CAPITOLO

14

Il metodo assiomatico e le geometrie non euclidee

Gli assiomi non dicono che cosa sono i punti e le rette: dicono come si comportano. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Distinguere nozioni primitive, assiomi, definizioni e teoremi, e confrontare la concezione classica del metodo assiomatico con quella moderna.
2. Enunciare il quinto postulato nella forma di Euclide e in quella di Playfair, e dimostrare l'equivalenza di alcune formulazioni.
3. Ricostruire i tentativi di dimostrare il quinto postulato, da Saccheri a Lobačevskij e Bolyai, e conoscere le proprietà della geometria iperbolica.
4. Calcolare aree di fusi e di triangoli sferici con il teorema di Girard e confrontare le tre geometrie.
5. Usare i modelli (la sfera, il disco di Poincaré) per discutere coerenza e indipendenza degli assiomi.
6. Riconoscere il metodo assiomatico nell'aritmetica di Peano e nella probabilità di Kolmogorov.

INDICE DEL CAPITOLO

14.1 Che cosa vuol dire «assiomatico» 2
14.2 Gli Elementi di Euclide e il quinto postulato 5
14.3 Duemila anni di tentativi e la geometria iperbolica 9
14.4 La geometria sulla sfera 11
14.5 Modelli, coerenza e il programma di Hilbert 15
14.6 Gli altri sistemi assiomatici: aritmetica e probabilità 21

Matematica 5 · Parte IV · Geometria analitica dello spazio e metodo assiomatico · versione 1.0
Capitolo 14: Il metodo assiomatico e le geometrie non euclidee · pagine 393–420 del volume completo · estratto per lo studio

Per più di duemila anni la geometria di Euclide è stata il modello stesso della conoscenza certa: si parte da poche verità che nessuno mette in dubbio e se ne ricava tutto il resto con ragionamenti inattaccabili. Nel Seicento Spinoza intitolò la sua *Etica* «dimostrata secondo l'ordine geometrico», e ancora oggi, quando si vuole dire che una conclusione è indiscutibile, si dice che è «dimostrata come un teorema».

Eppure proprio dentro gli *Elementi* c'era un enunciato che non convinceva del tutto: il quinto postulato, quello delle parallele. I tentativi di dimostrarlo, durati secoli, si sono conclusi nell'Ottocento in modo inatteso: il postulato non si può dimostrare, e negandolo si ottengono geometrie diverse da quella euclidea e coerenti quanto lei. In questo capitolo seguiamo quella storia, ne ricaviamo il metodo assiomatico moderno e lo ritroviamo nell'aritmetica e nella probabilità. Bastano la geometria del primo biennio (vedi *Matematica 1*, cap. 14), quella dello spazio di *Matematica 4* e i vettori del capitolo 13.

14.1 Che cosa vuol dire «assiomatico»

14.1.1 Gli ingredienti di una teoria

Una teoria costruita con il **metodo assiomatico** è fatta di quattro tipi di ingredienti.

- Le **nozioni primitive** (o enti primitivi): i termini che si usano senza definirli, come *punto*, *retta*, *piano* e la relazione *appartenere* in geometria. Non è una scorciatoia: ogni definizione usa altre parole, e per non risalire all'infinito da qualche parola bisogna pur partire.
- Gli **assiomi** (o postulati): enunciati sulle nozioni primitive che si accettano senza dimostrazione e che fissano le regole a cui esse obbediscono.
- Le **definizioni**: introducono termini nuovi per mezzo di quelli già disponibili («due rette di un piano si dicono parallele se non hanno punti in comune»).
- I **teoremi**: enunciati ricavati dagli assiomi, e dai teoremi già ottenuti, con una **dimostrazione**, cioè una catena finita di passaggi ciascuno dei quali segue dai precedenti secondo le regole della logica.

Una dimostrazione non può appoggiarsi al disegno: se un passaggio è vero «perché si vede», usa un fatto che non sta tra le premesse, e allora o lo si dimostra o lo si aggiunge agli assiomi.

14.1.2 La concezione classica e quella moderna

Per Euclide e per i matematici fino all'Ottocento le nozioni primitive avevano un significato preciso, suggerito dall'esperienza dello spazio, e gli assiomi erano *verità evidenti* su quegli oggetti:

nessuno dubitava che per due punti passi una retta. Poiché gli assiomi erano veri e i ragionamenti corretti, anche i teoremi erano veri, e la geometria era la scienza dello spazio in cui viviamo. È la **concezione classica** del metodo assiomatico.

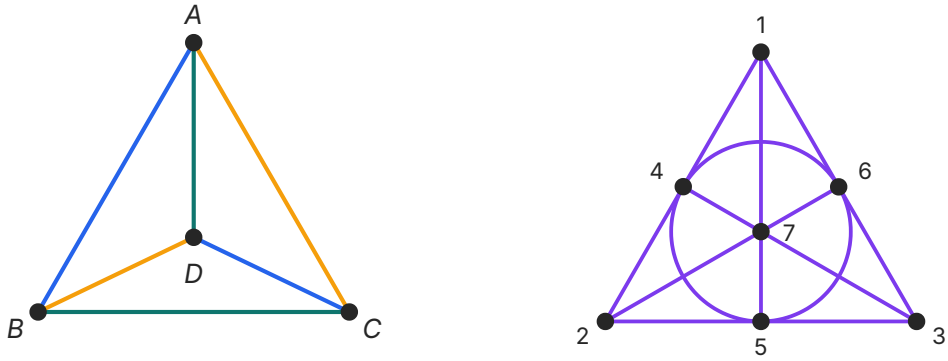
Nella **concezione moderna**, che trova la sua forma compiuta nei *Fondamenti della geometria* (*Grundlagen der Geometrie*) di David Hilbert, del 1899, gli assiomi non sono più verità evidenti su oggetti già noti: sono le condizioni che si richiedono a oggetti qualsiasi. Le nozioni primitive non hanno un significato fissato in partenza; sono determinate soltanto dalle relazioni che gli assiomi stabiliscono tra loro, e per questo si dice che gli assiomi ne danno una **definizione implicita**. Un teorema, allora, non afferma «questo è vero dello spazio», ma «questo è vero di qualunque sistema di oggetti che soddisfi gli assiomi». Il suo allievo Otto Blumenthal racconta che Hilbert una volta osservò che al posto di punti, rette e piani si dovrebbe poter parlare di tavoli, sedie e boccali di birra: i teoremi resterebbero validi, purché i nuovi oggetti rispettino gli assiomi.

Un sistema di oggetti in cui gli assiomi, interpretati in un certo modo, risultano veri si chiama **modello** della teoria. È grazie ai modelli che la concezione moderna diventa concreta. Vediamone un esempio piccolo ma istruttivo.

14.1.3 Una geometria con pochi punti

Consideriamo una teoria con due nozioni primitive, *punto* e *retta*, e una relazione primitiva, «il punto P appartiene alla retta r». Gli assiomi sono tre.

- **Assioma 1.** Per due punti distinti passa una e una sola retta.
- **Assioma 2.** Ogni retta contiene almeno due punti.
- **Assioma 3.** Esistono tre punti che non appartengono a una stessa retta.



a) 4 punti e 6 rette

b) 7 punti e 7 rette

Figura 14.1 Due modelli degli stessi tre assiomi. a) Quattro punti; le rette sono le sei coppie di punti, e le rette dello stesso colore non hanno punti comuni (*AB* e *DC*, *BC* e *DA*, *CA* e *DB*). b) Il piano di Fano: sette punti e sette rette di tre punti ciascuna, cioè i tre lati, le tre mediane e la circonferenza, che rappresenta la retta {4; 5; 6}. Due rette del piano di Fano hanno sempre un punto in comune.

Diciamo *parallele* due rette distinte senza punti in comune. Da questi assiomi segue subito un teorema: *due rette distinte hanno al più un punto in comune*. Infatti, se r e s avessero in comune due punti distinti A e B, per A e B passerebbero due rette diverse, contro l'assioma 1. Il teorema vale in ogni modello degli assiomi, qualunque cosa siano i suoi «punti» e le sue «rette».

Il piano euclideo, con i suoi punti e le sue rette, è un modello di questi assiomi, ma non è l'unico. Nel modello della Figura 14.1 a) i «punti» sono quattro oggetti A, B, C, D e le «rette» sono le sei coppie che si possono formare con essi: la retta AB è l'insieme $\{A; B\}$, e così via. Il modello b) ha sette punti e sette rette, ciascuna di tre punti, e si chiama **piano di Fano**, dal matematico italiano Gino Fano. I segmenti e la circonferenza del disegno sono soltanto un promemoria di quali punti stanno su quali rette: l'incrocio di due segmenti, se non è segnato con un pallino, non è un punto del modello.

ESEMPIO SVOLTO

Verifichiamo che il modello a quattro punti soddisfa gli assiomi e contiamo, nei vari modelli, le parallele a una retta per un punto esterno.

Gli assiomi. Due punti distinti, per esempio A e C, stanno sulla retta $\{A; C\}$ e su nessun'altra, perché ogni retta è una coppia: vale l'assioma 1. Ogni retta ha due punti: vale l'assioma 2. L'unica retta per A e B non contiene C: vale l'assioma 3.

Le parallele. Le rette per C sono CA, CB, CD: solo CD non incontra AB, quindi per C passa **una sola** parallela ad AB. Nel piano di Fano le rette per 1, cioè {1; 4; 2}, {1; 7; 5}, {1; 6; 3}, incontrano tutte la retta {4; 5; 6}: **nessuna** parallela. Nel modello con cinque punti A, …, E e tutte le coppie come rette, per C passano due rette che non incontrano $\{A; B\}$, cioè $\{C; D\}$ e $\{C; E\}$: **più di una** parallela.

Conclusione. L'enunciato «per un punto esterno passa una sola parallela» è vero in un modello e falso in altri: non è un teorema della teoria, perché un teorema è vero in tutti i modelli, e per la stessa ragione non lo è la sua negazione.

Un enunciato che non si può né dimostrare né confutare a partire da certi assiomi si dice **indipendente** da essi. È, in miniatura, la scoperta fatta per la geometria di Euclide; solo che lì è stato necessario più di un millennio.

DA RICORDARE

Se un enunciato è falso in almeno un modello degli assiomi, non è dimostrabile a partire da essi. Se è vero in un modello e falso in un altro, è **indipendente** dagli assiomi: né lui né la sua negazione si possono dimostrare. Per provare l'indipendenza basta quindi esibire due modelli.

14.2 Gli *Elementi* di Euclide e il quinto postulato

14.2.1 Definizioni, postulati, nozioni comuni

Gli *Elementi*, scritti ad Alessandria attorno al 300 a.C., sono tredici libri di geometria e di aritmetica. Il primo libro si apre con tre gruppi di premesse. Le 23 **definizioni** descrivono gli oggetti («punto è ciò che non ha parti», «linea è lunghezza senza larghezza»): non intervengono in nessuna dimostrazione, ma dicono al lettore di che cosa si parla. Le **nozioni comuni** sono principi validi per qualunque grandezza, non solo geometrica: «cose uguali a una stessa cosa sono uguali anche tra loro», «il tutto è maggiore della parte». I **postulati**, infine, sono richieste proprie della geometria. Eccoli, nella nostra traduzione dal greco.

1. Si chieda di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto.
2. E di prolungare con continuità in linea retta una retta terminata.

