Matematica 5 · Parte VI · Verso l'esame di Stato · versione 1.0
Verifica: Simulazione della seconda prova · 2 · pagine 489–492 del volume completo · estratto per lo studio

Simulazione della seconda prova · 2

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti scelti tra gli 8 proposti.

Problema 1

Si considerano le funzioni $f(x) = axe^{-bx}$, dove a e b sono parametri reali positivi. Nella Figura V7.1 è rappresentato il grafico Γ di una di esse: la retta t tangente a Γ nell'origine ha equazione $y = 4x$, e Γ ha un punto di flesso F di ascissa 4.

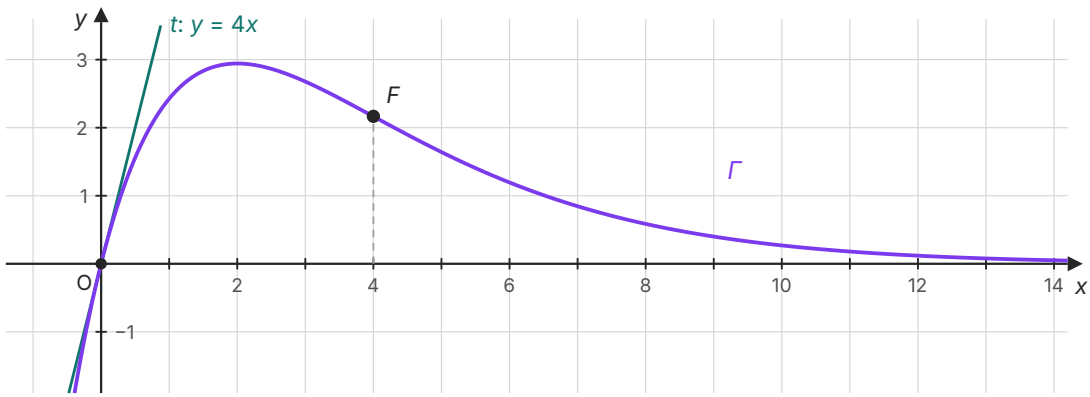


Figura V7.1 Il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ del Problema 1 (scala uguale sui due assi), con la retta t tangente nell'origine e il punto di flesso F di ascissa 4.

a) Determina i valori di a e b. Verifica che per tali valori Γ ha un solo punto di flesso e che, a eccezione dell'origine, Γ sta tutto al di sotto della retta t.

b) D'ora in poi sia $f(x) = 4xe^{-x/2}$. Studia la funzione f: segno, limiti agli estremi del dominio e asintoti, intervalli di monotonia, concavità. Determina le coordinate del punto di massimo M e del punto di flesso F, e l'insieme delle immagini di f. Dimostra che la retta tangente a Γ in F interseca l'asse x nel punto $T(8; 0)$.

c) Verifica che la regione illimitata S compresa tra il grafico di $f(x) = 4xe^{-x/2}$ e il semiasse positivo delle x ha area finita, e calcolala. Quale frazione dell'area di S si trova nella striscia $0 \le x \le 2$, a sinistra del punto di massimo?

d) Un farmaco viene assunto per bocca all'istante $t = 0$; la sua concentrazione nel sangue, in mg/L, dopo t ore è $c(t) = 4te^{-t/2}$ (dati inventati). Dopo quanto tempo la concentrazione è massi-

ma, e quanto vale? Il farmaco è efficace finché $c(t) \geq 1$ mg/L. Dimostra che l'equazione $c(t) = 1$ ha esattamente due soluzioni, $t_1 \in]0; 1[$ e $t_2 \in]6; 7[$. Calcola t_2 con il metodo delle tangenti di Newton, scegliendo il punto iniziale in modo che la convergenza sia garantita, fino a ottenere due cifre decimali stabili. Sapendo che $t_1 \approx 0{,}29$, per quanto tempo il farmaco è efficace?

e) Il modello del punto d) nasce da un bilancio: il farmaco passa dall'intestino al sangue con una velocità che decresce esponenzialmente, e il sangue lo elimina con una velocità proporzionale alla concentrazione. Risolvi il problema di Cauchy

$$c'(t) + \frac{1}{2}c(t) = 4e^{-t/2}, \quad c(0) = 0,$$

e verifica che la sua soluzione è $c(t) = 4te^{-t/2}$. Integrando i due membri dell'equazione da 0 a $+\infty$, dimostra che l'area sotto il grafico di c è il doppio di $\int_0^{+\infty} 4e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$, senza calcolare $\int_0^{+\infty} c(t)\,\mathrm{d}t$ direttamente; confronta con il risultato del punto c) e spiega il significato dei due integrali.

