Matematica 5 · Parte VI · Verso l'esame di Stato · versione 1.0
Verifica: Simulazione della seconda prova · 1 · pagine 485–488 del volume completo · estratto per lo studio

Simulazione della seconda prova · 1

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti scelti tra gli 8 proposti.

Problema 1

Nella Figura V6.1 è rappresentato il grafico Γ della funzione $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$, dove a e b sono parametri reali. Il grafico Γ ha un punto di massimo relativo in $M(1; 2)$.

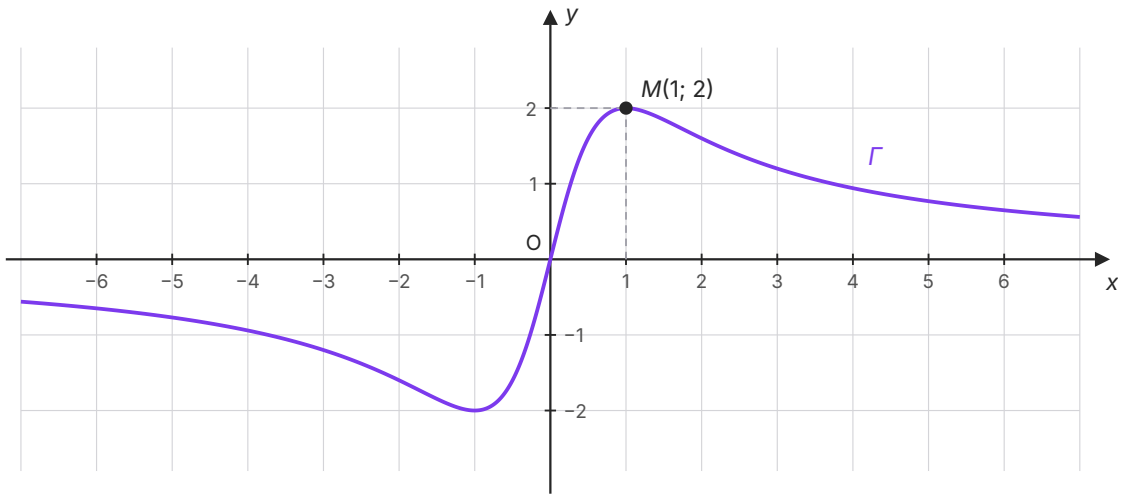

Figura V6.1 Il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ del Problema 1 (scala uguale sui due assi), con il punto di massimo relativo $M(1; 2)$.

a) Determina i valori di a e b. Verifica che per tali valori la funzione f è dispari e che M è il punto di massimo assoluto di f.

b) D'ora in poi sia $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$. Completa lo studio di f: asintoti, intervalli di monotonia, concavità e punti di flesso. Dimostra che i tre punti di flesso di Γ sono allineati e scrivi l'equazione della retta r che li contiene e della retta tangente a Γ nell'origine.

c) Calcola l'area complessiva delle regioni finite di piano delimitate dal grafico di $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ e dalla retta r di equazione $y = x$.

d) Considera la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, con $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$. Senza calcolare l'integrale, stabilisci dove F è crescente e in quali punti il suo grafico ha un flesso. Determina poi l'espressione esplicita di $F(x)$ e verifica che F diverge a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, ma che il suo grafico non ha asintoti obliqui.

e) Per $t \geq 0$ la funzione $v(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$ descrive la velocità, in m/s, di un carrello che si muove lungo un binario rettilineo, con t misurato in secondi (dati inventati). Qual è la velocità massima del carrello, e quando la raggiunge? In quale istante il carrello rallenta con la massima decelerazione, e quanto vale? Quanta strada percorre nei primi 3 s, e con quale velocità media? Il carrello si allontana senza limite dal punto di partenza, o resta entro una distanza massima? Motiva le risposte.