3. E di descrivere un cerchio con ogni centro e ogni distanza.
4. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.
5. E che, se una retta che cade su due rette forma dalla stessa parte angoli interni minori di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontrino da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

I primi tre postulati descrivono ciò che si fa con riga e compasso; il quarto garantisce che l'angolo retto sia un'unità di misura uguale ovunque. Il **quinto postulato** è diverso: è lungo, ha l'aspetto di un teorema e parla di ciò che accade «illimitatamente» lontano, dove nessuno può controllare (Figura 14.2 a). Euclide stesso sembra evitarlo: lo usa per la prima volta nella proposizione 29 del libro I, dopo averne dimostrate ventotto senza di esso, tra cui il criterio di parallelismo: *se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti, sono parallele* (vedi *Matematica 1*, cap. 14).

14.2.2 La forma di Playfair

Nei manuali moderni il quinto postulato compare di solito nella forma che lo scozzese John Playfair usò alla fine del Settecento, e che abbiamo adottato fin dal primo anno.

> **IN SINTESI**
>
> **Quinto postulato** (forma di Playfair). Per un punto esterno a una retta passa al più una retta parallela alla retta data.

Il criterio di parallelismo garantisce che una parallela esista sempre (basta costruire angoli alterni congruenti); il postulato aggiunge che è unica (Figura 14.2 b). Chiamiamo **geometria assoluta** la parte della geometria che si ricava dagli altri assiomi senza usare il quinto postulato. Ne fanno parte i criteri di congruenza dei triangoli, il teorema dell'angolo esterno nella forma «un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti» e il suo corollario «la somma di due angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto», l'esistenza e l'unicità della perpendicolare per un punto e il criterio di parallelismo.

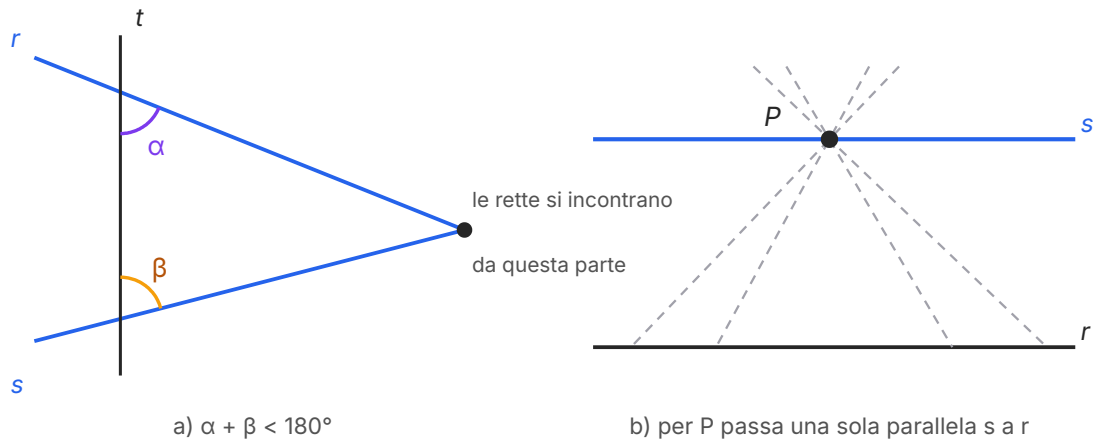


Figura 14.2 a) Il quinto postulato di Euclide: se la trasversale *t* forma con *r* e *s*, dalla stessa parte, angoli interni α e β con α + β < 180°, le rette *r* e *s* si incontrano da quella parte. b) La forma di Playfair: delle rette per *P* una sola, *s*, non incontra *r*; tutte le altre (tratteggiate) la incontrano, a volte molto lontano.

14.2.3 Due formulazioni equivalenti

Due enunciati si dicono **equivalenti** (rispetto a un sistema di assiomi) se, aggiunto agli assiomi, ciascuno dei due permette di dimostrare l'altro. Dimostriamo che, nella geometria assoluta, il postulato di Euclide e quello di Playfair sono equivalenti.

Euclide ⇒ Playfair. Siano r una retta e P un punto esterno; siano H il piede della perpendicolare da P a r e s la retta per P perpendicolare a PH. Le rette r e s formano con la trasversale PH angoli alterni interni retti, quindi sono parallele per il criterio di parallelismo. Sia ora s' un'altra retta per P. Essa forma con PH, da una delle due parti, un angolo acuto; da quella parte gli angoli interni formati da r e s' con la trasversale PH hanno somma minore di $90° + 90°$, e per il quinto postulato di Euclide s' incontra r. Dunque s è l'unica parallela a r per P.

Playfair ⇒ Euclide. Una trasversale t incontri r in A e s in B e formi, dalla stessa parte, angoli interni α (in A) e β (in B) con $\alpha + \beta < 180°$. Per B conduciamo la retta s_0 che forma con t, da quella parte, l'angolo interno $180° - \alpha$: gli angoli coniugati interni sono supplementari, quindi s_0 è parallela a r (è il criterio di parallelismo, in una delle sue forme equivalenti). Poiché $\beta < 180° - \alpha$, la retta s è diversa da s_0, e per il postulato di Playfair non è parallela a r: la incontra in un punto X. Resta da vedere da che parte. Se X stesse dalla parte opposta, il triangolo ABX avrebbe in A e in B gli angoli $180° - \alpha$ e $180° - \beta$, la cui somma $360° - (\alpha + \beta)$ supera $180°$: impossibile, perché nella geometria assoluta la somma di due angoli di un triangolo è minore di un angolo piatto. Quindi X sta dalla parte degli angoli α e β. c.v.d.

14.2.4 La somma degli angoli di un triangolo

IN SINTESI

Teorema. Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Ipotesi: *ABC* triangolo di angoli α, β, γ; vale il quinto postulato. **Tesi:** α + β + γ = 180°.

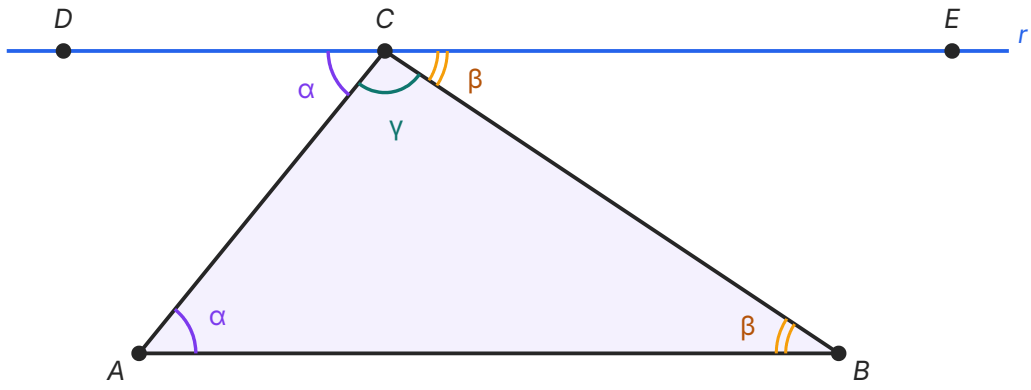


Figura 14.3 La dimostrazione del teorema della somma degli angoli. La retta *r* per *C* è la parallela ad *AB*, unica per il quinto postulato; gli angoli in *C* segnati con α e β sono congruenti agli angoli in *A* e in *B* perché alterni interni, e i tre angoli in *C* formano l'angolo piatto *DCE*. Nella versione interattiva si trascinano i vertici e la somma resta sempre 180°.

Per *C* conduciamo la retta *r* parallela ad *AB* e su di essa prendiamo due punti *D* ed *E* da parti opposte rispetto a *C*, con *D* dalla stessa parte di *A* rispetto alla retta *BC* (Figura 14.3). Gli angoli *DCA* e *CAB* sono alterni interni rispetto alle rette parallele *r* e *AB* tagliate da *AC*. Qui interviene il quinto postulato: se l'angolo *DCA* non fosse congruente ad α, la retta per *C* che forma con *AC* un angolo alterno congruente ad α sarebbe, per il criterio di parallelismo, una seconda parallela ad *AB* per *C*, diversa da *r*. Dunque $DCA \cong \alpha$, e allo stesso modo $ECB \cong \beta$. I tre angoli *DCA*, *ACB*, *BCE* formano l'angolo piatto *DCE*, quindi $\alpha + \gamma + \beta = 180°$. c.v.d.

La dimostrazione usa il quinto postulato in un solo punto: per dire che rette parallele formano angoli alterni congruenti. Vale anche il viceversa: chi sa che in ogni triangolo la somma degli angoli è 180° può dimostrare il quinto postulato. I due enunciati sono equivalenti, e non sono gli unici.

DA RICORDARE

Nella geometria assoluta (con l'assioma di Archimede) ciascuno degli enunciati seguenti è equivalente al quinto postulato:

- per un punto esterno a una retta passa una sola parallela (Playfair);
- la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto;
- esistono due triangoli simili non congruenti (Wallis);
- esiste un rettangolo, cioè un quadrilatero con quattro angoli retti;
- i punti che stanno da una stessa parte di una retta e hanno da essa la stessa distanza formano una retta;
- per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza.

14.3 Duemila anni di tentativi e la geometria iperbolica

14.3.1 Il quadrilatero di Saccheri

Per secoli si è cercato di dimostrare il quinto postulato a partire dagli altri: Proclo nel V secolo d.C., Omar Khayyam e Nasir al-Din al-Tusi nel mondo arabo, John Wallis nel Seicento. Ogni tentativo usava, senza accorgersene, un enunciato equivalente: Wallis ammetteva che si potesse ingrandire un triangolo senza cambiarne gli angoli.

Il tentativo più profondo è quello del gesuita Girolamo Saccheri, che insegnava a Pavia. Nel 1733 pubblicò *Euclides ab omni naevo vindicatus*, «Euclide liberato da ogni macchia». Il suo piano era una dimostrazione per assurdo: negare il postulato e arrivare a una contraddizione. Saccheri studiò un quadrilatero $ABCD$ con gli angoli in A e in B retti e i lati AD e BC congruenti, oggi detto **quadrilatero di Saccheri**: AB è la base, CD la sommità.

IN SINTESI

Teorema (geometria assoluta). In un quadrilatero di Saccheri gli angoli alla sommità sono congruenti.

Ipotesi: DAB e ABC angoli retti, $AD \cong BC$. **Tesi:** $ADC \cong BCD$.

I triangoli DAB e CBA hanno $AD \cong BC$, il lato AB in comune e gli angoli compresi retti: sono congruenti per il primo criterio, quindi $BD \cong AC$. I triangoli ADC e BCD hanno allora $AD \cong BC$, il lato DC in comune e $AC \cong BD$: sono congruenti per il terzo criterio, e gli angoli opposti ai lati congruenti AC e BD sono congruenti, cioè $ADC \cong BCD$. Non abbiamo usato il quinto postulato. c.v.d.

Gli angoli alla sommità sono dunque uguali, ma la geometria assoluta non dice quanto valgono. Restano tre possibilità, che Saccheri chiamò *ipotesi dell'angolo retto*, *dell'angolo ottuso* e *del-*

l'angolo acuto (Figura 14.4). Nella geometria euclidea vale la prima: il quadrilatero è un rettangolo. Saccheri dimostrò che un'ipotesi valida per un quadrilatero vale per tutti, e che corrisponde a triangoli con somma degli angoli uguale, maggiore o minore di 180°. Escluse l'ipotesi dell'angolo ottuso usando il fatto che una retta è infinita; contro quella dell'angolo acuto ricavò molti teoremi corretti, finché dichiarò di aver trovato una conclusione «ripugnante alla natura della linea retta», con un ragionamento non valido. Senza saperlo, aveva sviluppato una geometria nuova.

