CAPITOLO

13

Geometria analitica dello spazio

Tre numeri bastano per dire dove si trova un punto; un'equazione basta per dire dove si trova un piano. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Usare le coordinate cartesiane nello spazio per calcolare distanze, punti medi e baricentri.
2. Operare con i vettori dello spazio: prodotto scalare, angoli, prodotto vettoriale e aree.
3. Scrivere e interpretare l'equazione di un piano e le equazioni parametriche e cartesiane di una retta.
4. Stabilire le posizioni reciproche di rette e piani e calcolare distanze e angoli.
5. Riconoscere l'equazione di una sfera e studiarne l'intersezione con piani e rette, il piano tangente e la sfera per quattro punti.
6. Risolvere lo stesso problema di geometria solida con il metodo sintetico e con il metodo analitico.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Coordinate cartesiane nello spazio 2
13.2 Vettori nello spazio 4
13.3 Il piano 7
13.4 La retta 12
13.5 La sfera 16
13.6 Metodo sintetico e metodo analitico 21

Matematica 5 · Parte IV · Geometria analitica dello spazio e metodo assiomatico · versione 1.0
Capitolo 13: Geometria analitica dello spazio · pagine 365–392 del volume completo · estratto per lo studio

Un drone che consegna un pacco, un satellite che trasmette la propria posizione, il personaggio di un videogioco che salta da una piattaforma all'altra: in tutti questi casi un calcolatore deve sapere *dove* si trova un oggetto nello spazio e deve saper rispondere a domande geometriche come «quanto dista quel punto da quella parete?» o «questa traiettoria colpisce lo schermo?». Il calcolatore non disegna e non ragiona su triangoli: lavora con terne di numeri.

In *Matematica 4* abbiamo studiato rette, piani e solidi dello spazio con il metodo *sintetico* di Euclide, e solo alla fine del capitolo sulle rette e i piani abbiamo intravisto che le coordinate e i vettori permettono di risolvere gli stessi problemi con il calcolo. In questo capitolo realizziamo quel programma: introduciamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio e, come nel piano con la retta e le coniche, traduciamo in equazioni i piani, le rette e le sfere. Lo strumento principale saranno i vettori che conosci da *Matematica 2*, e in particolare il prodotto vettoriale, che qui diventa lo strumento per costruire i vettori perpendicolari ai piani.

13.1 Coordinate cartesiane nello spazio

13.1.1 Il sistema di riferimento *Oxyz*

Fissiamo nello spazio un punto O e tre rette passanti per O, a due a due perpendicolari. Su ciascuna scegliamo un verso e la stessa unità di misura: otteniamo tre assi orientati, l'**asse x**, l'**asse y** e l'**asse z**. L'insieme di O e dei tre assi si chiama **sistema di riferimento cartesiano ortogonale** nello spazio e si indica con $Oxyz$; il punto O è l'**origine**.

I tre assi non si scelgono a caso. Useremo sempre una **terna destrorsa**: se si guarda il piano xy dal semiasse positivo delle z, la rotazione di 90° che porta il semiasse positivo delle x sul semiasse positivo delle y è antioraria. Un modo pratico per ricordarlo è la regola della mano destra: il pollice indica l'asse x, l'indice l'asse y, il medio, piegato a 90°, l'asse z. È la convenzione della fisica, e vedremo che da essa dipende il verso del prodotto vettoriale.

A due a due, gli assi individuano tre **piani coordinati**: il piano xy, il piano xz e il piano yz. I tre piani coordinati dividono lo spazio in otto regioni, gli **ottanti**; nel primo ottante le tre coordinate sono tutte positive.

Per assegnare le coordinate a un punto P conduciamo per P i tre piani paralleli ai piani coordinati: essi tagliano gli assi in tre punti, le cui ascisse sugli assi sono l'**ascissa** x_P, l'**ordinata** y_P e la **quota** z_P di P. Scriviamo $P(x_P;\, y_P;\, z_P)$, con i punti e virgola come nel piano. Viceversa, ogni terna ordinata di numeri reali individua un solo punto: la corrispondenza fra i punti dello spazio e le terne di $\mathbb{R}^3$ è biunivoca.

La Figura 13.1 mostra il punto $P(3;\, 4;\, 2{,}5)$. Le sue **proiezioni ortogonali** sui piani coordinati si ottengono annullando una coordinata: sul piano xy la proiezione è $P_{xy}(3;\, 4;\, 0)$, sul piano xz è

$P_{xz}(3; 0; 2{,}5)$, sul piano yz è $P_{yz}(0; 4; 2{,}5)$. I punti degli assi hanno due coordinate nulle, per esempio $(3; 0; 0)$ sull'asse x; i punti del piano xy hanno quota nulla, e il piano xy ha quindi equazione $z = 0$.

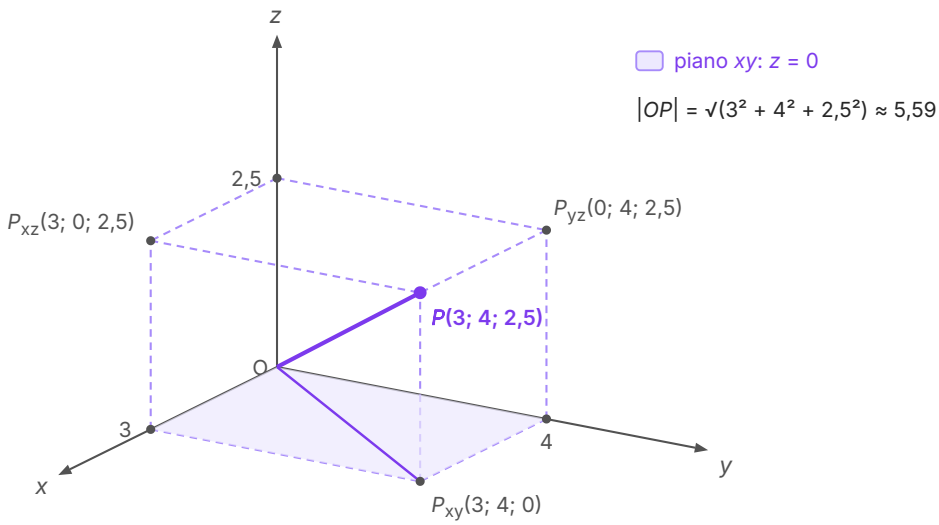


Figura 13.1 Il punto $P(3; 4; 2{,}5)$ e le sue proiezioni sui piani coordinati. Il segmento OP è la diagonale del parallelepipedo rettangolo che ha tre spigoli sugli assi, lunghi 3, 4 e 2,5.

13.1.2 Distanza tra due punti

Nella Figura 13.1 il segmento OP è la diagonale di un parallelepipedo rettangolo di spigoli 3, 4 e 2,5. In *Matematica 4* abbiamo calcolato la diagonale di un parallelepipedo applicando due volte il teorema di Pitagora: nel triangolo rettangolo OXP_{xy} (con $X(3; 0; 0)$) si ha $OP_{xy}{}^2 = 3^2 + 4^2$, e nel triangolo $OP_{xy}P$, rettangolo in P_{xy} perché PP_{xy} è perpendicolare al piano xy, si ha $OP^2 = OP_{xy}{}^2 + 2{,}5^2$. Quindi $OP = \sqrt{9 + 16 + 6{,}25} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5{,}59$.

Lo stesso ragionamento vale per due punti qualsiasi $A(x_1; y_1; z_1)$ e $B(x_2; y_2; z_2)$: il segmento AB è la diagonale del parallelepipedo con le facce parallele ai piani coordinati e gli spigoli lunghi $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$. Si ottiene la formula della **distanza tra due punti**:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Per esempio, se $A(1; -2; 3)$ e $B(4; 2; 15)$, le differenze delle coordinate sono 3, 4 e 12 e $AB = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Se poniamo $z_1 = z_2 = 0$ ritroviamo la formula del piano: la geometria analitica dello spazio contiene quella del piano come caso particolare.

13.1.3 Punto medio e baricentro

Proiettiamo il segmento AB sull'asse x. Per il teorema di Talete nello spazio (*Matematica 4*), i piani perpendicolari all'asse x condotti per A, per il punto medio M e per B staccano sull'asse due segmenti congruenti, quindi l'ascissa di M è la media delle ascisse di A e di B. Lo stesso vale per le altre due coordinate:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2}\right), \quad G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

La seconda formula dà il **baricentro** G del triangolo di vertici A, B, $C(x_3; y_3; z_3)$: come nel piano, G divide ogni mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra. Per esempio il segmento di estremi $A(1; -2; 3)$ e $B(4; 2; 15)$ ha punto medio $M\left(\frac{5}{2}; 0; 9\right)$, e il triangolo di vertici $(2; 0; 1)$, $(-1; 4; 3)$, $(5; 2; -1)$ ha baricentro $(2; 2; 1)$.

ESEMPIO SVOLTO

Verifichiamo che il triangolo di vertici $P(3; 1; 2)$, $Q(5; 3; 3)$ e $R(1; 2; 4)$ è rettangolo isoscele, e calcoliamone l'area, il baricentro e il centro della circonferenza circoscritta.

Lati. $PQ = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$, $PR = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3$, $QR = \sqrt{(-4)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Poiché $PQ^2 + PR^2 = 9 + 9 = 18 = QR^2$, per l'inverso del teorema di Pitagora il triangolo è rettangolo in P; ed è isoscele perché $PQ = PR$.

Area e baricentro. L'area è metà del prodotto dei cateti: $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$. Il baricentro è $G\left(\frac{3+5+1}{3};\ \frac{1+3+2}{3};\ \frac{2+3+4}{3}\right) = G(3; 2; 3)$.

Circocentro. In un triangolo rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa: $M\left(3; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. Controllo: $MP^2 = 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$, quindi $MP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, che è proprio metà di QR.

13.2 Vettori nello spazio

13.2.1 Componenti, modulo e operazioni

In *Matematica 2* hai conosciuto i vettori dello spazio; riprendiamoli in coordinate. Indichiamo con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i **versori** degli assi, cioè i vettori di modulo 1 diretti come i semiassi positivi. Ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive in un solo modo come $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; i numeri a, b, c sono le sue **componenti** e scriviamo $\mathbf{v} = (a; b; c)$. Il vettore che va da $A(x_1; y_1; z_1)$ a $B(x_2; y_2; z_2)$ ha componenti $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, e il suo modulo è la distanza AB:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Somma e prodotto per un numero si eseguono componente per componente: $(a; b; c) + (a'; b'; c') = (a + a'; b + b'; c + c')$ e $k(a; b; c) = (ka; kb; kc)$. Due vettori non nulli sono **paralleli** se uno è multiplo dell'altro, cioè se hanno le componenti proporzionali: $(2; -1; 4)$ e $(-6; 3; -12)$ sono paralleli (il secondo è il primo moltiplicato per -3), mentre $(1; 2; 3)$ e $(2; 4; 5)$ non lo sono.

