taglia il diametro orizzontale. c) In un piano iperbolico con $k = 1$ un quadrilatero di Saccheri ha gli angoli alla base retti e gli angoli alla sommità di 70°. Dividilo con una diagonale in due triangoli: osserva che gli angoli dei due triangoli, insieme, formano esattamente gli angoli del quadrilatero, e calcola l'area del quadrilatero come somma delle aree dei due triangoli.

Quesiti

9. ●● *(1 punto · cap. 13)* Al variare del parametro reale k sono date le rette r: $(1 + t; -1 + 2t; t)$ e s_k: $(k + u; 1 - u; 1 + u)$. Determina il valore di k per cui le due rette sono incidenti, il loro punto comune e l'equazione del piano che le contiene. Dimostra che per tutti gli altri valori di k le rette sono sghembe, esprimi la loro distanza in funzione di k e trova i valori di k per cui la distanza vale $3\sqrt{2}$.

10. ●● *(1 punto · cap. 13, 14)* Considera la Terra come una sfera di centro O e raggio $R = 6371$ km, con l'asse z verso il polo nord N e l'asse x verso il meridiano di longitudine 0°: il punto di latitudine φ e longitudine λ ha coordinate $R(\cos\varphi\cos\lambda; \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda; \mathrm{sen}\,\varphi)$. Due località immaginarie sono A, sull'equatore a longitudine 0°, e B, a latitudine 60° nord e longitudine 90° est. a) Calcola la lunghezza della rotta più breve da A a B. b) Determina gli angoli del triangolo sferico NAB. *Suggerimento*: l'angolo in un vertice è l'angolo fra le tangenti ai due lati in quel vertice; poiché **OA** è perpendicolare sia a **OB** sia a **ON**, in A le tangenti ai lati AB e AN hanno le direzioni di **OB** e di **ON**. c) Calcola la sua area con il teorema di Girard e la frazione della superficie terrestre che esso occupa.

11. ●● *(1 punto · cap. 14)* Enuncia e dimostra il teorema di Girard sull'area di un triangolo sferico, assumendo noto che un fuso di angolo α (in radianti) su una sfera di raggio R ha area $2\alpha R^2$. Le facce di un tetraedro regolare inscritto in una sfera, proiettate dal centro, dividono la superficie in quattro triangoli sferici congruenti, e in ogni vertice del tetraedro ne concorrono tre: deduci gli angoli e l'area di ciascun triangolo e verifica che il risultato è coerente con l'area della sfera.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 13)* Sono dati la sfera S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e, al variare del parametro reale h, la retta r_h: $(t;\, 0;\, h - t)$. a) Per $h = 6$ verifica che la retta è esterna alla sfera, scrivi le equazioni dei piani che contengono r_6 e sono tangenti a S, e trova i punti di tangenza. b) Stabilisci, al variare di h, quanti piani tangenti a S contengono r_h. c) Verifica che per $h = 6$ i due piani tangenti sono perpendicolari e trova tutti i valori di h per cui ciò accade.

Soluzioni

1. C. Il vettore direzione della retta è $\mathbf{v} = (-1; 2; 3)$, il vettore normale del piano è $\mathbf{n} = (3; 3; -1)$: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -3 + 6 - 3 = 0$, quindi la retta è parallela al piano o contenuta in esso. Il punto (2; 1; 0) della retta (per $t = 0$) dà $6 + 3 - 0 + 1 = 10 \neq 0$: non sta sul piano, e la retta è parallela ad α senza punti in comune. La B scambia le condizioni: la retta sarebbe perpendicolare se $\mathbf{v}$ fosse parallelo a $\mathbf{n}$; la A ignora che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$; la D non controlla il punto.

2. D. Con $a = -6$, $b = 2$, $c = -4$, $d = 5$ il centro è $(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}) = (3; -1; 2)$ e $r^2 = \frac{36 + 4 + 16}{4} - 5 = 14 - 5 = 9$, quindi $r = 3$. La A sbaglia il segno delle coordinate del centro; la B somma d invece di sottrarlo ($14 + 5 = 19$); la C dà r^2 al posto di r.

3. B. Se in un modello gli altri assiomi sono veri e A è falso, A non può essere dedotto da essi: un teorema è vero in ogni modello degli assiomi da cui è dimostrato. È il metodo con cui il disco di Poincaré prova l'indipendenza del quinto postulato. La A dimostrerebbe il contrario; la C non basta, perché la verità in un modello non esclude la dimostrabilità; la D confonde l'evidenza (concezione classica) con la dimostrabilità.

