CAPITOLO

16

Variabili aleatorie continue e distribuzione normale

Nessuna misura è esatta, ma gli errori, presi tutti insieme, obbediscono a una legge. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Descrivere una variabile aleatoria continua con la densità e la funzione di ripartizione, e calcolare probabilità come aree.
2. Calcolare valore atteso, varianza, mediana e percentili di una variabile continua, e determinare una costante di normalizzazione.
3. Conoscere le distribuzioni uniforme ed esponenziale, dimostrarne le proprietà e usarle come modelli di tempi di attesa.
4. Studiare la densità normale, standardizzare e usare la tavola di $\Phi(z)$, anche al contrario.
5. Approssimare la binomiale con la normale con la correzione di continuità, e interpretare il teorema del limite centrale.
6. Scegliere e criticare un modello continuo per errori di misura, controllo di qualità e altri fenomeni.

INDICE DEL CAPITOLO

16.1 Variabili aleatorie continue 2

16.2 La distribuzione uniforme e la distribuzione esponenziale 6

16.3 La distribuzione normale 10

16.4 La normale come limite: binomiale e teorema del limite centrale 15

16.5 La normale come modello 18

Matematica 5 · Parte V · Distribuzioni di probabilità · versione 1.0
Capitolo 16: Variabili aleatorie continue e distribuzione normale · pagine 453–478 del volume completo · estratto per lo studio

In un laboratorio di fisica dieci studenti misurano con lo stesso cronometro il periodo di un pendolo. Nessuno ottiene lo stesso numero del compagno: i valori si addensano attorno a un centro e si diradano allontanandosi da esso, più o meno simmetricamente. Se le misure fossero mille invece di dieci, l'istogramma delle frequenze avrebbe il profilo di una campana. Nella stessa campana si dispongono le stature dei coscritti di una leva, i pesi dei pacchi di pasta di una linea di produzione, i punteggi di un test nazionale.

Le variabili aleatorie del capitolo precedente assumevano valori isolati: il numero di teste in dieci lanci, il numero di telefonate in un minuto. Un tempo, una lunghezza, un peso, invece, possono assumere *qualunque* valore di un intervallo, e per descriverli serve uno strumento nuovo. Lo strumento c'è già: è l'integrale. In questo capitolo la probabilità diventa un'*area* sotto il grafico di una funzione, la *densità*; incontreremo tre densità fondamentali (uniforme, esponenziale e normale) e vedremo perché la curva a campana compare ovunque ci sia una somma di molte piccole cause indipendenti.

Useremo gli integrali definiti e impropri dei capitoli 10 e 11, il teorema fondamentale del calcolo integrale e lo studio di funzione del capitolo 7; dal capitolo 15 riprendiamo il valore atteso, la varianza, la distribuzione binomiale e quella di Poisson.

16.1 Variabili aleatorie continue

16.1.1 Perché $p(X = x) = 0$

Un autobus passa alla fermata ogni 10 minuti esatti, e una persona arriva in un istante a caso, senza conoscere l'orario. Sia X il tempo di attesa in minuti: X può essere qualunque numero reale dell'intervallo $[0; 10]$. È naturale assegnare a intervalli di uguale ampiezza la stessa probabilità: $p(0 \le X \le 5) = 0{,}5$, $p(2 \le X \le 3) = 0{,}1$ e, in generale, la probabilità di un intervallo contenuto in $[0; 10]$ è la sua ampiezza divisa per 10.

Qual è allora la probabilità che l'attesa sia *esattamente* di 3 minuti? L'evento $X = 3$ è contenuto in ogni intervallo $[3; 3 + h]$, per cui $0 \le p(X = 3) \le h/10$ per ogni $h > 0$; facendo tendere h a 0 si ottiene $p(X = 3) = 0$. Lo stesso vale per ogni singolo valore. Non è un paradosso: un cronometro ideale con infinite cifre decimali non darà mai «3,000000…» con tutte le cifre nulle. Ciò che ha probabilità positiva sono gli *intervalli* di valori, e una probabilità nulla non significa che l'evento sia impossibile.

Una **variabile aleatoria continua** è una variabile aleatoria che può assumere tutti i valori di un intervallo (anche illimitato) e per la quale ogni singolo valore ha probabilità nulla. La sua legge non si può dare con una tabella $x_i \mapsto p_i$, come nel caso discreto: serve una funzione che dica come la probabilità è *distribuita* lungo la retta.

16.1.2 La densità di probabilità

Immagina di misurare molte volte una grandezza continua e di disegnare l'istogramma delle frequenze relative, con rettangoli di area uguale alla frequenza della classe (quindi di altezza uguale alla frequenza divisa per l'ampiezza della classe). Se il numero delle misure cresce e le classi diventano sempre più strette, il profilo dell'istogramma si avvicina al grafico di una funzione f, e la frequenza di un intervallo, cioè l'area dei rettangoli che vi stanno sopra, si avvicina all'area sotto il grafico di f. È questa l'idea della definizione.

IN SINTESI

Definizione. Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una **densità di probabilità** se

- $f(x) \geq 0$ per ogni x;
- f è integrabile e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Una variabile aleatoria X ha densità f se, per ogni $a \leq b$,

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La probabilità è dunque un'*area*: quella della regione compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$, $x = b$ (Figura 16.1). Le due condizioni della definizione traducono gli assiomi di Kolmogorov: un'area non può essere negativa, e l'area totale, che corrisponde all'evento certo, è 1. Se f è nulla fuori da un intervallo limitato $[\alpha; \beta]$, l'integrale su tutta la retta si riduce a $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$; altrimenti è un integrale improprio, come quelli del capitolo 11.

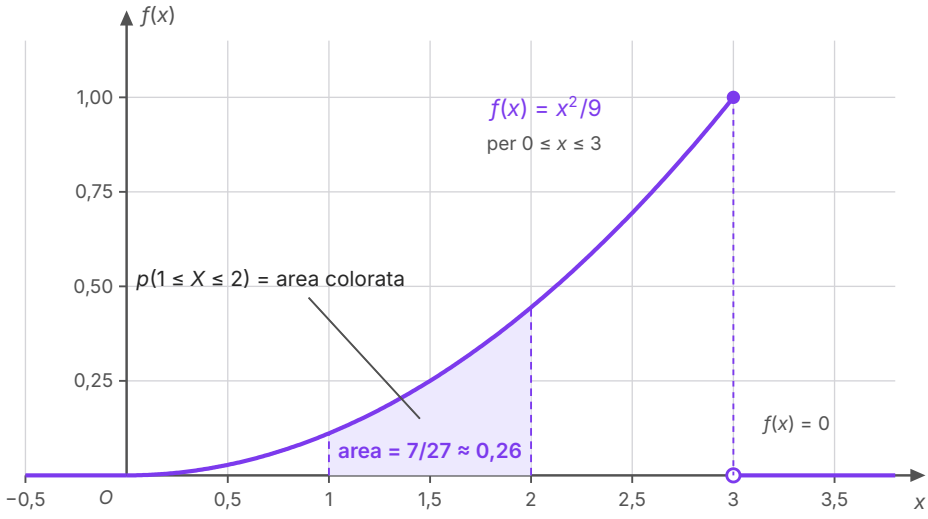


Figura 16.1 La densità $f(x) = x^2/9$ per $0 \le x \le 3$ (nulla altrove). La probabilità $p(1 \le X \le 2)$ è l'area colorata, $\int_1^2 x^2/9\,dx = 7/27 \approx 0{,}26$; l'area totale sotto il grafico è 1.

Nell'esempio dell'autobus la densità è costante: $f(x) = 1/10$ per $0 \le x \le 10$ e $f(x) = 0$ altrove. L'area sotto il grafico è quella di un rettangolo di base 10 e altezza 1/10, cioè 1, e $p(2 \le X \le 3) = \int_2^3 1/10\,dx = 0{,}1$, come avevamo stabilito.

Poiché i singoli punti hanno probabilità nulla, per una variabile continua non importa se gli estremi dell'intervallo sono inclusi o no: $p(a \le X \le b) = p(a < X < b) = p(a \le X < b)$. Inoltre il valore $f(x_0)$ *non* è una probabilità: è una probabilità per unità di lunghezza, tanto che può anche superare 1. Vale però l'approssimazione $p(x_0 \le X \le x_0 + h) \approx f(x_0) \cdot h$ per h piccolo e f continua in x_0, che esprime il senso del nome «densità», come la densità di massa di una sbarra.

16.1.3 La funzione di ripartizione

Come nel caso discreto, la **funzione di ripartizione** di X è $F(x) = p(X \le x)$. Per una variabile con densità f è una funzione integrale:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Da questa scrittura seguono le sue proprietà. F è crescente in senso lato, perché l'integranda non è negativa; è continua (a differenza della funzione «a gradini» delle variabili discrete); $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Inoltre la probabilità di un intervallo si calcola con una sottrazione,

$$p(a \le X \le b) = F(b) - F(a),$$

e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, in ogni punto in cui f è continua si ha $F'(x) = f(x)$: *la densità è la derivata della funzione di ripartizione*. Conoscere f o conoscere F è la stessa cosa. Per l'autobus $F(x) = 0$ per $x < 0$, $F(x) = x/10$ per $0 \le x \le 10$ e $F(x) = 1$ per $x > 10$: un segmento che sale da 0 a 1 (Figura 16.2, in basso a sinistra).

Il **quantile** di ordine q (con $0 < q < 1$) è un numero x_q tale che $F(x_q) = q$; se F è strettamente crescente dove vale fra 0 e 1, è unico. Il quantile di ordine 0,5 è la **mediana** M_e: la retta $x = M_e$ divide l'area sotto la densità in due parti uguali. I quantili di ordine $k/100$ si chiamano **percentili**.