Problema 2

Un programma di grafica tridimensionale disegna coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 3 dm: il vertice V del cono è un punto della sfera e la circonferenza di base è una circonferenza della sfera (Figura V7.2). Indichiamo con h l'altezza del cono, in decimetri, con $0 < h < 6$, e con r il raggio di base.

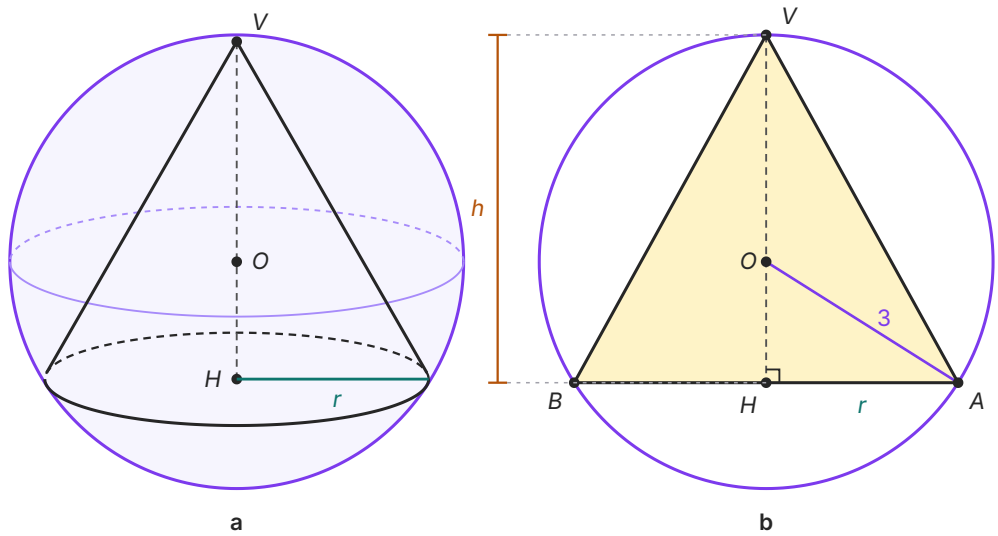


Figura V7.2 a) Un cono inscritto nella sfera di centro O e raggio 3 dm (proiezione ortogonale; le linee nascoste sono tratteggiate). b) La sezione con un piano che contiene l'asse VH del cono: il triangolo OHA è rettangolo in H.

a) Dimostra che $r^2 = h(6 - h)$ e che il volume del cono, in dm^3, è $V(h) = \pi h^2(6 - h)/3$. Per quale valore di h il cono ha la base di area massima? Per quali valori di h il centro O della sfera è interno al cono?

b) Studia la funzione $V(h) = \pi h^2(6 - h)/3$ nell'intervallo $]0; 6[$ e tracciane il grafico. Determina l'altezza, il raggio di base e il volume $V_{\max}$ del cono di volume massimo, e il rapporto tra $V_{\max}$ e il volume della sfera. Il grafico di V ha un punto di flesso: determinalo e spiega che cosa significa per il cono.

c) Il programma sceglie l'altezza h a caso, con distribuzione uniforme nell'intervallo $]0; 6[$. Calcola la probabilità che il cono contenga al suo interno il centro O della sfera e la probabilità che il volume $V(h) = \pi h^2(6 - h)/3$ sia almeno la metà del volume massimo $V_{\max} = 32\pi/3\ \text{dm}^3$.

d) Con h uniforme in $]0; 6[$ come al punto c), calcola il valore atteso del volume del cono, $\text{E}(V) = (1/6)\int_0^6 V(h)\,\text{d}h$, con $V(h) = \pi h^2(6 - h)/3$. Confrontalo con $V(3)$, il volume del cono che ha l'altezza media, e spiega perché i due valori sono diversi.

e) Il programma disegna 120 coni, scegliendo le altezze in modo indipendente e uniforme in $]0; 6[$; per ciascun cono la probabilità di avere volume almeno pari a $V_{\max}/2$ è $p = \sqrt{3}/3 \approx 0{,}577$. Sia X il numero di coni con questa proprietà. Quale distribuzione ha X? Calcolane il valore atteso e la deviazione standard e, con l'approssimazione normale e la correzione di continuità, stima la probabilità che almeno 80 coni su 120 abbiano volume almeno pari a $V_{\max}/2$.

