Matematica 5 · Parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 361–362 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 9)* Quale delle seguenti funzioni è una primitiva di $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ in $\mathbb{R}$?

   A. $\ln(1 + x^2)$

   B. $\arctan x$

   C. $\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + 3$

   D. $\dfrac{x^2}{2(x + x^3/3)}$

2. ● *(0,5 punti · cap. 10)* Sia $G(x) = \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt$. Il valore di $G'(1)$ è:

   A. $\dfrac{1}{e}$

   B. $\dfrac{3}{e}$

   C. $3e$

   D. 0

3. ● *(0,5 punti · cap. 11)* Il trapezoide della funzione $y = \dfrac{1}{x}$ sull'intervallo $[1; +\infty[$ ruota attorno all'asse x. Il solido illimitato che si ottiene ha volume:

   A. π

   B. $+\infty$, perché il trapezoide ha area infinita

   C. 2π

   D. $\dfrac{\pi}{2}$

4. ● *(0,5 punti · cap. 12)* L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 6y' + 9y = 0$ è:

   A. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$

   B. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$

   C. $y = c\,e^{-3x}$

   D. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 9)* Calcola gli integrali indefiniti. a) $\int x^2 \ln x \, dx$; b) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5} \, dx$; c) $\int \frac{x+5}{x^2-x-2} \, dx$.

6. ●● *(1 punto · cap. 10)* a) Calcola l'area della regione finita delimitata dalla parabola $y = 4 - x^2$ e dalla retta $y = x + 2$. b) Calcola il valore medio della funzione $f(x) = \text{sen } x$ sull'intervallo $[0; \pi]$ e determina i punti c in cui la funzione lo assume. c) Calcola $\int_{-2}^{2} (x^3 \cos x + 3x^2) \, dx$, motivando il calcolo della prima parte senza cercarne una primitiva.

7. ●● *(1 punto · cap. 11)* a) Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione delimitata dai grafici di $y = x$ e $y = x^2$. b) Stabilisci se converge l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} \, dx$ e, in caso affermativo, calcolalo. c) Una molla ha costante elastica $k = 200$ N/m. Calcola il lavoro necessario per allungarla da 10 cm a 30 cm rispetto alla posizione di riposo.

8. ●● *(1 punto · cap. 12)* Risolvi i problemi di Cauchy. a) $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$, indicando l'intervallo su cui è definita la soluzione; b) $y' + 2y = 4x$, $y(0) = 0$; c) $y'' + 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

Quesiti

9. ●● *(1 punto · cap. 10, 11)* La regione R è delimitata dal grafico di $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. a) Determina il valore di a per cui la retta $x = a$ divide R in due parti di uguale area. b) La regione R ruota attorno all'asse x: per quale valore di b il piano $x = b$ divide il solido in due parti di uguale volume? Spiega perché a e b sono diversi.

10. ●● *(1 punto · cap. 12)* Una coltura di batteri (dati inventati) cresce secondo il modello logistico $y' = 0{,}2\, y\left(1 - \frac{y}{5000}\right)$, dove $y(t)$ è il numero di batteri e t il tempo in ore; all'istante iniziale i batteri sono 500. a) Verifica che $y(t) = \frac{5000}{1 + 9e^{-0{,}2t}}$ è la soluzione del problema. b) Determina l'istante in cui la velocità di crescita è massima e il valore di questa velocità. c) Dopo quanto tempo i batteri sono 4000?

11. ●● *(1 punto · cap. 10)* Enuncia e dimostra il teorema fondamentale del calcolo integrale (puoi usare il teorema della media integrale senza dimostrarlo). Usalo poi per determinare una funzione continua f e i valori della costante a per cui $\int_a^x f(t) \, dt = x^2 - 4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 10, 11, 12)* La funzione f, continua in $\mathbb{R}$, soddisfa per ogni x la relazione $f(x) = 1 - \int_0^x 2t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. a) Dimostra che f è derivabile, che è soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine, e determinala. b) La regione illimitata compresa fra il grafico di $f(x) = e^{-x^2}$, per $x \geq 0$, e il semiasse positivo delle x ruota attorno all'asse y. Calcola il volume del solido con il metodo dei gusci cilindrici, $V = 2\pi \int x\,f(x)\,\mathrm{d}x$. c) Applica al problema di Cauchy del punto a) il metodo di Eulero con passo $h = 0{,}25$ per approssimare $f(1)$. Mostra che ogni passo moltiplica il valore precedente per il fattore $1 - 2hx_n$, e confronta il risultato con il valore esatto, calcolando l'errore relativo.