16.1.4 Valore atteso e varianza

Nel capitolo 15 il valore atteso di una variabile discreta era la media dei valori pesata con le probabilità, $\mathrm{E}(X) = \sum x_i\, p_i$. Per una variabile continua le somme diventano integrali e le probabilità p_i diventano gli elementi di probabilità $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se X ha densità f, il **valore atteso** (o media) e la **varianza** di X sono

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\,\mathrm{d}x,$$

quando gli integrali (impropri) convergono. La deviazione standard è $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Come nel caso discreto, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$, con $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x$, e valgono le regole $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ e $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

La formula $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$ si dimostra come nel capitolo 15, sviluppando il quadrato e usando la linearità dell'integrale (gli integrali sono estesi a tutta la retta):

$$\int (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\mu \int x\, f(x)\,\mathrm{d}x + \mu^2 \int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2.$$

Il valore atteso ha anche un significato meccanico: se f fosse la densità di massa di una sbarra di massa 1, $\mathrm{E}(X)$ sarebbe l'ascissa del suo baricentro.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Determinare una costante. Sia $f(x) = kx^2$ per $0 \le x \le 3$ e $f(x) = 0$ altrimenti. a) Determina k in modo che f sia una densità. b) Calcola $p(1 \le X \le 2)$. c) Scrivi la funzione di ripartizione e trova la mediana. d) Calcola valore atteso e varianza.

a) Per $k \ge 0$ si ha $f \ge 0$. La condizione di normalizzazione è $\int_0^3 kx^2\,dx = k\,[x^3/3]_0^3 = 9k = 1$, dunque $k = 1/9$.

b) $p(1 \le X \le 2) = \int_1^2 x^2/9\,dx = [x^3/27]_1^2 = (8 - 1)/27 = 7/27 \approx 0{,}259$. È l'area della Figura 16.1.

c) Per $0 \le x \le 3$, $F(x) = \int_0^x t^2/9\,dt = x^3/27$; inoltre $F(x) = 0$ per $x < 0$ e $F(x) = 1$ per $x > 3$. La mediana risolve $x^3/27 = 1/2$, cioè $x^3 = 27/2$: $M_e = 3/\sqrt[3]{2} \approx 2{,}381$.

d) $\mathrm{E}(X) = \int_0^3 x \cdot x^2/9\,dx = [x^4/36]_0^3 = 81/36 = 9/4 = 2{,}25$; $\mathrm{E}(X^2) = \int_0^3 x^4/9\,dx = [x^5/45]_0^3 = 243/45 = 27/5$. Quindi $\mathrm{Var}(X) = 27/5 - 81/16 = 27/80 = 0{,}3375$ e $\sigma \approx 0{,}581$.

Osservazione. La media (2,25) è minore della mediana (2,381): la densità è asimmetrica e la «coda» verso sinistra, dove la densità è piccola ma i valori sono lontani, abbassa la media più di quanto abbassi la mediana. Infatti $p(X > \mathrm{E}(X)) = 1 - (9/4)^3/27 \approx 0{,}578$: più di metà della probabilità sta a destra della media.

16.2 La distribuzione uniforme e la distribuzione esponenziale

16.2.1 La distribuzione uniforme continua

L'attesa dell'autobus è l'esempio tipico di una variabile **uniforme** su un intervallo $[a; b]$: la densità è costante sull'intervallo e nulla fuori,

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \text{ per } a \le x \le b,\ f(x) = 0 \text{ altrimenti.}$$

La costante è $1/(b - a)$ perché il rettangolo di base $b - a$ deve avere area 1. La funzione di ripartizione, per $a \le x \le b$, è $F(x) = (x - a)/(b - a)$: la probabilità di un sottointervallo è proporzionale alla sua ampiezza e non dipende dalla sua posizione. Il modello uniforme descrive un istante «scelto a caso» in un periodo, l'errore di arrotondamento di una misura letta all'unità più vicina (uniforme su $[-0{,}5; 0{,}5]$), la posizione di un punto scelto a caso su un segmento. È anche ciò che produce la funzione «numero casuale» di un foglio di calcolo, che restituisce un valore uniforme su $[0; 1[$.

Calcoliamo media e varianza. Per simmetria ci aspettiamo che la media sia il punto medio, e infatti

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b \frac{x}{b - a}\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{a + b}{2}.$$

Per la varianza conviene integrare direttamente $(x-\mu)^2$ con $\mu=(a+b)/2$, ponendo $d=(b-a)/2$ (metà ampiezza):

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mu)^2\,dx=\frac{1}{2d}\left[\frac{(x-\mu)^3}{3}\right]_{\mu-d}^{\mu+d}=\frac{1}{2d}\cdot\frac{2d^3}{3}=\frac{d^2}{3}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Per l'autobus, $\mathrm{E}(X)=5$ minuti e $\mathrm{Var}(X)=100/12=25/3$, cioè $\sigma\approx 2{,}89$ minuti.

16.2.2 La distribuzione esponenziale

Quanto bisogna aspettare perché un nucleo radioattivo decada, perché arrivi la prossima chiamata a un centralino, perché un componente elettronico si guasti? In questi fenomeni non c'è un orario come per l'autobus: l'evento può arrivare in qualunque istante, e il fatto di avere già aspettato non lo rende più vicino. Il modello di questi tempi di attesa è la distribuzione esponenziale.

Una variabile X ha **distribuzione esponenziale** di parametro $\lambda>0$ se ha densità

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ \text{per } x\ge 0,\quad f(x)=0\ \text{per } x<0.$$

È una densità: $f\ge 0$ e, calcolando l'integrale improprio come nel capitolo 11,

$$\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lim_{c\to+\infty}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{c}=\lim_{c\to+\infty}\left(1-e^{-\lambda c}\right)=1.$$

Lo stesso calcolo con l'estremo x al posto di c dà la funzione di ripartizione

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\ \text{per } x\ge 0,\ \text{quindi } p(X>x)=e^{-\lambda x}.$$

Il valore atteso si calcola per parti, con x come fattore finito e $\lambda e^{-\lambda x}$ come fattore differenziale:

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-x\,e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\,dx=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda},$$

perché $\lim_{x\to+\infty}x\,e^{-\lambda x}=0$ (l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a ogni potenza). Integrando due volte per parti si trova $\mathrm{E}(X^2)=2/\lambda^2$, e quindi $\mathrm{Var}(X)=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2$: la deviazione standard è uguale alla media. La mediana risolve $1-e^{-\lambda x}=1/2$, cioè $M_e=\ln 2/\lambda\approx 0{,}693/\lambda$: è minore della media, perché la densità ha una lunga coda a destra. La Figura 16.2 mette a confronto la densità e la funzione di ripartizione di una variabile uniforme e di una esponenziale.

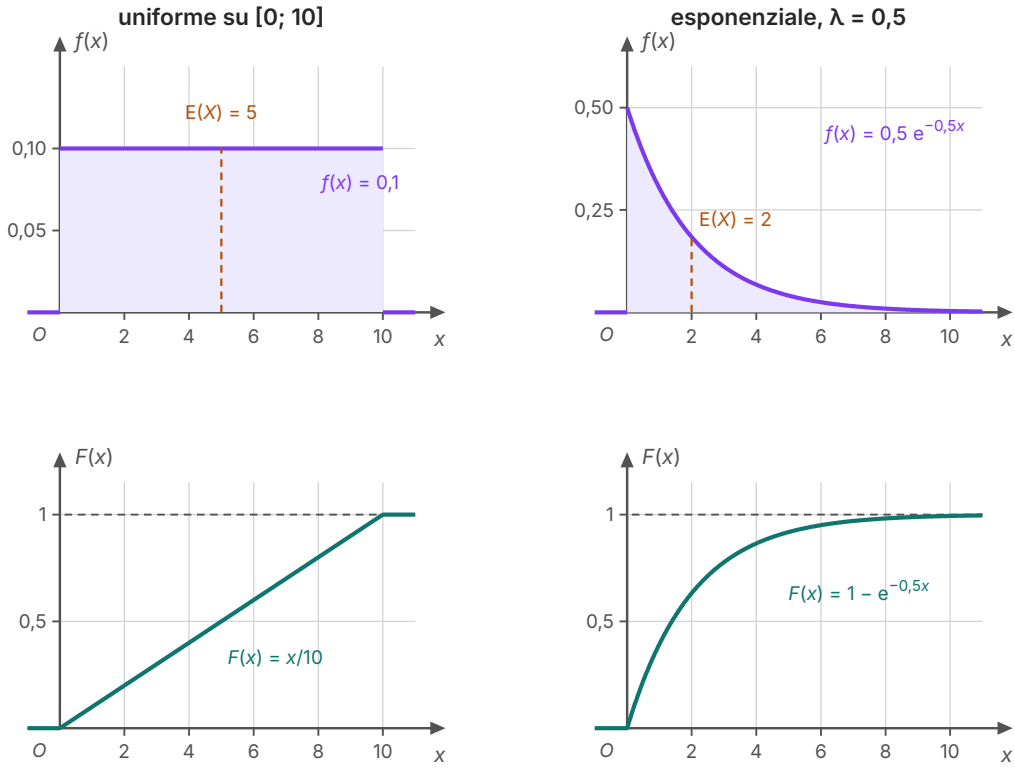


Figura 16.2 In alto le densità, in basso le funzioni di ripartizione. A sinistra la distribuzione uniforme su [0; 10] (l'attesa dell'autobus): F cresce linearmente da 0 a 1. A destra la distribuzione esponenziale con $\lambda = 0{,}5$: la densità decresce da $f(0) = \lambda$, la funzione di ripartizione $F(x) = 1 - e^{-0{,}5x}$ tende a 1 senza raggiungerlo; il valore atteso $1/\lambda = 2$ è segnato in arancione.

16.2.3 L'assenza di memoria

Una lampadina a incandescenza si consuma: dopo mille ore di funzionamento è più probabile che si fulmini nell'ora successiva rispetto a quando era nuova. Un nucleo radioattivo, invece, non invecchia. La proprietà che esprime questo fatto caratterizza la distribuzione esponenziale fra le distribuzioni continue (lo accettiamo senza dimostrazione); dimostriamo che la possiede.