Questionario

1. Determina il dominio e gli asintoti della funzione $g(x) = \left(\dfrac{x + 2}{x - 1}\right)^x$.

2. Calcola $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ con il teorema di de l'Hôpital, verificandone le ipotesi. Verifica poi che $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = 1$ e spiega perché questo limite, pur essendo una forma indeterminata ∞/∞, non si può calcolare con il teorema di de l'Hôpital.

3. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

4. Determina la soluzione del problema di Cauchy $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$. Determina il primo punto di massimo relativo di ascissa positiva e dimostra che il rapporto tra i valori di due massimi relativi consecutivi è costante.

5. Sono date le rette r: $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = t$ e s: $x = u$, $y = 3 - u$, $z = 1$, con $t, u \in \mathbb{R}$. Verifica che r e s sono sghembe. Determina i punti $H \in r$ e $K \in s$ tali che la retta HK sia perpendicolare a entrambe, e la distanza tra le due rette.

6. Un centralino di assistenza riceve in media 4 chiamate ogni 10 minuti; il numero di chiamate in un intervallo di tempo segue una distribuzione di Poisson, e i numeri di chiamate in intervalli disgiunti sono indipendenti (dati inventati). Calcola la probabilità che in 10 minuti arrivino almeno 3 chiamate, la probabilità che in 5 minuti non ne arrivi nessuna e la probabilità che, dividendo un'ora in sei intervalli consecutivi di 10 minuti, almeno uno di essi trascorra senza chiamate.

7. Dimostra che in un tetraedro regolare due spigoli opposti, cioè privi di vertici comuni, sono perpendicolari, e che la loro distanza è $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$, dove ℓ è la lunghezza degli spigoli.

8. Considera la Terra come una sfera di raggio 6371 km. Il triangolo sferico che ha i vertici nel Polo Nord N e nei punti A e B dell'equatore di longitudine 0° e 60° E ha per lati due archi di meridiano e un arco di equatore. Determina i suoi angoli, la loro somma, la sua area e la frazione della superficie terrestre che occupa. Perché la somma degli angoli non è 180°, come afferma un teorema di Euclide? Quale postulato della geometria euclidea non vale sulla sfera, se si prendono come «rette» le circonferenze massime?

Valutazione: in ventesimi, con la griglia di valutazione ministeriale.

Soluzioni

Problema 1 · a) $f'(x) = a(1 - bx)e^{-bx}$ e $f''(x) = ab(bx - 2)e^{-bx}$. La tangente nell'origine ha pendenza $f'(0) = a$, quindi $a = 4$. La condizione di flesso $f''(4) = 4b(4b - 2)e^{-4b} = 0$ dà $b = 0$, escluso perché $b > 0$, oppure $b = \frac{1}{2}$. Quindi $f(x) = 4xe^{-x/2}$. Ora $f''(x) = (x - 4)e^{-x/2}$ si annulla solo in $x = 4$ e vi cambia segno: il flesso è unico. Per $x \neq 0$, $f(x) < 4x$ equivale a $4x(e^{-x/2} - 1) < 0$: per $x > 0$ si ha $e^{-x/2} < 1$, per $x < 0$ si ha $e^{-x/2} > 1$, e in entrambi i casi il prodotto è negativo. Γ sta sotto t tranne in O.

Problema 1 · b) Dominio $\mathbb{R}$; $f(x)$ ha il segno di x e si annulla solo in O. $\lim_{x\to+\infty} 4xe^{-x/2} = 0$ (l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a x): l'asse x è asintoto orizzontale a destra. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 4e^{-x/2} = +\infty$: nessun asintoto obliquo a sinistra; non ci sono asintoti verticali. $f'(x) = 2(2 - x)e^{-x/2}$: f cresce in $]-\infty; 2]$ e decresce in $[2; +\infty[$, con massimo assoluto $M(2; \frac{8}{e}) \approx (2; 2{,}943)$. $f''(x) = (x - 4)e^{-x/2}$: concavità verso il basso in $]-\infty; 4[$, verso l'alto in $]4; +\infty[$, flesso $F(4; \frac{16}{e^2}) \approx (4; 2{,}165)$. Poiché f è continua, assume tutti i valori tra $-\infty$ e il massimo: l'insieme delle immagini è $]-\infty; \frac{8}{e}]$. In F la pendenza è $f'(4) = -\frac{4}{e^2}$ e la tangente è $y = \frac{16}{e^2} - \frac{4}{e^2}(x - 4)$, cioè $y = \frac{4}{e^2}(8 - x)$, che si annulla per $x = 8$: passa per $T(8; 0)$.