Soluzioni

1. C. La derivata di $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+3$ è $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}$: è la forma generalizzata $\int\frac{f'}{f}\,dx=\ln|f|+c$ con il fattore $\frac{1}{2}$ che corregge la derivata del denominatore (il valore assoluto si omette perché $1+x^2>0$). La A ha derivata doppia; la B è la primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$; la D divide le primitive di numeratore e denominatore, che non è una regola di integrazione.

2. B. Posto $H(u)=\int_0^u e^{-t^2}\,dt$, si ha $G(x)=H(x^3)$; per il teorema fondamentale e la regola della funzione composta $G'(x)=e^{-x^6}\cdot 3x^2$, quindi $G'(1)=3e^{-1}=\frac{3}{e}\approx 1{,}10$. La A dimentica il fattore $3x^2$; la C sbaglia il segno dell'esponente; la D confonde $G'(1)$ con $G(0)$.

3. A. $V=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\pi\lim_{b\to+\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b$ $=\pi\lim_{b\to+\infty}(1-\frac{1}{b})=\pi$: l'integrale di $\frac{1}{x^p}$ su $[1;+\infty[$ converge per $p=2>1$. La B è l'errore tipico: l'area $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge ($p=1$), ma il volume dipende dal quadrato del raggio, che tende a 0 più rapidamente. La C e la D sbagliano il calcolo dell'integrale.

4. D. L'equazione caratteristica $\lambda^2+6\lambda+9=0$, cioè $(\lambda+3)^2=0$, ha $\Delta=0$ e la radice doppia $\lambda=-3$: le soluzioni e^{-3x} e xe^{-3x} danno $y=(c_1+c_2x)e^{-3x}$. La A corrisponde a $\lambda=\pm 3$ ($y''-9y=0$), la B a $\lambda=\pm 3i$ ($y''+9y=0$); la C ha una sola costante, e un'equazione del secondo ordine ne richiede due.

5. a) Per parti, con fattore finito $\ln x$ e fattore differenziale $x^2\,dx$: $\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$ $=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$. b) Il denominatore ha $\Delta=4-20=-16<0$ e derivata $2x+2$; si scrive $2x+3=(2x+2)+1$ e si completa il quadrato, $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$:
$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx+\int\frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx$
$=\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c$ (il denominatore è sempre positivo: niente valore assoluto). c) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, $\Delta=9>0$. Da $\frac{x+5}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$ si ha $x+5=A(x+1)+B(x-2)$; per $x=2$: $7=3A$, per $x=-1$: $4=-3B$. Quindi $A=\frac{7}{3}$, $B=-\frac{4}{3}$ e l'integrale è $\frac{7}{3}\ln|x-2|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+c$. Ogni risultato si controlla derivando.

6. a) Le intersezioni: $4-x^2=x+2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ o $x=1$. In $]-2;1[$ la parabola sta sopra la retta (per $x=0$: $4>2$), quindi $A=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx=$ $[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_{-2}^{1}=\frac{7}{6}-(-\frac{10}{3})=\frac{9}{2}$. b) $\mu=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=\frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}637$. La funzione è continua su $[0;\pi]$, e per il teorema della media assume questo valore: $\operatorname{sen}c=\frac{2}{\pi}$ ha in $[0;\pi]$ le due soluzioni $c=\arcsin\frac{2}{\pi}\approx 0{,}690$ e $c=\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}\approx 2{,}451$. c) La funzione $x^3\cos x$ è dispari (prodotto di una dispari e di una pari) e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0: il suo integrale è 0, perché le aree con segno a sinistra e a destra si compensano. Resta $\int_{-2}^{2}3x^2\,dx=[x^3]_{-2}^{2}=8-(-8)=16$.