Problema 2

Un generatore di tensione ha forza elettromotrice E e resistenza interna r, entrambe costanti. Ai suoi capi si collega un reostato, cioè un resistore di resistenza R regolabile (Figura V6.2a). Per la legge di Ohm la corrente nel circuito è $I = \dfrac{E}{R+r}$ e la potenza dissipata nel reostato è $P = RI^2$.

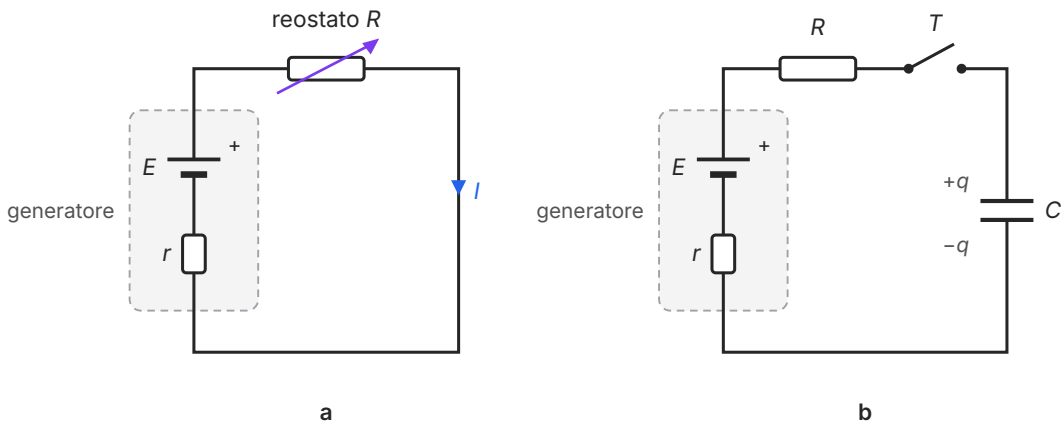

Figura V6.2 a) Il generatore, con forza elettromotrice E e resistenza interna r, alimenta un reostato di resistenza R. b) Lo stesso generatore carica un condensatore di capacità C attraverso un resistore R; il circuito si chiude con l'interruttore T.

a) Con $R = 2\ \Omega$ si misura una corrente $I = 3$ A; con $R = 5\ \Omega$ si misura $I = 1{,}5$ A (dati inventati). Determina E e r, e verifica che la potenza dissipata nel reostato, espressa in watt in funzione di R espressa in ohm, è $P(R) = \dfrac{81R}{(R+1)^2}$.

b) Studia la funzione $P(R) = \dfrac{81R}{(R+1)^2}$ per $R \geq 0$, l'intervallo che ha significato fisico, e tracciane il grafico: valore massimo, punti di flesso, comportamento per $R \to +\infty$. Quale valore di R conviene scegliere per avere nel reostato la massima potenza?

c) Verifica che la potenza $P(R) = \dfrac{81R}{(R+1)^2}$ vale 18 W per due diversi valori di R, e calcola per ciascuno il *rendimento* $\eta = \dfrac{R}{R+1}$, cioè la frazione della potenza erogata dal generatore che arriva al reostato. Quale dei due valori è preferibile? Dimostra poi che, per un generatore qualsiasi, la funzione $P(R) = \dfrac{E^2 R}{(R+r)^2}$ assume lo stesso valore in R e in $\dfrac{r^2}{R}$ per ogni $R > 0$, e spiega il significato di questo risultato.

d) Nel circuito della Figura V6.2b il generatore ($E = 9$ V, $r = 1\ \Omega$) è collegato in serie a un resistore $R = 2\ \Omega$ e a un condensatore di capacità $C = 0{,}1$ F, inizialmente scarico; all'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore. Detta $q(t)$ la carica del condensatore, in coulomb, e $i(t) = q'(t)$ la corrente, la legge delle maglie dà l'equazione differenziale

$$(R + r)\, q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E.$$

Determina $q(t)$ con la condizione $q(0) = 0$ e la corrente $i(t)$. Calcola la costante di tempo $\tau = (R + r)C$ e la frazione della carica finale che il condensatore possiede all'istante $t = \tau$.