Problema 1 · c) Integrando per parti, $\int 4xe^{-x/2}\,dx = -8xe^{-x/2} + \int 8e^{-x/2}\,dx = -(8x + 16)e^{-x/2} + c$ (derivando si ritrova $4xe^{-x/2}$). Poiché $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, l'area di S è l'integrale improprio $\lim_{b\to+\infty} [-(8x + 16)e^{-x/2}]_0^b = \lim_{b\to+\infty} (16 - (8b + 16)e^{-b/2}) = 16$: è finita. Nella striscia $0 \leq x \leq 2$: $\int_0^2 f(x)\,dx = 16 - 32e^{-1} \approx 4{,}228$, cioè la frazione $\frac{16 - 32/e}{16} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264$, circa il 26% dell'area: la regione è asimmetrica e la maggior parte dell'area sta a destra del massimo.

Problema 1 · d) Per il punto b), c cresce fino a $t = 2$ e poi decresce: la concentrazione massima si ha dopo 2 ore e vale $\frac{8}{e} \approx 2{,}94$ mg/L. Scriviamo la variabile come x e poniamo $g(x) = 4xe^{-x/2} - 1$. In $[0; 2]$ la funzione g è continua e crescente, con $g(0) = -1 < 0$ e $g(1) = 4e^{-1/2} - 1 \approx 1{,}43 > 0$: per il teorema degli zeri e la monotonia c'è una sola soluzione, in $]0; 1[$. In $[2; +\infty[$ la funzione g è decrescente, con $g(6) = 24e^{-3} - 1 \approx 0{,}195 > 0$ e $g(7) = 28e^{-7/2} - 1 \approx -0{,}154 < 0$: una sola soluzione, in $]6; 7[$. Non ce ne sono altre ($g < 0$ per $x \leq 0$). In $[6; 7]$ si ha $g'(x) = 2(2 - x)e^{-x/2} < 0$ e $g''(x) = (x - 4)e^{-x/2} > 0$, di segno costante: si parte dall'estremo di Fourier, quello in cui $g \cdot g'' > 0$, cioè $x_0 = 6$. Con $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$: $x_1 \approx 6{,}4893$, $x_2 \approx 6{,}5232$, $x_3 \approx 6{,}5234$ (successione crescente). Quindi $t_2 \approx 6{,}52$ h. Il farmaco è efficace per $t_2 - t_1 \approx 6{,}52 - 0{,}29 = 6{,}23$ ore, cioè circa 6 ore e un quarto (da circa 17 minuti dopo l'assunzione a circa 6 ore e mezza).

Problema 1 · e) L'equazione è lineare del primo ordine. Moltiplicando per $e^{t/2}$: $e^{t/2}c' + \frac{1}{2}e^{t/2}c = (e^{t/2}c)' = 4$, quindi $e^{t/2}c(t) = 4t + K$ e $c(t) = (4t + K)e^{-t/2}$; la condizione $c(0) = 0$ dà $K = 0$, e la soluzione, unica, è $c(t) = 4te^{-t/2}$. Verifica: $c'(t) = 4e^{-t/2} - 2te^{-t/2}$ e $c' + \frac{c}{2} = 4e^{-t/2}$. Integrando da 0 a b e passando al limite: $\lim_{b\to+\infty} (c(b) - c(0)) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} c(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 4e^{-t/2}\,dt$. Poiché $c(0) = 0$ e $c(b) \to 0$, si ha $\int_0^{+\infty} c(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} 4e^{-t/2}\,dt = 2 \cdot 8 = 16$, in accordo con il punto c). Il secondo integrale, 8 mg/L, è la quantità totale di farmaco entrata nel sangue (per litro); il primo, in mg · h/L, misura l'esposizione complessiva dell'organismo al farmaco: è uguale alla quantità entrata divisa per la costante di eliminazione, 0,5 h^{-1}.

