Matematica 5 · Parte II · Calcolo differenziale · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte II · pagine 245–248 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte II · Calcolo differenziale

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La retta tangente al grafico di $f(x) = x\,e^{2x-2}$ nel suo punto di ascissa 1 ha equazione:

   A. $y = 2x - 1$
   B. $y = 3x - 3$
   C. $y = 3x - 2$
   D. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

2. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ vale:

   A. $\frac{1}{3}$
   B. $\frac{1}{6}$
   C. 0
   D. $-\frac{1}{3}$

3. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ha:

   A. un punto di massimo relativo
   B. un punto di minimo relativo
   C. un punto angoloso
   D. un flesso a tangente orizzontale

4. ● *(0,5 punti · cap. 8)* Si applica il metodo delle tangenti all'equazione $x^2 - 5 = 0$ a partire da $x_0 = 2$. Il valore x_1 è:

   A. 2,5
   B. 2,25
   C. 2,2
   D. 1,75

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 5)* a) Calcola la derivata di $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, definita per $-1 < x < 1$. b) Calcola la derivata di $g(x) = x^{\ln x}$, definita per $x > 0$. c) Con l'approssimazione lineare della funzione $y = \sqrt[3]{x}$ nel punto $x_0 = 8$, stima $\sqrt[3]{8{,}12}$; confronta il risultato con il valore della calcolatrice e indica l'errore commesso.

6. ●● *(1 punto · cap. 6)* Calcola i limiti, indicando ogni volta la forma indeterminata e controllando le ipotesi del teorema di de l'Hôpital. a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; b) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$; c) $\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$.

7. ●● *(1 punto · cap. 7)* Studia la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$: a) dominio, intersezioni con gli assi, segno, limiti agli estremi del dominio e asintoti; b) intervalli di monotonia ed estremi relativi; c) concavità ed eventuali flessi. Traccia infine il grafico.

8. ●● *(1 punto · cap. 8)* Nel piano cartesiano, con l'unità di misura di 1 cm, il rettangolo $ABCD$ ha il lato AB sull'asse x e i vertici C e D sulla parabola $y = 12 - x^2$, simmetrici rispetto all'asse y. a) Detta x l'ascissa del vertice C nel primo quadrante, esprimi l'area $S(x)$ del rettangolo, indica le limitazioni di x e determina il rettangolo di area massima. b) Il vertice C si muove sulla parabola in modo che la sua ascissa cresca di 0,5 cm al secondo. Con quale velocità varia l'area del rettangolo nell'istante in cui $x = 1$? E quando $x = 2$?

Quesiti

9. ●● *(1 punto · cap. 5, 7)* Determina i coefficienti reali a, b, c in modo che il grafico di $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ abbia un flesso nel punto $F(-1; 3)$, con la tangente inflessionale parallela alla retta $y = -3x$. Verifica che questa tangente passa per l'origine, determina gli estremi relativi di f e stabilisci quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$.

10. ●● *(1 punto · cap. 6)* Enuncia e dimostra il teorema di Lagrange (puoi usare il teorema di Rolle). Applicalo poi alla funzione $\ln t$ sull'intervallo $[1; x]$ per dimostrare che, per ogni $x > 1$, $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$.

11. ●● *(1 punto · cap. 7)* Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $\ln x = kx^2$. Per il valore di k che separa due casi diversi, interpreta il risultato con la parabola $y = kx^2$ e il grafico di $y = \ln x$.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 5, 8)* Si vuole trovare il punto P del grafico di $y = e^x$ più vicino all'origine O. a) Scrivi il quadrato della distanza $D(x) = OP^2$ in funzione dell'ascissa x di P e dimostra che D ha minimo assoluto in un solo punto, l'unica soluzione dell'equazione $x + e^{2x} = 0$, che appartiene all'intervallo $]-\frac{1}{2}; 0[$. b) Giustifica la scelta di $x_0 = 0$ come punto di partenza del metodo delle tangenti per questa equazione e calcola x_1, x_2, x_3; dai le coordinate di P e la distanza OP con tre cifre decimali. c) Dimostra che la retta OP è perpendicolare alla tangente al grafico in P.