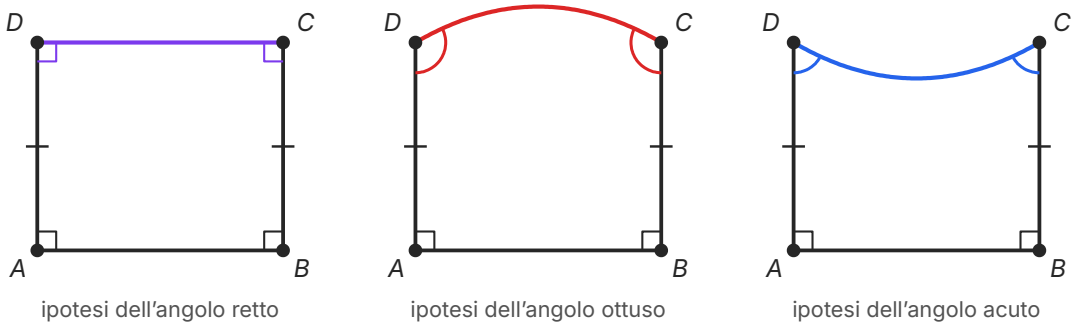


Figura 14.4 Il quadrilatero di Saccheri: angoli retti in *A* e in *B*, lati *AD* e *BC* congruenti. Gli angoli alla sommità, in *D* e in *C*, sono congruenti tra loro e possono essere retti, ottusi o acuti. Negli ultimi due casi la sommità è disegnata curva: nel piano euclideo del foglio quei quadrilateri non esistono, e il disegno è soltanto uno schema.

Nella seconda metà del Settecento Johann Heinrich Lambert notò che, nell'ipotesi dell'angolo acuto, l'area di un triangolo sarebbe proporzionale alla differenza tra 180° e la somma dei suoi angoli: una proprietà che ritroveremo, rovesciata, sulla sfera.

14.3.2 Gauss, Bolyai, Lobačevskij

Nei primi decenni dell'Ottocento tre matematici capirono, indipendentemente l'uno dall'altro, che l'ipotesi dell'angolo acuto non porta ad alcuna contraddizione e descrive una geometria nuova. Carl Friedrich Gauss ci arrivò per primo, come risulta dalle sue lettere, ma non pubblicò nulla. Il russo Nikolaj Lobačevskij pubblicò i suoi risultati a partire dal 1829; l'ungherese János Bolyai li pubblicò nel 1832, in un'appendice a un libro del padre Farkas. Questa geometria si chiama oggi **geometria iperbolica**: valgono tutti gli assiomi della geometria euclidea tranne il quinto postulato, sostituito dalla sua negazione.

IN SINTESI

Assioma iperbolico. Per un punto esterno a una retta passano almeno due rette parallele alla retta data (e si dimostra che allora ne passano infinite).

Alcuni teoremi della geometria iperbolica:

- la somma degli angoli di ogni triangolo è minore di 180°; la differenza $\delta = 180° - (\alpha + \beta + \gamma)$ si chiama **difetto** del triangolo;
- due triangoli con gli angoli ordinatamente congruenti sono congruenti: non esistono triangoli simili non congruenti, e non esistono rettangoli;
- l'area di un triangolo è proporzionale al suo difetto: $S = k^2 \cdot \delta$, con δ in radianti e k una costante, con le dimensioni di una lunghezza, che caratterizza il piano.

Poiché il difetto non supera π, nessun triangolo ha area maggiore di πk^2. Un triangolo piccolo, invece, ha un difetto piccolo: in una regione piccola rispetto a k la geometria iperbolica è quasi indistinguibile da quella euclidea, e nessuna misura su un foglio può decidere tra le due. Da qui in poi scegliamo l'unità di lunghezza in modo che $k = 1$: l'area è il difetto in radianti.

ESEMPIO SVOLTO

In un piano iperbolico con $k = 1$: **a)** calcola l'area di un triangolo con angoli 40°, 50° e 60°; **b)** esprimi l'area di un triangolo equilatero di angolo φ e discuti che cosa succede quando φ si avvicina a 0.

a) La somma è 150°, il difetto $30° = \pi/6$ rad: l'area è $\pi/6 \approx 0{,}524$.

b) Il difetto è $\pi - 3\varphi$, positivo solo se $\varphi < \pi/3$: un triangolo equilatero iperbolico ha angoli minori di 60°, tanto più piccoli quanto più è grande. L'area $\pi - 3\varphi$ tende a π quando φ tende a 0, senza raggiungerlo: è il limite superiore trovato sopra.

14.4 La geometria sulla sfera

14.4.1 Riemann e la geometria ellittica

Nel 1854 Bernhard Riemann tenne a Gottinga la lezione per l'abilitazione all'insegnamento universitario, con il titolo «Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria». Vi immaginava spazi curvi e distingueva tra *illimitato* e *infinito*: una superficie sferica non ha confini, eppure è finita. Da queste idee nasce la **geometria ellittica**, in cui due rette si incontrano sempre. Per ottenerla bisogna rinunciare anche all'idea che una retta sia infinita, quella che Saccheri aveva usato contro l'ipotesi dell'angolo ottuso.

14.4.2 Rette e triangoli sulla sfera

Il modello più semplice è la superficie di una sfera di raggio R. Le «rette» sono le **circonferenze massime**, cioè le intersezioni della sfera con i piani passanti per il centro, come l'equatore e i meridiani. Sono le linee giuste perché il cammino più breve sulla sfera tra due punti è un arco di circonferenza massima (lo accettiamo senza dimostrazione). Due circonferenze massime si incontrano sempre: i loro piani passano entrambi per il centro, quindi si tagliano lungo una retta per il centro, che incontra la sfera in due punti diametralmente opposti, o *antipodali*. Sulla sfera non ci sono parallele.

Per due punti antipodali, come i poli, passano però infinite circonferenze massime. Per un modello fedele della geometria ellittica si considera *un solo punto* ogni coppia di punti antipodali; per aree e angoli la sfera così com'è va benissimo.

Un **triangolo sferico** ha per vertici tre punti non appartenenti a una stessa circonferenza massima e per lati tre archi di circonferenza massima minori di una semicirconferenza. L'angolo in un vertice è l'angolo tra le tangenti ai due lati, ed è uguale all'ampiezza del diedro formato dai piani dei due lati (vedi *Matematica 4*, cap. 10). Sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ prendiamo i punti $A(R; 0; 0)$, $B(0; R; 0)$, $C(0; 0; R)$ (Figura 14.5). I lati del triangolo ABC stanno nei tre piani coordinati, che sono a due a due perpendicolari: il triangolo ha **tre angoli retti**, e la somma dei suoi angoli è 270°.

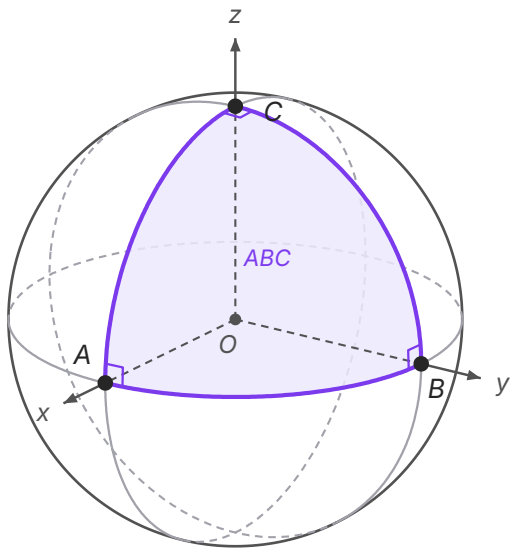


Figura 14.5 Il triangolo sferico ABC con i vertici sui tre semiassi positivi: i suoi lati stanno nei piani coordinati, a due a due perpendicolari, e i suoi tre angoli sono retti. Proiezione ortogonale; le linee nascoste sono tratteggiate.

14.4.3 L'area di un fuso e il teorema di Girard

Due semicirconferenze massime con gli stessi estremi antipodali N e S delimitano un **fuso**; il suo angolo α è l'angolo che le due semicirconferenze formano in N, cioè il diedro tra i loro piani (Figura 14.6 a). L'area di un fuso è proporzionale al suo angolo, e quando $\alpha = 2\pi$ il fuso è l'intera sfera, di area $4\pi R^2$. Quindi

$$\text{area del fuso} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2\alpha R^2 \quad (\alpha \text{ in radianti}).$$

IN SINTESI

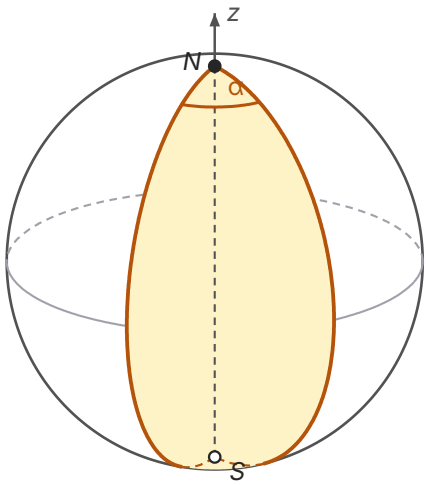
Teorema di Girard. Un triangolo sferico di angoli α, β, γ (in radianti), su una sfera di raggio R, ha area

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

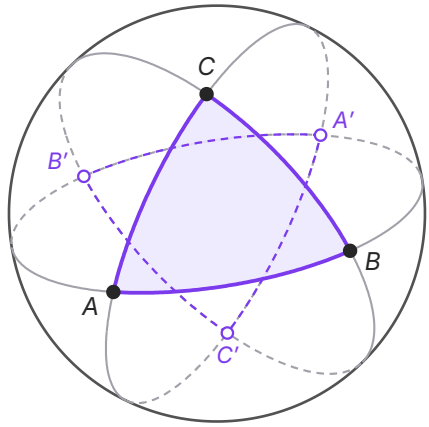
La quantità $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, sempre positiva, si chiama **eccesso sferico** del triangolo.

Dimostrazione. Prolunghiamo i lati del triangolo ABC fino a ottenere tre circonferenze massime complete (Figura 14.6 b); i punti A', B', C' sono gli antipodi di A, B, C. Le due circonferenze per A si incontrano in A e in A' e formano due fusi opposti di angolo α: uno contiene il triangolo ABC, l'altro il triangolo antipodale $A'B'C'$. Insieme hanno area $2 \cdot 2\alpha R^2 = 4\alpha R^2$. Lo stesso vale per i vertici B e C. I sei fusi ricoprono tutta la sfera: ogni punto appartiene a uno solo di essi, tranne i punti dei triangoli ABC e $A'B'C'$, che appartengono a tre fusi ciascuno. Sommando le aree dei sei fusi otteniamo quindi la superficie della sfera, più due volte l'area di ABC e due volte quella di $A'B'C'$. Il triangolo $A'B'C'$ è simmetrico di ABC rispetto al centro, quindi ha la stessa area S:

$$4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4S \quad \Rightarrow \quad S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad \text{c.v.d.}$$



a) fuso di angolo α: area $2\alpha R^2$



b) il triangolo ABC e il suo antipodale A′B′C′

Figura 14.6 a) Il fuso di angolo α tra due semimeridiani: la sua area è $2\alpha R^2$. b) Le tre circonferenze massime che contengono i lati del triangolo *ABC* ne determinano anche il triangolo antipodale *A′B′C′*, sul retro della sfera (tratteggiato). Proiezione ortogonale, come nella Figura 14.5.

Il triangolo della Figura 14.5 lo conferma: ha eccesso $3 \cdot \pi/2 - \pi = \pi/2$ e area $\pi R^2/2$, cioè un ottavo della sfera, e infatti otto triangoli come questo, uno per ottante, la ricoprono. Il teorema, che porta il nome del matematico seicentesco Albert Girard, dice che sulla sfera la somma degli angoli supera sempre 180° e che l'area è proporzionale all'eccesso; si dimostra anche che triangoli con gli stessi angoli sono congruenti: neppure qui esistono triangoli simili non congruenti.