4. A. Con $k = 1$ l'area è il difetto, quindi $\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\pi}{4}$: la somma degli angoli deve essere $\frac{3\pi}{4} = 135°$, ed è il caso della A. La B ha somma 180° (difetto nullo: un triangolo euclideo, impossibile nel piano iperbolico); la C ha somma 90° e area $\frac{\pi}{2}$; la D ha somma 225°, maggiore di 180°: un eccesso di 45°, che darebbe area $\frac{\pi}{4}R^2$ su una sfera, non nel piano iperbolico.

5. a) $\mathbf{AB} = (2; -2; 1)$, $\mathbf{AC} = (1; 2; 2)$: $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} = 2 - 4 + 2 = 0$, quindi l'angolo in A è retto, e $AB = AC = \sqrt{9} = 3$: il triangolo è rettangolo isoscele. $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (-4 - 2; 1 - 4; 4 + 2) = (-6; -3; 6)$, di modulo $\sqrt{81} = 9$, e l'area è $\frac{9}{2}$ (come $\frac{3 \cdot 3}{2}$). b) Un vettore normale è $\mathbf{n} = (2; 1; -2)$ (opposto di $\frac{1}{3}\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$): $2(x - 2) + (y - 1) - 2z = 0$, cioè α: $2x + y - 2z - 5 = 0$. Controllo: B dà $8 - 1 - 2 - 5 = 0$, C dà $6 + 3 - 4 - 5 = 0$. Le intercette sono $x = \frac{5}{2}$, $y = 5$, $z = -\frac{5}{2}$, e l'equazione segmentaria è $\frac{x}{5/2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5/2} = 1$. c) $d(D, \alpha) = \frac{|0 + 0 - 4 - 5|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$. Il piede è $H = D + t\mathbf{n}$ con $2(2t) + t - 2(2 - 2t) - 5 = 0$, cioè $9t - 9 = 0$, $t = 1$: $H = (2; 1; 0) = A$. Dunque DA è perpendicolare al piano α, e $DA = 3$: gli spigoli AB, AC, AD sono a due a due perpendicolari e lunghi 3, come in un vertice di un cubo. Il volume è $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Controllo con il prodotto misto: $\mathbf{AD} = (-2; -1; 2)$, $(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} = 12 + 3 + 12 = 27$, $V = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

6. a) Un vettore direzione è il prodotto vettoriale delle normali: $(1; -1; 1) \times (2; 1; -1) = (1 - 1; 2 + 1; 1 + 2) = (0; 3; 3)$, cioè $\mathbf{v} = (0; 1; 1)$. Sommando le due equazioni si ha $3x - 6 = 0$, $x = 2$; con $z = 0$ la prima dà $y = 1$. Quindi r: $x = 2$, $y = 1 + t$, $z = t$ (altre forme sono equivalenti: si può cambiare il punto e moltiplicare $\mathbf{v}$ per un numero non nullo). Sostituendo, le due equazioni diventano identità. b) $2 + (1 + t) + 2t - 9 = 0$ dà $3t = 6$, $t = 2$: il punto è (2; 3; 2). Con $\mathbf{n} = (1; 1; 2)$, $\operatorname{sen} \varphi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $\varphi = 60°$. c) Con $P_0(2; 1; 0)$, $\mathbf{P_0P} = (1; 3; -1)$ e $t = \frac{\mathbf{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{2}{2} = 1$: il piede è $H(2; 2; 1)$, $\mathbf{HP} = (1; 2; -2)$ (perpendicolare a $\mathbf{v}$: $0 + 2 - 2 = 0$) e $d(P, r) = \sqrt{9} = 3$. Controllo: $|\mathbf{P_0P} \times \mathbf{v}| / |\mathbf{v}| = |(4; -1; 1)| / \sqrt{2} = \sqrt{18} / \sqrt{2} = 3$.

7. a) Centro $C(2; -1; 3)$, $r^2 = 4 + 1 + 9 - 5 = 9$, raggio 3. b) $9 + 9 + 25 - 12 - 6 - 30 + 5 = 0$: T appartiene a S. Il raggio **CT** $= (1; -2; 2)$ è normale al piano tangente: $(x - 3) - 2(y + 3) + 2(z - 5) = 0$, cioè $x - 2y + 2z - 19 = 0$. Controllo: $d(C) = \dfrac{|2 + 2 + 6 - 19|}{3} = 3 = r$. c) $d(C, \beta) = \dfrac{|4 - 2 - 3 + 4|}{\sqrt{9}} = 1 < 3$: β è secante. Il raggio della circonferenza è $\rho = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$; il centro è il piede della perpendicolare da C, $H = C + t(2; 2; -1)$ con $2(2 + 2t) + 2(-1 + 2t) - (3 - t) + 4 = 0$, cioè $9t + 3 = 0$, $t = -\dfrac{1}{3}$: $H(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}; \dfrac{10}{3})$.