IN SINTESI

Teorema (assenza di memoria). Ipotesi: X ha distribuzione esponenziale di parametro λ; $s \geq 0$, $t \geq 0$. **Tesi:** $p(X > s + t \mid X > s) = p(X > t)$.

Dimostrazione. L'evento $X > s + t$ è contenuto nell'evento $X > s$, quindi la loro intersezione è $X > s + t$. Per la definizione di probabilità condizionata,

$$p(X > s + t \mid X > s) = \frac{p(X > s + t)}{p(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = p(X > t). \text{ c.v.d.}$$

In parole: sapere che l'attesa è già durata un tempo s non cambia la legge dell'attesa residua. Chi aspetta una chiamata a un centralino da cinque minuti non ha «diritto» a una chiamata imminente.

ESEMPIO SVOLTO

La durata di un componente. La durata T (in ore) di un componente elettronico ha distribuzione esponenziale con media 2000 ore (dati inventati). a) Qual è la probabilità che duri più di 3000 ore? b) Che si guasti entro le prime 1000 ore? c) Il componente ha già funzionato 1000 ore: qual è la probabilità che duri ancora almeno 3000 ore? d) Entro quale tempo si guasta metà dei componenti?

Parametro. $E(T) = 1/\lambda = 2000$, quindi $\lambda = 1/2000 = 0{,}0005$ guasti all'ora.

a) $p(T > 3000) = e^{-3000/2000} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}223$.

b) $p(T \le 1000) = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}393$: quasi il 40% dei componenti si guasta prima della metà della durata media. È l'effetto della coda lunga: la media è «tirata» in alto dai pochi componenti che durano moltissimo.

c) Per l'assenza di memoria $p(T > 4000 \mid T > 1000) = p(T > 3000) \approx 0{,}223$, lo stesso valore della domanda a).

d) È la mediana: $M_e = 2000 \ln 2 \approx 1386$ ore.

COLLEGAMENTI

Fisica: il decadimento radioattivo. Nel capitolo 12 la legge $N(t) = N_0\, e^{-kt}$ è nata dall'equazione differenziale $N' = -kN$. Ora la leggiamo con la probabilità: il tempo di vita T di un singolo nucleo ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = k$, e $N(t)/N_0 = e^{-\lambda t} = p(T > t)$ è la frazione attesa di nuclei ancora intatti. Il *tempo di dimezzamento* $\ln 2/\lambda$ è la mediana di T, la *vita media* $1/\lambda$ è il suo valore atteso.

Il legame con Poisson. Se gli eventi (chiamate, decadimenti, guasti) arrivano in modo indipendente con un ritmo medio di λ per unità di tempo, il numero di eventi in un intervallo lungo t ha distribuzione di Poisson di parametro λt (capitolo 15). Allora il tempo T del primo evento supera t se e solo se in $[0; t]$ non arriva nessun evento: $p(T > t) = e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^0/0! = e^{-\lambda t}$. Il conteggio degli eventi è una variabile di Poisson, l'attesa fra un evento e il successivo è esponenziale: sono due facce dello stesso modello.

16.3 La distribuzione normale

16.3.1 La densità di Gauss

Una variabile aleatoria X ha **distribuzione normale** (o **gaussiana**) di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, e si scrive $X \sim N(\mu; \sigma)$, se ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

In questo libro il secondo parametro di $N(\mu; \sigma)$ è la *deviazione standard* σ, non la varianza σ^2: alcuni testi e alcuni programmi scrivono $N(\mu; \sigma^2)$, e conviene controllare sempre la convenzione. Il grafico di f è la **curva di Gauss**, la «campana».

Che l'area sotto la campana sia 1 dipende da un integrale che non sappiamo calcolare con i metodi di questo corso, perché e^{-x^2} non ha una primitiva esprimibile con le funzioni elementari. Ne accettiamo il valore senza dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Con la sostituzione $x = \mu + \sigma\sqrt{2}\,t$, $dx = \sigma\sqrt{2}\,dt$, si ottiene allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1$.

Si dimostra inoltre che $E(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$: i due parametri sono proprio la media e la deviazione standard. Per la media basta la simmetria che stiamo per dimostrare; per la varianza serve un'integrazione per parti che lasciamo a chi vuole approfondire.

16.3.2 Il grafico della densità normale

Studiamo f con i metodi del capitolo 7.

- **Dominio, segno, simmetria.** f è definita e positiva su tutto $\mathbb{R}$, e $f(\mu + h) = f(\mu - h)$ per ogni h: il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x = \mu$.
- **Limiti.** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$: l'asse x è asintoto orizzontale, e la curva vi si avvicina molto rapidamente.
- **Derivata prima.** $f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\, f(x)$: è positiva per $x < \mu$ e negativa per $x > \mu$. Il massimo assoluto è in $x = \mu$, con $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}399}{\sigma}$.
- **Derivata seconda.** Derivando il prodotto $-\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot f(x)$ si ottiene

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^2}\, f(x) + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\, f(x) = \frac{f(x)}{\sigma^4}\,[(x-\mu)^2 - \sigma^2].$$

Poiché $f(x) > 0$, il segno di f' è quello di $(x-\mu)^2 - \sigma^2$: la derivata seconda si annulla e cambia segno in $x = \mu \pm \sigma$, il grafico ha la concavità verso il basso in $]\mu-\sigma;\,\mu+\sigma[$ e verso l'alto fuori da questo intervallo. I punti di flesso sono $(\mu \pm \sigma;\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$.

Il risultato dà ai parametri un significato geometrico (Figura 16.3). **μ** è l'ascissa del centro di simmetria: cambiare μ trasla la campana lungo l'asse x senza deformarla. **σ** è la distanza dei flessi dall'asse di simmetria: aumentare σ allarga la campana e, poiché l'area resta 1, ne abbassa il massimo in proporzione inversa; diminuire σ la rende più stretta e più alta. Una deviazione standard piccola indica valori molto concentrati attorno alla media.

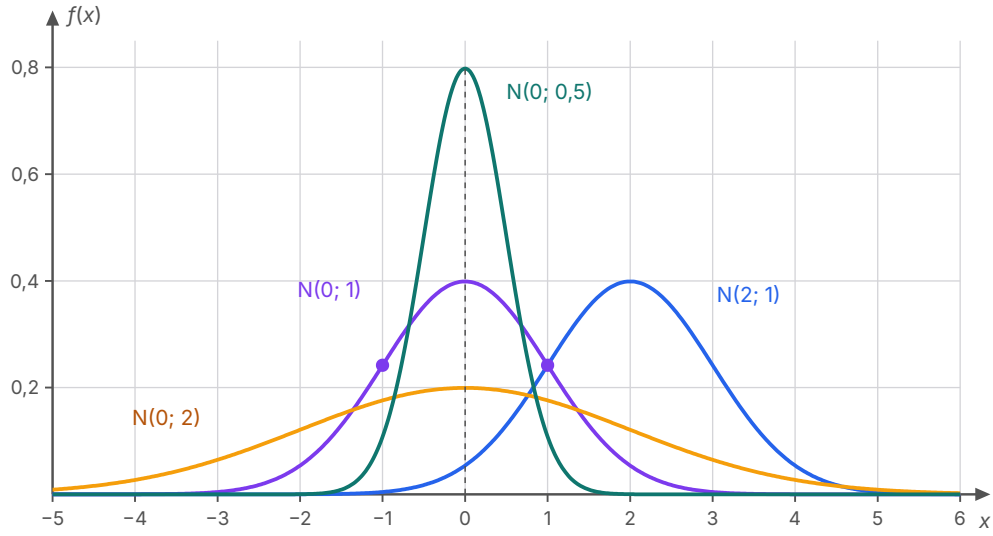


Figura 16.3 Densità normali. Rispetto a N(0; 1) (viola, con i flessi in $x = \pm 1$), la curva N(2; 1) è traslata di 2 a destra; N(0; 2) è larga il doppio e alta la metà; N(0; 0,5) è stretta la metà e alta il doppio. Tutte le aree sotto le curve valgono 1.

16.3.3 La normale standardizzata

La normale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si chiama **normale standard**; la indichiamo con Z, la sua densità con $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$ e la sua funzione di ripartizione con $\Phi(z) = p(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt$. Poiché Φ non si esprime con le funzioni elementari, i suoi valori si leggono in una *tavola*: quella di questo libro è la Tabella F.3 del *Formulario e tavole*, alla fine del volume, e dà $\Phi(z)$ per $0 \le z \le 3{,}09$. I valori per $z < 0$ si ricavano dalla simmetria di φ: l'area a sinistra di $-z$ è uguale all'area a destra di z, quindi

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Per esempio $\Phi(1) = 0{,}8413$, quindi $p(Z \le -1) = 0{,}1587$ e $p(-1 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}6827$.

Una sola tavola basta per tutte le normali, grazie alla **standardizzazione**. Se $X \sim N(\mu; \sigma)$, la variabile $Z = (X - \mu)/\sigma$ misura la distanza di X dalla media in unità di deviazione standard, e ha distribuzione normale standard. Infatti, con la sostituzione $u = (t - \mu)/\sigma$, $dt = \sigma\, du$,

$$p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

IN SINTESI

Calcolo con la normale. Se $X \sim N(\mu; \sigma)$ e $z = (x - \mu)/\sigma$ è il **punteggio standardizzato** di x:

- $p(X \le x) = \Phi(z)$, $p(X \ge x) = 1 - \Phi(z)$;
- $p(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$;
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $p(|X - \mu| \le k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$.

Per una variabile normale, qualunque siano μ e σ: $p(|X - \mu| < \sigma) \approx 0{,}6827$, $p(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 0{,}9545$, $p(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 0{,}9973$ (regola del **68–95–99,7**).

