Matematica 5 · Parte I · Limiti e continuità · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte I · pagine 129–130 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte I · Limiti e continuità

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* La successione $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ converge a 4. Il più piccolo intero $\bar{n}$ tale che $|a_n - 4| < 0{,}01$ per ogni $n > \bar{n}$ è:
   - **A.** 500
   - **B.** 499
   - **C.** 49
   - **D.** 5

2. ● *(0,5 punti · cap. 2)* Quale delle seguenti frasi esprime il significato di $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$?
   - **A.** per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$
   - **B.** per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $3 - \delta < x < 3 \Rightarrow f(x) < -M$
   - **C.** esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $M > 0$, $3 < x < 3 + \delta \Rightarrow f(x) < -M$
   - **D.** per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $3 < x < 3 + \delta \Rightarrow f(x) < -M$

3. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 4x)}{e^{2x} - 1}$ vale:
   - **A.** 2
   - **B.** $\dfrac{1}{2}$
   - **C.** 8
   - **D.** 1

4. ● *(0,5 punti · cap. 4)* A quale delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[-1; 1]$?
   - **A.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   - **B.** $f(x) = x^2 - 2$
   - **C.** $f(x) = x^3 + 2x - 1$
   - **D.** $f(x) = [x]$ (parte intera)

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 1)* a) Determina l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $A = \{\frac{n+2}{2n} : n \geq 1\}$ e stabilisci se sono massimo o minimo. b) Calcola $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}-2^n}$. c) Calcola la somma della serie $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots$.

6. ●● *(1 punto · cap. 2)* a) Verifica con la definizione che $\lim_{x\to5} \sqrt{x-1} = 2$; per $\varepsilon = 0{,}1$ determina l'insieme in cui $|\sqrt{x-1} - 2| < \varepsilon$ e il più grande δ adatto. b) Verifica con la definizione che $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{1-x} = 0$ e trova N per $\varepsilon = 0{,}001$. Il limite è raggiunto per eccesso o per difetto?

7. ●● *(1 punto · cap. 3)* Calcola i limiti. a) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2+x-2}$; b) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+6x} - x)$; c) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{x \ln(1+2x)}$; d) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{x+2}{x-1})^x$.

8. ●● *(1 punto · cap. 4)* È data la funzione $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x}$. a) Determina il dominio, i punti di discontinuità e la loro specie. b) Dove è possibile, scrivi il prolungamento per continuità di f. c) Determina gli asintoti del grafico di f.

Quesiti

9. ●● *(1 punto · cap. 3, 4)* Determina i valori dei parametri reali $a > 0$ e b per cui è continua in $\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1-\cos ax}{x^2}$ per $x < 0$, $f(0) = b$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ per $x > 0$.

10. ●● *(1 punto · cap. 4)* Dimostra che l'equazione $2^x + x = 4$ ha una e una sola soluzione reale e che essa appartiene all'intervallo $[1; 2]$. Esegui tre passi del metodo di bisezione a partire da $[1; 2]$ e stabilisci quanti passi servono, in tutto, per ottenere un intervallo di ampiezza minore di 10^{-3} che contenga la soluzione.

11. ●● *(1 punto · cap. 2)* Enuncia e dimostra il teorema del confronto per i limiti di funzioni, nel caso in cui x_0 e L siano finiti. Usalo poi per calcolare $\lim_{x\to0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 3, 4)* Per ogni numero reale $a > 0$ sia f_a la funzione definita da $f_a(x) = \frac{1-\cos x}{|x|^a}$ per $x \neq 0$ e $f_a(0) = 0$. a) Stabilisci, al variare di a, se f_a è continua in $x = 0$ e, se non lo è, di che specie è la discontinuità. b) Per $a = 2$ si può applicare il teorema di Weierstrass a f_2 nell'intervallo $[-\pi; \pi]$? La funzione ha massimo e minimo in quell'intervallo? (Suggerimento: $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$.)

Soluzioni

1. B. $|a_n - 4| = \left|\frac{4n-1-4n-4}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1}$, e $\frac{5}{n+1} < 0{,}01$ equivale a $n+1 > 500$, cioè $n > 499$: quindi $\bar{n} = 499$. La A confonde $\bar{n}$ con il primo indice per cui la disuguaglianza vale ($500 > 499$); la C è il valore di $\bar{n}$ per $\varepsilon = 0{,}1$.

2. D. Il limite destro chiede che $f(x) < -M$ solo per gli x di un intorno destro di 3, cioè per $3 < x < 3 + \delta$; l'ordine è «per ogni M esiste δ». La A traduce il limite completo (da entrambe le parti), la B il limite sinistro. La C scambia i quantificatori: chiederebbe un unico δ che vada bene per tutti gli M, cioè valori di f minori di ogni numero negativo, il che è impossibile per una funzione a valori reali.