13.2.2 Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** di $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ è il numero

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta,$$

dove θ, con $0 \le \theta \le \pi$, è l'angolo fra i due vettori. L'uguaglianza fra le due espressioni, che in *Matematica 2* hai ricavato dal teorema del coseno, ha due conseguenze che useremo continuamente:

- l'angolo fra due vettori non nulli si calcola con $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$;
- due vettori non nulli sono **perpendicolari** se e solo se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Per esempio $\mathbf{u} = (2; -1; 2)$ e $\mathbf{v} = (0; 3; 4)$ hanno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 - 3 + 8 = 5$ e moduli $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$, quindi $\cos\theta = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$ e $\theta \approx 70{,}5°$. Invece $(1; 2; 3)$ e $(2; 5; -4)$ sono perpendicolari, perché $2 + 10 - 12 = 0$.

13.2.3 Il prodotto vettoriale

Nello spazio si pone spesso un problema che nel piano non esiste: dati due vettori non paralleli $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, trovare un vettore perpendicolare a entrambi. Vedremo che serve per scrivere l'equazione del piano che passa per tre punti. La risposta è il **prodotto vettoriale**, che hai conosciuto in *Matematica 2*; ne riprendiamo la formula in componenti:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2;\ u_3v_1 - u_1v_3;\ u_1v_2 - u_2v_1).$$

Per ricordare la formula, scrivi le componenti di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$ su due righe. Per la prima componente copri la prima colonna e calcola il determinante delle due colonne rimaste, $u_2v_3 - u_3v_2$; per la seconda copri la seconda colonna e calcola il determinante *cambiato di segno*; per la terza copri la terza colonna. Per esempio, con $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$ e $\mathbf{v} = (2; 0; 1)$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0;\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1;\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = (2; 5; -4),$$

e infatti $(2; 5; -4)$ è perpendicolare a $\mathbf{u}$ (prodotto scalare $2 + 10 - 12 = 0$) e a $\mathbf{v}$ (prodotto scalare $4 + 0 - 4 = 0$). Non è un caso. Per ogni coppia di vettori

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0,$$

perché sviluppando i sei prodotti si annullano a coppie ($u_1u_2v_3$ con $-u_2u_1v_3$, e così via); allo stesso modo $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Il modulo del prodotto vettoriale ha un significato geometrico: sviluppando i quadrati si verifica l'identità $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$, da cui $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta$. Poiché $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ per $0 \leq \theta \leq \pi$, si ottiene $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$: è l'area del parallelogramma costruito sui due vettori, che ha base $|\mathbf{u}|$ e altezza $|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$.

IN SINTESI

Proprietà del prodotto vettoriale. Per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dello spazio:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è perpendicolare sia a $\mathbf{u}$ sia a $\mathbf{v}$;
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$ è l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; il triangolo di vertici A, B, C ha area $\frac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$;
- $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$: il prodotto vettoriale **non** è commutativo;
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli o uno dei due è nullo;
- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$: il verso di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è dato dalla regola della mano destra (pollice su $\mathbf{u}$, indice su $\mathbf{v}$, medio su $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$).

APPROFONDIMENTO · IL PRODOTTO MISTO E IL VOLUME

Il numero $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ si chiama **prodotto misto** dei tre vettori. Il suo valore assoluto è il volume del parallelepipedo che ha per spigoli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ applicati nello stesso punto: la base, costruita su $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ha area $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$, e l'altezza è la proiezione di $\mathbf{u}$ sulla direzione perpendicolare alla base, cioè su $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, che vale $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$. Il tetraedro con gli stessi tre spigoli ha volume pari a $\frac{1}{6}$ di quello del parallelepipedo, e il prodotto misto è nullo se e solo se i tre vettori sono complanari. Per esempio, con $\mathbf{u} = (1; 1; 0)$, $\mathbf{v} = (0; 1; 1)$, $\mathbf{w} = (1; 0; 1)$ si ha $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (1; 1; -1)$ e $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$: il parallelepipedo ha volume 2 e il tetraedro $\frac{1}{3}$.

Il calcolo vettoriale nella forma che usiamo, con il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, fu sistemato alla fine dell'Ottocento dal fisico americano J. W. Gibbs e dall'ingegnere inglese O. Heaviside, che lo ricavarono dai quaternioni di W. R. Hamilton per scrivere in modo compatto le leggi dell'elettromagnetismo.

13.3 Il piano

13.3.1 L'equazione di un piano

In *Matematica 4* abbiamo visto che per un punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data. In coordinate questo fatto diventa un'equazione. Siano $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un punto e $\mathbf{n} = (a; b; c)$ un vettore non nullo. Il piano α che passa per P_0 ed è perpendicolare a $\mathbf{n}$ è formato dai punti $P(x; y; z)$ tali che il vettore $\mathbf{P_0P}$ è perpendicolare a $\mathbf{n}$ (o nullo), cioè tali che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_0P} = 0$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando e ponendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, l'equazione assume la forma $ax + by + cz + d = 0$. Vale anche il viceversa: un'equazione $ax + by + cz + d = 0$ con a, b, c non tutti nulli ha certamente una soluzione $(x_0; y_0; z_0)$ (se per esempio $a \neq 0$, basta prendere $y_0 = z_0 = 0$ e $x_0 = -\frac{d}{a}$); sottraendo $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, l'equazione diventa $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, che è proprio il piano per P_0 perpendicolare a $(a; b; c)$.

In conclusione, ogni piano ha un'**equazione cartesiana** di primo grado $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c non tutti nulli, e ogni equazione di questo tipo rappresenta un piano. I coefficienti delle incognite sono le componenti di un **vettore normale** al piano, $\mathbf{n} = (a; b; c)$. Moltiplicando l'equazione per un numero non nullo si ottiene un'altra equazione dello stesso piano.

Per esempio, il piano che passa per $P_0(3; 0; 1)$ ed è perpendicolare a $\mathbf{n} = (2; 3; 6)$ ha equazione $2(x - 3) + 3y + 6(z - 1) = 0$, cioè $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ (Figura 13.2). Per trovare dove il piano taglia gli assi annulliamo due coordinate alla volta: con $y = z = 0$ si ha $x = 6$, e allo stesso modo si trovano $y = 4$ e $z = 2$. I tre punti $(6; 0; 0)$, $(0; 4; 0)$, $(0; 0; 2)$ sono le **intercette** del piano, e dividendo l'equazione per 12 si ottiene la sua **equazione segmentaria**

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1,$$

che si legge come quella della retta nel piano: i denominatori sono le intercette. La forma segmentaria esiste solo per i piani che tagliano tutti e tre gli assi in punti diversi dall'origine.

13.3.2 Piani particolari

Quando qualche coefficiente è nullo, il piano ha una posizione particolare rispetto agli assi (Tabella 13.1). Se $d = 0$ l'equazione è soddisfatta da $(0; 0; 0)$ e il piano passa per l'origine. Se $a = 0$ il vettore normale $(0; b; c)$ è perpendicolare all'asse x, e il piano è parallelo all'asse x. Se $a = b = 0$ l'equazione si riduce a $z = k$, il piano dei punti con quota k, parallelo al piano xy.

Attenzione a un'equazione come $x + y - 2 = 0$. Nel piano cartesiano rappresenta una retta; nello spazio la coordinata z è libera, e l'equazione rappresenta il piano formato da tutte le rette parallele all'asse z che passano per i punti di quella retta del piano xy.

Tabella 13.1 Piani in posizione particolare rispetto al sistema di riferimento.

Equazione	Coefficienti	Il piano
$ax + by + cz = 0$	$d = 0$	passa per l'origine
$by + cz + d = 0$	$a = 0$	è parallelo all'asse x (lo contiene se $d = 0$)
$ax + cz + d = 0$	$b = 0$	è parallelo all'asse y (lo contiene se $d = 0$)
$ax + by + d = 0$	$c = 0$	è parallelo all'asse z (lo contiene se $d = 0$)
$z = k$	$a = b = 0$	è parallelo al piano xy; per $k = 0$ è il piano xy
$y = k$	$a = c = 0$	è parallelo al piano xz; per $k = 0$ è il piano xz
$x = k$	$b = c = 0$	è parallelo al piano yz; per $k = 0$ è il piano yz

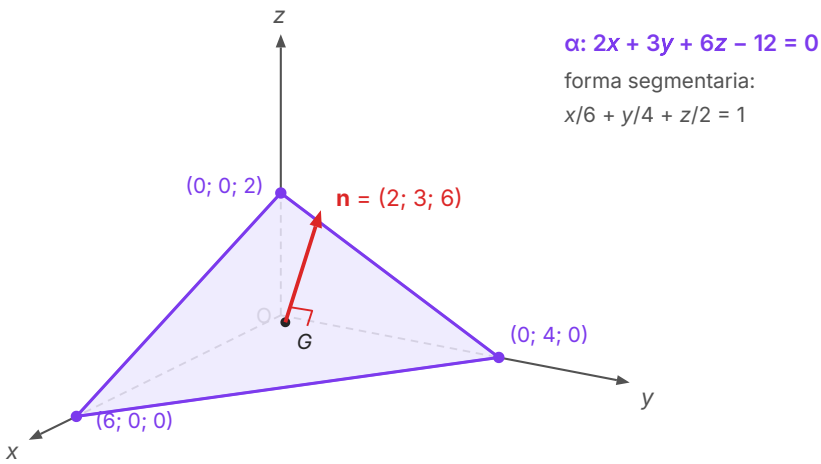


Figura 13.2 Il piano $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ taglia gli assi nei punti (6; 0; 0), (0; 4; 0) e (0; 0; 2). Il vettore normale (2; 3; 6), disegnato a partire dal baricentro G del triangolo delle intercette, è perpendicolare a ogni retta del piano. I tratti degli assi nascosti dal piano sono tratteggiati.

13.3.3 Il piano per tre punti

Tre punti non allineati A, B, C individuano un piano. Per scriverne l'equazione serve un punto, che abbiamo, e un vettore normale: deve essere perpendicolare a $\mathbf{AB}$ e ad $\mathbf{AC}$, e il prodotto vettoriale ce lo fornisce, $\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$. Se invece $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \mathbf{0}$, i vettori sono paralleli e i tre punti sono allineati. Per esempio, con $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(0; 1; 2)$:

$$\mathbf{AB} = (2; -2; 1), \quad \mathbf{AC} = (-1; -1; 2), \quad \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (-4 + 1; -1 - 4; -2 - 2) = (-3; -5; -4).$$

Possiamo usare il vettore opposto $\mathbf{n} = (3; 5; 4)$: il piano è $3(x - 1) + 5(y - 2) + 4z = 0$, cioè $3x + 5y + 4z - 13 = 0$. Conviene sempre controllare che anche B e C soddisfino l'equazione: $9 + 0 + 4 - 13 = 0$ e $0 + 5 + 8 - 13 = 0$. Un secondo metodo consiste nel sostituire le coordinate dei tre punti in $ax + by + cz + d = 0$: si ottiene un sistema di tre equazioni in quattro incognite, che determina i coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

13.3.4 Posizioni reciproche di due piani

Due piani α: $ax + by + cz + d = 0$ e α': $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono **paralleli** se hanno vettori normali paralleli, cioè se $(a'; b'; c') = k(a; b; c)$; in questo caso coincidono se anche $d' = kd$, cioè se le due equazioni sono proporzionali, e sono **paralleli distinti** altrimenti. Se i vettori normali non sono paralleli, i piani sono **incidenti** e si tagliano lungo una retta, che studieremo nel prossimo paragrafo. Per esempio $x - 2y + z = 3$ e $-2x + 4y - 2z = 5$ sono paralleli distinti, mentre $x - 2y + z = 3$ e $-2x + 4y - 2z = -6$ coincidono.