ESEMPIO SVOLTO

a) Su una sfera di raggio 10 cm un triangolo ha angoli 80°, 70° e 50°: calcolane l'area. **b)** Può un triangolo sferico avere angoli 50°, 60° e 65°? **c)** Che frazione della superficie terrestre occupa un triangolo sferico di eccesso ε?

a) La somma è 200°, l'eccesso è $20° = \pi/9$ rad, l'area è $100 \cdot \pi/9 \approx 34{,}9$ cm^2.

b) No: la somma è 175°, minore di 180°, e l'eccesso sarebbe negativo.

c) La frazione è $\dfrac{R^2\varepsilon}{4\pi R^2} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$, indipendente dal raggio. Per esempio, un triangolo con eccesso di $1° = \pi/180$ rad occupa 1/720 della sfera: sulla Terra, con raggio medio di circa 6371 km, sono circa 708 000 km^2, più del doppio della superficie dell'Italia.

14.4.4 Le rotte più brevi

Per chi viaggia sulla superficie terrestre le «rette» della geometria sferica non sono un'astrazione: sono le rotte più brevi. Con i vettori del capitolo 13 si calcolano facilmente.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Quesito. Due città immaginarie si trovano entrambe a 45° di latitudine nord, con longitudini 0° e 90° est. Considerando la Terra una sfera di raggio $R = 6371$ km, confronta la lunghezza della rotta lungo il parallelo con quella lungo la circonferenza massima, e determina la latitudine massima raggiunta da quest'ultima.

Fissiamo il centro della Terra nell'origine, l'asse z verso il polo nord e l'asse x verso il meridiano di longitudine 0°. Un punto di latitudine φ e longitudine λ ha coordinate $R(\cos\varphi\cos\lambda;\ \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\lambda;\ \mathrm{sen}\,\varphi)$, quindi

$$P_1 = R\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2 = R\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Circonferenza massima. L'angolo θ al centro tra i vettori $\mathbf{OP}_1$ e $\mathbf{OP}_2$ si ottiene dal prodotto scalare: $\cos\theta = (\mathbf{OP}_1 \cdot \mathbf{OP}_2)/R^2 = 0 + 0 + 1/2 = 1/2$, quindi $\theta = 60° = \pi/3$ e la rotta più breve misura $\pi R/3 \approx 6672$ km.

Parallelo. Il parallelo di latitudine 45° è una circonferenza di raggio $R\cos 45° = R\sqrt{2}/2$, e le due città ne individuano un quarto: la lunghezza è $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 7076$ km. La circonferenza massima fa risparmiare circa 405 km: il parallelo, il cui piano non passa per il centro, non è una «retta» della sfera.

Latitudine massima. Per simmetria il punto più a nord della rotta è a metà strada, nella direzione di $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 = R(\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2;\ \sqrt{2})$, che ha modulo $R\sqrt{3}$. Il punto della sfera in quella direzione ha quota $z = R\sqrt{2}/\sqrt{3}$, quindi la sua latitudine φ soddisfa $\mathrm{sen}\,\varphi = \sqrt{2/3}$, cioè $\varphi \approx 54{,}7°$: la rotta più breve si spinge verso nord di quasi dieci gradi.

Per questo le rotte aeree tra l'Europa e il Nord America, che sul planisfero sembrano curvare verso nord, sono le più corte.

14.5 Modelli, coerenza e il programma di Hilbert

14.5.1 Un modello per la geometria iperbolica

Non aver trovato contraddizioni non garantisce che non ne salterà fuori una al teorema successivo: la risposta arrivò dai modelli. Nel 1868 Eugenio Beltrami mostrò che su una superficie a curvatura negativa costante, la *pseudosfera* (generata dalla rotazione di una curva detta trattrice

attorno al suo asintoto), le linee di minima distanza si comportano proprio come le rette di Lobačevskij: la pseudosfera è un modello di una porzione del piano iperbolico. Negli anni successivi Felix Klein e Henri Poincaré costruirono modelli dell'intero piano iperbolico dentro il piano euclideo.

Nel **disco di Poincaré** si fissa un cerchio Γ, che prendiamo di centro O e raggio 1. Il «piano» è formato dai punti interni a Γ (quelli della circonferenza di bordo sono esclusi); le «rette» sono i diametri di Γ e gli archi, interni al disco, delle circonferenze ortogonali a Γ, cioè che incontrano Γ formando angoli retti. Gli angoli si misurano come angoli euclidei tra le tangenti; le distanze no: con la distanza del modello, che non ci serve scrivere, il bordo è infinitamente lontano da ogni punto interno, e un segmento euclideo vicino al bordo è iperbolicamente lunghissimo.

Quando una circonferenza di centro C e raggio ρ è ortogonale a Γ? Se T è un punto comune, i raggi OT e CT sono perpendicolari (ciascuna tangente passa per il centro dell'altra circonferenza), e per il teorema di Pitagora nel triangolo OTC:

$$\Gamma \text{ e la circonferenza di centro } C \text{ e raggio } \rho \text{ sono ortogonali} \quad \Leftrightarrow \quad OC^2 = 1 + \rho^2.$$

Si verifica che per due punti del disco passa una sola «retta» del modello, e che valgono tutti gli assiomi della geometria assoluta. Il quinto postulato, invece, è falso. Nella Figura 14.7 la retta r ha per estremi i punti U e V del bordo, che non appartengono al piano: sono i suoi «punti all'infinito». Per il punto P passano infinite rette che non incontrano r. Due di esse, PU e PV, la «toccano all'infinito», in U e in V: sono le **parallele limite**, che Lobačevskij chiamava semplicemente parallele.

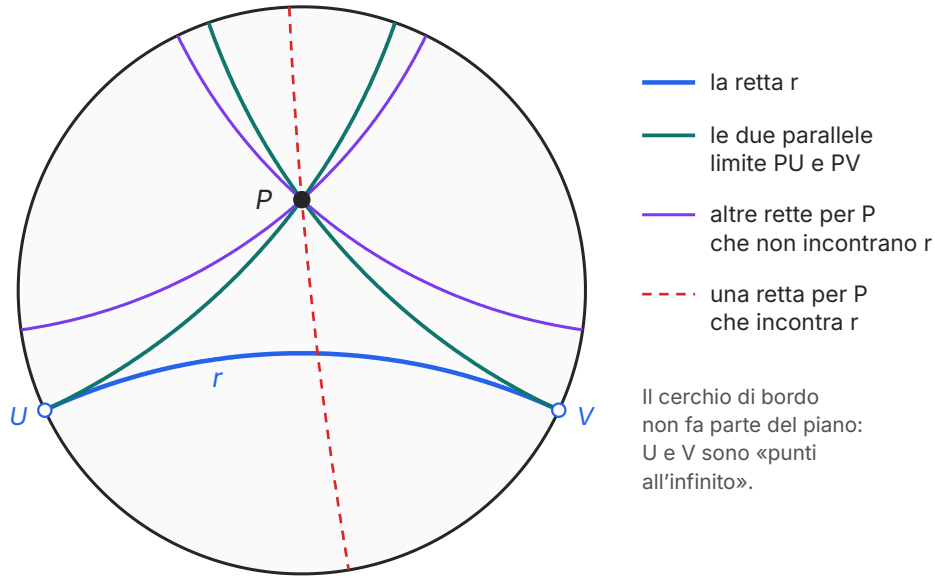


Figura 14.7 Il disco di Poincaré. La retta *r* è un arco di circonferenza ortogonale al bordo, con i punti all'infinito *U* e *V*. Per il punto *P* passano infinite rette che non incontrano *r*: le due parallele limite *PU* e *PV* e tutte quelle che, in *P*, restano fuori dall'angolo *UPV* (ne sono disegnate due); le rette per *P* che entrano in quell'angolo, come quella tratteggiata, incontrano *r*. Tutti gli archi sono calcolati come circonferenze ortogonali al bordo.

ESEMPIO SVOLTO

Verifica che la circonferenza $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ rappresenta una retta del disco di Poincaré di centro O e raggio 1, trova i suoi punti all'infinito e verifica che passa per $P(\frac{1}{2}; 0)$.

Il centro è $C(\frac{5}{4}; 0)$ e $\rho^2 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$, quindi $\rho = 3/4$. La condizione di ortogonalità è soddisfatta: $OC^2 = \frac{25}{16} = 1 + \frac{9}{16}$. I punti all'infinito sono le intersezioni con $x^2 + y^2 = 1$: sostituendo, $1 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$, cioè $x = \frac{4}{5}$ e $y = \pm\frac{3}{5}$. Controllo dell'ortogonalità in $T(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$: i vettori $\mathbf{OT} = (\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ e $\mathbf{CT} = (-\frac{9}{20}; \frac{3}{5})$ hanno prodotto scalare $-\frac{36}{100} + \frac{36}{100} = 0$. Infine $\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 1 = 0$: P sta sulla retta, che taglia il diametro orizzontale perpendicolarmente, perché il centro C sta sulla retta di quel diametro.

Nel disco si vede anche la somma degli angoli. Nella Figura 14.8 i lati del triangolo sono archi di circonferenze ortogonali al bordo, e gli angoli, misurati sulle tangenti, hanno somma di circa

91,7°: molto meno di 180°. Più i vertici si avvicinano al bordo, più gli angoli si stringono e il difetto si avvicina a 180°.

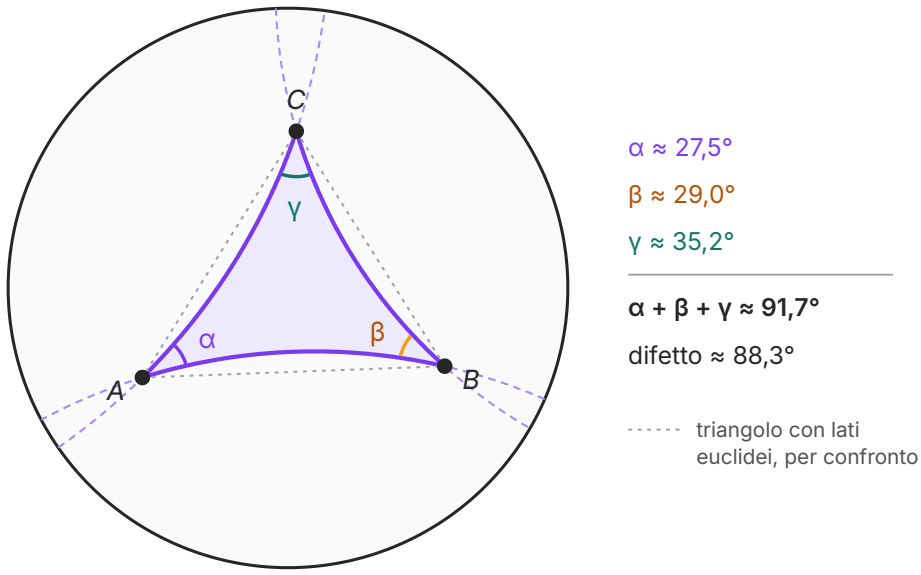


Figura 14.8 Un triangolo nel disco di Poincaré. I lati sono archi di circonferenze ortogonali al bordo (le rette complete sono tratteggiate); gli angoli, calcolati tra le tangenti ai lati, hanno somma di circa 91,7°, quindi il triangolo ha un difetto di circa 88,3°. Il triangolo con gli stessi vertici e lati rettilinei, tracciato per confronto, non è un triangolo del modello.