L'ultima formula del riquadro mostra che la probabilità di cadere entro k deviazioni standard dalla media è la stessa per *tutte* le normali. La regola 68–95–99,7 (Figura 16.4) è da sapere a memoria: circa due valori su tre cadono entro una deviazione standard dalla media, 19 su 20 entro due, e fuori da tre deviazioni standard ne cadono meno di 3 su mille. Si confronti con la disuguaglianza di Čebyšev del capitolo 15, valida per ogni distribuzione: essa garantisce soltanto $p(|X - \mu| < 2\sigma) \ge 1 - 1/4 = 0{,}75$. Sapere che la distribuzione è normale dà un'informazione molto più precisa.

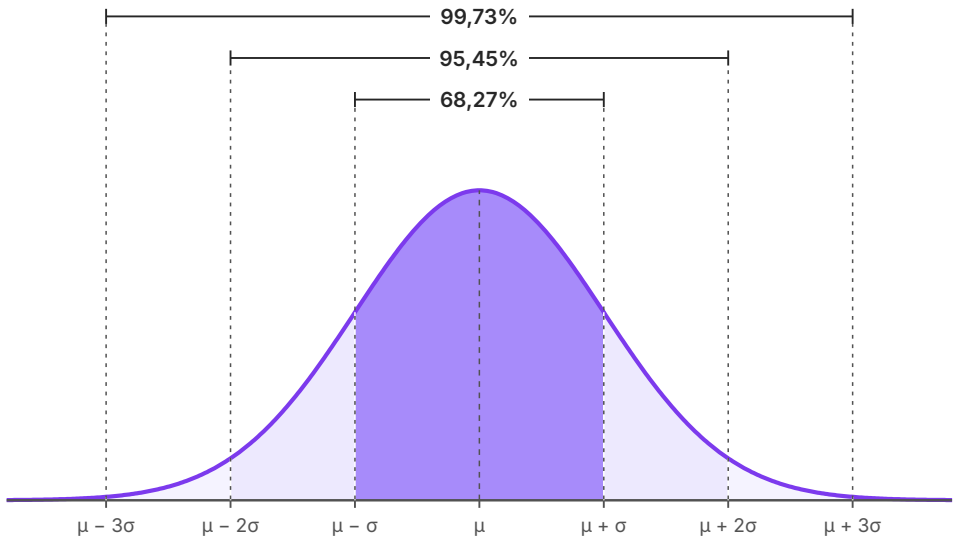


Figura 16.4 La regola 68–95–99,7. Per ogni distribuzione normale l'area entro una deviazione standard dalla media vale 0,6827, entro due 0,9545, entro tre 0,9973 (valori calcolati con $2\Phi(k) - 1$).

ESEMPIO SVOLTO

Le stature. Le stature (in cm) dei ragazzi di diciotto anni di una regione hanno distribuzione $N(170; 7)$ (dati inventati). Si sceglie un ragazzo a caso. a) Qual è la probabilità che sia alto più di 180 cm? b) Che sia alto fra 160 e 175 cm? c) Quale statura è superata solo dal 10% dei ragazzi?

a) Si standardizza: $z = (180 - 170)/7 \approx 1{,}43$. Dalla tavola $\Phi(1{,}43) = 0{,}9236$, quindi $p(X > 180) = 1 - 0{,}9236 = 0{,}0764$: circa il 7,6%.

b) $z_1 = (160 - 170)/7 \approx -1{,}43$ e $z_2 = (175 - 170)/7 \approx 0{,}71$. Allora $p(160 \le X \le 175) = \Phi(0{,}71) - \Phi(-1{,}43) = 0{,}7611 - (1 - 0{,}9236) = 0{,}6847$. La Figura 16.5 mostra che l'area cercata sotto la curva di X e l'area sotto la curva di Z fra i punteggi standardizzati sono la stessa area.

c) È il percentile 90: si cerca z con $\Phi(z) = 0{,}90$. Nella tavola $\Phi(1{,}28) = 0{,}8997$ e $\Phi(1{,}29) = 0{,}9015$, quindi $z \approx 1{,}28$. Tornando alla variabile X: $x = \mu + z\sigma = 170 + 1{,}28 \cdot 7 \approx 179$ cm.

Controllo. I valori esatti, calcolati senza arrotondare z, sono 0,0766 e 0,6859: con la tavola si commette un errore sulla terza cifra decimale, del tutto accettabile.

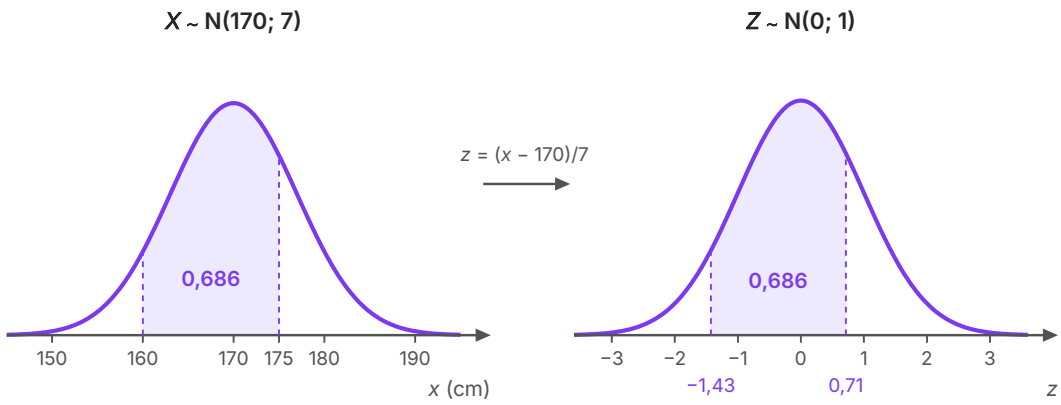


Figura 16.5 La standardizzazione $z = (x - 170)/7$ trasforma la curva di $X \sim N(170; 7)$ in quella di $Z \sim N(0; 1)$ e l'intervallo [160; 175] nell'intervallo [−1,43; 0,71]: le due aree colorate sono uguali (circa 0,686).

16.3.4 L'uso inverso della tavola

Nella domanda c) dell'esempio la tavola è stata usata «al contrario»: invece di cercare l'area corrispondente a un valore di z, si è cercato il valore di z corrispondente a un'area. È il problema dei percentili, frequentissimo nelle applicazioni: quale soglia superano solo il 5% dei candidati? Quale tolleranza contiene il 99% dei pezzi? Il procedimento è sempre lo stesso: si traduce la richiesta in una condizione $\Phi(z) = q$; se $q < 0{,}5$ si cerca nella tavola $1 - q$ e si cambia segno a z, sfruttando la simmetria; infine si torna alla variabile originale con $x = \mu + z\sigma$.

Tre valori di z compaiono così spesso che conviene ricordarli: $\Phi(1{,}645) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$ e $\Phi(2{,}576) \approx 0{,}995$. Ne segue che l'intervallo $\mu \pm 1{,}645\sigma$ contiene il 90% dei valori di una normale, $\mu \pm 1{,}96\sigma$ il 95% e $\mu \pm 2{,}576\sigma$ il 99%. Sono i numeri che si ritrovano negli intervalli di confidenza della statistica e nelle tolleranze dei processi industriali.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di standardizzare. Se $X \sim \mathrm{N}(170;\ 7)$, $p(X \le 175)$ *non* è $\Phi(175)$: è $\Phi((175-170)/7) = \Phi(0{,}71)$. La tavola dà solo la normale standard.

Dividere per la varianza. In $\mathrm{N}(\mu;\ \sigma)$ il secondo parametro è la deviazione standard. Se un testo dà la varianza, per esempio «media 10 e varianza 16», allora $\sigma = 4$ e $z = (x - 10)/4$, non $(x-10)/16$.

Leggere $f(x)$ come una probabilità. Se $f(x) = x^2/9$, «$f(2) = 4/9$, quindi la probabilità che X valga 2 è 4/9» è sbagliato: $p(X = 2) = 0$. Il valore della densità è un tasso, non una probabilità, e può superare 1: la densità uniforme su $[0;\ 0{,}5]$ vale 2, il massimo di $\mathrm{N}(0;\ 0{,}5)$ vale circa 0,8. Solo le *aree* sotto il grafico sono probabilità.

Confondere $p(X \le a)$ e $p(X < a)$. Per una variabile continua sono uguali, perché $p(X = a) = 0$. Per una variabile discreta in generale no: se X è il numero di teste in due lanci di una moneta, $p(X \le 1) = 3/4$ ma $p(X < 1) = 1/4$. È la differenza che conta quando si approssima una binomiale con una normale, come vedremo nella prossima sezione.

Sbagliare il verso. $\Phi(z)$ è l'area a *sinistra* di z. Per $p(X \ge x)$ serve il complemento $1 - \Phi(z)$, e per z negativo la simmetria $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

16.4 La normale come limite: binomiale e teorema del limite centrale

16.4.1 L'approssimazione normale della binomiale

La Figura 16.6 mostra l'istogramma della distribuzione binomiale $\mathrm{B}(30;\ 0{,}5)$, il numero di teste in 30 lanci di una moneta, con un rettangolo di base 1 centrato su ogni valore k. Sopra è disegnata la densità normale con la stessa media $np = 15$ e la stessa deviazione standard $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7{,}5} \approx 2{,}74$: la campana segue il profilo dell'istogramma quasi perfettamente.