Soluzioni

1. C. $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$. Con le regole del prodotto e della funzione composta, $f'(x) = e^{2x-2} + x \cdot 2e^{2x-2} = (1 + 2x)\, e^{2x-2}$, quindi $f'(1) = 3$. La tangente è $y - 1 = 3(x - 1)$, cioè $y = 3x - 2$. La A dimentica la derivata interna 2 dell'esponente ($f'(1) = 2$); la B usa la pendenza giusta ma dimentica $f(1) = 1$; la D è la retta normale.

2. A. Forma 0/0; numeratore e denominatore sono derivabili e la derivata del denominatore, $3x^2$, non si annulla per $x \neq 0$. Il quoziente delle derivate è

$$\frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3(1+x^2)} \to \frac{1}{3},$$

quindi anche il limite dato vale $\frac{1}{3}$. La B è il risultato di $\lim_{x\to 0} (x - \operatorname{sen} x)/x^3$; la C sostituisce arctg x con l'infinitesimo equivalente x in una differenza, il che non è lecito; la D è il limite di $(\operatorname{arctg} x - x)/x^3$, con i termini scambiati.

3. D. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$: $f'(0) = 0$, ma per $0 < |x| < 1$ si ha $f'(x) < 0$: la derivata non cambia segno e 0 non è un estremo. $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$ è positiva per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ e negativa per $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: cambia segno in 0, che è quindi un flesso, con tangente orizzontale perché $f'(0) = 0$. La funzione è un polinomio, derivabile ovunque: nessun punto angoloso.

4. B. Con $f(x) = x^2 - 5$ e $f'(x) = 2x$: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \dfrac{-1}{4} = 2{,}25$. (La soluzione è $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.) La D sbaglia il segno della correzione; la C è un'approssimazione di $\sqrt{5}$ che il metodo non dà al primo passo; la A divide per 2 anziché per $f'(2) = 4$.

5. a) Per le proprietà dei logaritmi, nel dominio $f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$, quindi $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2}$. b) $g(x) = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$, quindi

$$g'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}\, x^{\ln x} = 2x^{\ln x - 1} \ln x.$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f(8) = 2$, $f'(8) = \dfrac{1}{12}$. Con $h = 0{,}12$: $\sqrt[3]{8{,}12} \approx 2 + \dfrac{0{,}12}{12} = 2{,}01$. La calcolatrice dà $\sqrt[3]{8{,}12} = 2{,}009950\ldots$: l'errore è circa $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ (per eccesso, perché il grafico, con concavità verso il basso, sta sotto la tangente), molto più piccolo di h, come previsto per l'approssimazione lineare.

6. a) Forma 0/0; la derivata del denominatore, $2x$, non si annulla per $x \neq 0$. Il quoziente delle derivate è

$$\frac{\dfrac{1}{1+x} - 1}{2x} = \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2(1+x)} \to -\frac{1}{2}$$

: il limite è $-\frac{1}{2}$. b) Forma $0 \cdot \infty$, perché arctg $x \to \frac{\pi}{2}$. Scriviamo $x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x) = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$, forma 0/0; il quoziente delle derivate è $\dfrac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \to 1$: il limite è 1. c) Poiché $x^2 \ln(1 + 1/x) \to +\infty$ (per $t = 1/x \to 0^+$ è $\ln(1 + t)/t^2 \sim 1/t$), la forma è $+\infty - \infty$. Con $t = \dfrac{1}{x}$, $t \to 0^+$:

$$x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2},$$

forma 0/0. È l'opposto della funzione del punto a) calcolata in t, quindi il limite è $-(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. (Direttamente: $\dfrac{1 - 1/(1+t)}{2t} = \dfrac{1}{2(1+t)} \to \dfrac{1}{2}$.)