Due piani incidenti formano quattro diedri, a due a due opposti. In *Matematica 4* abbiamo misurato un diedro con una sua sezione normale; due rette perpendicolari ai due piani formano gli stessi angoli della sezione normale, o i loro supplementari. Chiamiamo **angolo fra due piani** l'angolo acuto o retto θ fra le loro normali:

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{n}'|}; \quad \alpha \perp \alpha' \iff \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}' = 0.$$

In particolare due piani sono **perpendicolari** se e solo se le loro normali lo sono: $2x - y + 3z = 1$ e $x + 5y + z = 0$ sono perpendicolari perché $2 - 5 + 3 = 0$. Ritroviamo anche un risultato di *Matematica 4*. Nel cubo di spigolo 6 con un vertice nell'origine e tre spigoli sugli assi, il piano che passa per i vertici $(6; 0; 0)$, $(0; 6; 0)$, $(0; 0; 6)$ ha equazione segmentaria $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$, cioè $x + y + z - 6 = 0$; la base del cubo sta sul piano $z = 0$, con normale $(0; 0; 1)$. Allora $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\theta \approx 54{,}74°$: è l'ampiezza del diedro che in quel volume avevamo trovato con la sezione normale, $\theta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

13.3.5 La distanza di un punto da un piano

La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento PH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da P al piano: per ogni altro punto Q del piano il triangolo PHQ è rettangolo in H, quindi $PQ > PH$ e PH è il più corto dei segmenti che uniscono P al piano (Figura 13.3).

IN SINTESI

Teorema (distanza punto–piano). Ipotesi: α è il piano $ax + by + cz + d = 0$ e $P_0(x_0; y_0; z_0)$ è un punto. **Tesi:** la distanza di P_0 da α è

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dimostrazione. La retta per P_0 perpendicolare ad α ha la direzione di $\mathbf{n} = (a; b; c)$, quindi il piede H della perpendicolare è $H = P_0 + t\mathbf{n}$ per un opportuno numero t, cioè $H(x_0 + ta; y_0 + tb; z_0 + tc)$. Il punto H appartiene ad α:

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Poiché $\mathbf{P_0H} = t\mathbf{n}$, la distanza è $P_0H = |t|\,|\mathbf{n}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, che semplificata dà la tesi. c.v.d.

Il numeratore si ottiene sostituendo le coordinate del punto nel primo membro dell'equazione del piano: è zero se e solo se il punto sta sul piano, e il suo segno dice da quale parte del piano si trova il punto. La dimostrazione fornisce anche il piede della perpendicolare. Per il punto $P(2; 3; 8)$ e il piano $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ della Figura 13.2 si ha $4 + 9 + 48 - 12 = 49$ e $|\mathbf{n}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, quindi $d = \frac{49}{7} = 7$; inoltre $t = -\frac{49}{49} = -1$ e $H = P - \mathbf{n} = (0; 0; 2)$, che è proprio l'intercetta del piano sull'asse z (Figura 13.3). La distanza dell'origine dallo stesso piano è $\frac{|-12|}{7} = \frac{12}{7}$.

La distanza fra due **piani paralleli** è la distanza di un punto qualsiasi del primo dal secondo. Se i due piani sono scritti con gli stessi coefficienti, $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$, la distanza è $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (esercizio di dimostrazione alla fine del capitolo).

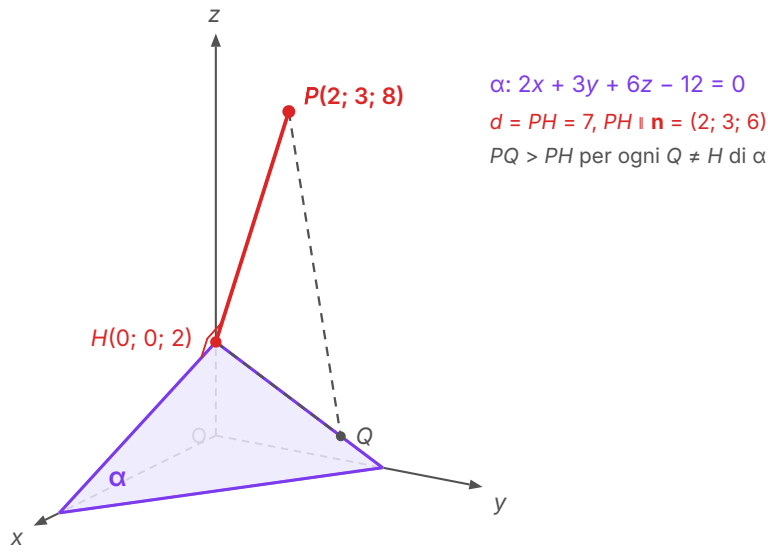


Figura 13.3 La distanza del punto $P(2;\,3;\,8)$ dal piano $\alpha\colon 2x + 3y + 6z - 12 = 0$ è la lunghezza del segmento PH, parallelo al vettore normale; $H(0;\,0;\,2)$ è il piede della perpendicolare e $d = 7$. Qualsiasi altro segmento PQ con Q in α è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, ed è più lungo.

ESEMPIO SVOLTO

Dati i punti $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,1)$, $C(0;\,1;\,2)$, calcoliamo l'area del triangolo ABC, la distanza dell'origine O dal piano ABC e il volume del tetraedro $OABC$.

Piano e area. Abbiamo già trovato $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (-3;\,-5;\,-4)$ e il piano $3x + 5y + 4z - 13 = 0$. L'area del triangolo è metà del modulo del prodotto vettoriale: $\frac{1}{2}\sqrt{9 + 25 + 16} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$.

Distanza. $d(O, ABC) = \dfrac{|0 + 0 + 0 - 13|}{\sqrt{50}} = \dfrac{13}{5\sqrt{2}} = \dfrac{13\sqrt{2}}{10} \approx 1{,}84$.

Volume. La distanza di O dal piano della faccia ABC è l'altezza del tetraedro relativa a quella faccia: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{13}{5\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$. Controllo con il prodotto misto: $\mathbf{OB} \times \mathbf{OC} = (3;\,0;\,1) \times (0;\,1;\,2) = (-1;\,-6;\,3)$ e $\mathbf{OA} \cdot (\mathbf{OB} \times \mathbf{OC}) = -1 - 12 + 0 = -13$, quindi $V = \frac{|-13|}{6} = \frac{13}{6}$.

13.4 La retta

13.4.1 Equazioni parametriche

Una retta r è individuata da un suo punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ e da un vettore non nullo $\mathbf{v} = (l; m; n)$ parallelo a essa, detto **vettore direzione** della retta; le sue componenti si chiamano anche **parametri direttori**. Un punto P appartiene a r se e solo se $\mathbf{P_0P}$ è un multiplo di $\mathbf{v}$, cioè se esiste un numero reale t tale che $\mathbf{P_0P} = t\mathbf{v}$. In coordinate:

$$r: \quad x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sono le **equazioni parametriche** della retta: a ogni valore del **parametro** t corrisponde un punto della retta, e viceversa. Se t è il tempo, le equazioni descrivono un moto rettilineo uniforme che all'istante 0 passa per P_0 con velocità $\mathbf{v}$: è il modo in cui un programma di grafica o un simulatore di volo rappresenta una traiettoria rettilinea. Le equazioni parametriche di una retta non sono uniche: si può cambiare il punto P_0 e moltiplicare $\mathbf{v}$ per un numero non nullo.

La retta per due punti A e B ha vettore direzione $\mathbf{AB}$. Per esempio, per $A(2; 1; -1)$ e $B(4; 0; 3)$ si ha $\mathbf{AB} = (2; -1; 4)$ e

$$x = 2 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = -1 + 4t.$$

Il punto $C(6; -1; 7)$ appartiene alla retta: la prima equazione dà $t = 2$, e con $t = 2$ anche $y = -1$ e $z = 7$. Il punto $D(0; 2; -4)$ non le appartiene: la prima equazione dà $t = -1$, che produce $y = 2$ ma $z = -5 \neq -4$.

13.4.2 Equazioni cartesiane

Una retta si può anche descrivere come intersezione di due piani non paralleli che la contengono: il sistema delle loro equazioni si chiama **equazioni cartesiane** della retta. Per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana basta eliminare il parametro. Se l, m, n sono tutti diversi da zero, ricavando t dalle tre equazioni si ottiene

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

che equivale a due equazioni di primo grado, cioè a due piani. Per la retta per A e B di prima: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}$, da cui $x + 2y - 4 = 0$ (prima uguaglianza) e $2x - z - 5 = 0$ (prima e terza). Se un parametro direttore è nullo, per esempio $n = 0$, la coordinata corrispondente è costante, e una delle due equazioni è $z = z_0$.

Il passaggio inverso usa il prodotto vettoriale. La retta r intersezione dei piani α e β sta in entrambi, quindi è perpendicolare a entrambe le normali: un suo vettore direzione è $\mathbf{v} = \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$.

Un punto si trova fissando il valore di una coordinata e risolvendo il sistema nelle altre due. Per esempio, per r: $x + y + z - 4 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$ si ha $\mathbf{v} = (1; 1; 1) \times (1; -1; 2) = (3; -1; -2)$; ponendo $z = 1$ si ottiene $x + y = 3$, $x - y = -1$, cioè $x = 1$, $y = 2$. Quindi r: $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = 1 - 2t$; sostituendo nelle due equazioni dei piani si ottiene un'identità, come deve essere.

13.4.3 Posizioni reciproche di due rette

In *Matematica 4* abbiamo distinto tre casi per due rette distinte dello spazio: possono essere **incidenti** (complanari, con un punto in comune), **parallele** (complanari, senza punti in comune) oppure **sghembe** (non complanari). Con le coordinate la distinzione diventa un calcolo:

1. se i vettori direzione sono paralleli, le rette sono parallele, oppure coincidenti se hanno un punto in comune;
2. se i vettori direzione non sono paralleli, si cerca un punto comune risolvendo il sistema $P_1 + t\mathbf{v}_1 = P_2 + u\mathbf{v}_2$ (tre equazioni nelle due incognite t, u): se ha soluzione le rette sono incidenti, altrimenti sono sghembe.