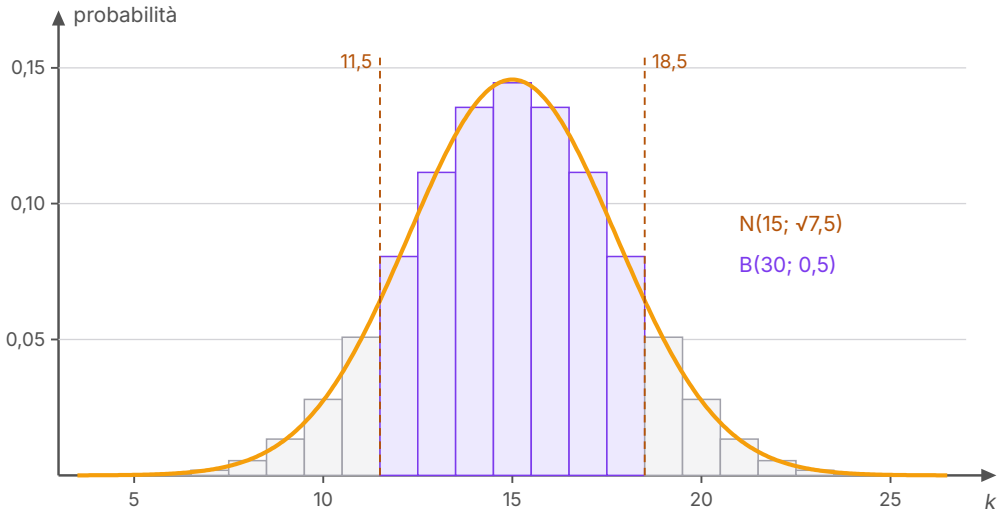


Figura 16.6 L'istogramma della binomiale B(30; 0,5) (rettangoli di base 1 centrati sugli interi) e la densità normale N(15; $\sqrt{7{,}5}$). Per calcolare $p(12 \le X \le 18)$ (rettangoli viola) si prende l'area sotto la campana fra 11,5 e 18,5: 0,7988 contro il valore esatto 0,7995.

Non è una coincidenza. Più n è grande, più la binomiale B(n; p) è vicina alla normale con la stessa media e la stessa deviazione standard. Il risultato vale per ogni p fisso con $0 < p < 1$, ma la convergenza è più lenta se p è vicino a 0 o a 1, perché allora l'istogramma è asimmetrico; una regola pratica diffusa è usare l'approssimazione quando $np \ge 5$ e $n(1-p) \ge 5$. Si tratta di una regola empirica, non di un teorema: indica quando l'errore è in genere piccolo. Se p è piccolo e np non lo è abbastanza, il modello adatto è quello di Poisson del capitolo 15.

C'è un dettaglio. La binomiale è discreta, la normale continua: il valore intero k corrisponde al rettangolo che va da $k - 0{,}5$ a $k + 0{,}5$. Per approssimare $p(X \le k)$ si prende allora l'area sotto la campana fino a $k + 0{,}5$, e per $p(X \ge k)$ quella da $k - 0{,}5$: è la **correzione di continuità**.

Riassumendo: se $X \sim \mathrm{B}(n; p)$ con $np \ge 5$ e $n(1-p) \ge 5$, allora X è approssimativamente N(np; $\sqrt{np(1-p)}$) e, con la correzione di continuità, per due interi $h \le k$

$$p(h \le X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{h - 0{,}5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

ESEMPIO SVOLTO

Un controllo su un lotto. Una macchina produce pezzi difettosi con probabilità 0,1, indipendentemente l'uno dall'altro (dati inventati). In un lotto di 200 pezzi, qual è la probabilità che i difettosi siano al massimo 25?

Modello. Il numero X di difettosi è B(200; 0,1). Calcolare in modo esatto $\sum_{k=0}^{25} C_{200,k}\, 0{,}1^{k}\, 0{,}9^{200-k}$ richiede 26 termini: lo fa un computer, non una persona con una calcolatrice.

Condizioni. $np = 20 \geq 5$ e $n(1-p) = 180 \geq 5$. Media 20, deviazione standard $\sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{18} \approx 4{,}243$.

Approssimazione con correzione. $p(X \leq 25) \approx \Phi((25{,}5 - 20)/4{,}243) = \Phi(1{,}30) = 0{,}9032$.

Confronto. Il valore esatto, calcolato con un foglio di calcolo, è 0,8995: l'errore è di quattro millesimi. Senza la correzione di continuità avremmo ottenuto $\Phi((25 - 20)/4{,}243) = \Phi(1{,}18) = 0{,}8810$, con un errore cinque volte più grande.

16.4.2 Il teorema del limite centrale

Perché proprio la normale? Nel capitolo 15 abbiamo scritto la binomiale come somma di n variabili di Bernoulli indipendenti, ciascuna uguale a 1 in caso di successo e a 0 altrimenti. L'approssimazione della Figura 16.6 è un caso particolare di un fatto molto più generale: *la somma di molte variabili aleatorie indipendenti, nessuna delle quali prevale sulle altre, ha una distribuzione vicina alla normale, qualunque sia la distribuzione degli addendi*.

Un esperimento lo mostra. Il risultato di un dado ha distribuzione uniforme: sei rettangoli uguali. La somma di due dadi ha l'istogramma triangolare del capitolo 15. La somma di tre dadi ha già la forma di una campana: va da 3 a 18, i valori più probabili sono 10 e 11, ciascuno con probabilità 27/216 = 0,125. La normale con la stessa media 10,5 e la stessa varianza $3 \cdot 35/12 = 8{,}75$ assegna all'intervallo [9,5; 10,5] la probabilità 0,132: con soli tre addendi l'approssimazione è già discreta.

Si può anche costruire un esperimento fisico. In una tavoletta inclinata sono piantati alcuni chiodi a file sfalsate; una pallina che scende urta un chiodo per fila e rimbalza a destra o a sinistra con la stessa probabilità, finché cade in una delle caselle sul fondo. La posizione finale è la somma degli spostamenti, e il numero di rimbalzi a destra ha distribuzione binomiale: lasciando cadere molte palline, i mucchi nelle caselle disegnano la campana. Il dispositivo è noto come *tavola di Galton*, dal nome dello scienziato inglese Francis Galton che lo usò per illustrare la distribuzione normale.

IN SINTESI

Teorema del limite centrale (enunciato senza dimostrazione). Siano X_1, X_2, ..., X_n variabili aleatorie indipendenti con la stessa distribuzione, di media μ e deviazione standard σ, e sia $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Allora, per ogni z,

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z\right) = \Phi(z).$$

Per n grande, dunque, S_n è approssimativamente $N(n\mu;\ \sigma\sqrt{n})$, e la media S_n/n è approssimativamente $N(\mu;\ \sigma/\sqrt{n})$.

Le grandezze $n\mu$ e $\sigma\sqrt{n}$ non sono una sorpresa: per le proprietà del capitolo 15 la somma di n variabili indipendenti ha media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$. La parte nuova, e profonda, è la *forma* della distribuzione limite, che non dipende dalla forma degli addendi. Per la binomiale $\mu = p$ e $\sigma^2 = p(1-p)$, e si ritrova $N(np;\ \sqrt{np(1-p)})$.

APPROFONDIMENTO · DA DE MOIVRE A GAUSS

Abraham de Moivre, matematico francese emigrato a Londra, pubblicò nel 1733 un breve scritto in latino in cui approssimava le somme di coefficienti binomiali per n grande, nel caso del lancio di una moneta: è la prima comparsa della curva che oggi chiamiamo normale. Pierre-Simon Laplace estese il risultato a ogni valore di p nella sua *Théorie analytique des probabilités* (1812), e per questo l'approssimazione della sezione precedente porta il nome di teorema di de Moivre–Laplace.

Carl Friedrich Gauss arrivò alla stessa curva per un'altra strada: nella *Theoria motus corporum coelestium* (1809), dedicata al calcolo delle orbite, la usò come legge degli errori delle osservazioni astronomiche, insieme al metodo dei minimi quadrati. Il suo nome è rimasto legato alla curva («gaussiana»), anche se de Moivre l'aveva incontrata più di settant'anni prima.

16.5 La normale come modello

16.5.1 Gli errori di misura

Il teorema del limite centrale spiega perché la normale è il modello più usato delle scienze sperimentali. L'errore casuale di una misura (la lettura di una scala, l'istante in cui si preme il pulsante del cronometro, una vibrazione del tavolo) è la somma di molti piccoli disturbi indipendenti, ciascuno dei quali sposta il risultato un po' in eccesso o un po' in difetto: è ragionevole che la loro somma sia distribuita normalmente attorno al valore vero. È il modello della *curva degli errori* che si usa in fisica: le misure ripetute di una grandezza sono $N(\mu;\ \sigma)$, dove μ è il valo-

re vero (se non ci sono errori sistematici) e σ misura la precisione dello strumento e del metodo.

Il modello spiega anche un'abitudine del laboratorio di fisica: si ripete una misura n volte e si dà come risultato la media. Se le singole misure sono indipendenti con deviazione standard σ, la loro media ha deviazione standard $\sigma/\sqrt{n}$ (per le proprietà della varianza) ed è approssimativamente normale (per il teorema del limite centrale). Quadruplicare il numero delle misure dimezza l'incertezza casuale. Non riduce affatto, invece, un *errore sistematico*, come quello di uno strumento tarato male, che sposta tutte le misure nello stesso verso: la media di cento misure sbagliate nello stesso modo è sbagliata come ciascuna di esse.

16.5.2 Il controllo di qualità

Una macchina produce perni il cui diametro nominale è 20,00 mm; sono accettati i perni con diametro fra 19,90 e 20,10 mm (la **tolleranza** è ± 0,10 mm). Il diametro D di un perno è N(20,00; 0,05), in mm (dati inventati). La frazione di perni fuori tolleranza è

$$p(|D - 20| > 0{,}10) = 1 - p(|Z| \le 2) = 2(1 - \Phi(2)) = 2 \cdot 0{,}0228 = 0{,}0456,$$

cioè circa 46 perni su mille. Per scendere all'1% di scarti, senza cambiare la tolleranza, bisogna rendere la macchina più precisa: serve $2(1 - \Phi(z)) = 0{,}01$, cioè $\Phi(z) = 0{,}995$, con $z = 0{,}10/\sigma$. Dalla tavola $\Phi(2{,}57) = 0{,}9949$ e $\Phi(2{,}58) = 0{,}9951$, quindi $z \approx 2{,}575$ e $\sigma \le 0{,}10/2{,}575 \approx 0{,}039$ mm. Nell'industria si ragiona proprio così: la tolleranza è fissata dal progetto, e la qualità del processo si misura con il numero di deviazioni standard che stanno nella metà della tolleranza.