7. a) Le curve si incontrano in $x=0$ e $x=1$; in $]0;1[$ è $x^2<x$. Ogni sezione è una corona circolare (rondella) di raggi x e x^2:
$V=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx=\pi(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2\pi}{15}\approx 0{,}419$.
(Non $\pi\int(x-x^2)^2\,dx$: si sottraggono i quadrati dei raggi, non si eleva al quadrato la differenza.) b) $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, quindi $\int_1^b\frac{1}{x(x+1)}\,dx=$

$[\ln \frac{x}{x+1}]_1^b = \ln \frac{b}{b+1} + \ln 2$. Per $b \to +\infty$ la frazione tende a 1 e il logaritmo a 0: l'integrale converge e vale $\ln 2 \approx 0{,}693$. (Lo si poteva prevedere: per $x \geq 1$ l'integranda è minore di $\frac{1}{x^2}$.) c) $W = \int_{0,1}^{0,3} 200x\,dx = [100x^2]_{0,1}^{0,3} = 100 \cdot (0{,}09 - 0{,}01) = 8$ J: nel piano F–x è l'area di un trapezio di basi 20 N e 60 N e altezza 0,2 m.

8. a) Equazione a variabili separabili. La soluzione costante $y = 0$ non soddisfa $y(0) = 1$; per $y \neq 0$: $\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$, $-\frac{1}{y} = x^2 + c$. Da $y(0) = 1$: $c = -1$, quindi $y = \frac{1}{1 - x^2}$. La soluzione è definita sull'intervallo $]-1; 1[$, il più ampio che contiene $x_0 = 0$ e su cui la funzione è continua. Verifica: $y' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2} = 2xy^2$.
b) Lineare a coefficienti costanti: l'omogenea dà Ce^{-2x}; una soluzione particolare di primo grado $y = px + q$ richiede $p + 2px + 2q = 4x$, cioè $p = 2$, $q = -1$. (Con il fattore integrante: $y = e^{-2x}[\int 4xe^{2x}\,dx + c]$, stesso risultato.) Integrale generale $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$; da $y(0) = 0$: $C = 1$, $y = e^{-2x} + 2x - 1$. c) $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$, $\Delta = 4 - 40 = -36$, $\lambda = -1 \pm 3i$:
$y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$. $y(0) = c_1 = 0$; allora $y' = c_2e^{-x}(3 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$ e $y'(0) = 3c_2 = 6$, $c_2 = 2$. La soluzione è $y = 2e^{-x} \operatorname{sen} 3x$, un'oscillazione smorzata.

9. L'area di R è $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = [\frac{2}{3}x\sqrt{x}]_0^4 = \frac{16}{3}$. a) Si chiede $0 < a < 4$ con $\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{8}{3} : \frac{2}{3}$, $a^{3/2} = 4$, $a = 4^{2/3} = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}52$. b) Con il metodo dei dischi il volume è $\pi\int_0^4 x\,dx = 8\pi$, e $\pi\int_0^b x\,dx = \frac{\pi b^2}{2} = 4\pi$ dà $b^2 = 8$, $b = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. I due valori sono diversi perché le aree si ottengono integrando le ordinate $\sqrt{x}$, i volumi le aree dei cerchi πx, proporzionali ai *quadrati* delle ordinate: le sezioni più lontane dall'origine pesano di più nel volume che nell'area, e il piano che dimezza il volume sta più a destra. (Il piano $x = 2\sqrt[3]{2}$ lascia a sinistra solo $2\sqrt[3]{4}\,\pi \approx 3{,}17\pi$, circa il 40% del volume.)