Per esempio sia r: $(1 + 2t; -1 + t; 3t)$. La retta s: $(3 + u; u; 1 - u)$ ha direzione $(1; 1; -1)$, non parallela a $(2; 1; 3)$. Dalle prime due equazioni del sistema, $1 + 2t = 3 + u$ e $-1 + t = u$, si ricava $t = 1$, $u = 0$; ma la terza richiede $3t = 1 - u$, cioè $3 = 1$: il sistema è impossibile e le rette sono sghembe. La retta s': $(3 + u; u; 3 + u)$ dà le stesse due prime equazioni, e la terza $3 = 3$ è verificata: r e s' sono incidenti nel punto $(3; 0; 3)$.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Vettore direzione o vettore normale?** Nelle equazioni parametriche di una retta i coefficienti di t formano un vettore *parallelo* alla retta; nell'equazione di un piano i coefficienti di x, y, z formano un vettore *perpendicolare* al piano. Scambiarli rovescia le condizioni: la retta di direzione $\mathbf{v}$ è parallela al piano di normale $\mathbf{n}$ quando $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, ed è perpendicolare al piano quando $\mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{n}$.
>
> **«Non si incontrano, quindi sono parallele.»** Nello spazio è falso: le rette $(t; 0; 0)$ e $(0; 1; t)$ non hanno punti comuni (la prima ha sempre $y = 0$, la seconda $y = 1$), ma i loro vettori direzione $(1; 0; 0)$ e $(0; 0; 1)$ non sono paralleli, e le rette sono sghembe. Prima di dichiarare due rette parallele, controlla i vettori direzione.

13.4.4 Retta e piano

Per studiare la posizione di una retta r: $P_0 + t\mathbf{v}$ rispetto a un piano α: $ax + by + cz + d = 0$ si sostituiscono le equazioni parametriche nell'equazione del piano. Si ottiene l'equazione di primo grado in t

$$(al + bm + cn)\,t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0, \quad \text{cioè} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\,t + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0.$$

- Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, c'è una sola soluzione: la retta è **incidente** al piano, e il valore di t dà il punto di intersezione.
- Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ e P_0 non sta sul piano, l'equazione è impossibile: la retta è **parallela** al piano.
- Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ e P_0 sta sul piano, l'equazione è un'identità: la retta è **contenuta** nel piano.

La retta è **perpendicolare** al piano quando $\mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{n}$. In generale, l'**angolo fra una retta e un piano** è l'angolo φ fra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano (*Matematica 4*); è il complementare dell'angolo acuto fra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$, quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{v}|}.$$

Per esempio la retta r: $(1 + 2t; -1 + t; 3t)$ e il piano $x + y + z - 6 = 0$ hanno $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0$: sostituendo, $1 + 2t - 1 + t + 3t - 6 = 0$, cioè $t = 1$, e il punto di intersezione è $(3; 0; 3)$. L'angolo fra retta e piano è dato da $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{42}}$, quindi $\varphi \approx 67{,}8°$. La Tabella 13.2 riassume le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità fra rette e piani.

13.4.5 Distanza di un punto da una retta e fra due rette sghembe

La distanza di un punto P da una retta r: $P_0 + t\mathbf{v}$ è la lunghezza di PH, dove H è il piede della perpendicolare da P a r. Il punto $H = P_0 + t\mathbf{v}$ si trova imponendo $\mathbf{HP} \cdot \mathbf{v} = 0$. Per esempio, per $P(5; 2; 1)$ e la retta r di prima, con $P_0(1; -1; 0)$ e $\mathbf{v} = (2; 1; 3)$:

$$(\mathbf{P_0P} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\mathbf{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(4; 3; 1) \cdot (2; 1; 3)}{14} = \frac{14}{14} = 1,$$

quindi $H(3; 0; 3)$, $\mathbf{HP} = (2; 2; -2)$ e $d(P, r) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Lo stesso risultato si ottiene con il prodotto vettoriale: il parallelogramma costruito su $\mathbf{P_0P}$ e $\mathbf{v}$ ha area $|\mathbf{P_0P} \times \mathbf{v}|$ e base $|\mathbf{v}|$, quindi la sua altezza, che è la distanza cercata, è $d = \dfrac{|\mathbf{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{|(8; -10; -2)|}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{168}}{\sqrt{14}} = \sqrt{12}$.

Due rette sghembe hanno una e una sola **perpendicolare comune**, cioè una retta che le incontra entrambe ed è perpendicolare a entrambe; se H e K sono i punti in cui la perpendicolare comune incontra le due rette, la **distanza fra le due rette sghembe** è HK, la minima distanza fra un punto della prima e un punto della seconda (Figura 13.4).

ESEMPIO SVOLTO

●●● Date le rette r: $(2 + t;\ 1 + t;\ 2)$ e s: $(3;\ -4 + u;\ 2 + u)$, verifichiamo che sono sghembe e determiniamo la perpendicolare comune e la loro distanza.

Sono sghembe. I vettori direzione $\mathbf{v}_1 = (1;\ 1;\ 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0;\ 1;\ 1)$ non sono paralleli. Il sistema $2 + t = 3$, $1 + t = -4 + u$, $2 = 2 + u$ dà $t = 1$ dalla prima e $u = 0$ dalla terza, ma allora la seconda diventa $2 = -4$: nessun punto comune.

Perpendicolare comune. Prendiamo un punto generico $H(2 + t;\ 1 + t;\ 2)$ di r e un punto generico $K(3;\ -4 + u;\ 2 + u)$ di s. Il vettore $\mathbf{HK} = (1 - t;\ -5 + u - t;\ u)$ deve essere perpendicolare a entrambe le rette:

$$\mathbf{HK} \cdot \mathbf{v}_1 = 1 - t - 5 + u - t = 0, \quad \mathbf{HK} \cdot \mathbf{v}_2 = -5 + u - t + u = 0 \ \Rightarrow\ -2t + u = 4, \quad -t + 2u = 5.$$

Il sistema ha soluzione $t = -1$, $u = 2$: quindi $H(1;\ 0;\ 2)$, $K(3;\ -2;\ 4)$, $\mathbf{HK} = (2;\ -2;\ 2)$ e la distanza è $HK = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. La perpendicolare comune è la retta HK: $(1 + w;\ -w;\ 2 + w)$, con $w \in \mathbb{R}$.

Con il prodotto vettoriale. Il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1;\ -1;\ 1)$ è perpendicolare a entrambe le rette, e la distanza è la lunghezza della proiezione su $\mathbf{w}$ del vettore che unisce un punto qualsiasi di r a un punto qualsiasi di s. Con $P_1(2;\ 1;\ 2)$ e $P_2(3;\ -4;\ 2)$:

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{|(1;\ -5;\ 0) \cdot (1;\ -1;\ 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

La formula è il prodotto misto dell'Approfondimento diviso per l'area di una base: è l'altezza di un parallelepipedo. Se il prodotto misto è nullo le rette sono complanari, cioè incidenti o parallele.

Tabella 13.2 Posizioni reciproche di rette e piani, con le notazioni del testo per i vettori normali dei piani e i vettori direzione delle rette.

Oggetti	Condizione	Posizione
due piani	$\mathbf{n}' = k\mathbf{n}$	paralleli (coincidenti se le equazioni sono proporzionali)
	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$	perpendicolari
	$\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ non paralleli	incidenti lungo una retta di direzione $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$
retta e piano	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$	incidenti (perpendicolari se $\mathbf{v} = k\mathbf{n}$)
	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$	retta parallela al piano o contenuta in esso
due rette	$\mathbf{v}' = k\mathbf{v}$	parallele o coincidenti
	$\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ non paralleli	incidenti se il sistema ha soluzione, sghembe se no

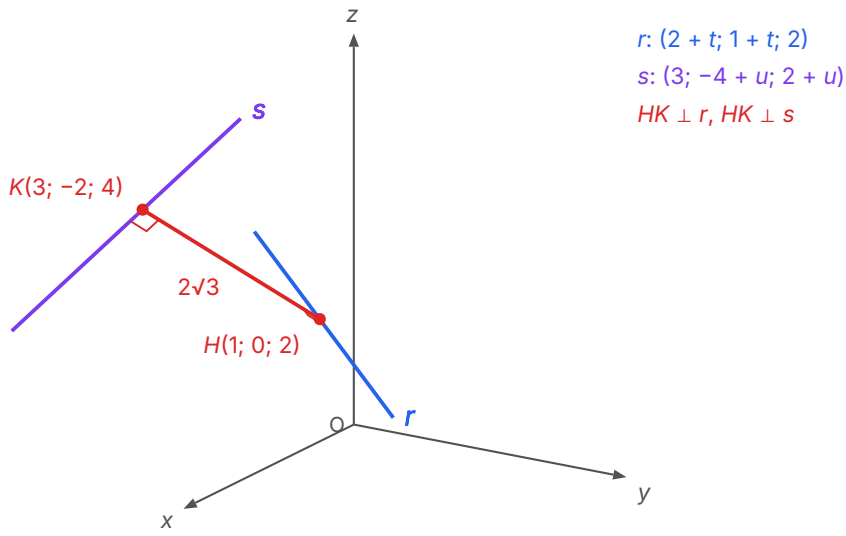


Figura 13.4 Le rette sghembe r e s dell'esempio svolto e la loro perpendicolare comune HK, con $H(1; 0; 2)$ e $K(3; -2; 4)$. La distanza fra le due rette è $HK = 2\sqrt{3}$.

13.5 La sfera

13.5.1 L'equazione della sfera

La **sfera** (più precisamente, la superficie sferica) di centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e raggio $r > 0$ è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza r da C. Per la formula della distanza, $P(x; y; z)$ le appartiene se e solo se

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Sviluppando i quadrati si ottiene un'equazione della forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, con $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = -2z_0$, $d = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 - r^2$. Come per la circonferenza nel piano, si possono riconoscere le caratteristiche dell'equazione: secondo grado, coefficienti di x^2, y^2, z^2 uguali (e posti uguali a 1), nessun termine in xy, xz, yz. Viceversa, completando i quadrati un'equazione di questo tipo si riscrive come $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + (z + \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$:

$$\text{centro } C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right), \quad r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d.$$

L'equazione rappresenta una sfera solo se il secondo membro è positivo, cioè se vale la **condizione di realtà** $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d > 0$; se è nullo l'equazione è soddisfatta solo dal centro, se è negativo da nessun punto. Per esempio, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ ha $a = -2$, $b = 4$, $c = -6$, $d = -11$: centro $C(1; -2; 3)$ e $r^2 = 1 + 4 + 9 + 11 = 25$, cioè $r = 5$.

ERRORE FREQUENTE

Un «raggio al quadrato» negativo. L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ sembra quella di una sfera di centro $(1; -2; 0)$, ma $r^2 = 1 + 4 + 0 - 6 = -1$: completando i quadrati si ottiene $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = -1$, che non ha soluzioni. Calcola sempre r^2 prima di scrivere il raggio.

Coefficienti dei quadrati diversi da 1. In $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8z - 6 = 0$ bisogna dividere tutto per 2 prima di applicare le formule: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 3 = 0$, centro $(1; 0; -2)$, $r^2 = 1 + 4 + 3 = 8$. E attenzione ai segni: il centro ha coordinate *opposte* alle metà dei coefficienti.