7. a) Dominio $x \neq 2$; nessuna simmetria. Intersezioni: $(0; \frac{3}{2})$ con l'asse y, $(\pm\sqrt{3}; 0)$ con l'asse x. Segno: $f(x) > 0$ per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e per $x > 2$. Poiché $x^2 - 3 = (x - 2)(x + 2) + 1$, si ha $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-2}$: $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$ (asintoto verticale $x = 2$), $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $f(x) - (x + 2) = \dfrac{1}{x-2} \to 0$: asintoto

obliquo $y = x + 2$, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$; il grafico non lo incontra mai. b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$: f cresce in $]-\infty; 1]$ e in $[3; +\infty[$, decresce in $[1; 2[$ e in $]2; 3]$. Massimo relativo $M(1; 2)$, minimo relativo $m(3; 6)$ (il massimo relativo è minore del minimo relativo: i due rami sono separati dall'asintoto). c) $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$: concavità verso il basso per $x < 2$, verso l'alto per $x > 2$; nessun flesso (f'' cambia segno solo in 2, che non è nel dominio). Il grafico è un'iperbole con asintoti $x = 2$ e $y = x + 2$: il ramo sinistro passa per $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \frac{3}{2})$, $(\sqrt{3}; 0)$ e ha il massimo in M, il ramo destro ha il minimo in m.

8. a) $C(x; 12 - x^2)$, $D(-x; 12 - x^2)$: base $2x$, altezza $12 - x^2$, e $S(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$, con $0 < x < 2\sqrt{3}$ (perché l'altezza sia positiva). $S'(x) = 24 - 6x^2$ si annulla in $]0; 2\sqrt{3}[$ solo per $x = 2$; è positiva prima e negativa dopo, quindi $x = 2$ è il punto di massimo assoluto (agli estremi l'area tende a 0). Il rettangolo ha base 4 cm, altezza 8 cm e area 32 cm^2. b) Per la regola della catena $\frac{dS}{dt} = S'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$, con $\frac{dx}{dt} = 0{,}5$ cm/s. Per $x = 1$: $S'(1) = 18$, quindi l'area cresce di $18 \cdot 0{,}5 = 9$ cm^2 al secondo. Per $x = 2$: $S'(2) = 0$, e la velocità di variazione dell'area è nulla: è l'istante in cui l'area è massima; subito dopo l'area comincia a diminuire.

9. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$. Flesso in $x = -1$: $f''(-1) = -6 + 2a = 0$, $a = 3$. Tangente parallela a $y = -3x$: $f'(-1) = 3 - 6 + b = -3$, $b = 0$. Passaggio per F: $f(-1) = -1 + 3 + c = 3$, $c = 1$. Quindi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; $f''(x) = 6(x + 1)$ cambia segno in -1, e F è davvero un flesso (le condizioni trovate erano solo necessarie). La tangente inflessionale è $y - 3 = -3(x + 1)$, cioè $y = -3x$, che passa per l'origine. $f'(x) = 3x(x + 2)$: massimo relativo $(-2; 5)$, minimo relativo $(0; 1)$. L'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale: per $x \geq -2$ si ha $f(x) \geq 1 > 0$ (il minimo assoluto di f su $[-2; +\infty[$ è 1); in $]-\infty; -2]$ la funzione è strettamente crescente, da $-\infty$ a 5, quindi si annulla una volta sola. Poiché $f(-4) = -15 < 0 < 1 = f(-3)$, la soluzione è in $]-4; -3[$ (vale circa $-3{,}104$).

10. Teorema di Lagrange. Ipotesi: f è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$. Tesi: esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Dimostrazione. Sia $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ la pendenza della corda per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, e sia $g(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$. La funzione g è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, perché differenza fra f e un polinomio di primo grado; inoltre $g(a) = 0$ e $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$. Per il teorema di Rolle esiste $c \in]a; b[$ con $g'(c) = 0$; poiché $g'(x) = f'(x) - m$, si ha $f'(c) = m$. c.v.d. Applicazione. Per $x > 1$, la funzione $\ln t$ è continua in $[1; x]$ e derivabile in $]1; x[$, con derivata $1/t$. Esiste quindi $c \in]1; x[$ tale che $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c}$, cioè $\ln x = \frac{x - 1}{c}$. Da $1 < c < x$ segue $\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1$, e moltiplicando per $x - 1 > 0$: $\frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$.