14.5.2 Coerenza relativa e indipendenza

Il modello traduce ogni enunciato della geometria iperbolica in un enunciato della geometria euclidea su punti, archi e circonferenze interni a Γ. Se dagli assiomi iperbolici si potesse dedurre una contraddizione, traducendo la dimostrazione nel modello otterremmo una contraddizione nella geometria euclidea. Dunque, *se la geometria euclidea è coerente, lo è anche quella iperbolica*. È un risultato di **coerenza relativa**: non dice che nessuna delle due teorie contiene contraddizioni, dice che stanno in piedi o cadono insieme.

E il quinto postulato? Gli assiomi della geometria assoluta hanno almeno due modelli: il piano euclideo, dove il quinto postulato è vero, e il disco di Poincaré, dove è falso. Esattamente come nell'esempio con quattro e cinque punti, il postulato è **indipendente** dagli altri assiomi: i duemila anni di tentativi di dimostrarlo erano destinati a fallire. La sfera, con i punti antipodali identificati, è allo stesso modo un modello della geometria ellittica. La Tabella 14.1 confronta le tre geometrie.

Tabella 14.1 Le tre geometrie a confronto. Nella geometria iperbolica e in quella ellittica la curvatura è costante; k e R sono le costanti del piano e della sfera.

	Euclidea	Iperbolica	Ellittica
Parallele a una retta per un punto esterno	una sola	infinite	nessuna
Somma degli angoli di un triangolo	= 180°	< 180°	> 180°
Ipotesi di Saccheri	angolo retto	angolo acuto	angolo ottuso
Area di un triangolo	non dipende dagli angoli	k^2 · difetto	R^2 · eccesso
Triangoli simili non congruenti	esistono	non esistono	non esistono
Rette	illimitate e infinite	illimitate e infinite	illimitate ma finite (chiuse)
Curvatura	nulla	negativa	positiva
Un modello	il piano cartesiano	il disco di Poincaré	la sfera, con i punti antipodali identificati

14.5.3 Quale geometria è vera?

Nella concezione moderna la domanda si divide in due. Come teorie matematiche le tre geometrie sono ugualmente legittime, e per una teoria «vero» significa «vero in un modello». Quale geometria descriva lo spazio fisico è invece una domanda della fisica, che si decide con le misure: per la relatività generale di Einstein vicino a grandi masse la geometria dello spazio-tempo non è euclidea, mentre nella vita quotidiana la geometria euclidea resta un'approssimazione eccellente.

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA E FISICA

Filosofia. Per Kant, nella *Critica della ragion pura*, lo spazio è una forma a priori della sensibilità e la geometria euclidea è conoscenza sintetica a priori, universale e necessaria: le geometrie non euclidee riaprirono la discussione. Henri Poincaré, in *La scienza e l'ipotesi*, sostenne che gli assiomi della geometria sono *convenzioni*: tra geometrie coerenti si sceglie la più comoda, non la più vera (*convenzionalismo*).

Fisica. Nella relatività generale la geometria dello spazio-tempo dipende da come sono distribuite materia ed energia, e i raggi di luce ne seguono le «rette»: la deviazione della luce delle stelle vicino al Sole, osservata durante un'eclisse totale, fu una delle prime conferme della teoria.

ERRORE FREQUENTE

«Le geometrie non euclidee hanno dimostrato che Euclide sbagliava». No: i teoremi di Euclide restano conseguenze corrette dei suoi assiomi, e nella geometria iperbolica valgono tutte le sue proposizioni che non usano il quinto postulato. È cambiato lo statuto degli assiomi: non sono le uniche scelte possibili.

«Un assioma è un enunciato che non si può dimostrare». Un assioma non si dimostra *in quel sistema*, perché lo si assume; in un altro sistema può essere un teorema. Se si prende come assioma il postulato di Euclide, quello di Playfair diventa un teorema, e viceversa.

Confondere coerenza e verità. Una teoria coerente è priva di contraddizioni, ma questo non rende i suoi enunciati veri del mondo fisico: la geometria iperbolica è coerente quanto quella euclidea, e da questo non segue che lo spazio sia iperbolico, né che sia euclideo.

14.5.4 I *Fondamenti* di Hilbert

Riletti con occhi moderni, gli *Elementi* hanno dei buchi. Già nella prima proposizione Euclide dà per scontato che due circonferenze si incontrino, e nessun postulato lo garantisce; altri buchi riguardano l'idea di «stare tra». Moritz Pasch osservò che il fatto seguente, usato continuamente, non si deduce dai postulati di Euclide e va assunto come assioma.

IN SINTESI

Assioma di Pasch. Siano A, B, C tre punti non allineati e r una retta del piano ABC che non passa per nessuno di essi. Se r passa per un punto interno al segmento AB, allora passa anche per un punto interno al segmento AC o per un punto interno al segmento BC.

Hilbert, nel 1899, organizzò gli assiomi della geometria euclidea in cinque gruppi: **incidenza** (o appartenenza), **ordine**, **congruenza**, **parallele**, **continuità**; l'assioma di Pasch è tra quelli dell'ordine. A un sistema di assiomi chiese tre requisiti:

- **coerenza** (o non contraddittorietà): dagli assiomi non si può dedurre una contraddizione, cioè un enunciato insieme alla sua negazione;
- **indipendenza**: nessun assioma è conseguenza degli altri; lo si prova costruendo, per ogni assioma, un modello in cui esso è falso e gli altri sono veri;
- **completezza**: ogni enunciato formulato nel linguaggio della teoria si può dimostrare oppure confutare a partire dagli assiomi (è un'altra cosa dalla completezza dei numeri reali del capitolo 1).

Per la coerenza Hilbert costruì un modello fatto di numeri, in sostanza la geometria analitica: la geometria euclidea è coerente se lo è l'aritmetica dei numeri reali. Il problema si spostava sui numeri.

14.6 Gli altri sistemi assiomatici: aritmetica e probabilità

Le *Indicazioni nazionali* indicano tre ambiti in cui osservare il metodo assiomatico: la geometria, che abbiamo scelto come esempio principale, l'aritmetica e la probabilità.

14.6.1 Gli assiomi di Peano

Nel 1889 Giuseppe Peano pubblicò, in latino, gli *Arithmetices principia nova methodo exposita*, in cui l'aritmetica dei numeri naturali è costruita da poche nozioni primitive: *numero naturale*, *zero* e *successivo di*, che indichiamo con $s(n)$. Peano partiva da 1; oggi si parte di solito da 0, e gli assiomi si scrivono nella forma seguente.

IN SINTESI

Assiomi di Peano.

1. 0 è un numero naturale.
2. Il successivo di un numero naturale è un numero naturale.
3. 0 non è il successivo di alcun numero naturale.
4. Numeri naturali distinti hanno successivi distinti: se $s(m) = s(n)$, allora $m = n$.
5. **Assioma di induzione.** Se un insieme K di numeri naturali contiene 0 e, ogni volta che contiene n, contiene anche $s(n)$, allora K contiene tutti i numeri naturali.

I numeri si definiscono a partire da 0: $1 = s(0)$, $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, e così via. Anche le operazioni si definiscono, per **ricorsione**: l'addizione con le due regole $n + 0 = n$ e $n + s(m) = s(n + m)$, la moltiplicazione con $n \cdot 0 = 0$ e $n \cdot s(m) = n \cdot m + n$. Le regole bastano a calcolare ogni somma; per esempio

$$2 + 2 = 2 + s(1) = s(2 + 1) = s(2 + s(0)) = s(s(2 + 0)) = s(s(2)) = s(3) = 4.$$

Il quinto assioma è il **principio di induzione** di *Matematica 3* (cap. 4): qui è un assioma, e garantisce che i naturali siano *soltanto* quelli che si raggiungono da 0 con un numero finito di passi. Per esempio, *ogni naturale diverso da 0 è un successivo*: l'insieme K formato da 0 e da tutti i successivi contiene 0 e, se contiene n, contiene il successivo $s(n)$; per l'induzione K contiene tutti i naturali. c.v.d. Senza induzione esistono «modelli» strani dei primi quattro assiomi: ne costruirai uno negli esercizi. Le *Indicazioni nazionali* ne sottolineano anche il significato filosofico: l'induzione matematica esprime l'«invarianza delle leggi del pensiero», ed è ben diversa dall'induzione delle scienze sperimentali, che da molti casi osservati ricava una legge generale e può sempre essere smentita da un caso nuovo.

14.6.2 Gli assiomi di Kolmogorov

In *Matematica 4* (cap. 14) la probabilità è stata definita in tre modi, classico, frequentista e soggettivo, ciascuno adatto ad alcuni ambiti e non ad altri. Nel 1933 Andrej Kolmogorov, nei *Fondamenti del calcolo delle probabilità* (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*), risolse la questione con il metodo assiomatico: non disse che cosa *è* la probabilità, ma fissò le regole a cui qualunque probabilità deve obbedire. Gli assiomi riguardano una funzione p che associa un numero a ogni evento E di uno spazio campionario Ω; le tre concezioni ne diventano altrettanti modelli (Tabella 14.2).

Tabella 14.2 Gli assiomi di Kolmogorov (nella forma per un numero finito di eventi) e le tre concezioni della probabilità di *Matematica 4*: ognuna è un modello degli assiomi.

Assiomi	Concezione	Definizione di $p(E)$	Perché soddisfa gli assiomi
1. $p(E) \geq 0$ per ogni evento E. **2.** $p(\Omega) = 1$. **3.** Se $E \cap F = \varnothing$, allora $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$.	classica	casi favorevoli / casi possibili, se i casi sono equiprobabili	un rapporto di conteggi è ≥ 0; per Ω i casi favorevoli sono tutti; i casi favorevoli a due eventi incompatibili si sommano
	frequentista	frequenza relativa dell'evento in un gran numero di prove	le frequenze sono ≥ 0, Ω si verifica in ogni prova, le frequenze di eventi incompatibili si sommano
	soggettiva	prezzo che si ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica	se i prezzi violassero un assioma, un avversario potrebbe combinare scommesse che fanno perdere con certezza (criterio di coerenza)

Dagli assiomi si ricavano i teoremi del calcolo delle probabilità senza mai chiedersi quale sia il significato di p: per esempio $p(\varnothing) = 0$, $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$, $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$. Ogni teorema vale allora in tutti e tre i modelli in un colpo solo: è il vantaggio decisivo del metodo assiomatico moderno.

APPROFONDIMENTO · I TEOREMI DI GÖDEL

Hilbert sperava di dimostrare con metodi elementari che l'aritmetica è coerente e che i suoi assiomi sono completi. Nel 1931 Kurt Gödel dimostrò due teoremi che resero impossibile quel programma nella forma voluta da Hilbert. Il **primo teorema di incompletezza**: in ogni sistema coerente di assiomi che contenga l'aritmetica dei naturali e i cui assiomi si possano elencare in modo meccanico, esistono enunciati sui naturali che non si possono né dimostrare né confutare. Il **secondo**: un sistema del genere, se è coerente, non può dimostrare la propria coerenza.

Non dicono che «in matematica nulla è certo»: i teoremi dimostrati restano dimostrati. Fissano limiti precisi a ciò che un sistema di assiomi può fare.