13.5.2 Sfera e piano

La posizione di un piano α rispetto a una sfera di centro C e raggio r dipende dalla distanza $d = d(C, \alpha)$, come quella di una retta rispetto a una circonferenza:

- se $d > r$ il piano è **esterno** alla sfera;
- se $d = r$ il piano è **tangente** alla sfera in un punto;
- se $d < r$ il piano è **secante** e taglia la sfera lungo una circonferenza.

Nel caso secante, sia H il piede della perpendicolare da C ad α e sia Q un punto dell'intersezione. Il triangolo CHQ è rettangolo in H, quindi $HQ^2 = r^2 - d^2$ per ogni Q: i punti comuni stanno sulla circonferenza del piano α di centro H e raggio $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, come avevamo visto in *Matematica 4* studiando le sezioni della sfera. Per la sfera di centro $C(1; -2; 3)$ e raggio 5 e il piano $z = 0$ si ha $d = 3$, quindi l'intersezione è la circonferenza di centro $H(1; -2; 0)$ e raggio $\rho = \sqrt{25 - 9} = 4$ (Figura 13.5).

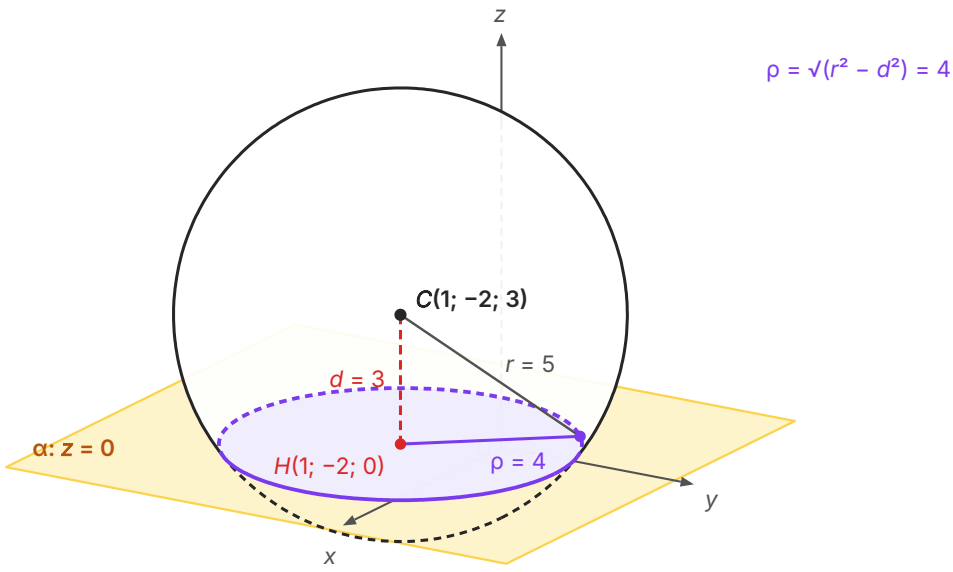


Figura 13.5 La sfera di centro $C(1;\,-2;\,3)$ e raggio 5 tagliata dal piano $z = 0$, che dista 3 dal centro. L'intersezione è la circonferenza di centro $H(1;\,-2;\,0)$ e raggio 4, che in proiezione appare come un'ellisse; le parti nascoste dal piano sono tratteggiate.

Il **piano tangente** a una sfera in un suo punto T è il piano che passa per T ed è perpendicolare al raggio CT. È davvero tangente: se Q è un altro punto di quel piano, il triangolo CTQ è rettangolo in T, quindi $CQ^2 = r^2 + TQ^2 > r^2$, e Q è esterno alla sfera. Il vettore **CT** è dunque un vettore normale del piano tangente.

Per esempio, la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ ha centro $C(1;\,2;\,2)$ e raggio $r = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, e passa per l'origine perché $d = 0$. Il punto $T(0;\,4;\,4)$ le appartiene $(0 + 16 + 16 - 0 - 16 - 16 = 0)$; il raggio **CT** $= (-1;\,2;\,2)$ fornisce il piano tangente $-x + 2(y - 4) + 2(z - 4) = 0$, cioè $x - 2y - 2z + 16 = 0$ (Figura 13.6). Controllo: la distanza di C da questo piano è $\dfrac{|1 - 4 - 4 + 16|}{3} = 3 = r$.

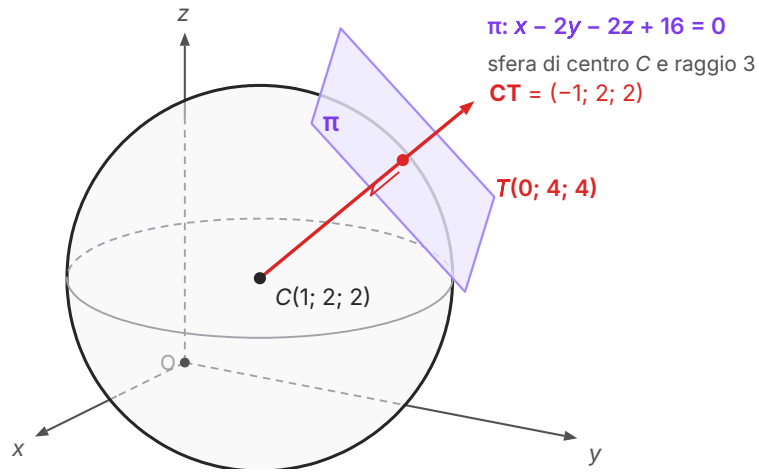


Figura 13.6 Il piano π tangente alla sfera di centro $C(1;\,2;\,2)$ e raggio 3 nel punto $T(0;\,4;\,4)$ è perpendicolare al raggio CT: il vettore $(-1;\,2;\,2)$, che va da C a T, è il suo vettore normale. La sfera passa per l'origine.

ESEMPIO SVOLTO

Data la sfera S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$, di centro $C(1;\,-2;\,3)$ e raggio 5, stabiliamo la posizione dei piani β: $3y + 4z - 31 = 0$, γ: $x + y + z + 20 = 0$ e δ: $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

Piano β. $d(C,\beta) = \dfrac{|-6 + 12 - 31|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{25}{5} = 5 = r$: β è tangente. Il punto di tangenza è il piede della perpendicolare da C, sulla retta $C + t(0;\,3;\,4)$: sostituendo, $3(-2 + 3t) + 4(3 + 4t) - 31 = 0$, cioè $25t = 25$, $t = 1$, e $T(1;\,1;\,7)$. Controllo: $CT = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5$.

Piano γ. $d(C,\gamma) = \dfrac{|1 - 2 + 3 + 20|}{\sqrt{3}} = \dfrac{22}{\sqrt{3}} \approx 12{,}7 > 5$: γ è esterno.

Piano δ. $d(C,\delta) = \dfrac{|1 + 4 + 6 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{9}{3} = 3 < 5$: δ è secante. Il centro della circonferenza è il piede $H = C + t(1;\,-2;\,2)$ con $(1 + t) - 2(-2 - 2t) + 2(3 + 2t) - 2 = 0$, cioè $9t + 9 = 0$, $t = -1$: $H(0;\,0;\,1)$. Il raggio è $\rho = \sqrt{25 - 9} = 4$.

13.5.3 Sfera e retta

Per intersecare una sfera con una retta si sostituiscono le equazioni parametriche della retta nell'equazione della sfera: si ottiene un'equazione di secondo grado in t. Se il suo discriminante è positivo la retta è **secante** (due punti), se è nullo è **tangente**, se è negativo è **esterna**; equivalentemente si confronta la distanza del centro dalla retta con il raggio. Per esempio, per la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e la retta $(1 + t;\,2 - 3t;\,2)$ si ha $(1 + t)^2 + (2 - 3t)^2 + 4 = 9$, cioè $10t^2 - 10t = 0$: le soluzioni $t = 0$ e $t = 1$ danno i punti $(1;\,2;\,2)$ e $(2;\,-1;\,2)$.

COLLEGAMENTI · GPS E GRAFICA AL CALCOLATORE

Un ricevitore GPS calcola la propria posizione con la **trilaterazione**. Ogni satellite trasmette la propria posizione e l'istante di trasmissione; dal tempo impiegato dal segnale il ricevitore ricava la propria distanza dal satellite, e quindi sa di trovarsi su una sfera centrata nel satellite. Due sfere secanti si tagliano lungo una circonferenza, tre sfere in generale in due punti, uno dei quali si può di solito scartare perché lontano dalla Terra. In pratica serve almeno un quarto satellite, perché l'orologio del ricevitore non è abbastanza preciso e lo scarto di tempo è una quarta incognita. Sottraendo a due a due le equazioni delle sfere i termini di secondo grado si cancellano, come vedremo fra poco per il piano assiale, e il problema si riduce in gran parte a un sistema lineare (vedi il problema di trilaterazione negli esercizi).

Nella grafica al calcolatore ogni superficie è approssimata da tanti triangoli, e per ciascuno il programma calcola il vettore normale con un prodotto vettoriale: la luminosità di una superficie opaca è proporzionale al coseno dell'angolo fra la normale e la direzione della luce (legge di Lambert), cioè a un prodotto scalare.

13.5.4 La sfera per quattro punti

Come per tre punti non allineati del piano passa una sola circonferenza, così per quattro punti non complanari dello spazio passa una sola sfera. Per trovarla si sostituiscono le coordinate dei quattro punti nell'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ e si risolve il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d. Per esempio, per $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$ il punto O dà $d = 0$; poi A dà $4 + 2a = 0$, B dà $16 + 4b = 0$, C dà $36 + 6c = 0$. Quindi $a = -2$, $b = -4$, $c = -6$: centro $(1; 2; 3)$ e $r^2 = 1 + 4 + 9 = 14$. Il centro è il punto medio della diagonale del parallelepipedo rettangolo che ha tre spigoli OA, OB, OC, e il raggio è metà della diagonale, $\frac{\sqrt{4 + 16 + 36}}{2} = \sqrt{14}$.

13.5.5 Luoghi geometrici nello spazio

Molti insiemi di punti definiti da una proprietà geometrica si traducono in equazioni. Il luogo dei punti equidistanti da due punti A e B si chiama **piano assiale** del segmento AB: in *Matematica 4* abbiamo enunciato, senza dimostrarlo, che è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio. Con le coordinate la dimostrazione è immediata. Per $A(1; 0; 2)$ e $B(3; 4; 0)$ la condizione $PA^2 = PB^2$ diventa

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + z^2.$$

I termini x^2, y^2, z^2 si cancellano e resta $4x + 8y - 4z - 20 = 0$, cioè $x + 2y - z - 5 = 0$: un piano, con normale $(1; 2; -1)$ parallela ad $\mathbf{AB} = (2; 4; -2)$ e passante per il punto medio $(2; 2; 1)$, perché $2 + 4 - 1 - 5 = 0$.