8. a) $40°$ sono $\dfrac{2\pi}{9}$ rad: area $2 \cdot \dfrac{2\pi}{9} \cdot 36 = 16\pi \approx 50{,}27$ cm^2, cioè $\dfrac{40}{360} = \dfrac{1}{9}$ della superficie sferica (144π cm^2). b) Dividendo per 4: $x^2 + y^2 - \dfrac{17}{4}x + 1 = 0$. Centro $C(\dfrac{17}{8}; 0)$, $\rho^2 = \dfrac{289}{64} - 1 = \dfrac{225}{64}$, $\rho = \dfrac{15}{8}$. Poiché $OC^2 = \dfrac{289}{64} = 1 + \dfrac{225}{64} = 1 + \rho^2$, la circonferenza è ortogonale al bordo: il suo arco interno al disco è una retta del modello. Sottraendo $x^2 + y^2 = 1$ si ha $2 - \dfrac{17}{4}x = 0$, $x = \dfrac{8}{17}$, $y = \pm\dfrac{15}{17}$: i punti all'infinito sono $(\dfrac{8}{17}; \pm\dfrac{15}{17})$. Con $y = 0$: $x^2 - \dfrac{17}{4}x + 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{4}$ oppure $x = 4$; solo $(\dfrac{1}{4}; 0)$ è interno al disco ($\dfrac{17}{8} - \dfrac{15}{8} = \dfrac{1}{4}$). c) La diagonale divide il quadrilatero (convesso) in due triangoli, e i due angoli tagliati dalla diagonale si dividono fra i triangoli: la somma degli angoli dei due triangoli è quella del quadrilatero, $90° + 90° + 70° + 70° = 320°$. L'area è la somma dei difetti: $2 \cdot 180° - 320° = 40° = \dfrac{2\pi}{9} \approx 0{,}698$.

9. Le direzioni $\mathbf{v}_1 = (1; 2; 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1; -1; 1)$ non sono parallele per nessun k, quindi le rette sono incidenti o sghembe. Il sistema $1 + t = k + u$, $-1 + 2t = 1 - u$, $t = 1 + u$: dalle ultime due $-1 + 2 + 2u = 1 - u$, $u = 0$, $t = 1$; la prima dà $k = 2$. Per $k = 2$ le rette sono incidenti in $(2; 1; 1)$; per $k \neq 2$ il sistema è impossibile e sono sghembe. Il piano che le contiene ha normale $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2 + 1; 1 - 1; -1 - 2) = (3; 0; -3)$, cioè $(1; 0; -1)$, e passa per $(2; 1; 1)$: $x - z - 1 = 0$. Distanza: con $P_1(1; -1; 0)$ e $P_2(k; 1; 1)$, $d = \dfrac{|\mathbf{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \dfrac{|(k - 1; 2; 1) \cdot (1; 0; -1)|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|k - 2|}{\sqrt{2}}$ (nulla, giustamente, per $k = 2$). $\dfrac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |k - 2| = 6 \Leftrightarrow k = 8$ oppure $k = -4$. (Tutte le rette s_k sono parallele al piano $x - z - 1 = 0$, che contiene r: la distanza è anche quella di P_2 da quel piano.)

10. Lavoriamo con i vettori unitari $\mathbf{a} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{b} = (0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathbf{n} = (0; 0; 1)$, con $A = R\mathbf{a}$, $B = R\mathbf{b}$, $N = R\mathbf{n}$. a) $\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$: $\theta = 90°$, e la rotta più breve, un arco di circonferenza massima, misura $\dfrac{\pi R}{2} \approx 10\,008$ km. b) L'angolo in un vertice è il diedro fra i piani dei due lati. In N i lati stanno sui piani dei meridiani $y = 0$ e $x = 0$: l'angolo è la differenza di longitudine, $90°$. Il piano OAB ha normale $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2})$, perpendicolare a $(1; 0; 0)$, normale del piano $x = 0$ del lato NB: l'angolo in B è retto. In A, come nel suggerimento, le tangenti ai lati AN e AB hanno le direzioni di $\mathbf{n}$ e di $\mathbf{b}$ (entrambi perpendicolari ad $\mathbf{a}$), e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: l'angolo in A è $30°$, il complementare della latitudine di B. (Con i diedri si troverebbe $|(0; 1; 0) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, che da solo non distingue $30°$ da $150°$: per questo servono le tangenti.) Gli angoli sono $90°$ in N, $30°$ in A, $90°$ in B. c) Eccesso $90° + 30° + 90° - 180° = 30° = \dfrac{\pi}{6}$: $S = \dfrac{\pi R^2}{6} \approx 2{,}13 \cdot 10^7$ km^2, cioè $\dfrac{\pi/6}{4\pi} = \dfrac{1}{24}$ della superficie terrestre.