SINTESI

- Una teoria assiomatica è fatta di nozioni primitive, assiomi, definizioni e teoremi; un teorema si ottiene dagli assiomi con una dimostrazione, senza appoggiarsi al disegno.
- Nella concezione classica (Euclide) gli assiomi sono verità evidenti sullo spazio; nella concezione moderna (Hilbert, 1899) sono condizioni su oggetti qualsiasi e definiscono implicitamente le nozioni primitive.
- Un modello è un sistema di oggetti in cui gli assiomi sono veri. Un enunciato vero in un modello e falso in un altro è indipendente dagli assiomi.
- Il quinto postulato di Euclide equivale, nella geometria assoluta, alla forma di Playfair (una sola parallela per un punto esterno), alla somma 180° degli angoli di un triangolo, all'esistenza di un rettangolo o di triangoli simili non congruenti.
- In un quadrilatero di Saccheri gli angoli alla sommità sono congruenti; le ipotesi dell'angolo retto, ottuso e acuto corrispondono alle geometrie euclidea, ellittica e iperbolica.
- Nella geometria iperbolica (Gauss, Lobačevskij 1829, Bolyai 1832) per un punto esterno passano infinite parallele, la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180° e l'area è proporzionale al difetto.
- Sulla sfera le rette sono le circonferenze massime e non ci sono parallele; un fuso di angolo α ha area $2\alpha R^2$ e un triangolo ha area $R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ (teorema di Girard).
- Nel disco di Poincaré le rette sono i diametri e gli archi ortogonali al bordo, cioè di circonferenze con $OC^2 = 1 + \rho^2$: è un modello della geometria iperbolica dentro quella euclidea.
- I modelli provano la coerenza relativa (la geometria iperbolica è coerente se lo è l'euclidea) e l'indipendenza del quinto postulato. Coerenza non significa verità fisica.
- Hilbert ha completato gli assiomi di Euclide (per esempio con l'assioma di Pasch) e ha chiesto a un sistema di assiomi coerenza, indipendenza e completezza.
- Gli assiomi di Peano (1889) fondano l'aritmetica, con il principio di induzione come quinto assioma; gli assiomi di Kolmogorov (1933) fondano la probabilità, e le concezioni classica, frequentista e soggettiva ne sono modelli.
- Gödel (1931): un sistema di assiomi coerente, elencabile in modo meccanico, che contiene l'aritmetica non è completo e non può dimostrare la propria coerenza.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Nella concezione moderna del metodo assiomatico gli assiomi sono
   - **A.** verità evidenti sullo spazio fisico
   - **B.** enunciati dimostrati a partire dalle definizioni
   - **C.** condizioni richieste a nozioni primitive che non hanno un significato fissato
   - **D.** enunciati che non si possono dimostrare in nessuna teoria

2. ● Quale dei seguenti enunciati, aggiunto agli assiomi della geometria assoluta, **non** è equivalente al quinto postulato?
   - **A.** per due punti distinti passa una e una sola retta
   - **B.** la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto
   - **C.** esiste un rettangolo
   - **D.** esistono due triangoli simili non congruenti

3. ● In un quadrilatero di Saccheri $ABCD$, con angoli retti in A e in B e $AD \cong BC$, senza il quinto postulato si dimostra che
   - **A.** gli angoli in C e in D sono retti
   - **B.** gli angoli in C e in D sono congruenti
   - **C.** $CD \cong AB$
   - **D.** gli angoli in C e in D sono acuti

4. ● Su una sfera di raggio R un triangolo ha angoli 90°, 90° e 30°. La sua area è
   - **A.** $\pi R^2/3$
   - **B.** $\pi R^2/2$
   - **C.** $2\pi R^2/3$
   - **D.** $\pi R^2/6$

5. ● Nel disco di Poincaré le rette sono
   - **A.** tutte le corde del cerchio di bordo
   - **B.** le circonferenze concentriche al bordo
   - **C.** i diametri e gli archi di circonferenze ortogonali al bordo
   - **D.** gli archi di circonferenza che passano per il centro

6. ● Il modello del disco di Poincaré dimostra che
   - **A.** la geometria iperbolica è vera e quella euclidea è falsa
   - **B.** il quinto postulato non è conseguenza degli altri assiomi
   - **C.** lo spazio fisico è iperbolico
   - **D.** la geometria euclidea è contraddittoria

7. ●● La somma S degli angoli di un triangolo sferico (con lati minori di una semicirconferenza) soddisfa

   A. $S = 180°$

   B. $0° < S < 180°$

   C. $S \geq 540°$

   D. $180° < S < 540°$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** Nella geometria iperbolica esistono triangoli con somma degli angoli uguale a 180°. **b)** Sulla sfera due circonferenze massime si incontrano sempre in due punti. **c)** Nella geometria iperbolica esistono quadrati. **d)** Il teorema «due rette distinte hanno al più un punto in comune» vale anche nella geometria iperbolica. **e)** Due triangoli sferici, sulla stessa sfera, con gli stessi angoli hanno la stessa area.

9. ● Completa. In una teoria assiomatica i termini che si usano senza definirli si dicono _____ ; gli enunciati che si assumono senza dimostrazione si dicono _____ ; un sistema di oggetti in cui gli assiomi risultano veri si chiama _____ della teoria; un enunciato che non si può né dimostrare né confutare a partire dagli assiomi si dice _____ da essi.

Calcolare

10. ● Calcola l'area di un fuso di angolo 36° su una sfera di raggio 10 cm, e la frazione della superficie sferica che esso rappresenta.

11. ● Su una sfera di raggio 10 cm calcola l'eccesso sferico e l'area dei triangoli che hanno angoli: **a)** 80°, 70°, 50°; **b)** 120°, 90°, 60°; **c)** 100°, 100°, 100°.

12. ●● Un triangolo sferico equilatero ha area uguale a 1/12 della superficie della sfera. Calcola i suoi angoli.

13. ●● Sulla Terra, considerata una sfera di raggio 6371 km, un triangolo ha angoli di 60°, 60° e 60,1°. Calcola la sua area e commenta il risultato.

14. ●● Un quadrilatero sferico (quattro archi di circonferenza massima) ha quattro angoli di 100° su una sfera di raggio 1. Dividendolo con una diagonale in due triangoli sferici, calcola la sua area. Generalizza: qual è l'area di un poligono sferico convesso di n lati con somma degli angoli Σ?

15. ●● In un piano iperbolico con $k = 1$ (area = difetto in radianti): **a)** calcola l'area di un triangolo con angoli 30°, 45° e 60°; **b)** trova l'angolo di un triangolo equilatero di area 1; **c)** spiega perché non esiste un triangolo di area 4.

16. ●● Considera la circonferenza $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$. **a)** Verifica che rappresenta una retta del disco di Poincaré di centro O e raggio 1. **b)** Trova i suoi punti all'infinito. **c)** Trova il punto in cui taglia il diametro verticale e spiega perché lo taglia perpendicolarmente.

17. ●● Determina la retta del disco di Poincaré (centro O, raggio 1) che passa per i punti $P(0;\ \frac{1}{2})$ e $Q(\frac{1}{2};\ 0)$. *Suggerimento*: cerca il centro $C(a;\ b)$ e il raggio ρ imponendo $a^2 + b^2 = 1 + \rho^2$ e $CP = CQ = \rho$.

18. ●● Due punti A e B della superficie terrestre ($R = 6371$ km) hanno entrambi latitudine 45° nord e longitudini che differiscono di 180°. Calcola la lunghezza della rotta lungo il parallelo e quella della rotta lungo la circonferenza massima. Per dove passa quest'ultima?

19. ●●● Sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ considera i punti $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{2})$. Calcola gli angoli del triangolo sferico ABC come angoli tra i vettori normali ai piani OAB, OBC, OCA (usa il prodotto vettoriale), poi la sua area con il teorema di Girard.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Nel modello con quattro punti della Figura 14.1 verifica che per il punto B passa una sola parallela alla retta AD. Spiega poi perché il modello con cinque punti (rette = tutte le coppie di punti) e il piano di Fano dimostrano che la proprietà di Playfair è indipendente dagli assiomi 1–3 del paragrafo iniziale.

21. ●● Nella geometria assoluta, in un quadrilatero di Saccheri $ABCD$ (angoli retti in A e B, $AD \cong BC$) siano M il punto medio della base AB e N quello della sommità CD. Dimostra che la retta MN è perpendicolare sia ad AB sia a CD.

22. ●● Dimostra, usando il quinto postulato, che la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è 360°. Spiega poi perché nella geometria iperbolica gli angoli alla sommità di un quadrilatero di Saccheri sono acuti.

23. ●● *Trova l'errore.* «Dimostrazione» del quinto postulato: «Sia P un punto esterno alla retta r, a distanza d da essa. I punti che stanno dalla parte di P e hanno distanza d da r formano una retta s, che non incontra r. Ogni altra retta per P si avvicina a r da una parte e quindi la incontra. Dunque la parallela per P è unica». Dove sta l'errore?

24. ●● Mostra con un controesempio che sulla sfera non vale il teorema dell'angolo esterno nella forma «un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti». *Suggerimento*: usa il triangolo della Figura 14.5. Quale postulato di Euclide, interpretato sulla sfera, non vale, e dove interviene nella dimostrazione del teorema?

25. ●● A partire dagli assiomi di Kolmogorov dimostra che: **a)** $p(\varnothing) = 0$; **b)** $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$; **c)** se $E \subseteq F$ allora $p(E) \le p(F)$; **d)** $p(E) \le 1$ per ogni evento E.

26. ●●● Dagli assiomi di Peano e dalla definizione ricorsiva dell'addizione ($n + 0 = n$, $n + s(m) = s(n + m)$) dimostra per induzione che $0 + n = n$ per ogni numero naturale n. Perché questa uguaglianza non è già contenuta nella definizione?

27. ●●● *Un modello strano.* Sia N' l'insieme formato dai numeri naturali e da un ulteriore oggetto ω, con $s(n) = n + 1$ per ogni numero naturale n e $s(\omega) = \omega$. **a)** Verifica che in N' valgono i primi quattro assiomi di Peano. **b)** Mostra che non vale l'assioma di induzione. **c)** In N' è vero che «nessun elemento è il successivo di se stesso»? Che cosa ne deduci su questo enunciato, che nei numeri naturali si dimostra per induzione?

Problemi

28. ●● Due aeroporti immaginari si trovano a 60° di latitudine nord, con longitudini che differiscono di 120°. Considerando la Terra una sfera di raggio 6371 km, calcola la lunghezza della rotta lungo il parallelo e di quella lungo la circonferenza massima, e la latitudine massima raggiunta da quest'ultima.

29. ●● Un geometra misura con grande precisione gli angoli di un triangolo «quasi equilatero» tracciato sulla superficie terrestre, di lato circa 100 km. Stima di quanto la somma degli angoli supera 180°, approssimando l'area del triangolo sferico con quella del triangolo equilatero piano di lato 100 km ($R = 6371$ km). Esprimi il risultato in secondi d'arco e commentalo.

30. ●●● *Il difetto è additivo.* In un triangolo ABC (iperbolico, oppure sferico) un segmento AD congiunge il vertice A con un punto D del lato opposto. Dimostra che il difetto di ABC è la somma dei difetti di ABD e ADC (nel caso sferico, l'eccesso è la somma degli eccessi). Perché questa proprietà rende ragionevole che l'area sia proporzionale al difetto?

31. ● Sulla superficie terrestre ($R = 6371$ km) calcola l'area del fuso compreso tra i meridiani di longitudine 10° est e 40° est, e la frazione della superficie terrestre che esso rappresenta. Quanto misura la parte di fuso che sta nell'emisfero nord?

Verso l'esame

32. ●● *Quesito.* Dimostra che, se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, gli angoli alterni interni sono congruenti. Usa il criterio di parallelismo e il quinto postulato nella forma di Playfair, e indica in quale punto interviene il postulato.

33. ●● *Quesito.* Dimostra che in un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici, e indica quale passaggio della dimostrazione richiede il quinto postulato.

34. ●● *Quesito.* Su una sfera di raggio R un triangolo sferico ha un vertice nel polo nord e gli altri due sull'equatore, e la sua area è 1/10 della superficie sferica. Determina l'angolo del triangolo al polo.