APPROFONDIMENTO · CILINDRI E CONI

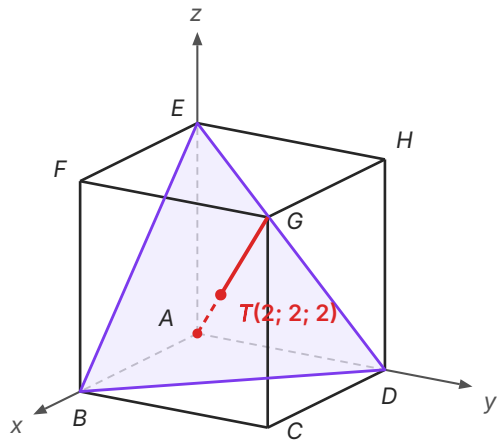
Le equazioni di secondo grado in x, y, z descrivono altre superfici oltre alla sfera. Il luogo dei punti che hanno distanza r dall'asse z è la superficie cilindrica $x^2 + y^2 = r^2$: la distanza di $P(x; y; z)$ dall'asse z è la distanza del punto $(x; y; 0)$ dall'origine, e la quota z è libera. È lo stesso fenomeno del piano $x + y - 2 = 0$: un'equazione che nel piano rappresenta una circonferenza, nello spazio rappresenta un cilindro.

L'equazione $x^2 + y^2 = k^2z^2$, con $k > 0$, rappresenta invece una superficie conica con vertice nell'origine e asse z: ogni piano $z = h$ con $h \neq 0$ la taglia lungo una circonferenza di raggio $k|h|$, proporzionale alla distanza dal vertice, e k è la tangente della semiapertura del cono. Il piano $z = h$ taglia la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($|h| < r$) lungo una circonferenza di raggio $\sqrt{r^2 - h^2}$: è la stessa osservazione che, con il principio di Cavalieri, in *Matematica 4* ha portato al volume della sfera.

13.6 Metodo sintetico e metodo analitico

Le *Indicazioni nazionali* chiedono di confrontare l'approccio sintetico e quello analitico della geometria. Nel capitolo di *Matematica 4* sulle rette e i piani abbiamo risolto molti problemi sul cubo in modo sintetico, cercando triangoli rettangoli e applicando il teorema delle tre perpendicolari. Riprendiamone uno con le coordinate. Mettiamo il cubo $ABCDEFGH$ di spigolo ℓ con il vertice A nell'origine e gli spigoli AB, AD, AE sui semiassi positivi, con le stesse lettere di quel volume: $A(0; 0; 0)$, $B(\ell; 0; 0)$, $C(\ell; \ell; 0)$, $D(0; \ell; 0)$, $E(0; 0; \ell)$, $F(\ell; 0; \ell)$, $G(\ell; \ell; \ell)$, $H(0; \ell; \ell)$ (Figura 13.7).

Quale metodo è migliore? Il metodo analitico è più meccanico: una volta scelto il sistema di riferimento, la soluzione procede per calcoli, e funziona anche quando la figura è complicata o non si «vede» il triangolo giusto. Il metodo sintetico richiede più intuizione, ma spesso spiega meglio *perché* un risultato è vero ed è più breve quando la figura ha molte simmetrie. Nella pratica conviene combinarli: il ragionamento sintetico suggerisce dove mettere gli assi (un vertice nell'origine, gli spigoli sugli assi, un piano di simmetria come piano coordinato), e il calcolo fa il resto. Anche nei quesiti di geometria dello spazio della seconda prova dell'esame di Stato capita che un solido noto vada collocato in un sistema di riferimento, come nell'esempio che segue.



spigolo $\ell = 6$
piano BDE: $x + y + z - 6 = 0$
$AT = 2\sqrt{3}$, $AG = 6\sqrt{3}$

Figura 13.7 Il cubo di spigolo 6 con il vertice A nell'origine. Il piano BDE: $x + y + z - 6 = 0$ è perpendicolare alla diagonale AG e la taglia in $T(2; 2; 2)$; il tratto AT, dietro il piano, è tratteggiato.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Nel cubo di spigolo 6: a) dimostra che la diagonale AG è perpendicolare al piano BDE; b) calcola la distanza del vertice A dal piano BDE; c) verifica che il piano BDE taglia la diagonale AG nel punto T tale che $AT = \frac{1}{3}AG$; d) calcola l'ampiezza del diedro fra il piano BDE e il piano della base $ABCD$.

a) Con $B(6; 0; 0)$, $D(0; 6; 0)$, $E(0; 0; 6)$ si ha $\mathbf{BD} = (-6; 6; 0)$ e $\mathbf{BE} = (-6; 0; 6)$, quindi un vettore normale al piano BDE è $\mathbf{BD} \times \mathbf{BE} = (36; 36; 36)$, cioè $(1; 1; 1)$. Il piano è $x + y + z - 6 = 0$ (lo verificano i tre vertici). La diagonale AG ha la direzione di $\mathbf{AG} = (6; 6; 6)$, parallela alla normale: quindi AG è perpendicolare al piano BDE.

b) $d(A, BDE) = \dfrac{|0 + 0 + 0 - 6|}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.

c) La diagonale è $(6t; 6t; 6t)$; sostituendo nell'equazione del piano, $18t - 6 = 0$, $t = \frac{1}{3}$, e $T(2; 2; 2)$. Poiché $\mathbf{AT} = \frac{1}{3}\mathbf{AG}$, anche $AT = \frac{1}{3}AG$: $AT = 2\sqrt{3}$ e $AG = 6\sqrt{3}$. Il punto T è il piede della perpendicolare da A, perché AG è perpendicolare al piano, e ritroviamo la distanza del punto b).

d) Il piano della base è $z = 0$, con normale $(0; 0; 1)$: $\cos\theta = \dfrac{|(1; 1; 1) \cdot (0; 0; 1)|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta \approx 54{,}74°$.

In *Matematica 4* lo stesso problema richiedeva, per il punto a), di dimostrare che AG è perpendicolare a due rette incidenti del piano BDE, e per il punto b) di riconoscere AT come altezza del triangolo rettangolo EAO, con O centro della base. Qui la perpendicolarità si legge confrontando due vettori, e la distanza è una formula.

SINTESI

- Un sistema di riferimento $Oxyz$ (terna destrorsa) associa a ogni punto dello spazio una terna di coordinate $(x; y; z)$; i piani coordinati $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ dividono lo spazio in otto ottanti.
- Distanza: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; il punto medio e il baricentro hanno per coordinate le medie delle coordinate.
- Il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$ dà gli angoli; è nullo se e solo se i vettori (non nulli) sono perpendicolari.
- Il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è perpendicolare a entrambi i vettori, ha modulo $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$ (area del parallelogramma) ed è nullo se e solo se i vettori sono paralleli; non è commutativo.
- Il piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, con vettore normale $\mathbf{n} = (a; b; c)$; il piano per tre punti ha normale $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$.
- Due piani sono paralleli se le normali sono parallele, perpendicolari se il prodotto scalare delle normali è nullo; l'angolo fra due piani è l'angolo acuto fra le normali.
- Distanza di un punto da un piano: $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \,/\, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- La retta per P_0 con vettore direzione $\mathbf{v} = (l; m; n)$ ha equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$; in forma cartesiana è l'intersezione di due piani, con direzione $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$.
- Due rette possono essere incidenti, parallele o sghembe; una retta e un piano sono incidenti se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, paralleli o con la retta contenuta nel piano se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- La distanza fra due rette sghembe è la lunghezza della perpendicolare comune, $|\mathbf{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)| \,/\, |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$.
- La sfera di centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e raggio r ha equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$; nella forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ il centro è $(-a/2; -b/2; -c/2)$ e $r^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/4 - d$, che deve essere positivo.
- Un piano a distanza d dal centro è esterno, tangente o secante secondo che $d > r$, $d = r$, $d < r$; la sezione è una circonferenza di raggio $\sqrt{r^2 - d^2}$, e il piano tangente in T è perpendicolare al raggio CT.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La proiezione ortogonale del punto $P(-2; 3; -1)$ sul piano xz è

   A. $(-2; 0; -1)$

   B. $(0; 3; 0)$

   C. $(-2; 3; 0)$

   D. $(0; 3; -1)$

2. ● Il piano $3x - 2z + 5 = 0$
   A. è parallelo al piano xz
   B. è parallelo all'asse y
   C. passa per l'origine
   D. è perpendicolare all'asse y

3. ● Quale dei seguenti è un vettore normale al piano $x - 2y + 4z - 7 = 0$?
   A. $(1; 2; 4)$
   B. $(4; -2; 1)$
   C. $(-2; 4; -8)$
   D. $(7; 0; 0)$

4. ● Le rette r: $(1 + t; 2t; 3)$ e s: $(2u; 1 + 4u; 5)$ sono
   A. incidenti
   B. coincidenti
   C. sghembe
   D. parallele e distinte

5. ● L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + k = 0$ rappresenta una sfera (di raggio positivo) se e solo se
   A. $k < 5$
   B. $k > 5$
   C. $k < -5$
   D. k è un numero reale qualsiasi

6. ● Il piano $z = 4$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ hanno in comune
   A. un solo punto
   B. una circonferenza di raggio 3
   C. una circonferenza di raggio 4
   D. nessun punto

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ per ogni coppia di vettori. **b)** Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono non nulli e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, i due vettori sono perpendicolari. **c)** Due rette dello spazio senza punti in comune sono parallele. **d)** Il piano $x + y + z = 0$ passa per l'origine. **e)** La distanza dell'origine dal piano $2x - y + 2z - 6 = 0$ è 6.

8. ● Completa. La retta di equazioni parametriche $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3$ passa per il punto _____ e ha vettore direzione _____ ; poiché la quota è costante, la retta è parallela al piano coordinato _____ ; è perpendicolare ai piani di equazione $2x - y + d = 0$ perché il suo vettore direzione è _____ al loro vettore normale.

Calcolare

9. ● Dati i punti $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 1; 6)$ e $C(5; 3; 0)$, calcola: **a)** la distanza AB; **b)** il punto medio di AB; **c)** il simmetrico di A rispetto a B; **d)** il baricentro del triangolo ABC.

10. ●● Dati $\mathbf{u} = (1; 2; -2)$ e $\mathbf{v} = (3; 0; 4)$: **a)** calcola $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e l'angolo fra i due vettori; **b)** calcola $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e verifica che $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ sen θ; **c)** determina k in modo che $(k; 2; -1)$ e $(3; k; 4)$ siano perpendicolari, e mostra che non esiste alcun k per cui siano paralleli.

11. ●● Calcola l'area del triangolo di vertici $A(1; 0; 1)$, $B(2; 2; 3)$, $C(0; 1; 4)$ e la lunghezza dell'altezza relativa al lato AB.

12. ●● Scrivi l'equazione: **a)** del piano che passa per $P(2; -1; 3)$ ed è perpendicolare a $\mathbf{n} = (1; 4; -2)$, e trova le sue intercette sugli assi; **b)** del piano che passa per $A(1; 0; 2)$, $B(0; 2; 1)$, $C(3; 1; 0)$.