e) Nella carica del punto d), la corrente è $i(t) = 3e^{-10t/3}$ (in ampere) e la carica finale del condensatore è $q_\infty = 0{,}9$ C. L'energia dissipata nel resistore R durante tutto il processo è $W_R = \int_0^{+\infty} R i(t)^2\, dt$. Calcola W_R e l'energia W_r dissipata nella resistenza interna, e confronta la loro somma con l'energia $\dfrac{{q_\infty}^2}{2C}$ immagazzinata alla fine nel condensatore e con il lavoro $E q_\infty$ compiuto dal generatore. Dimostra che, qualunque siano i valori di E, R, r e C, metà del lavoro del generatore si trasforma in calore.

Questionario

1. Determina i valori del parametro reale a per i quali è continua in $x = 0$ la funzione g definita da $g(x) = \dfrac{1 - \cos ax}{x \ln(1 + x)}$ per $x > -1$ e $x \neq 0$, e da $g(0) = 8$.

2. Dimostra, applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\ln(1 + t)$ su un opportuno intervallo, che per ogni $x > 0$ si ha $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$. Deduci da queste disuguaglianze che per ogni intero $n \geq 1$ si ha $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n + 1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$, e quindi che $\ln(n + 1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Che cosa se ne conclude per la serie armonica?

3. La regione del primo quadrante delimitata dagli assi cartesiani e dalla parabola di equazione $y = 4 - x^2$ ruota di un giro completo attorno all'asse y. Calcola il volume del solido generato e verifica che è la metà del volume del cilindro circoscritto al solido.

4. Determina la soluzione del problema di Cauchy $y' = x(1 + y^2)$, $y(0) = 1$, e il più ampio intervallo contenente $x = 0$ sul quale essa è definita.

5. Determina l'equazione della sfera di centro $C(1; 2; 3)$ tangente al piano α di equazione $2x - y + 2z + 3 = 0$ e le coordinate del punto di tangenza T. Determina poi il centro e il raggio della circonferenza secondo cui la sfera è tagliata dal piano β di equazione $z = 2$.

6. Un test è formato da 10 domande, ciascuna con 4 risposte di cui una sola esatta. Uno studente risponde a caso a tutte le domande. Calcola la probabilità che dia almeno 6 risposte esatte, il valore atteso e la deviazione standard del numero di risposte esatte, e il numero di risposte esatte più probabile.

7. Dimostra che, congiungendo nell'ordine i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso $ABCD$, si ottiene un parallelogramma, e che l'area di questo parallelogramma è la metà di quella del quadrilatero.

8. Un serbatoio ha la forma di un cono circolare retto con il vertice in basso e l'asse verticale; il raggio di base è 30 cm e l'altezza 60 cm. A partire dal serbatoio vuoto vi si versa acqua con una portata costante di 2 litri al minuto. Con quale velocità sale il livello dell'acqua quando la sua altezza è 20 cm? Perché questa velocità diminuisce nel tempo? Dopo quanto tempo il serbatoio è pieno?

Valutazione: in ventesimi, con la griglia di valutazione ministeriale.

Soluzioni

Problema 1 · a) La derivata è $f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$. Le condizioni sono $f'(1) = 0$ e $f(1) = 2$: $f'(1) = \frac{-2b}{4} = 0$ dà $b = 0$, e $f(1) = \frac{a}{2} = 2$ dà $a = 4$. Quindi $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$. È definita in $\mathbb{R}$ e $f(-x) = \frac{-4x}{x^2+1} = -f(x)$: è dispari. Per ogni x reale, $f(x) \le 2$ equivale a $4x \le 2x^2 + 2$, cioè a $2(x-1)^2 \ge 0$, sempre vera, con l'uguaglianza solo per $x = 1$: $M(1; 2)$ è il punto di massimo assoluto. (Per simmetria, $(-1; -2)$ è il punto di minimo assoluto.)