3. A. Per $x \to 0$ si ha $\ln(1+4x) \sim 4x$ e $e^{2x} - 1 \sim 2x$; per il principio di sostituzione in un quoziente il limite è quello di $\frac{4x}{2x} = 2$. Senza equivalenze: $\frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot 2 \to 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. La B inverte il rapporto; la C moltiplica i coefficienti; la D ricorda solo che i due limiti notevoli valgono 1.

4. C. La funzione $f(x) = x^3 + 2x - 1$ è continua in $[-1; 1]$ (polinomio) e $f(-1) = -4 < 0$, $f(1) = 2 > 0$: le ipotesi sono soddisfatte. La A non è definita in 0, quindi non è continua nell'intervallo; la B vale -1 in entrambi gli estremi, senza cambio di segno; la D ha segni opposti agli estremi ($[-1] = -1$, $[1] = 1$) ma è discontinua in 0. (La parte intera si annulla in $[0; 1[$: il teorema dà condizioni sufficienti, non necessarie.)

5. a) $\frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$: gli elementi decrescono al crescere di n. Il più grande si ha per $n = 1$: $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$. Tutti gli elementi sono maggiori di $\frac{1}{2}$, e per ogni $\varepsilon > 0$ basta $n > 1/\varepsilon$ per avere un elemento minore di $\frac{1}{2} + \varepsilon$: $\inf A = \frac{1}{2}$, che non è un minimo perché nessun elemento vale $\frac{1}{2}$. b) Dividendo numeratore e denominatore per 3^n: $\frac{2 \cdot (2/3)^n + 1}{3 - (2/3)^n}$; poiché $(2/3)^n \to 0$ (ragione di modulo minore di 1), il limite è $\frac{1}{3}$. c) È una serie geometrica con primo termine 2 e ragione $q = -\frac{1}{2}$; poiché $|q| < 1$ converge, e la somma è $\frac{2}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$.

6. a) Per $0 < \varepsilon < 2$ tutti i membri sono positivi e si può elevare al quadrato: $|\sqrt{x-1} - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x-1} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow (2-\varepsilon)^2 + 1 < x < (2+\varepsilon)^2 + 1$. L'intervallo contiene 5 al suo interno, perché $(2-\varepsilon)^2 < 4 < (2+\varepsilon)^2$: è un intorno di 5, e il limite è verificato. Per $\varepsilon = 0{,}1$: $4{,}61 < x < 5{,}41$. L'intorno non è simmetrico: 5 dista 0,39 dall'estremo sinistro e 0,41 da quello destro, quindi il più grande δ adatto è $\delta = 0{,}39$. b) Per $x < 1$ la frazione è positiva, e $\frac{3}{1-x} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - x > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{3}{\varepsilon}$: è una semiretta, un intorno di $-\infty$, quindi il limite è verificato con $N = \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Per $\varepsilon = 0{,}001$: $x < -2999$, $N = 2999$. Poiché i valori sono positivi, il limite è raggiunto per eccesso: $f(x) \to 0^+$.

7. a) Forma 0/0. Scomponendo, $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ e $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$; semplificando, il limite è $\frac{4+4+4}{-2-1} = -4$. b) Forma $+\infty - \infty$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+6x} + x$: $\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \frac{6}{\sqrt{1+6/x}+1} \to \frac{6}{2} = 3$ (per $x > 0$, $\sqrt{x^2+6x} = x\sqrt{1+6/x}$). c) Forma 0/0. $1 - \cos 3x \sim \frac{9x^2}{2}$ e $\ln(1+2x) \sim 2x$; con il principio di sostituzione il limite è $\frac{9x^2/2}{2x^2} = \frac{9}{4}$. d) Forma 1^∞. $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$; posto $t = x - 1$, si ha

$(1 + 3/t)^{t+1} = (1 + 3/t)^t \cdot (1 + 3/t)$, con $t \to +\infty$. Il primo fattore tende a e^3, il secondo a 1: il limite è $e^3 \approx 20{,}09$.

8. a) Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Per $x \neq 0, 1$: $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x}$. In $x = 1$ il limite è $\frac{3}{1} = 3$, finito, ma f non è definita: discontinuità di terza specie (eliminabile). In $x = 0$ il numeratore tende a 1 e $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$: discontinuità di seconda specie. b) Si elimina solo la discontinuità in 1: il prolungamento è $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$, definito per $x \neq 0$, che coincide con f nel dominio e vale $F(1) = 3$. In 0 non si può prolungare, perché il limite è infinito. c) Asintoto verticale $x = 0$. Nessun asintoto orizzontale, perché $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Asintoto obliquo: $m = \lim f(x)/x = \lim \frac{x^2+x+1}{x^2} = 1$, $q = \lim (f(x) - x) = \lim \frac{x+1}{x} = 1$, sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$: la retta è $y = x + 1$. (Infatti $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$.)