11. Il dominio è $x > 0$; dividendo per $x^2 > 0$ l'equazione equivale a $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} = k$: le soluzioni sono le ascisse dei punti comuni al grafico di g e alla retta $y = k$. $g'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$: g cresce in $]0; \sqrt{e}]$ e decresce in $[\sqrt{e}; +\infty[$, con massimo assoluto $g(\sqrt{e}) = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}184$. Inoltre $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$ (gerarchia degli infiniti), $g(1) = 0$, $g < 0$ in $]0; 1[$ e $g > 0$ per $x > 1$. Quindi: per $k \leq 0$ una soluzione (in $]0; 1]$; per $k = 0$ è $x = 1$); per $0 < k < \frac{1}{2e}$ due soluzioni, una in $]1; \sqrt{e}[$ e una maggiore di $\sqrt{e}$; per $k = \frac{1}{2e}$ una soluzione, $x = \sqrt{e}$; per $k > \frac{1}{2e}$ nessuna. Per $k = \frac{1}{2e}$ la parabola $y = \frac{x^2}{2e}$ è tangente al grafico di $y = \ln x$ nel punto $(\sqrt{e}; \frac{1}{2})$: in $x = \sqrt{e}$ le due funzioni valgono entrambe $\frac{1}{2}$ e le loro derivate, $\frac{1}{x}$ e $\frac{x}{e}$, valgono entrambe $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Le parabole più aperte (k più piccolo e positivo) tagliano il grafico del logaritmo in due punti, quelle più strette non lo incontrano.

12. a) $P(x; e^x)$, $D(x) = x^2 + e^{2x}$, definita e derivabile in $\mathbb{R}$ (minimizzare OP^2 equivale a minimizzare OP). $D'(x) = 2x + 2e^{2x} = 2(x + e^{2x})$. La funzione $h(x) = x + e^{2x}$ è continua e strettamente crescente ($h'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$), quindi ha al più uno zero; $h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + e^{-1} \approx -0{,}132 < 0$ e $h(0) = 1 > 0$: per il teorema degli zeri c'è esattamente uno zero $\bar{x} \in]-\frac{1}{2}; 0[$. D' è negativa per $x < \bar{x}$ e positiva per $x > \bar{x}$: D decresce e poi cresce, e $\bar{x}$ è il punto di minimo assoluto, unico. b) In $[-\frac{1}{2}; 0]$ si ha $h(-\frac{1}{2}) \cdot h(0) < 0$, $h' > 0$ e $h''(x) = 4e^{2x} > 0$: la condizione sufficiente di convergenza vale, partendo dall'estremo in cui $h \cdot h'' > 0$, cioè $x_0 = 0$ ($h(0) \cdot h''(0) = 4 > 0$). La formula è $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}}$: $x_1 = -\frac{1}{3} \approx -0{,}3333$, $x_2 \approx -0{,}4222$, $x_3 \approx -0{,}4263$ (i passi successivi cambiano solo cifre oltre la quarta decimale: $\bar{x} = -0{,}426302\ldots$). Quindi $P(-0{,}426; 0{,}653)$, e poiché $e^{2\bar{x}} = -\bar{x}$, $OP^2 = \bar{x}^2 - \bar{x} \approx 0{,}608$, $OP \approx 0{,}780$. c) La tangente in P ha pendenza $e^{\bar{x}}$; la retta OP ha pendenza $\frac{e^{\bar{x}}}{\bar{x}}$. Il loro prodotto è $\frac{e^{2\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{-\bar{x}}{\bar{x}} = -1$, perché $\bar{x}$ risolve $x + e^{2x} = 0$: le due rette sono perpendicolari. È il fatto generale del capitolo 8: il segmento di distanza minima da un punto a una curva derivabile è perpendicolare alla tangente nel punto più vicino (lo dice proprio l'equazione $D'(\bar{x}) = 0$).