16.5.3 I limiti del modello

Un modello non è la realtà, e la normale ha un difetto evidente: assegna probabilità positiva a *ogni* intervallo della retta. Se le stature sono N(170; 7), la «probabilità» di una statura negativa è $\Phi(-170/7) = \Phi(-24{,}3)$, un numero dell'ordine di 10^{-130}: positivo, quindi formalmente assurdo, ma così piccolo da non avere alcuna conseguenza pratica. Il modello è affidabile nella parte centrale della distribuzione, entro tre o quattro deviazioni standard dalla media, e non va interrogato sulle code estreme.

Inoltre non tutto è normale. I tempi di attesa e le durate sono asimmetrici e si descrivono meglio con l'esponenziale; i redditi hanno una lunga coda a destra; una grandezza che è il *prodotto* di molti fattori, e non la somma, tende a una distribuzione asimmetrica. Scegliere un modello significa controllare che le sue ipotesi (somma di molte cause indipendenti, simmetria, assenza di valori impossibili nelle regioni che contano) siano ragionevoli per il fenomeno: è la differenza, richiamata più volte in questo volume, fra la deduzione matematica, che è certa, e la modellizzazione, che sceglie fra descrizioni diverse dello stesso fenomeno.

APPROFONDIMENTO · L'INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA

In *Matematica 3* hai distinto la popolazione dal campione. Supponiamo di voler stimare la media μ di una grandezza la cui deviazione standard σ è nota (per esempio la precisione di uno strumento), e di misurarla n volte in modo indipendente. La media campionaria $\bar{x}$ è approssimativamente $N(\mu; \sigma/\sqrt{n})$, quindi $p(|\bar{x} - \mu| \le 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}) \approx 2\Phi(1{,}96) - 1 = 0{,}95$.

L'intervallo $[\bar{x} - 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n};\ \bar{x} + 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}]$ si chiama **intervallo di confidenza** al 95% per μ: il procedimento che lo costruisce «cattura» il valore vero in 95 casi su 100. Per esempio, 16 misure di una lunghezza con uno strumento di precisione $\sigma = 0{,}8$ mm danno la media $\bar{x} = 125{,}3$ mm; l'intervallo è $125{,}3 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}8/4 = 125{,}3 \pm 0{,}39$, cioè $[124{,}91; 125{,}69]$ mm. Quando σ non è noto e va stimato dal campione servono strumenti della statistica inferenziale che vanno oltre questo corso.

SINTESI

- Una variabile aleatoria continua assume tutti i valori di un intervallo e ogni singolo valore ha probabilità nulla: $p(X = x) = 0$. Hanno probabilità positiva gli intervalli.
- Una densità di probabilità è una funzione $f \geq 0$ con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; se X ha densità f, $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$: la probabilità è un'area, e $f(x)$ non è una probabilità.
- La funzione di ripartizione $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ è continua e crescente da 0 a 1; $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ e $F' = f$ dove f è continua. La mediana risolve $F(x) = 1/2$.
- $E(X) = \int x f(x)\,dx$, $\mathrm{Var}(X) = \int (x - \mu)^2 f(x)\,dx = E(X^2) - \mu^2$.
- Uniforme su $[a; b]$: $f = 1/(b - a)$, $E(X) = (a + b)/2$, $\mathrm{Var}(X) = (b - a)^2/12$.
- Esponenziale di parametro λ: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E(X) = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$, mediana $\ln 2/\lambda$; è senza memoria e descrive i tempi di attesa fra eventi di Poisson e il decadimento radioattivo.
- Normale $N(\mu; \sigma)$: densità $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, simmetrica rispetto a $x = \mu$, massimo in μ, flessi in $\mu \pm \sigma$; $E(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$.
- Standardizzazione: $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0; 1)$, $p(X \leq x) = \Phi((x - \mu)/\sigma)$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$; percentili con la tavola usata al contrario.
- Regola 68–95–99,7: entro σ, 2σ, 3σ dalla media cade il 68,27%, il 95,45%, il 99,73% dei valori.
- Se $np \geq 5$ e $n(1 - p) \geq 5$, $B(n; p)$ si approssima con $N(np; \sqrt{np(1-p)})$, usando la correzione di continuità ($\pm 0{,}5$).
- Teorema del limite centrale: la somma di n variabili indipendenti con la stessa distribuzione è approssimativamente $N(n\mu; \sigma\sqrt{n})$; per questo la normale è il modello degli errori di misura.
- La normale è un modello: va usata dove le sue ipotesi sono ragionevoli e non interrogata sulle code estreme.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se X è una variabile aleatoria continua con densità f e funzione di ripartizione F, allora $p(X = 2)$ è uguale a:

   A. $f(2)$
   B. $F(2)$
   C. 0
   D. $1 - F(2)$

2. ● Quale delle seguenti funzioni, definite per $0 \le x \le 2$ e nulle altrove, è una densità di probabilità?

   A. $f(x) = x$
   B. $f(x) = x/2$
   C. $f(x) = x - 1$
   D. $f(x) = 2x$

3. ● Se $X \sim N(10; 2)$, allora $p(X \le 10)$ vale:

   A. 0
   B. 0,6827
   C. non si può dire senza la tavola
   D. 0,5

4. ● La densità di $X \sim N(50; 4)$ ha i punti di flesso in:

   A. $x = 46$ e $x = 54$
   B. $x = 42$ e $x = 58$
   C. $x = 48$ e $x = 52$
   D. $x = 34$ e $x = 66$

5. ● Una variabile esponenziale ha valore atteso 4. Il suo parametro λ è:

   A. 4
   B. 16
   C. 1/4
   D. 1/16

6. ●● Se $Z \sim N(0; 1)$, usando la tavola, $p(-1 \le Z \le 2)$ vale:

   A. 0,9545
   B. 0,6827
   C. 0,1359
   D. 0,8185

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Per ogni densità si ha $f(x) \le 1$. b) La funzione di ripartizione di una variabile continua è continua e crescente in senso lato. c) Per una variabile continua $p(X < a) = p(X \le a)$. d) Nella famiglia $N(\mu; \sigma)$, se σ aumenta il massimo della densità aumenta. e) Se X è esponenziale, $p(X > 7 \mid X > 3) = p(X > 4)$.

8. ● Completa. Se X ha densità f, la funzione di ripartizione è $F(x) =$ _____ ; nei punti in cui f è continua $F'(x) =$ _____ . Se $X \sim N(\mu; \sigma)$, la variabile $Z =$ _____ ha distribuzione _____ , e $p(|X - \mu| < 2\sigma) \approx$ _____ .

Calcolare

9. ● Sia $f(x) = k(4 - x)$ per $0 \le x \le 4$ e $f(x) = 0$ altrimenti. a) Determina k in modo che f sia una densità. b) Scrivi la funzione di ripartizione F. c) Calcola $p(X \le 1)$. d) Calcola $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$. e) Determina la mediana.

10. ●● Sia $f(x) = k/x^2$ per $x \geq 1$ e $f(x) = 0$ per $x < 1$. a) Determina k. b) Trova $F(x)$ e $p(X > 4)$. c) Mostra che X non ha valore atteso finito.

11. ● X ha distribuzione uniforme su $[2; 8]$. Scrivi la densità e calcola $p(3 \leq X \leq 5)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ e $\sigma(X)$.

12. ● X ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0{,}2$. Calcola $p(X > 5)$, $p(2 \leq X \leq 6)$ e la mediana.

13. ● Se $Z \sim \mathrm{N}(0; 1)$, calcola con la tavola: a) $p(Z \leq 1{,}25)$; b) $p(Z > 0{,}6)$; c) $p(Z \leq -1{,}5)$; d) $p(-0{,}5 \leq Z \leq 1{,}5)$.

14. ●● Se $X \sim \mathrm{N}(80; 5)$, calcola: a) $p(X \leq 88)$; b) $p(X \geq 72)$; c) $p(75 \leq X \leq 90)$; d) $p(|X - 80| > 10)$.

15. ●● a) Determina con la tavola z tale che $\Phi(z) = 0{,}95$. b) Se $X \sim \mathrm{N}(500; 100)$, trova a tale che $p(X \leq a) = 0{,}95$ e b tale che $p(X > b) = 0{,}80$.

16. ●● $X \sim \mathrm{N}(20; \sigma)$ e $p(X > 23) = 0{,}10$. Determina σ.

17. ●● Si lancia 400 volte una moneta equilibrata. Con l'approssimazione normale e la correzione di continuità, calcola la probabilità di ottenere almeno 220 teste.

18. ●● Sia $f(x) = kx\,e^{-x^2}$ per $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ per $x < 0$. a) Determina k. b) Trova $F(x)$ e la mediana. c) In quale punto la densità è massima?

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che la varianza di una variabile uniforme su $[a; b]$ è $(b - a)^2/12$, calcolando $\mathrm{E}(X^2)$ e usando $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$.

20. ●● Dimostra che, se $X \sim \mathrm{N}(\mu; \sigma)$, la probabilità $p(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$ vale $2\Phi(k) - 1$ e quindi non dipende né da μ né da σ.

21. ●● *Trova l'errore.* «Il peso X di una confezione è normale con media 10 e varianza 16. Allora $p(X \leq 13) = \Phi((13 - 10)/16) = \Phi(0{,}19) = 0{,}5753$.» Individua l'errore e calcola il valore corretto.

22. ●●● Dimostra che, se X ha distribuzione esponenziale di parametro λ, allora $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. (Calcola $\mathrm{E}(X^2)$ integrando per parti e usa $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$.)

23. ●●● Sia X una variabile con densità f e siano $a > 0$ e b numeri reali. Dimostra, partendo dalla funzione di ripartizione, che $Y = aX + b$ ha densità $g(y) = \dfrac{1}{a}\, f\!\left(\dfrac{y - b}{a}\right)$. Deduci che, se $X \sim \mathrm{N}(\mu; \sigma)$, allora $(X - \mu)/\sigma$ ha densità φ.