Problema 1 · b) Dominio $\mathbb{R}$, nessun asintoto verticale; $f(x)$ ha il segno di x e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$: l'asse x è asintoto orizzontale. $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$: f decresce in $]-\infty; -1]$ e in $[1; +\infty[$, cresce in $[-1; 1]$; minimo $(-1; -2)$, massimo $M(1; 2)$. $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, negativa per $x < -\sqrt{3}$ e per $0 < x < \sqrt{3}$, positiva per $-\sqrt{3} < x < 0$ e per $x > \sqrt{3}$: concavità verso il basso in $]-\infty; -\sqrt{3}[$ e in $]0; \sqrt{3}[$, verso l'alto negli altri due intervalli. I flessi sono nei punti in cui f'' cambia segno: $F_1(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $O(0; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, perché $f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ e f è dispari. Le tre coordinate sono uguali: i flessi stanno sulla retta r: $y = x$. Nell'origine $f'(0) = 4$: la tangente inflessionale è $y = 4x$.

Problema 1 · c) $f(x) = x$ equivale a $x(x^2 - 3) = 0$: Γ e r si incontrano proprio nei tre flessi, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$. In $[0; \sqrt{3}]$ si ha $f(x) \ge x$ (per esempio $f(1) = 2 > 1$), e $\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{4x}{x^2+1} - x\right) dx = \left[2\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\ln 4 - \frac{3}{2} = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$. Le due funzioni sono dispari, quindi la parte in $[-\sqrt{3}; 0]$, dove r sta sopra Γ, ha la stessa area. L'area totale è $8\ln 2 - 3 \approx 2{,}545$.

Problema 1 · d) Poiché f è continua in $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F'(x) = f(x)$, che ha il segno di x: F decresce per $x \le 0$ e cresce per $x \ge 0$, con minimo assoluto $F(0) = 0$. Inoltre $F''(x) = f'(x)$ cambia segno in $x = \pm 1$, dove f ha gli estremi: il grafico di F ha due flessi, di ascissa -1 e 1. Esplicitamente $F(x) = [2\ln(t^2+1)]_0^x = 2\ln(1+x^2)$, funzione pari; i flessi sono $(\pm 1; 2\ln 2)$, con tangenti di pendenza $f(\pm 1) = \pm 2$. $\lim_{x\to\pm\infty} 2\ln(1+x^2) = +\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2+1} = 0$ (de l'Hôpital, forma ∞/∞; oppure gerarchia degli infiniti) e lo stesso per $x \to -\infty$: un asintoto obliquo dovrebbe avere pendenza $m = 0$, e allora sarebbe orizzontale, il che è escluso perché F diverge. Nessun asintoto obliquo.

Problema 1 · e) La velocità $v(t) = \frac{4t}{t^2+1}$ è la restrizione di f a $t \ge 0$: il massimo è $v(1) = 2$ m/s, raggiunto a $t = 1$ s. L'accelerazione è $a(t) = v'(t) = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$, negativa per $t > 1$: dopo 1 s il carrello rallenta. Poiché $a'(t) = v''(t)$ è negativa per $0 < t < \sqrt{3}$ e positiva per $t > \sqrt{3}$, e $a(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, il minimo di a si ha nel flesso di v: a $t = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ s, con $a(\sqrt{3}) = \frac{4(1-3)}{16} = -0{,}5$ m/s², cioè una decelerazione di 0,5 m/s². La strada percorsa (la velocità è positiva) è $s(t) = \int_0^t v(u)\,du = 2\ln(1+t^2)$: nei primi 3 s, $s(3) = 2\ln 10 \approx 4{,}61$ m, con velocità media $\frac{2\ln 10}{3} \approx 1{,}54$ m/s. Infine $s(t) \to +\infty$ (punto d)): benché la velocità tenda a 0, il carrello si allontana senza limite, sempre più lentamente; per esempio raggiunge 10 m quando $2\ln(1+t^2) = 10$, cioè a $t = \sqrt{e^5 - 1} \approx 12{,}1$ s.