Problema 2 · a) Nella sezione assiale (Figura 2b) $VO = OA = 3$ e H è il centro della base, con $VH = h$, $HA = r$ e $OH = |h - 3|$. Il triangolo OHA è rettangolo in H (se $h = 3$ degenera e $r = 3$): $r^2 = 9 - (h-3)^2 = 6h - h^2 = h(6-h)$. Allora $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h^2(6-h)$. L'area di base $\pi h(6-h)$ è massima, come la parabola $6h - h^2$, per $h = 3$: la base è un cerchio massimo. O sta sull'asse VH, a distanza 3 da V: è interno al cono quando $h > 3$ (per $h = 3$ sta sulla base, per $h < 3$ è fuori).

Problema 2 · b) $V(h) = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$ è positiva in $]0;6[$ e tende a 0 per $h \to 0^+$ e per $h \to 6^-$. $V'(h) = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = \pi h(4-h)$: V cresce in $]0;4]$ e decresce in $[4;6[$. Il massimo è per $h = 4$, con $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ dm e $V_{max} = \frac{\pi}{3}\cdot 16 \cdot 2 = \frac{32\pi}{3} \approx 33{,}5$ dm^3. Il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$ dm^3, e il rapporto è $\frac{32\pi/3}{36\pi} = \frac{8}{27} \approx 0{,}296$.
$V''(h) = 2\pi(2-h)$: concavità verso l'alto in $]0;2[$, verso il basso in $]2;6[$, flesso in $(2;\frac{16\pi}{3})$. Il grafico parte da $(0;0)$ con tangente orizzontale, sale con concavità verso l'alto fino al flesso, raggiunge il massimo $(4;\frac{32\pi}{3})$ e scende a $(6;0)$ con pendenza $V'(6) = -12\pi$. Nel flesso V' ha il suo massimo, $V'(2) = 4\pi$: allungando il cono, il volume cresce più rapidamente quando l'altezza è 2 dm; si noti che $V(2) = \frac{16\pi}{3} = V_{max}/2$.

Problema 2 · c) La densità di h è $\frac{1}{6}$ in $]0;6[$, e la probabilità di un intervallo è la sua ampiezza divisa per 6. Per il punto a) il cono contiene O quando $h > 3$: la probabilità è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La condizione $V(h) \geq V_{max}/2$ è $\frac{\pi}{3}h^2(6-h) \geq \frac{16\pi}{3}$, cioè $h^3 - 6h^2 + 16 \leq 0$. Il polinomio si annulla per $h = 2$ (punto b)) e si scompone in $(h-2)(h^2 - 4h - 8)$, con le altre radici $h = 2 \pm 2\sqrt{3}$; in $]0;6[$ cade solo $2 + 2\sqrt{3} \approx 5{,}46$. Lo studio del segno dà $V(h) \geq V_{max}/2$ per $2 \leq h \leq 2 + 2\sqrt{3}$, un intervallo di ampiezza $2\sqrt{3}$: la probabilità è $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$.

Problema 2 · d) $\mathrm{E}(V) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{3}\int_0^6 (6h^2 - h^3)\,dh = \frac{\pi}{18}[2h^3 - \frac{h^4}{4}]_0^6 = \frac{\pi}{18}(432 - 324) = 6\pi \approx 18{,}8$ dm^3, cioè $\frac{9}{16}$ di V_{max}. L'altezza media è $\mathrm{E}(h) = 3$ e $V(3) = \frac{\pi}{3}\cdot 9 \cdot 3 = 9\pi \approx 28{,}3$ dm^3: $\mathrm{E}(V) < V(\mathrm{E}(h))$. Il valore atteso si conserva solo per le trasformazioni lineari, $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$; V non è lineare in h, e i coni molto bassi o molto alti, che hanno volume quasi nullo, abbassano la media del volume più di quanto i coni intermedi la alzino.

Problema 2 · e) Le 120 prove sono indipendenti, con la stessa probabilità di successo $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $X \sim \mathrm{B}(120; p)$. $\mathrm{E}(X) = np = 40\sqrt{3} \approx 69{,}3$; $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) \approx 29{,}28$ e $\sigma(X) \approx 5{,}41$. Poiché np e $n(1-p) \approx 50{,}7$ sono entrambi maggiori di 5, si approssima X con $\mathrm{N}(69{,}28;\ 5{,}41)$: con la correzione di continuità, $p(X \geq 80) \approx 1 - \Phi(\frac{79{,}5 - 69{,}28}{5{,}41}) = 1 - \Phi(1{,}89) = 1 - 0{,}9706 = 0{,}0294$, circa il 3% (il calcolo esatto con la binomiale dà 0,0284).