11. Teorema di Girard. Ipotesi: ABC è un triangolo sferico di angoli α, β, γ (in radianti) su una sfera di raggio R. Tesi: la sua area è $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Dimostrazione. Prolunghiamo i lati in tre circonferenze massime complete; siano A', B', C' gli antipodi di A, B, C. Le due circonferenze per A si incontrano in A e in A' e formano due fusi opposti di angolo α, uno che contiene ABC e uno che contiene $A'B'C'$, di area complessiva $4\alpha R^2$; lo stesso vale per B e per C. I sei fusi ricoprono la sfera; i punti dei triangoli ABC e

$A'B'C'$ stanno in tre fusi, tutti gli altri in uno solo (a parte i bordi, di area nulla). Poiché $A'B'C'$ è il simmetrico di ABC rispetto al centro, ha la stessa area S, e $4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4S$, cioè la tesi. c.v.d. Applicazione. I lati dei quattro triangoli sono archi di circonferenza massima, perché ognuno sta nel piano che passa per il centro e per due vertici del tetraedro. In ogni vertice concorrono tre triangoli congruenti, i cui angoli ricoprono un angolo giro; per la simmetria del tetraedro regolare ogni triangolo è equilatero, quindi ogni angolo misura $\frac{2\pi}{3}$ ($120°$). L'area di ciascuno è $R^2(3 \cdot \frac{2\pi}{3} - \pi) = \pi R^2$, e i quattro insieme hanno area $4\pi R^2$: proprio la superficie della sfera, come deve essere.

12. a) Il punto di r_6 più vicino a O si ha per $(t; 0; 6 - t) \cdot (1; 0; -1) = 2t - 6 = 0$, $t = 3$: è $(3; 0; 3)$, a distanza $3\sqrt{2} > 3$: la retta è esterna. Un piano che contiene r_6 ha normale $(a; b; c)$ perpendicolare a $(1; 0; -1)$, cioè $c = a$, e passa per $(0; 0; 6)$: $ax + by + az - 6a = 0$. Per $a = 0$ è il piano $y = 0$, che passa per il centro e non è tangente; per $a = 1$: $x + by + z - 6 = 0$. È tangente se $\frac{6}{\sqrt{2 + b^2}} = 3$, cioè $b^2 = 2$: i piani sono $x + \sqrt{2}\,y + z - 6 = 0$ e $x - \sqrt{2}\,y + z - 6 = 0$. Il punto di tangenza è il piede della perpendicolare da O, $T = t(1; \pm\sqrt{2}; 1)$ con $4t = 6$: $T(\frac{3}{2}; \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2})$ (infatti $\frac{9}{4} + \frac{18}{4} + \frac{9}{4} = 9$). b) La distanza di r_h da O è $\frac{|h|}{\sqrt{2}}$ (piede $(\frac{h}{2}; 0; \frac{h}{2})$). Con lo stesso procedimento i piani sono $x + by + z - h = 0$ con $\frac{h^2}{2 + b^2} = 9$, cioè $b^2 = \frac{h^2 - 18}{9}$. Se $|h| > 3\sqrt{2}$ (retta esterna) ci sono due piani tangenti; se $|h| = 3\sqrt{2}$ (retta tangente alla sfera) uno solo, $x + z - h = 0$; se $|h| < 3\sqrt{2}$ (retta secante) nessuno. c) Le normali $(1; \sqrt{2}; 1)$ e $(1; -\sqrt{2}; 1)$ hanno prodotto scalare $1 - 2 + 1 = 0$: i piani sono perpendicolari. In generale le normali $(1; \pm b; 1)$ hanno prodotto scalare $2 - b^2$, nullo se $b^2 = 2$, cioè $h^2 - 18 = 18$: $h = \pm 6$. Geometricamente, i due piani tangenti sono perpendicolari quando la retta dista dal centro $3\sqrt{2}$, cioè $\sqrt{2}$ volte il raggio: la sezione con il piano per O perpendicolare alla retta mostra un cerchio e due tangenti perpendicolari, che formano con i raggi un quadrato di lato 3.