Problema 2 · a) Da $E = I(R+r)$: $E = 3(2+r)$ e $E = 1{,}5(5+r)$, quindi $6 + 3r = 7{,}5 + 1{,}5r$, da cui $r = 1\ \Omega$ e $E = 9$ V. Allora $I = \frac{9}{R+1}$ e $P = RI^2 = \frac{81R}{(R+1)^2}$ W.

Problema 2 · b) $P(0) = 0$ e $P(R) > 0$ per $R > 0$. $P'(R) = 81 \cdot \frac{(R+1) - 2R}{(R+1)^3} = \frac{81(1-R)}{(R+1)^3}$: P cresce in $[0; 1]$ e decresce per $R \ge 1$; il massimo è $P(1) = \frac{81}{4} = 20{,}25$

W. $P''(R) = \frac{162(R-2)}{(R+1)^4}$: concavità verso il basso per $0 \le R < 2$, verso l'alto per $R > 2$, flesso in (2; 18). $\lim_{R\to+\infty} P(R) = 0$: asintoto orizzontale $P = 0$. Il grafico parte dall'origine con pendenza $P'(0) = 81$, sale al massimo (1; 20,25), scende passando per il flesso (2; 18) e si avvicina all'asse R. Conviene $R = 1\ \Omega$, uguale alla resistenza interna del generatore: è la condizione di massimo trasferimento di potenza.

Problema 2 · c) $\frac{81R}{(R+1)^2} = 18$ equivale a $18R^2 - 45R + 18 = 0$, cioè $2R^2 - 5R + 2 = 0$: $R = 2\ \Omega$ oppure $R = \frac{1}{2}\ \Omega$. I rendimenti sono $\eta = \frac{2}{3} \approx 67\%$ per $R = 2\ \Omega$ e $\eta = \frac{1}{3} \approx 33\%$ per $R = 0{,}5\ \Omega$. È preferibile $R = 2\ \Omega$: a parità di potenza utile il generatore eroga meno potenza totale (27 W contro 54 W) e una corrente minore (3 A contro 6 A), quindi spreca meno energia in calore al suo interno. In generale, $P(\frac{r^2}{R}) = \frac{E^2r^2/R}{(r^2/R + r)^2} = \frac{E^2r^2/R}{r^2(r+R)^2/R^2} = \frac{E^2R}{(R+r)^2} = P(R)$. Significato: ogni potenza minore del massimo si ottiene con due resistenze R_1 e R_2 tali che $R_1R_2 = r^2$ (la loro media geometrica è r), una maggiore e una minore di r; quella maggiore di r ha rendimento maggiore di $\frac{1}{2}$ ed è quella da scegliere. Nel caso numerico, $2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = r^2$.

Problema 2 · d) Con $R + r = 3\ \Omega$ e $\frac{1}{C} = 10\ \mathrm{F}^{-1}$ l'equazione è $3q' + 10q = 9$, cioè $q' = -\frac{10}{3}(q - 0{,}9)$: è a variabili separabili (o lineare del primo ordine). Le sue soluzioni sono $q(t) = 0{,}9 + Ke^{-10t/3}$; la condizione $q(0) = 0$ dà $K = -0{,}9$, quindi $q(t) = 0{,}9(1 - e^{-10t/3})$ C. Verifica: $3q' = 3 \cdot 0{,}9 \cdot \frac{10}{3}e^{-10t/3} = 9e^{-10t/3}$ e $10q = 9 - 9e^{-10t/3}$, con somma 9. La corrente è $i(t) = q'(t) = 3e^{-10t/3}$ A: all'istante iniziale vale $\frac{E}{R+r} = 3$ A, come se il condensatore non ci fosse, poi tende a 0. $\tau = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$ s, e $q(t) = 0{,}9(1 - e^{-t/\tau})$: a $t = \tau$ il condensatore ha la frazione $1 - e^{-1} \approx 0{,}632$, circa il 63%, della carica finale $q_\infty = CE = 0{,}9$ C.