1. La funzione è definita dove la base è positiva: $\frac{x+2}{x-1} > 0$ per $x < -2$ oppure $x > 1$, e il dominio è $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$. Per $x \to \pm\infty$ la base tende a 1 e l'esponente a $\pm\infty$: è una forma indeterminata 1^∞. Si scrive $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ e si pone $y = \frac{x-1}{3}$, che tende a $\pm\infty$ insieme a x: allora $g(x) = [(1 + \frac{1}{y})^y]^{3x/(x-1)}$. La base tende a e, per il limite notevole valido sia per $y \to +\infty$ sia per $y \to -\infty$, e l'esponente $\frac{3x}{x-1}$ tende a 3: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = e^3$, e la retta $y = e^3$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra (quindi non ci sono asintoti obliqui). Per $x \to 1^+$ la base tende a $+\infty$ e l'esponente a 1: $g(x) \to +\infty$, e la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Per $x \to -2^-$ la base tende a 0^+ e l'esponente a -2; poiché $g(x) = e^{x\ln[(x+2)/(x-1)]}$ e l'esponente di e tende a $(-2)\cdot(-\infty) = +\infty$ (non è una forma indeterminata),

anche qui $g(x) \to +\infty$: la retta $x = -2$ è asintoto verticale. (Verifica numerica: $g(10^5) \approx 20{,}0852$ e $g(-10^5) \approx 20{,}0858$, mentre $e^3 \approx 20{,}0855$: il grafico si avvicina all'asintoto da sotto a destra e da sopra a sinistra.)

2. Numeratore e denominatore sono derivabili e tendono a 0; la derivata del denominatore, $1 - \cos x$, è diversa da 0 in un intorno di 0 privato di 0. Applicando il teorema tre volte (a ogni passo la forma è ancora 0/0): $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$, poi $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$, poi $\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \to 2$. Poiché l'ultimo limite esiste, esistono a ritroso tutti i precedenti: il limite cercato è 2. Per il secondo limite, dividendo per x: $\dfrac{1 + (\operatorname{sen} x)/x}{1 - (\operatorname{sen} x)/x} \to 1$, perché $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \dfrac{1}{x} \to 0$. Il rapporto delle derivate, $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, invece non ha limite: vale 0 nei punti $(2k + 1)\pi$ e non è definito nei punti $2k\pi$, dove la derivata del denominatore si annulla, per valori di x grandi quanto si vuole. Mancano le ipotesi del teorema ($g'(x) \neq 0$ definitivamente, esistenza di $\lim f'/g'$): il teorema dà una condizione sufficiente, non necessaria, e qui non si può usare, benché il limite esista.

3. Le funzioni sono definite per $x > 0$. $\ln x = \ln^2 x$ equivale a $\ln x(1 - \ln x) = 0$: $x = 1$ oppure $x = e$. Per $1 < x < e$ si ha $0 < \ln x < 1$, quindi $\ln^2 x < \ln x$. Per parti, $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$ e $\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - 2\int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$. Allora $\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$ e $\int_1^e \ln^2 x \, dx = [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_1^e = e - 2$, e l'area è $1 - (e - 2) = 3 - e \approx 0{,}282$.

4. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ha $\Delta = -16 < 0$ e radici $-1 \pm 2i$: l'integrale generale è $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$. $y(0) = c_1 = 0$; allora $y' = c_2 e^{-x}(2 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$ e $y'(0) = 2c_2 = 4$, $c_2 = 2$: $y = 2e^{-x} \operatorname{sen} 2x$. $y' = 2e^{-x}(2 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$ si annulla quando $\operatorname{tg} 2x = 2$, cioè per $x = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + k\dfrac{\pi}{2}$; tra due zeri consecutivi y' cambia segno, e i massimi e i minimi si alternano. Per $0 < x < \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 2$ si ha $y' > 0$: il primo massimo è in $x_1 = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 \approx 0{,}554$, dove $\operatorname{sen} 2x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $y(x_1) = \dfrac{4}{\sqrt{5}} e^{-x_1} \approx 1{,}028$. I massimi relativi sono nei punti $x_1 + m\pi$ (m naturale), e poiché $\operatorname{sen} 2(x + \pi) = \operatorname{sen} 2x$, $y(x + \pi) = e^{-\pi} y(x)$: il rapporto tra due massimi consecutivi è sempre $e^{-\pi} \approx 0{,}0432$. È un'oscillazione smorzata, la cui ampiezza decresce in progressione geometrica.