13. ●● Dati i piani α: $2x - y + 3z - 1 = 0$, β: $4x - 2y + 6z + 5 = 0$ e γ: $x + 5y + z = 0$, stabilisci la posizione reciproca di α e β e di α e γ, e calcola la distanza fra α e β.

14. ●● **a)** Calcola la distanza del punto $(3; -2; 1)$ dal piano $6x - 2y + 3z + 4 = 0$. **b)** Determina la proiezione ortogonale H del punto $P(4; 3; 5)$ sul piano $x + 2y + 2z - 2 = 0$, la distanza di P dal piano e il simmetrico di P rispetto al piano.

15. ●● **a)** Scrivi le equazioni parametriche e cartesiane della retta per $A(1; -2; 0)$ e $B(3; 1; 4)$, e verifica se $C(5; 4; 8)$ le appartiene. **b)** Scrivi in forma parametrica la retta $x - y + z - 2 = 0$, $2x + y - z - 1 = 0$.

16. ●● Data la retta r: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 2t$: **a)** dimostra che r è parallela al piano α: $x + 3y + z - 1 = 0$ e calcola la distanza di r da α; **b)** trova il punto in cui r incontra il piano β: $2x - y + z - 3 = 0$ e l'angolo fra r e β.

17. ●● Data la retta r: $(1 + t; 2t; -1 + t)$, stabilisci la sua posizione rispetto a ciascuna delle rette s_1: $(2 + u; 1 - u; 3u)$, s_2: $(3 + 2u; 4u; 1 + 2u)$, s_3: $(2 + u; 2 - u; 3u)$; dove sono incidenti, trova il punto comune.

18. ●● Calcola la distanza del punto $P(1; 5; 4)$ dalla retta $(1 + t; 2t; 2t)$ e il piede H della perpendicolare.

19. ●● Data la sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 2 = 0$: **a)** trova centro e raggio; **b)** verifica che $A(1; 2; -1)$ appartiene alla sfera e scrivi il piano tangente in A; **c)** trova centro e raggio della circonferenza intersezione con il piano $z = 2$.

20. ●●● **a)** Scrivi l'equazione della sfera che ha per diametro il segmento di estremi $A(2; -1; 4)$ e $B(0; 3; 0)$. **b)** Verifica che i punti $(4; -1; 2)$, $(1; 2; 2)$, $(1; -1; -1)$, $(3; 0; 4)$ non sono complanari e scrivi l'equazione della sfera che passa per tutti e quattro.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra, usando le componenti, che $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$ per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

22. ●● Dimostra che il luogo dei punti equidistanti da $A(1; 2; 3)$ e $B(3; 0; -1)$ è un piano; scrivine l'equazione e verifica che è perpendicolare ad AB e passa per il suo punto medio.

23. ●● Trova l'errore. «Le rette r: $(t; 0; 0)$ e s: $(0; 1; t)$ non hanno punti in comune, quindi sono parallele.»

24. ●●● Dimostra che la distanza fra i piani paralleli $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ è $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

25. ●●● Sia AB una corda di una sfera di centro C, e sia M il suo punto medio. Dimostra con i vettori che CM è perpendicolare ad AB. (Suggerimento: $\mathbf{CM} = \frac{1}{2}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB})$ e $\mathbf{AB} = \mathbf{CB} - \mathbf{CA}$.)

Problemi

26. ●● Un magazzino ha la forma di un parallelepipedo rettangolo lungo 8 m, largo 6 m e alto 3 m (dati inventati). Un cavo teso unisce un angolo del pavimento all'angolo opposto del soffitto. Fissato un sistema di riferimento opportuno, calcola la lunghezza del cavo e l'angolo che forma con il pavimento.

27. ●● La falda di un tetto è un piano che passa per i punti (0; 0; 3), (10; 0; 3) e (0; 4; 5) (unità: metri; dati inventati). Scrivi l'equazione del piano, calcola la pendenza della falda, cioè l'angolo che forma con il piano orizzontale $z = 0$, e l'altezza del tetto nel punto di coordinate orizzontali (5; 3).

28. ●● Un raggio laser parte dal punto (1; 2; 10) con direzione (1; 1; −2) e colpisce uno specchio orizzontale, il piano $z = 0$. Trova il punto di impatto, l'angolo fra il raggio e lo specchio e la direzione del raggio riflesso (la riflessione cambia il segno della sola componente perpendicolare allo specchio).

29. ●●● *Trilaterazione.* Tre stazioni si trovano nei punti $S_1(0; 0; 0)$, $S_2(10; 0; 0)$, $S_3(0; 10; 0)$ (unità: km; dati inventati). Un pallone sonda si trova a distanza $\sqrt{50}$ km da S_1, $\sqrt{90}$ km da S_2 e $\sqrt{70}$ km da S_3. Determina la sua posizione, sapendo che si trova sopra il piano $z = 0$. (Suggerimento: sottrai a due a due le equazioni delle tre sfere.)

30. ●● Una boccia sferica di raggio 5 dm appoggiata su un tavolo, il piano $z = 0$, contiene acqua fino all'altezza di 2 dm. Collocata la boccia in un sistema di riferimento opportuno, calcola il raggio e l'area della superficie libera dell'acqua.

Verso l'esame

31. ●● Determina il valore di k per cui la retta $x = 1 + kt$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$ è parallela al piano $2x + y - z + 4 = 0$; per tale valore calcola la distanza della retta dal piano.

32. ●● Nel sistema $Oxyz$ considera il tetraedro di vertici $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Calcola il volume del tetraedro e l'area della faccia ABC, e verifica in due modi diversi che l'altezza relativa alla faccia ABC misura $\sqrt{3}$.

33. ●● Scrivi l'equazione della sfera di centro $C(1; -2; 3)$ tangente al piano $2x - y + 2z + 3 = 0$ e determina il punto di tangenza.

34. ●● Determina k in modo che i punti $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 3)$, $C(0; 3; 1)$, $D(3; 5; k)$ siano complanari.

35. ●●● **Problema.** Nel sistema di riferimento $Oxyz$ (unità: dm) sono dati la sfera S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ e, al variare del parametro reale k, i piani α_k: $x + 2y + 2z + k = 0$.
a) Determina centro e raggio di S e verifica che S passa per l'origine.
b) Sapendo che S ha centro $C(1; 2; 2)$ e raggio 3, determina i valori di k per cui α_k è tangente a S e i rispettivi punti di tangenza.
c) Esprimi in funzione di k il raggio ρ della circonferenza secondo cui α_k taglia S, quando è secante, e trova per quali k si ha $\rho = \sqrt{5}$.
d) Il piano β: $x + 2y + 2z - 3 = 0$ taglia S lungo una circonferenza γ di raggio $\sqrt{5}$. Calcola il volume del cono che ha per base il cerchio delimitato da γ e per vertice il punto di S più lontano da β.

PER APPROFONDIRE

- APO — i capitoli sull'algebra vettoriale e sulle sue applicazioni alla geometria analitica trattano con rigore prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto, rette e piani nello spazio.
- KLI — per la nascita della geometria analitica con Fermat e Descartes e per la sua estensione allo spazio a tre dimensioni.
- QDR — i *Quadri di riferimento* della seconda prova includono la geometria analitica dello spazio fra i nuclei tematici: utile per orientarsi con i quesiti della sezione *Verso l'esame*.

Glossario del capitolo

Distanza di un punto da un piano
La lunghezza del segmento di perpendicolare dal punto al piano: $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Equazione segmentaria del piano
La forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, in cui p, q, r sono le intercette sugli assi.

Equazioni cartesiane della retta
Sistema delle equazioni di due piani non paralleli che contengono la retta.

Equazioni parametriche della retta
$x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$: la retta per $(x_0; y_0; z_0)$ con vettore direzione $(l; m; n)$.

Ottante
Ciascuna delle otto regioni in cui i tre piani coordinati dividono lo spazio.

Perpendicolare comune
L'unica retta che incontra due rette sghembe ed è perpendicolare a entrambe; la sua parte compresa fra le due rette ne misura la distanza.

Piano assiale
Luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento: il piano perpendicolare al segmento nel suo punto medio.

Piano coordinato
Ciascuno dei piani xy ($z = 0$), xz ($y = 0$), yz ($x = 0$) individuati da due assi.

Piano tangente a una sfera
Il piano che passa per un punto T della sfera ed è perpendicolare al raggio CT; ha in comune con la sfera solo T.

Prodotto misto
Il numero $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, il cui valore assoluto è il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori.

Prodotto scalare
Il numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$.

Prodotto vettoriale
Il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, perpendicolare a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, di modulo $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$ e verso dato dalla regola della mano destra.

Rette sghembe
Due rette che non stanno in uno stesso piano: non sono né parallele né incidenti.

Sfera
Luogo dei punti dello spazio che hanno distanza r da un punto C, il centro:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Sistema di riferimento cartesiano nello spazio
Un'origine O e tre assi orientati, a due a due perpendicolari, con la stessa unità di misura; si indica con $Oxyz$.

Terna destrorsa
Disposizione degli assi in cui, guardando il piano xy dal semiasse positivo delle z, l'asse x si porta sull'asse y con una rotazione antioraria di 90°.

Trilaterazione
Determinazione della posizione di un punto a partire dalle sue distanze da punti noti, come intersezione di sfere.

Vettore direzione
Vettore non nullo parallelo a una retta; le sue componenti sono i parametri direttori della retta.

Vettore normale
Vettore non nullo perpendicolare a un piano; per il piano $ax + by + cz + d = 0$ è $(a; b; c)$.

Soluzioni

1. A. Si annulla la coordinata y: $(-2; 0; -1)$.

2. B. Il vettore normale $(3; 0; -2)$ è perpendicolare all'asse y, quindi il piano è parallelo all'asse y; non passa per l'origine $(5 \neq 0)$.

3. C. $(-2; 4; -8) = -2(1; -2; 4)$ è parallelo al vettore $(1; -2; 4)$ dei coefficienti.

4. D. I vettori direzione $(1; 2; 0)$ e $(2; 4; 0)$ sono paralleli; i punti di r hanno $z = 3$, quelli di s hanno $z = 5$: nessun punto comune, quindi parallele e distinte.

5. A. Centro $(2; 0; -1)$ e $r^2 = 4 + 0 + 1 - k = 5 - k > 0 \Leftrightarrow k < 5$ (per $k = 5$ l'equazione rappresenta solo il centro).

6. B. Il centro O dista 4 dal piano: $\rho = \sqrt{25 - 16} = 3$.

7. a) Falso: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. **b)** Vero. **c)** Falso: possono essere sghembe. **d)** Vero: $d = 0$. **e)** Falso: la distanza è $\dfrac{|-6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$.

8. $(1; 0; 3)$ (per $t = 0$; va bene ogni punto della retta); $(2; -1; 0)$ (o un suo multiplo non nullo); xy (cioè $z = 0$); parallelo (anzi uguale): la retta è perpendicolare a quei piani.