35. ●● *Quesito.* Determina per quali valori del parametro k l'equazione $x^2 + y^2 - 2kx + 1 = 0$ rappresenta una circonferenza, e verifica che in tutti quei casi la circonferenza è ortogonale alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Per $k > 1$ trova, in funzione di k, i suoi punti all'infinito nel disco di Poincaré e il punto in cui taglia il segmento di estremi $O(0; 0)$ e $(1; 0)$.

36. ●●● *Problema.* Sulla sfera di centro O e raggio R considera i punti $N(0;\,0;\,R)$, $A(R;\,0;\,0)$ e $B(R\cos\varphi;\,R\,\text{sen}\,\varphi;\,0)$, con $0 < \varphi \le \pi$. **a)** Spiega perché il triangolo sferico NAB ha angoli retti in A e in B e angolo φ in N, e ricava che la sua area è $S(\varphi) = R^2\varphi$. **b)** Il triangolo piano NAB ha gli stessi vertici. Usando il prodotto vettoriale dimostra che la sua area è $T(\varphi) = \dfrac{R^2}{2}\sqrt{(1-\cos\varphi)(3+\cos\varphi)}$. **c)** Calcola $\lim_{\varphi\to 0^+} S(\varphi)/T(\varphi)$ e interpreta il risultato pensando alla forma dei due triangoli quando φ è piccolo. **d)** Dimostra che $T(\varphi)$ è crescente in $]0;\,\pi]$, trova il suo valore massimo e calcola il rapporto S/T per $\varphi = \pi/2$.

PER APPROFONDIRE

- BON — la storia critica della teoria delle parallele, da Euclide e Proclo a Saccheri, Lambert, Gauss, Bolyai, Lobačevskij, Riemann e Beltrami: ancora oggi la guida più completa.
- HIL — i *Fondamenti della geometria*: i cinque gruppi di assiomi, l'indipendenza dimostrata con i modelli e la coerenza ricondotta all'aritmetica.
- KLI — i capitoli sulle geometrie non euclidee e sui fondamenti della matematica, fino a Gödel.
- CR — la geometria iperbolica, i suoi modelli e che cosa significa che un sistema di assiomi sia coerente.

Glossario del capitolo

Assioma (postulato)
Enunciato sulle nozioni primitive che, in una teoria, si assume senza dimostrazione; nella concezione moderna è una condizione richiesta a oggetti qualsiasi.

Assiomi di Peano
I cinque assiomi dei numeri naturali, basati su zero e sul successivo; il quinto è il principio di induzione.

Circonferenza massima
Intersezione di una sfera con un piano passante per il centro; sulla sfera fa la parte della retta.

Coerenza
Proprietà di un sistema di assiomi da cui non si può dedurre una contraddizione. È relativa quando si dimostra a condizione che un'altra teoria sia coerente.

Completezza (di un sistema di assiomi)
Proprietà di un sistema di assiomi in cui ogni enunciato della teoria si può dimostrare o confutare.

Difetto
Nella geometria iperbolica, differenza tra 180° e la somma degli angoli di un triangolo; l'area del triangolo è proporzionale al difetto.

Disco di Poincaré
Modello della geometria iperbolica: i punti interni a un cerchio, con rette i diametri e gli archi di circonferenze ortogonali al bordo.

Eccesso sferico
Differenza $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ tra la somma degli angoli di un triangolo sferico e un angolo piatto; l'area è R^2 volte l'eccesso (teorema di Girard).

Fuso
Parte di superficie sferica compresa tra due semicirconferenze massime con gli stessi estremi; un fuso di angolo α ha area $2\alpha R^2$.

Geometria assoluta
L'insieme dei teoremi che si dimostrano senza usare il quinto postulato; è comune alla geometria euclidea e a quella iperbolica.

Geometria ellittica
Geometria senza rette parallele, in cui la somma degli angoli di un triangolo supera 180°; un suo modello è la sfera con i punti antipodali identificati.

Geometria iperbolica
Geometria in cui valgono gli assiomi euclidei tranne il quinto postulato, sostituito dall'esistenza di più parallele per un punto esterno.

Indipendenza
Un enunciato è indipendente da certi assiomi se né lui né la sua negazione si possono dimostrare a partire da essi; si prova con due modelli.

Metodo assiomatico
Costruzione di una teoria a partire da nozioni primitive e assiomi, ricavando i teoremi con dimostrazioni.

Modello (di una teoria)
Sistema di oggetti in cui, interpretate le nozioni primitive, tutti gli assiomi di una teoria risultano veri.

Nozione primitiva
Termine di una teoria che si usa senza definirlo; il suo significato è fissato solo dagli assiomi.

Quadrilatero di Saccheri
Quadrilatero con due angoli retti consecutivi alla base e i lati obliqui congruenti; gli angoli alla sommità sono congruenti.

Quinto postulato
Il postulato delle parallele di Euclide; nella forma di Playfair: per un punto esterno a una retta passa al più una parallela.

Soluzioni

1. C. Gli assiomi sono definizioni implicite: dicono come si comportano le nozioni primitive, non che cosa siano. D è falsa: un assioma di un sistema può essere un teorema di un altro.

2. A. È il primo assioma di incidenza, che vale in tutte e tre le geometrie (sulla sfera, con i punti antipodali identificati); gli altri tre enunciati sono equivalenti al quinto postulato.

3. B. È il teorema di Saccheri (primo e terzo criterio di congruenza). Che gli angoli siano retti, e quindi che il quadrilatero sia un rettangolo, richiede il quinto postulato, e così pure $CD \cong AB$; che siano acuti vale solo nella geometria iperbolica.

4. D. L'eccesso è $90° + 90° + 30° - 180° = 30° = \pi/6$, quindi l'area è $\pi R^2/6$.

5. C. Sono le circonferenze ortogonali al bordo (con $OC^2 = 1 + \rho^2$) e, come caso limite, i diametri.

6. B. Nel disco valgono gli altri assiomi e il quinto postulato è falso: quindi non ne è conseguenza. Il modello non dice nulla sullo spazio fisico e, anzi, mostra che la geometria iperbolica è coerente se lo è quella euclidea.

7. D. L'eccesso è positivo, quindi $S > 180°$; ogni angolo è minore di 180°, quindi $S < 540°$.

8. a) F: la somma è sempre minore di 180°. b) V: in due punti antipodali. c) F: un quadrato avrebbe quattro angoli retti, ma nella geometria iperbolica non esistono rettangoli (la somma degli angoli di un quadrilatero è minore di 360°). d) V: segue dal primo assioma di incidenza, che vale anche lì. e) V: per il teorema di Girard l'area dipende solo dagli angoli.

9. Nozioni (o enti) primitive; assiomi (o postulati); modello; indipendente.

10. Area $= 2\alpha R^2$ con $\alpha = 36° = \pi/5$: $2 \cdot (\pi/5) \cdot 100 = 40\pi \approx 125{,}7$ cm^2. La frazione è $36°/360° = 1/10$ (infatti $40\pi/(400\pi) = 1/10$).

11. a) Eccesso $20° = \pi/9$; area $100\pi/9 \approx 34{,}9$ cm^2. b) Eccesso $90° = \pi/2$; area $50\pi \approx 157{,}1$ cm^2. c) Eccesso $120° = 2\pi/3$; area $200\pi/3 \approx 209{,}4$ cm^2.

12. Area $= 4\pi R^2/12 = \pi R^2/3$, quindi l'eccesso è $\pi/3$. Con tre angoli uguali φ: $3\varphi - \pi = \pi/3$, $\varphi = 4\pi/9 = 80°$.

13. Eccesso $0{,}1° = \pi/1800$ rad; area $= 6371^2 \cdot \pi/1800 \approx 70\,842$ km^2. Un triangolo grande quanto una regione estesa ha angoli che superano 180° di appena un decimo di grado: su scala locale la geometria della superficie terrestre è quasi euclidea.

14. Una diagonale divide il quadrilatero in due triangoli sferici; la somma dei loro angoli è la somma $\Sigma = 400°$ degli angoli del quadrilatero. Area $= (\Sigma_1 - \pi) + (\Sigma_2 - \pi) = \Sigma - 2\pi = 40° = 2\pi/9 \approx 0{,}698$. In generale, dividendo il poligono in $n - 2$ triangoli con le diagonali da un vertice, l'area è $R^2[\Sigma - (n-2)\pi]$.

15. a) Difetto $180° - 135° = 45° = \pi/4$; area $\pi/4 \approx 0{,}785$. b) $\pi - 3\varphi = 1$, $\varphi = (\pi - 1)/3 \approx 0{,}714$ rad $\approx 40{,}9°$. c) L'area è il difetto, che è minore di $\pi \approx 3{,}14 < 4$.

16. a) Centro $C(0; 2)$, $\rho^2 = 4 - 1 = 3$; $OC^2 = 4 = 1 + 3$: è ortogonale al bordo. b) Sottraendo $x^2 + y^2 = 1$: $1 - 4y + 1 = 0$, $y = 1/2$, $x = \pm\sqrt{3}/2$: i punti all'infinito sono $(\pm\sqrt{3}/2; 1/2)$. c) Con $x = 0$: $y^2 - 4y + 1 = 0$, $y = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$ (l'altra soluzione, $2 + \sqrt{3}$, è fuori dal disco). Il diametro verticale sta sulla retta per il centro C, cioè lungo un raggio della circonferenza, che è perpendicolare alla tangente: l'angolo tra le due rette del modello è retto.

17. Da $CP^2 = \rho^2$: $a^2 + (b - 1/2)^2 = a^2 + b^2 - 1$, cioè $-b + 1/4 = -1$, $b = 5/4$; allo stesso modo da CQ si ottiene $a = 5/4$. Allora $\rho^2 = 25/16 + 25/16 - 1 = 34/16$, $\rho = \sqrt{34}/4 \approx 1{,}458$. La retta è l'arco, interno al disco, della circonferenza $(x - 5/4)^2 + (y - 5/4)^2 = 17/8$.

18. $A = R(\sqrt{2}/2; 0; \sqrt{2}/2)$, $B = R(-\sqrt{2}/2; 0; \sqrt{2}/2)$ (longitudini 0° e 180°). Il prodotto scalare è $\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB} = R^2(-1/2 + 0 + 1/2) = 0$, quindi $\theta = 90°$ e la rotta minima misura $\pi R/2 \approx 10\,008$ km. Il parallelo ha raggio $R\sqrt{2}/2$ e le città ne individuano metà: $\pi R\sqrt{2}/2 \approx 14\,153$

km. La circonferenza massima sta nel piano xz e passa per il polo nord: è la rotta che sorvola il polo.

19. Normale a OAB: (0; 0; 1). Normale a OBC: $\mathbf{OB} \times \mathbf{OC} = (2\sqrt{2}; 0; 0)$, direzione (1; 0; 0). Normale a OCA: $\mathbf{OA} \times \mathbf{OC} = (0; -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, direzione $(0; -1; 1)/\sqrt{2}$. Angolo in A (piani OAB e OAC): cos = $1/\sqrt{2}$, 45°. Angolo in B (piani OAB e OBC): normali (0; 0; 1) e (1; 0; 0), 90°. Angolo in C (piani OBC e OCA): normali (1; 0; 0) e $(0; -1; 1)/\sqrt{2}$, prodotto scalare 0, 90°. (Si controlla con le tangenti nei vertici che gli angoli del triangolo sono proprio questi e non i loro supplementari.) Eccesso 225° − 180° = 45° = π/4; area 4 · π/4 = π.

20. Le rette per B sono BA, BC, BD: BA contiene A e BD contiene D, quindi incontrano $\{A; D\}$, mentre $BC = \{B; C\}$ non ha punti comuni con $\{A; D\}$: è l'unica parallela. Nel modello a cinque punti per C passano due parallele ad AB ($\{C; D\}$ e $\{C; E\}$); nel piano di Fano non ce n'è nessuna. Tutti e tre i modelli soddisfano gli assiomi 1–3, ma la proprietà di Playfair è vera nel primo e falsa negli altri due: non è né dimostrabile né confutabile, quindi è indipendente.