10. a) $y(0) = \frac{5000}{10} = 500$. Derivando: $y' = \frac{5000 \cdot 1{,}8e^{-0,2t}}{(1 + 9e^{-0,2t})^2}$; d'altra parte $1 - \frac{y}{5000} = \frac{9e^{-0,2t}}{1 + 9e^{-0,2t}}$, quindi $0{,}2y(1 - \frac{y}{5000}) = 0{,}2 \cdot \frac{5000 \cdot 9e^{-0,2t}}{(1 + 9e^{-0,2t})^2}$, che coincide con y' ($0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8$). Per il teorema di esistenza e unicità, è *la* soluzione. b) La velocità di crescita $y' = 0{,}2y(1 - \frac{y}{5000})$, come funzione di y, è una parabola con massimo in $y = 2500$, cioè metà della capacità portante: lì la curva ha il flesso.
$\frac{5000}{1 + 9e^{-0,2t}} = 2500 \Leftrightarrow 9e^{-0,2t} = 1 \Leftrightarrow$
$t = \frac{\ln 9}{0{,}2} = 5 \ln 9 \approx 11{,}0$ h; la velocità massima è $0{,}2 \cdot 2500 \cdot \frac{1}{2} = 250$ batteri all'ora. c)
$\frac{5000}{1 + 9e^{-0,2t}} = 4000 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-0,2t} = 1{,}25 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow$
$t = 5 \ln 36 \approx 17{,}9$ h.

11. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Ipotesi: f è continua sull'intervallo I, $a \in I$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Tesi: F è derivabile in ogni punto di I e $F'(x) = f(x)$. Dimostrazione. Siano $x \in I$ e $h \neq 0$ con $x + h \in I$. Per l'additività, $F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Per il teorema della media, applicato all'intervallo di estremi x e $x + h$, su cui f è continua, esiste c_h compreso fra x e $x + h$ tale che l'integrale vale $f(c_h) \cdot h$ (se $h < 0$ si scambiano gli estremi e i segni si compensano). Quindi $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h)$. Per $h \to 0$, $c_h \to x$ per il teorema del confronto, e per la continuità di f in x si ha $f(c_h) \to f(x)$. Il limite del rapporto incrementale esiste ed è $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. c.v.d. Applicazione. Se $\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 4$ per ogni x, derivando i due membri (teorema fondamentale) si ottiene $f(x) = 2x$. Inoltre, per $x = a$, il primo membro è 0: $a^2 - 4 = 0$, cioè $a = 2$ oppure $a = -2$. Viceversa, per entrambi i valori $\int_{\pm 2}^x 2t\,dt = x^2 - 4$: le soluzioni sono $f(x) = 2x$ con $a = \pm 2$.

12. a) La funzione $t \mapsto 2tf(t)$ è continua, quindi per il teorema fondamentale il secondo membro è derivabile: allora lo è anche f, e $f'(x) = -2xf(x)$. Per $x = 0$ l'integrale è nullo: $f(0) = 1$. Dunque f risolve il problema di Cauchy $y' = -2xy$, $y(0) = 1$: separando le variabili ($y = 0$ è soluzione costante, ma non soddisfa la condizione), $\ln|y| = -x^2 + c$, $y = Ce^{-x^2}$, e $C = 1$: $f(x) = e^{-x^2}$. Per l'unicità della soluzione del problema

di Cauchy non ce ne sono altre. (Verifica: $1 - \int_0^x 2te^{-t^2}\,dt = 1 + [e^{-t^2}]_0^x = e^{-x^2}$.) b) $V = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$. L'integranda ha la primitiva elementare $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ (forma $\int f' e^f$), anche se e^{-x^2} non ne ha; quindi $\int_0^b xe^{-x^2}\,dx = \frac{1 - e^{-b^2}}{2}$, che tende a $\frac{1}{2}$ per $b \to +\infty$. Il volume è finito: $V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$. c) Con $f(x; y) = -2xy$ la regola di Eulero è $y_{n+1} = y_n + h \cdot (-2x_n y_n) = y_n(1 - 2hx_n)$. Con $h = 0{,}25$ e $x_n = 0$; 0,25; 0,5; 0,75 i fattori sono 1; 0,875; 0,75; 0,625 (il primo vale 1 perché la tangente nell'origine è orizzontale), quindi $y_4 = 0{,}875 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}625 = \frac{105}{256} \approx 0{,}410$. Il valore esatto è $f(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$: l'errore è circa 0,042, cioè un errore relativo di circa l'11% per eccesso. Il metodo è del primo ordine: per ridurre l'errore occorre ridurre il passo.