Problemi

24. ●● Un treno della metropolitana passa ogni 6 minuti e un passeggero arriva in banchina in un istante a caso. a) Qual è la probabilità che aspetti più di 4 minuti? b) Calcola il valore atteso e la deviazione standard dell'attesa. c) Se il passeggero prende la metropolitana in 5 giorni diversi (attese indipendenti), qual è la probabilità che non aspetti mai più di 4 minuti?

25. ●● La durata di una lampada a LED ha distribuzione esponenziale con media 25 000 ore (dati inventati). a) Qual è la probabilità che duri più di 30 000 ore? b) Dopo quante ore si è guastata metà delle lampade? c) Una lampada ha già funzionato 20 000 ore: qual è la probabilità che funzioni ancora per almeno 10 000 ore? d) Il produttore vuole dare una garanzia di t ore in modo che si guasti entro la garanzia solo il 5% delle lampade: quanto vale t?

26. ●● Una macchina riempie bottiglie con una quantità d'acqua (in ml) N(1000; 4) (dati inventati); l'etichetta dichiara almeno 990 ml. a) Quale frazione delle bottiglie contiene meno di 990 ml? b) A quale valore si deve regolare la media, lasciando $\sigma = 4$, perché le bottiglie sotto 990 ml siano solo lo 0,1%? c) Con la regolazione iniziale, qual è la probabilità che in una confezione di 50 bottiglie ce ne sia almeno una sotto 990 ml?

27. ●● Gli errori casuali di uno strumento sono N(0; 0,2), in mm. a) Qual è la probabilità che una singola misura abbia un errore minore di 0,3 mm in valore assoluto? b) Si fanno 16 misure indipendenti e se ne prende la media: qual è la deviazione standard dell'errore della media, e qual è la probabilità che sia minore di 0,1 mm in valore assoluto?

28. ●● I punteggi di un test di ammissione sono distribuiti come N(60; 12) (dati inventati). a) È ammesso il 15% dei candidati con i punteggi più alti: qual è il punteggio minimo per l'ammissione? b) Quale percentuale dei candidati ha un punteggio fra 50 e 70?

Con il computer

29. ●● *Simulazione.* In un foglio di calcolo genera 1000 righe; in ogni riga somma 12 numeri prodotti dalla funzione «numero casuale» (uniformi su [0; 1[) e sottrai 6. a) Spiega perché il risultato S ha media 0 e varianza 1. b) Costruisci l'istogramma dei 1000 valori di S con classi di ampiezza 0,5 e confrontalo con la densità φ moltiplicata per $1000 \cdot 0{,}5$. c) Calcola la frazione dei valori con $|S| < 1$, $|S| < 2$, $|S| < 3$ e confrontala con la regola 68–95–99,7.

30. ●● Il foglio di calcolo ha una funzione «distribuzione normale» (che restituisce Φ per la normale standard o la funzione di ripartizione di N(μ; σ)), la sua inversa e una funzione «distribuzione binomiale» cumulativa. a) Controlla con il foglio di calcolo alcuni valori della tavola di Φ, e ritrova il percentile 95 della normale standard. b) Se $X \sim$ B(50; 0,4), calcola $p(X \le 15)$ in modo esatto, poi con l'approssimazione normale con e senza correzione di continuità, e confronta i tre valori.

Verso l'esame

31. ●● Determina a e b in modo che $f(x) = ax + b$ per $0 \le x \le 2$ (e $f(x) = 0$ altrove) sia la densità di una variabile aleatoria con valore atteso 7/6. Verifica che la funzione trovata non è mai negativa e calcola $p(X \ge 1)$.

32. ●● Dimostra che la retta tangente alla curva di Gauss di N(μ; σ) in un suo punto di flesso interseca l'asse x in un punto che dista 2σ dalla media.

33. ●● Una grandezza X ha distribuzione normale; si sa che $p(X \le 46) = 0{,}0228$ e $p(X \ge 64) = 0{,}1587$. Determina la media e la deviazione standard di X.

34. ●●● Un test è formato da 100 domande, ciascuna con 4 risposte di cui una sola esatta. Uno studente risponde a caso a tutte. Stima, con un'approssimazione normale motivata, la probabilità che dia almeno 30 risposte esatte.

35. ●●● **Problema.** Considera la funzione $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ e la funzione integrale $G(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Ricorda che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. a) Studia φ: simmetrie, massimo, flessi, asintoti; disegnane il grafico. b) Dimostra che G è dispari e crescente, che ha un flesso nell'origine e che $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1/2$. c) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di G nell'origine e confronta il valore che essa dà in $x = 1$ con $G(1) = 0{,}3413$. d) Esprimi $\Phi(z)$ per mezzo di $G(z)$ e interpreta $2G(1)$ in termini di probabilità.

PER APPROFONDIRE

- [FEL] Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I: il capitolo sull'approssimazione normale della distribuzione binomiale, con molti esempi numerici.
- [KLI] Kline, *Storia del pensiero matematico*: le pagine sulla teoria della probabilità nel Settecento e nell'Ottocento, da de Moivre a Laplace e Gauss.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: gli integrali impropri e le funzioni integrali che stanno dietro alle densità e alle funzioni di ripartizione.
- [QDR] *Quadri di riferimento per la seconda prova*: fra i nuclei tematici di «Dati e previsioni» compaiono le distribuzioni di probabilità continue.

Glossario del capitolo

Assenza di memoria
Proprietà della distribuzione esponenziale: $p(X > s + t \mid X > s) = p(X > t)$.

Correzione di continuità
Nell'approssimare una variabile discreta a valori interi con una continua, si allarga ogni intervallo di 0,5 da ciascuna parte.

Curva di Gauss
Il grafico della densità normale: una campana simmetrica rispetto a $x = \mu$, con massimo in μ e flessi in $\mu \pm \sigma$.

Densità di probabilità
Funzione $f \geq 0$ con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; la probabilità di un intervallo è l'area sotto il suo grafico, $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Distribuzione esponenziale
Densità $\lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$; media $1/\lambda$, varianza $1/\lambda^2$; modello dei tempi di attesa.

Distribuzione normale
Distribuzione $N(\mu; \sigma)$ di densità $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$; il secondo parametro è la deviazione standard.

Distribuzione uniforme continua
Densità costante $1/(b - a)$ su $[a; b]$ e nulla fuori; media $(a + b)/2$, varianza $(b - a)^2/12$.

Funzione di ripartizione di una variabile continua
$F(x) = p(X \leq x)$; per una variabile continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, e $F' = f$ dove f è continua.

Intervallo di confidenza
Intervallo $\bar{x} \pm 1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}$ che, al 95%, contiene la media della popolazione (con σ noto).

Mediana
Il quantile di ordine 0,5: il valore M_e con $F(M_e) = 1/2$.

Normale standard
La distribuzione $N(0; 1)$; la sua funzione di ripartizione $\Phi(z)$ si legge nella tavola.

Punteggio standardizzato
Il numero $z = (x - \mu)/\sigma$: la distanza di x dalla media misurata in deviazioni standard.

Quantile
Numero x_q tale che $F(x_q) = q$; i quantili di ordine $k/100$ si chiamano percentili.

Regola 68–95–99,7
Per una normale, la probabilità di cadere entro 1, 2, 3 deviazioni standard dalla media è 0,6827, 0,9545, 0,9973.

Standardizzazione
Passaggio da $X \sim N(\mu; \sigma)$ a $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0; 1)$.

Teorema del limite centrale
La somma di molte variabili indipendenti con la stessa distribuzione, standardizzata, ha distribuzione che tende alla normale standard.

Valore atteso di una variabile continua
Per una variabile continua, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$, se l'integrale converge.

Variabile aleatoria continua
Variabile aleatoria che può assumere tutti i valori di un intervallo e per la quale ogni singolo valore ha probabilità nulla.

Varianza di una variabile continua
$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx = E(X^2) - \mu^2$; la sua radice è la deviazione standard.

Soluzioni

1. C. Per una variabile continua ogni singolo valore ha probabilità nulla.

2. B. $\int_0^2 x/2\,dx = 1$ e $x/2 \geq 0$; gli integrali delle altre valgono 2, 0 e 4, e $x - 1$ è negativa per $x < 1$.

3. D. La densità è simmetrica rispetto a $x = \mu = 10$, quindi metà dell'area sta a sinistra di 10.

4. A. I flessi sono in $\mu \pm \sigma = 50 \pm 4$.

5. C. $E(X) = 1/\lambda = 4$, quindi $\lambda = 1/4$.

6. D. $\Phi(2) - \Phi(-1) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$.

7. a) Falso: una densità può superare 1 (uniforme su $[0; 0{,}5]$: $f = 2$); deve valere 1 l'area. b) Vero. c) Vero, perché $p(X = a) = 0$. d) Falso: il massimo $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ diminuisce. e) Vero, per l'assenza di memoria con $s = 3$, $t = 4$.

8. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$; $F'(x) = f(x)$; $Z = (X - \mu)/\sigma$, normale standard $N(0; 1)$; $p(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 0{,}9545$.

9. a) $\int_0^4 k(4 - x)\,dx = 8k = 1$, $k = 1/8$. b) $F(x) = 0$ per $x < 0$, $F(x) = x/2 - x^2/16$ per $0 \leq x \leq 4$, $F(x) = 1$ per $x > 4$. c) $F(1) = 7/16 = 0{,}4375$. d)

$E(X) = \frac{1}{8}\int_0^4 x(4 - x)\,dx = 4/3$; $E(X^2) = 8/3$;

$\mathrm{Var}(X) = 8/3 - 16/9 = 8/9$. e) $x/2 - x^2/16 = 1/2$ dà $x^2 - 8x + 8 = 0$; la radice in $[0; 4]$ è $M_e = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}172$.