Problema 2 · e) $W_R = \int_0^{+\infty} 2 \cdot 9e^{-20t/3}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} 18[-\frac{3}{20}e^{-20t/3}]_0^b = \frac{54}{20} = 2{,}7$ J; allo stesso modo $W_r = \int_0^{+\infty} 1 \cdot 9e^{-20t/3}\,\mathrm{d}t = 1{,}35$ J. La somma è 4,05 J. Nel condensatore: $\frac{{q_\infty}^2}{2C} = \frac{0{,}81}{0{,}2} = 4{,}05$ J; il lavoro del generatore è $Eq_\infty = 9 \cdot 0{,}9 = 8{,}1\ \mathrm{J} = 4{,}05 + 4{,}05$ J: metà va nel condensatore, metà in calore, divisa fra R e r in proporzione alle resistenze (2 : 1). In generale, con $\tau = (R + r)C$, la soluzione è $q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau})$ e $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-t/\tau}$, quindi il calore totale è $\int_0^{+\infty} (R + r)i(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R+r} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{CE^2}{2}$, mentre il generatore compie il lavoro $E \cdot CE = CE^2$: il calore è sempre la metà del lavoro, qualunque siano E, R, r e C (l'altra metà, $\frac{CE^2}{2} = \frac{{q_\infty}^2}{2C}$, resta nel condensatore).

1. Il dominio $]-1; +\infty[$ ha 0 come punto di accumulazione. Se $a = 0$, $g(x) = 0$ per $x \ne 0$ e il limite è $0 \ne 8$. Se $a \ne 0$, per $x \to 0$ si ha $1 - \cos ax \sim \frac{a^2x^2}{2}$ e $\ln(1 + x) \sim x$; in un quoziente si possono sostituire gli infinitesimi equivalenti, quindi $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{a^2x^2/2}{x \cdot x} = \frac{a^2}{2}$, sia da destra sia da sinistra. g è continua in 0 se e solo se $\frac{a^2}{2} = 8$, cioè $a = 4$ oppure $a = -4$.

2. Fissato $x > 0$, la funzione $h(t) = \ln(1 + t)$ è continua in $[0; x]$ e derivabile in $]0; x[$, con $h'(t) = \frac{1}{1+t}$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in]0; x[$ tale che $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{1}{1+c}$. Da $0 < c < x$ segue $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$, cioè $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$; moltiplicando per $x > 0$ si ottiene la tesi. Con $x = \frac{1}{n}$, n intero positivo, si ha $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$ e $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n + 1) - \ln n$, quindi $\frac{1}{n+1} < \ln(n + 1) - \ln n < \frac{1}{n}$. Sommando le disuguaglianze di destra per $k = 1, 2, \ldots, n$, a sinistra i termini si cancellano a due a due:
$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n + 1) - \ln n) =$

$\ln(n+1)$, perciò $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Le somme parziali della serie armonica superano $\ln(n+1)$, che tende a $+\infty$: la serie armonica diverge.

3. La parabola taglia l'asse x in $x = 2$ e l'asse y in $y = 4$. Con il metodo dei gusci cilindrici $V = 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx = 2\pi[2x^2 - \frac{x^4}{4}]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$. (Oppure con i dischi orizzontali, poiché $x^2 = 4 - y$: $V = \pi \int_0^4 (4 - y)\,dy = 8\pi$.) Il cilindro circoscritto ha raggio 2 e altezza 4: $V_{cil} = \pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi$, e $8\pi = \frac{1}{2} \cdot 16\pi$. Il solido è un segmento di paraboloide di rotazione: il risultato si trova già in Archimede.