5. Le direzioni sono $\mathbf{v} = (1; -1; 1)$ per r e $\mathbf{w} = (1; -1; 0)$ per s, non proporzionali: le rette non sono parallele. Un punto comune richiederebbe $1 + t = u$, $-t = 3 - u$, $t = 1$: dalla terza $t = 1$, e allora la prima dà $u = 2$ e la seconda $u = 4$, contraddizione. Le rette non sono complanari: sono sghembe. Siano $H(1 + t; -t; t)$ e $K(u; 3 - u; 1)$: $\mathbf{HK} = (u - 1 - t; 3 - u + t; 1 - t)$. Le condizioni $\mathbf{HK} \cdot \mathbf{v} = 2u - 3t - 3 = 0$ e $\mathbf{HK} \cdot \mathbf{w} = 2u - 2t - 4 = 0$ danno $t = 1$, $u = 3$: $H(2; -1; 1)$, $K(3; 0; 1)$, $\mathbf{HK} = (1; 1; 0)$, e la distanza è $HK = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Controllo: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1; 1; 0)$ e, con $A(1; 0; 0) \in r$ e $B(0; 3; 1) \in s$, $\dfrac{|\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} = \dfrac{|-1 + 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

6. In 10 minuti il numero X di chiamate è di Poisson con $\lambda = 4$: $p(X = k) = e^{-4}\dfrac{4^k}{k!}$. $p(X \ge 3) = 1 - e^{-4}(1 + 4 + 8) = 1 - 13e^{-4} \approx 0{,}762$. In 5 minuti il numero medio è 2, quindi $p(Y = 0) = e^{-2} \approx 0{,}135$. Ogni intervallo di 10 minuti è senza chiamate con probabilità $e^{-4} \approx 0{,}0183$, e i sei intervalli sono indipendenti: la probabilità che almeno uno resti senza chiamate è $1 - (1 - e^{-4})^6 \approx 0{,}105$.

7. Sia $ABCD$ il tetraedro regolare, con le facce triangoli equilateri di lato ℓ, e consideriamo gli spigoli opposti AB e CD. Sia M il punto medio di AB. Nei triangoli equilateri ABC e ABD le mediane CM e DM sono anche altezze: $AB \perp CM$ e $AB \perp DM$. La retta AB è perpendicolare a due rette incidenti del piano CMD, quindi è perpendicolare al piano CMD e a ogni retta di quel piano, in particolare a CD: gli spigoli opposti sono perpendicolari (sono rette sghembe ortogonali). Sia N il punto medio di CD. Il triangolo CMD è isoscele, con $CM = DM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, quindi la mediana MN è perpendicolare a CD; MN sta nel piano CMD, quindi è perpendicolare anche ad AB. MN è la perpendicolare comune; per il teorema di Pitagora nel triangolo CNM, $MN^2 = CM^2 - CN^2 =$

$\frac{3\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{4} = \frac{\ell^2}{2}$, e la distanza è $MN = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$. c.v.d.

8. I meridiani incontrano l'equatore ad angolo retto, quindi gli angoli in A e in B misurano 90°; l'angolo in N è l'angolo tra i piani dei due meridiani, cioè la differenza di longitudine, 60°. La somma è 240°, cioè $4\pi/3$. Per il teorema di Girard l'area è $R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \cdot 6371^2/3 \approx 4{,}25 \cdot 10^7$ km², la frazione $\frac{\pi/3}{4\pi} = \frac{1}{12}$ della superficie terrestre. (Controllo: il triangolo è metà del fuso di angolo $\frac{\pi}{3}$, che ha area $2 \cdot \frac{\pi}{3} R^2$.) Il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo si dimostra con il quinto postulato, attraverso le proprietà delle parallele. Sulla sfera due circonferenze massime si incontrano sempre, in due punti antipodali: per un punto esterno a una «retta» non passa nessuna parallela, e il quinto postulato, nella forma di Playfair, non vale (né vale l'unicità della «retta» per due punti, quando sono antipodali). La geometria della sfera è un modello di geometria non euclidea, in cui la somma degli angoli di un triangolo supera π, tanto più quanto più il triangolo è grande.