9. Per $x > 0$, razionalizzando: $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$, che tende a $\frac{1}{4}$ per $x \to 0^+$. Per $x < 0$: $\frac{1-\cos ax}{x^2} = a^2 \cdot \frac{1-\cos ax}{(ax)^2}$, che tende a $\frac{a^2}{2}$ per il limite notevole, perché $ax \to 0$. Negli altri punti f è continua, come quoziente di funzioni continue con denominatore non nullo; in 0 è continua se e solo se i due limiti laterali sono uguali a $f(0) = b$: $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} = b$. Quindi $a^2 = \frac{1}{2}$, cioè, con $a > 0$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e $b = \frac{1}{4}$.

10. Sia $g(x) = 2^x + x - 4$, continua in $\mathbb{R}$ e strettamente crescente, perché somma di due funzioni strettamente crescenti: ha quindi al più uno zero. Poiché $g(1) = -1 < 0$ e $g(2) = 2 > 0$, per il teorema di esistenza degli zeri c'è uno zero in $]1; 2[$, ed è l'unico. Bisezione: $g(1{,}5) = 2\sqrt{2} - 2{,}5 \approx 0{,}328 > 0 \to [1; 1{,}5]$; $g(1{,}25) \approx -0{,}372 < 0 \to [1{,}25; 1{,}5]$; $g(1{,}375) \approx -0{,}031 < 0 \to [1{,}375; 1{,}5]$. Dopo n passi l'ampiezza è $1/2^n$, e $1/2^n < 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n > 1000 \Leftrightarrow n > \log_2 1000 \approx 9{,}97$: servono 10 passi in tutto ($2^{10} = 1024$, mentre $2^9 = 512$). La soluzione vale circa 1,386.

11. Teorema del confronto. Ipotesi: in un intorno di x_0, per ogni $x \neq x_0$ del dominio, $g(x) \le f(x) \le h(x)$; inoltre $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$. Tesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste δ_1 tale che $L - \varepsilon < g(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$, ed esiste δ_2 tale che $h(x) < L + \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Sia δ il più piccolo fra δ_1, δ_2 e il raggio dell'intorno in cui vale l'ipotesi. Per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon$, cioè $|f(x) - L| < \varepsilon$. c.v.d. Applicazione: per $x \neq 0$ si ha $|\operatorname{arctg}(1/x)| < \frac{\pi}{2}$, quindi $-\frac{\pi}{2}|x| \le x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \le \frac{\pi}{2}|x|$. Le due funzioni esterne tendono a 0 per $x \to 0$, quindi $\lim_{x\to 0} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$.

12. Per $x \neq 0$, poiché $x^2 = |x|^2$, si può scrivere $f_a(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot |x|^{2-a}$, e il primo fattore tende a $\frac{1}{2}$. a) Se $0 < a < 2$, $|x|^{2-a} \to 0$: il limite è $0 = f_a(0)$ e la funzione è continua in 0. Se $a = 2$, il limite è $\frac{1}{2}$, finito ma diverso da $f_2(0) = 0$: discontinuità di terza specie (eliminabile, ridefinendo il valore in 0 come $\frac{1}{2}$). Se $a > 2$, $|x|^{2-a} = 1/|x|^{a-2} \to +\infty$, quindi $f_a(x) \to +\infty$ da entrambe le parti: discontinuità di seconda specie. b) No: f_2 non è continua in $0 \in [-\pi; \pi]$, e il teorema non si applica. Con il suggerimento, $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\right)^2$; poiché $|\operatorname{sen} t| < |t|$ per $0 < |t| \le \pi/2$, si ha $f_2(x) < \frac{1}{2}$ per ogni $x \neq 0$ dell'intervallo, mentre $f_2(x) \to \frac{1}{2}$ per $x \to 0$. Quindi l'estremo superiore dei valori è $\frac{1}{2}$, ma non è assunto, perché in 0 la funzione vale 0: *non c'è massimo*. Il minimo invece esiste: $f_2(x) > 0$ per $0 < |x| \le \pi$ (lì $\cos x < 1$) e $f_2(0) = 0$, quindi il minimo è 0, assunto in $x = 0$. Quando un'ipotesi manca, la tesi di Weierstrass può valere solo in parte: le ipotesi sono sufficienti, non necessarie.