4. L'equazione è a variabili separabili e $1 + y^2$ non si annulla mai: $\frac{dy}{1+y^2} = x\,dx$, da cui $\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$. La condizione $y(0) = 1$ dà $c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Poiché l'arcotangente ha valori in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, si può invertire solo dove $\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ (l'altra disuguaglianza è sempre vera): $y(x) = \operatorname{tg}(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4})$ per $x^2 < \frac{\pi}{2}$. Il più ampio intervallo è $]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\approx]-1{,}253;\ 1{,}253[$: agli estremi la soluzione diverge a $+\infty$. Verifica: $y' = x(1 + \operatorname{tg}^2(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4})) = x(1 + y^2)$ e $y(0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

5. Il raggio è la distanza di C da α: $\frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$. Sfera: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, cioè $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. T è il piede della perpendicolare da C ad α: la retta per C con direzione $\mathbf{n} = (2; -1; 2)$ è $(1 + 2k;\ 2 - k;\ 3 + 2k)$; sostituendo in α, $9k + 9 = 0$, $k = -1$, quindi $T(-1; 3; 1)$ (infatti $CT = \sqrt{4+1+4} = 3$). Il piano β: $z = 2$ dista 1 da C, perciò la circonferenza ha centro $(1; 2; 2)$, la proiezione di C su β, e raggio $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

6. Il numero X di risposte esatte è binomiale, $X \sim \mathrm{B}(10; \frac{1}{4})$: $p(X = k) = \binom{10}{k} \frac{3^{10-k}}{4^{10}}$. $p(X \geq 6) = \frac{210 \cdot 81 + 120 \cdot 27 + 45 \cdot 9 + 10 \cdot 3 + 1}{4^{10}} = \frac{20\,686}{1\,048\,576} = \frac{10\,343}{524\,288} \approx 0{,}0197$, circa il 2%. $\mathrm{E}(X) = np = 2{,}5$; $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = \frac{15}{8} = 1{,}875$ e $\sigma(X) \approx 1{,}37$. Il rapporto $\frac{p(X=k+1)}{p(X=k)} = \frac{10-k}{3(k+1)}$ è maggiore di 1 per $k \leq 1$ e minore di 1 per $k \geq 2$: il valore più probabile (la moda) è $k = 2$, con $p(X = 2) = \frac{45 \cdot 6561}{4^{10}} \approx 0{,}282$.

7. Siano M, N, P, Q i punti medi di AB, BC, CD, DA. Nel triangolo ABC, per il teorema dei punti medi, MN è parallelo ad AC e $MN = \frac{1}{2}AC$; nel triangolo ACD, allo stesso modo, QP è parallelo ad AC e $QP = \frac{1}{2}AC$. Il quadrilatero $MNPQ$ ha due lati opposti paralleli e congruenti: è un parallelogramma. Area: il triangolo MBN è simile ad ABC con rapporto $\frac{1}{2}$, quindi la sua area è $\frac{1}{4}$ di quella di ABC; analogamente PDQ, AMQ e NCP hanno area $\frac{1}{4}$ di ACD, ABD e BCD. Poiché il quadrilatero è convesso, ciascuna diagonale lo divide in due triangoli: $S(ABC) + S(ACD) = S(ABD) + S(BCD) = S(ABCD)$. I quattro triangoli d'angolo hanno quindi area totale $\frac{1}{4}S(ABCD) + \frac{1}{4}S(ABCD) = \frac{1}{2}S(ABCD)$, e il parallelogramma, che è ciò che resta, ha area $\frac{1}{2}S(ABCD)$. c.v.d.

8. Quando l'acqua ha altezza h, la superficie libera è un cerchio di raggio $\rho = \frac{30}{60}h = \frac{h}{2}$ (triangoli simili), e il volume d'acqua è $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$ (in cm^3). Derivando rispetto al tempo: $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt}$, con $\frac{dV}{dt} = 2000\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Quindi $\frac{dh}{dt} = \frac{8000}{\pi h^2}$, e per $h = 20$ cm: $\frac{dh}{dt} = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}37$ cm/min. La velocità è inversamente proporzionale a h^2: salendo, la superficie libera si allarga e la stessa quantità d'acqua alza meno il livello. Il volume

del serbatoio è $\frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 60 = 18\,000\pi \text{ cm}^3 \approx 56{,}5 \text{ L}$,

che si riempie in $\frac{18\,000\pi}{2000} = 9\pi \approx 28{,}3$ minuti.