21. I triangoli AMD e BMC sono congruenti (primo criterio: $AM \cong MB$, angoli retti in A e B, $AD \cong BC$), quindi $MD \cong MC$ e $AMD \cong BMC$. I triangoli MND e MNC sono congruenti (terzo criterio: $MD \cong MC$, $DN \cong NC$, MN comune), quindi gli angoli in N sono congruenti e adiacenti, cioè retti: $MN \perp CD$; inoltre $DMN \cong CMN$. Allora $AMN = AMD + DMN \cong BMC + CMN = BMN$; i due angoli sono adiacenti e congruenti, quindi retti: $MN \perp AB$. Non si è usato il quinto postulato.

22. Una diagonale divide il quadrilatero convesso in due triangoli; gli angoli dei due triangoli formano esattamente gli angoli del quadrilatero, quindi la somma è 180° + 180° = 360°. Nella geometria iperbolica ciascun triangolo ha somma minore di 180°, dunque il quadrilatero ha somma minore di 360°. In un quadrilatero di Saccheri gli angoli alla base sono retti, quindi i due angoli alla sommità hanno somma minore di 180°; essendo congruenti, ciascuno è minore di 90°.

23. L'errore è affermare che i punti equidistanti da r formino una retta: è uno degli enunciati equivalenti al quinto postulato, quindi la «dimostrazione» lo presuppone (anche «si avvicina e quindi la incontra» è un passaggio non giustificato). Nella geometria iperbolica quei punti formano una curva, non una retta.

24. Nel triangolo con tre angoli retti l'angolo esterno in A è 180° − 90° = 90°, uguale (non maggiore) agli angoli interni in B e in C. Sulla sfera non vale il secondo postulato inteso come «una retta si prolunga illimitatamente senza tornare su se stessa»: le circonferenze massime sono chiuse. Nella dimostrazione euclidea si prolunga una mediana di un tratto uguale a se stessa e si usa che il punto ottenuto sta «dall'altra parte»: sulla sfera, prolungando, si può tornare indietro e quel passaggio cade.

25. a) Ω e $\varnothing$ sono incompatibili e $\Omega \cup \varnothing = \Omega$: $1 = p(\Omega) = p(\Omega) + p(\varnothing)$, quindi $p(\varnothing) = 0$. b) E e $\bar{E}$ sono incompatibili con unione Ω: $p(E) + p(\bar{E}) = 1$. c) $F = E \cup (F \cap \bar{E})$, unione di eventi incompatibili: $p(F) = p(E) + p(F \cap \bar{E}) \geq p(E)$ per l'assioma 1. d) Da c) con $F = \Omega$: $p(E) \leq p(\Omega) = 1$.

26. Sia K l'insieme dei naturali n con $0 + n = n$. *Passo base*: $0 + 0 = 0$ per la prima regola, quindi $0 \in K$. *Passo induttivo*: se $0 + n = n$, allora $0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$ per la seconda regola, quindi $s(n) \in K$. Per l'assioma di induzione K contiene tutti i naturali. La definizione dice che cosa succede aggiungendo 0 *a destra*; che lo stesso accada a sinistra è proprio una forma della proprietà commutativa, che va dimostrata.

27. a) $0 \in N'$; il successivo di ogni elemento sta in N' ($n + 1$ oppure ω); 0 non è successivo di nessuno (non di un naturale, e non di ω, perché $s(\omega) = \omega \neq 0$); s è iniettiva, perché i naturali hanno successivi distinti e diversi da ω, e ω è successivo solo di se stesso. b) L'insieme K dei numeri naturali contiene 0 e il successivo di ogni suo elemento, ma non contiene ω: l'assioma di induzione è falso. c) No: $s(\omega) = \omega$. Quindi l'enunciato, vero nei naturali (si dimostra per induzione), non è conseguenza dei soli primi quattro assiomi: per dimostrarlo serve l'induzione.

28. Con P_1 = (cos 60°; 0; sen 60°), P_2 = (cos 60° cos 120°; cos 60° sen 120°; sen 60°) (sulla sfera unitaria): $\cos\theta = (1/4)(-1/2) + 3/4 = 5/8$, $\theta \approx 51{,}32° \approx 0{,}8957$ rad, rotta massima ≈ 6371 · 0,8957 ≈ 5706 km. Il parallelo ha raggio 6371 · cos 60° = 3185,5 km; l'arco di 120° è

$3185{,}5 \cdot 2\pi/3 \approx 6672$ km. Il punto medio della rotta è nella direzione di $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 = (1/4; \sqrt{3}/4; \sqrt{3})$, di modulo $\sqrt{13/4}$; sen $\varphi = \sqrt{3}/\sqrt{13/4} = 2\sqrt{39}/13 \approx 0{,}961$, $\varphi \approx 73{,}9°$.

29. Area $\approx (\sqrt{3}/4) \cdot 100^2 \approx 4330$ km^2. Eccesso $\approx 4330/6371^2 \approx 1{,}067 \cdot 10^{-4}$ rad $\approx 0{,}0061° \approx 22''$. Un eccesso di una ventina di secondi d'arco è al limite di ciò che uno strumento di precisione misura: su triangoli di questa dimensione la curvatura della Terra si avverte appena, e su triangoli di qualche metro è del tutto invisibile.

30. Siano $\alpha_1 = BAD$, $\alpha_2 = DAC$ ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$), $\delta_1 = ADB$, $\delta_2 = ADC$ ($\delta_1 + \delta_2 = \pi$, angoli adiacenti). Somma dei difetti: $(\pi - \alpha_1 - \beta - \delta_1) + (\pi - \alpha_2 - \gamma - \delta_2) = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \pi = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, il difetto di ABC. Nel caso sferico lo stesso calcolo con i segni cambiati dà l'additività dell'eccesso. Il difetto si comporta come un'area: quando si divide una figura in parti, si divide in parti che si sommano; è quindi naturale che l'area sia un suo multiplo costante.

31. Il fuso ha angolo $30° = \pi/6$: area $2 \cdot (\pi/6) \cdot 6371^2 = \pi \cdot 6371^2/3 \approx 4{,}25 \cdot 10^7$ km^2, cioè $30/360 = 1/12$ della superficie terrestre ($4\pi \cdot 6371^2 \approx 5{,}10 \cdot 10^8$ km^2). Per simmetria rispetto al piano dell'equatore metà del fuso sta nell'emisfero nord: $\approx 2{,}13 \cdot 10^7$ km^2.

32. Siano $r \parallel s$ tagliate da t in $A \in r$ e $B \in s$. Per B conduciamo la retta s' che forma con t un angolo alterno interno congruente a quello che t forma con r in A: per il criterio di parallelismo (geometria assoluta) $s' \parallel r$. Per il postulato di Playfair per B passa al più una parallela a r, quindi $s' = s$, e gli angoli alterni interni formati da s sono congruenti. Il postulato interviene nell'identificazione $s' = s$.

33. Sia ABC rettangolo in A e M il punto medio dell'ipotenusa BC. Da M conduciamo la perpendicolare ad AB, con piede H. Le rette MH e AC sono perpendicolari ad AB, quindi parallele. Per il teorema di Talete (parallele che tagliano due trasversali) da $BM \cong MC$ segue $BH \cong HA$. I triangoli MHB e MHA sono congruenti (primo criterio: $HB \cong HA$, angoli retti in H, MH comune), quindi $MA \cong MB \cong MC$. Il quinto postulato interviene nel teorema di Talete, la cui dimostrazione usa le proprietà degli angoli formati da rette parallele (in alternativa, nella costruzione del rettangolo che completa il triangolo). Nella geometria iperbolica, infatti, il punto medio dell'ipotenusa non è equidistante dai tre vertici.

34. Gli angoli in due vertici sull'equatore sono retti (i meridiani sono perpendicolari all'equatore); detto φ l'angolo al polo, l'eccesso è φ, l'area $R^2\varphi$. Da $R^2\varphi = 4\pi R^2/10$: $\varphi = 2\pi/5 = 72°$.

35. Completando i quadrati: $(x - k)^2 + y^2 = k^2 - 1$: è una circonferenza se $k^2 - 1 > 0$, cioè $k < -1 \vee k > 1$, con centro $(k; 0)$ e $\rho^2 = k^2 - 1$. Allora $OC^2 = k^2 = 1 + \rho^2$: è sempre ortogonale. Sottraendo $x^2 + y^2 = 1$: $2 - 2kx = 0$, $x = 1/k$, $y = \pm\sqrt{1 - 1/k^2} = \pm\sqrt{k^2 - 1}/k$. Con $y = 0$: $x^2 - 2kx + 1 = 0$, $x = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$; il prodotto delle radici è 1, quindi una sola sta in $]0; 1[$: $x = k - \sqrt{k^2 - 1}$.

36. a) Gli archi NA e NB stanno su meridiani, cioè su piani per l'asse z, perpendicolari al piano dell'equatore che contiene AB: gli angoli in A e B sono retti. In N l'angolo è il diedro tra i piani dei due meridiani, cioè l'angolo φ tra OA e OB. Eccesso: $\pi/2 + \pi/2 + \varphi - \pi = \varphi$, area $S(\varphi) = R^2\varphi$. **b)** $\mathbf{NA} = (R; 0; -R)$, $\mathbf{NB} = (R \cos\varphi; R \operatorname{sen}\varphi; -R)$; $\mathbf{NA} \times \mathbf{NB} = R^2(\operatorname{sen}\varphi; 1 - \cos\varphi; \operatorname{sen}\varphi)$, con modulo al quadrato $R^4[2\operatorname{sen}^2\varphi + (1 - \cos\varphi)^2] = R^4(3 - 2\cos\varphi - \cos^2\varphi) = R^4(1 - \cos\varphi)(3 + \cos\varphi)$. Quindi $T(\varphi) = (R^2/2)\sqrt{(1 - \cos\varphi)(3 + \cos\varphi)}$. **c)** Per $\varphi \to 0^+$: $1 - \cos\varphi \sim \varphi^2/2$ e $3 + \cos\varphi \to 4$, quindi $T \sim (R^2/2)\sqrt{2}\,\varphi$ e $S/T \to 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Quando φ è piccolo i due triangoli sono «fette» sottili con basi quasi uguali, lunghe circa $R\varphi$. Quella piana ha altezza circa $NA = R\sqrt{2}$ e area $\approx (1/2) \cdot R\varphi \cdot R\sqrt{2}$; quella sferica, alla latitudine θ, è larga $R\varphi\cos\theta$, e si restringe verso il polo più lentamente di un triangolo. Il rapporto non tende a 1 perché le due fette, pur sottilissime, restano lunghe un quarto di meridiano: la loro lunghezza non è piccola rispetto al raggio, e la curvatura non diventa trascurabile. **d)** La funzione $g(\varphi) = (1 - \cos\varphi)(3 + \cos\varphi) = 3 - 2\cos\varphi - \cos^2\varphi$ ha derivata $g'(\varphi) = 2\operatorname{sen}\varphi\,(1 + \cos\varphi) > 0$ in $]0; \pi[$; poiché la radice è crescente, T è crescente in $]0; \pi]$ e il massimo è $T(\pi) = (R^2/2)\sqrt{2 \cdot 2} = R^2$. Per $\varphi = \pi/2$: $S = \pi R^2/2$, $T = (R^2/2)\sqrt{3}$, $S/T = \pi/\sqrt{3} = \pi\sqrt{3}/3 \approx 1{,}81$.