10. a) $\int_1^{+\infty} k/x^2\,dx = k\,[-1/x]_1^{+\infty} = k = 1$. b) $F(x) = 1 - 1/x$ per $x \geq 1$ (0 prima); $p(X > 4) = 1/4$. c) $\int_1^{+\infty} x \cdot 1/x^2\,dx = \int_1^{+\infty} 1/x\,dx$ diverge ($\ln x \to +\infty$): l'integrale che definisce $E(X)$ non converge.

11. $f(x) = 1/6$ per $2 \leq x \leq 8$, 0 altrove. $p(3 \leq X \leq 5) = 2/6 = 1/3$; $E(X) = 5$; $\mathrm{Var}(X) = 36/12 = 3$; $\sigma = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

12. $p(X > 5) = e^{-1} \approx 0{,}368$; $p(2 \leq X \leq 6) = e^{-0{,}4} - e^{-1{,}2} \approx 0{,}6703 - 0{,}3012 = 0{,}369$; mediana $\ln 2/0{,}2 \approx 3{,}47$.

13. a) 0,8944. b) $1 - \Phi(0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$. c) $1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$. d) $\Phi(1{,}5) - (1 - \Phi(0{,}5)) = 0{,}9332 - 0{,}3085 = 0{,}6247$.

14. a) $z = 1{,}6$: $\Phi(1{,}6) = 0{,}9452$. b) $z = -1{,}6$: $1 - \Phi(-1{,}6) = \Phi(1{,}6) = 0{,}9452$. c) z da -1 a 2: $0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185$. d) $2(1 - \Phi(2)) = 2 \cdot 0{,}0228 = 0{,}0456$.

15. a) $\Phi(1{,}64) = 0{,}9495$ e $\Phi(1{,}65) = 0{,}9505$: $z \approx 1{,}645$. b) $a = 500 + 1{,}645 \cdot 100 \approx 664{,}5$. Per b: $p(X \leq b) = 0{,}20$, quindi $\Phi(-z) = 0{,}80$; dalla tavola $\Phi(0{,}84) = 0{,}7995$, $z \approx -0{,}84$ e $b \approx 500 - 84 = 416$.

16. $p(X \leq 23) = 0{,}90$, quindi $(23 - 20)/\sigma \approx 1{,}28$ e $\sigma \approx 3/1{,}28 \approx 2{,}34$.

17. $X \sim B(400; 0{,}5)$: $np = 200$, $\sigma = \sqrt{100} = 10$. $p(X \geq 220) \approx 1 - \Phi((219{,}5 - 200)/10) = 1 - \Phi(1{,}95) = 1 - 0{,}9744 = 0{,}0256$. (Il valore esatto è 0,0255.)

18. a) $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = [-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}]_0^{+\infty} = 1/2$, quindi $k = 2$. b) $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ per $x \geq 0$ (0 prima); mediana: $e^{-x^2} = 1/2$, $x = \sqrt{\ln 2} \approx 0{,}833$. c) $f'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ si annulla in $x = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$, che è il massimo.

19. $E(X^2) = \frac{1}{b - a}\,[x^3/3]_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b - a)^2}{12}$.

20. Standardizzando, $p(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) = 2\Phi(k) - 1$, espressione in cui non compaiono μ e σ.

21. Si è divisa per la varianza invece che per la deviazione standard: $\sigma = \sqrt{16} = 4$. Corretto: $\Phi((13 - 10)/4) = \Phi(0{,}75) = 0{,}7734$.

22. Per parti, $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-x^2\,e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{2}{\lambda}\,E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$. Quindi $\mathrm{Var}(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$.

23. $G(y) = p(Y \leq y) = p(X \leq (y - b)/a) = F((y - b)/a)$ perché $a > 0$. Derivando con la regola della funzione composta, $g(y) = F'((y - b)/a) \cdot 1/a = \frac{1}{a}\,f(\frac{y - b}{a})$.

Con $a = 1/\sigma$ e $b = -\mu/\sigma$, $Y = (X - \mu)/\sigma$ ha densità $\sigma f(\mu + \sigma y) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2} = \varphi(y)$.

24. L'attesa X è uniforme su $[0; 6]$. a) $p(X > 4) = 2/6 = 1/3$. b) $E(X) = 3$ min, $\sigma = 6/\sqrt{12} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ min. c) $(2/3)^5 = 32/243 \approx 0{,}132$.

25. $\lambda = 1/25\,000$. a) $e^{-1{,}2} \approx 0{,}301$. b) Mediana $25\,000 \ln 2 \approx 17\,329$ ore. c) Assenza di memoria: $p(T > 30\,000 \mid T > 20\,000) = e^{-0{,}4} \approx 0{,}670$. d) $1 - e^{-t/25\,000} = 0{,}05$, $t = -25\,000 \ln 0{,}95 \approx 1282$ ore.

26. a) $z = (990 - 1000)/4 = -2{,}5$: $1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$, lo 0,62%. b) Serve $(990 - \mu)/4 = -3{,}09$ ($\Phi(3{,}09) = 0{,}9990$): $\mu = 990 + 3{,}09 \cdot 4 \approx 1002{,}4$ ml. c) $1 - (1 - 0{,}0062)^{50} \approx 0{,}267$.

27. a) $p(|X| < 0{,}3) = 2\Phi(1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664$. b) $\sigma/\sqrt{16} = 0{,}2/4 = 0{,}05$ mm; $p(|\bar{x} - \mu| < 0{,}1) = 2\Phi(2) - 1 = 0{,}9544$ (circa 0,95).

28. a) $\Phi(z) = 0{,}85$: $\Phi(1{,}03) = 0{,}8485$, $\Phi(1{,}04) = 0{,}8508$, quindi $z \approx 1{,}04$ e la soglia è $60 + 1{,}04 \cdot 12 \approx 72{,}5$. b) $z = \pm 10/12 \approx \pm 0{,}83$: $2\Phi(0{,}83) - 1 = 2 \cdot 0{,}7967 - 1 \approx 0{,}593$, circa il 59%.

29. a) Ogni riga somma 12 variabili uniformi indipendenti, ciascuna con media 1/2 e varianza 1/12: la somma ha media 6 e varianza $12 \cdot 1/12 = 1$, quindi S ha media 0 e varianza 1; per il teorema del limite centrale è quasi normale standard. b) L'istogramma segue la campana; ogni classe di ampiezza 0,5 deve contenere circa $500\,\varphi(z)$ valori (circa 199 vicino a 0). c) Le frazioni attese sono vicine a 0,683, 0,954, 0,997. In una nostra simulazione (seme fisso 2026) si sono ottenuti 0,686, 0,947 e 0,998, con media 0,06 e deviazione standard 1,02: valori di una simulazione, che cambiano da una prova all'altra.

30. a) I valori del foglio coincidono con quelli della tavola entro l'arrotondamento alla quarta cifra; il percentile 95 è 1,6449. b) Esatto: 0,0955. Con la correzione: $\Phi((15{,}5 - 20)/\sqrt{12}) = \Phi(-1{,}30) = 0{,}0968$; senza: $\Phi((15 - 20)/\sqrt{12}) = \Phi(-1{,}44) = 0{,}0749$. La correzione di continuità riduce l'errore da circa 0,02 a circa 0,001.

31. Normalizzazione: $\int_0^2 (ax + b)\,dx = 2a + 2b = 1$; media: $\int_0^2 x(ax + b)\,dx = 8a/3 + 2b = 7/6$. Dalla prima $b = 1/2 - a$, e sostituendo $2a/3 + 1 = 7/6$, $a = 1/4$, $b = 1/4$. $f(x) = (x + 1)/4 > 0$ su $[0; 2]$. $p(X \geq 1) = \int_1^2 (x + 1)/4\,dx = 5/8$.

32. In $x_1 = \mu + \sigma$ si ha $f(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ e $f'(x_1) = -\frac{\sigma}{\sigma^2}\, f(x_1) = -f(x_1)/\sigma$. La tangente $y = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{\sigma}(x - \mu - \sigma)$ si annulla per $x - \mu - \sigma = \sigma$, cioè $x = \mu + 2\sigma$. Per simmetria la tangente nel flesso $\mu - \sigma$ incontra l'asse in $\mu - 2\sigma$.

33. $\Phi(-2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$ e $1 - \Phi(1) = 0{,}1587$, quindi $(46 - \mu)/\sigma = -2$ e $(64 - \mu)/\sigma = 1$. Sottraendo, $18/\sigma = 3$: $\sigma = 6$, $\mu = 58$.

34. $X \sim B(100; 0{,}25)$, $np = 25 \geq 5$, $n(1 - p) = 75 \geq 5$: si approssima con $N(25; \sqrt{18{,}75})$, $\sqrt{18{,}75} \approx 4{,}330$. $p(X \geq 30) \approx 1 - \Phi((29{,}5 - 25)/4{,}330) = 1 - \Phi(1{,}04) = 1 - 0{,}8508 = 0{,}149$. (Valore esatto 0,1495.)

35. a) φ è pari, positiva, $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$ (asintoto $y = 0$); $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$: massimo in $(0; 1/\sqrt{2\pi}) \approx (0; 0{,}399)$; $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x)$: flessi in $(\pm 1; 0{,}242)$, concavità verso il basso in $]-1; 1[$. b) Con $t = -u$, $G(-x) = -\int_0^x \varphi(u)\,du = -G(x)$: G è dispari. $G'(x) = \varphi(x) > 0$: crescente. $G''(x) = \varphi'(x) = -x\varphi(x)$ cambia segno in 0: flesso nell'origine. Con $t = \sqrt{2}\,u$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\pi} = 1$, e per simmetria $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1/2$. c) $G(0) = 0$, $G'(0) = 1/\sqrt{2\pi}$: tangente $y = x/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}399x$; in $x = 1$ dà 0,399 contro $G(1) = 0{,}3413$: la tangente sta sopra il grafico per $x > 0$ perché lì il grafico di G ha la concavità verso il basso. d) $\Phi(z) = 1/2 + G(z)$; $2G(1) = p(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0{,}6827$.