9. a) $\sqrt{36 + 4 + 9} = 7$. **b)** $(-1; 0; \dfrac{9}{2})$. **c)** $A' = 2B - A = (-10; 3; 9)$. **d)** $G(1; 1; 3)$.

10. a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 + 0 - 8 = -5$, $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$, $\theta \approx 109{,}47°$. **b)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (8; -10; -6)$, modulo $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{8/9} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e $3 \cdot 5 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$. **c)** $3k + 2k - 4 = 0$, $k = \dfrac{4}{5}$. Per il parallelismo servirebbe $\dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{k} = \dfrac{-1}{4}$: dall'ultima uguaglianza $k = -8$, ma allora $\dfrac{k}{3} = -\dfrac{8}{3} \neq -\dfrac{1}{4}$. (Equivalentemente il prodotto vettoriale $(k + 8; -4k - 3; k^2 - 6)$ non si annulla mai.)

11. $\mathbf{AB} = (1; 2; 2)$, $\mathbf{AC} = (-1; 1; 3)$, $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (4; -5; 3)$, modulo $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Area $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; l'altezza è il doppio dell'area diviso $AB = 3$, cioè $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

12. a) $(x - 2) + 4(y + 1) - 2(z - 3) = 0$, cioè $x + 4y - 2z + 8 = 0$; intercette $(-8; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$, $(0; 0; 4)$. **b)** $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (-1; 2; -1) \times (2; 1; -2) = (-3; -4; -5)$: piano $3x + 4y + 5z - 13 = 0$ (i tre punti lo verificano).

13. α e β: le normali $(2; -1; 3)$ e $(4; -2; 6)$ sono parallele; moltiplicando per 2 l'equazione di α si ottiene $4x - 2y + 6z - 2 = 0$, con termine noto $-2 \neq 5$: paralleli distinti. Il punto $(0; -1; 0)$ di α dista da β $\dfrac{|2 + 5|}{\sqrt{56}} = \dfrac{7}{2\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$. α e γ: $2 - 5 + 3 = 0$, perpendicolari.

14. a) $\dfrac{|18 + 4 + 3 + 4|}{7} = \dfrac{29}{7}$. **b)** $H = P + t(1; 2; 2)$: $4 + t + 2(3 + 2t) + 2(5 + 2t) - 2 = 0$, $9t + 18 = 0$, $t = -2$, $H(2; -1; 1)$; distanza $|t| \cdot 3 = 6$; simmetrico $2H - P = (0; -5; -3)$.

15. a) $\mathbf{AB} = (2; 3; 4)$: $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = 4t$; cartesiane $3x - 2y - 7 = 0$, $2x - z - 2 = 0$. C appartiene alla retta $(t = 2)$. **b)** $\mathbf{v} = (1; -1; 1) \times (2; 1; -1) = (0; 3; 3)$, cioè $(0; 1; 1)$; sommando le equazioni $3x - 3 = 0$, $x = 1$, e con $y = 0$ si ha $z = 1$: $x = 1$, $y = t$, $z = 1 + t$.

16. a) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 1 - 3 + 2 = 0$ e il punto $(1; 2; 0)$ non sta su α $(1 + 6 - 1 = 6 \neq 0)$: parallela. Distanza $\dfrac{6}{\sqrt{11}} = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$. **b)** $2(1 + t) - (2 - t) + 2t - 3 = 0$, $5t = 3$, $t = \dfrac{3}{5}$: punto $(\dfrac{8}{5}; \dfrac{7}{5}; \dfrac{6}{5})$. $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{|(2; -1; 1) \cdot (1; -1; 2)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{5}{6}$, $\varphi \approx 56{,}44°$.

17. s_1: direzioni $(1; 2; 1)$ e $(1; -1; 3)$ non parallele; dalle prime due equazioni $t = \dfrac{2}{3}$, $u = -\dfrac{1}{3}$, ma la terza dà $-\dfrac{1}{3} \neq -1$: sghembe (distanza $\dfrac{\sqrt{62}}{31}$, non ri-

chiesta). s_2: direzione $(2; 4; 2) = 2(1; 2; 1)$, parallela; il punto $(3; 0; 1)$ di s_2 non sta su r (la prima coordinata dà $t = 2$, la seconda $4 \neq 0$): parallele distinte. s_3: $t = 1$, $u = 0$ risolvono le tre equazioni: incidenti in $(2; 2; 0)$.

18. $t = \dfrac{(0; 5; 4) \cdot (1; 2; 2)}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$, $H(3; 4; 4)$, **HP** $= (-2; 1; 0)$, distanza $\sqrt{5}$.

19. a) Centro $(-3; 2; -1)$, $r^2 = 9 + 4 + 1 + 2 = 16$, $r = 4$. **b)** $1 + 4 + 1 + 6 - 8 - 2 - 2 = 0$; il raggio **CA** $= (4; 0; 0)$ dà il piano tangente $x = 1$. **c)** Il centro dista 3 dal piano $z = 2$: circonferenza di centro $(-3; 2; 2)$ e raggio $\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

20. a) Centro $(1; 1; 2)$, raggio $\dfrac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. **b)** I vettori che uniscono il primo punto agli altri, $(-3; 3; 0)$, $(-3; 0; -3)$, $(-1; 1; 2)$, hanno prodotto misto $18 \neq 0$: non complanari. Il sistema dà $a = -2$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -3$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$, centro $(1; -1; 2)$, raggio 3.

21. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1)$; dei sei prodotti, $v_1u_2v_3$ si cancella con $-v_3u_2v_1$, $-v_1u_3v_2$ con $v_2u_3v_1$, $-v_2u_1v_3$ con $v_3u_1v_2$: la somma è 0.

22. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2$ si riduce a $4x - 4y - 8z + 4 = 0$, cioè $x - y - 2z + 1 = 0$, equazione di primo grado: un piano. La normale $(1; -1; -2)$ è parallela ad **AB** $= (2; -2; -4)$, e il punto medio $(2; 1; 1)$ verifica l'equazione $(2 - 1 - 2 + 1 = 0)$.

23. Nello spazio due rette senza punti comuni possono essere sghembe. Qui i vettori direzione $(1; 0; 0)$ e $(0; 0; 1)$ non sono paralleli, quindi le rette non sono parallele: sono sghembe.

24. Sia $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un punto del primo piano: $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_1$. La sua distanza dal secondo piano, che è la distanza fra i piani, è $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

25. $\mathbf{CM} \cdot \mathbf{AB} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB}) \cdot (\mathbf{CB} - \mathbf{CA})$ $= \dfrac{1}{2}(|\mathbf{CB}|^2 - |\mathbf{CA}|^2) = 0$, perché $|\mathbf{CA}| = |\mathbf{CB}| = r$ (i due termini **CA** · **CB** si cancellano). Se $M \neq C$, quindi, $CM \perp AB$; se $M = C$ la corda è un diametro e la tesi non ha contenuto.

26. Con un vertice del pavimento nell'origine e gli spigoli sugli assi, il cavo va da $(0; 0; 0)$ a $(8; 6; 3)$: lunghezza $\sqrt{64 + 36 + 9} = \sqrt{109} \approx 10{,}44$ m. Angolo con il pavimento $z = 0$: sen $\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{109}}$, $\varphi \approx 16{,}7°$.

27. Vettori $(10; 0; 0)$ e $(0; 4; 2)$, prodotto vettoriale $(0; -20; 40)$, normale $(0; -1; 2)$: piano $-y + 2(z - 3) = 0$, cioè $y - 2z + 6 = 0$, ovvero $z = 3 + \dfrac{y}{2}$. Angolo con $z = 0$: cos $\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, cioè tg $\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta \approx 26{,}57°$. Nel punto $(5; 3)$: $z = 4{,}5$ m.

28. $z = 10 - 2t = 0$ per $t = 5$: impatto in $(6; 7; 0)$. sen $\varphi = \dfrac{|-2|}{\sqrt{6}}$, $\varphi \approx 54{,}74°$. Direzione riflessa $(1; 1; 2)$.

29. Le sfere sono $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $(x - 10)^2 + y^2 + z^2 = 90$, $x^2 + (y - 10)^2 + z^2 = 70$. Sottraendo la prima dalla seconda: $-20x + 100 = 40$, $x = 3$; dalla terza: $-20y + 100 = 20$, $y = 4$. Allora $z^2 = 50 - 9 - 16 = 25$, $z = \pm 5$; sopra il piano: $(3; 4; 5)$.

30. Con il punto di appoggio nell'origine la sfera ha centro $(0; 0; 5)$ e raggio 5; la superficie dell'acqua sta nel piano $z = 2$, che dista 3 dal centro: raggio $\sqrt{25 - 9} = 4$ dm, area $16\pi \approx 50{,}3$ dm^2.

31. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 2k - 1 - 2 = 0$, $k = \dfrac{3}{2}$. Il punto $(1; 2; 3)$ della retta non sta sul piano $(2 + 2 - 3 + 4 = 5)$: distanza $\dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.

32. Volume $\dfrac{1}{6} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \dfrac{9}{2}$. La faccia ABC è un triangolo equilatero di lato $3\sqrt{2}$: area $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 18 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (oppure $\dfrac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \dfrac{1}{2}|(9; 9; 9)|$). Primo modo: detta S l'area della faccia, $h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{27/2}{9\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}$. Secondo modo: il piano ABC è $x + y + z - 3 = 0$ e $d(O, ABC) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

33. $r = \frac{|2 + 2 + 6 + 3|}{3} = \frac{13}{3}$:
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{169}{9}$. Punto di tangenza $C + t(2; -1; 2)$ con $9t + 13 = 0$: $t = -\frac{13}{9}$, $T(-\frac{17}{9}; -\frac{5}{9}; \frac{1}{9})$.

34. $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = (1; 1; 1) \times (-1; 3; -1) = (-4; 0; 4)$: piano ABC: $x - z + 1 = 0$. D vi appartiene se $3 - k + 1 = 0$, $k = 4$.

35. a) $a = -2$, $b = -4$, $c = -4$, $d = 0$: centro $C(1; 2; 2)$, $r^2 = 1 + 4 + 4 = 9$, $r = 3$; $d = 0$ significa che $(0; 0; 0)$ verifica l'equazione. **b)** $d(C, \alpha_k) = \frac{|1 + 4 + 4 + k|}{3} = \frac{|9 + k|}{3} = 3 \Leftrightarrow k = 0$ oppure $k = -18$. Per $k = 0$ il punto di tangenza è $C - (1; 2; 2) = O(0; 0; 0)$, per $k = -18$ è $C + (1; 2; 2) = (2; 4; 4)$ (la normale $(1; 2; 2)$ ha modulo $3 = r$). **c)** Per $-18 < k < 0$: $\rho(k) = \sqrt{9 - (9 + k)^2/9}$. $\rho = \sqrt{5} \Leftrightarrow (9 + k)^2 = 36 \Leftrightarrow k = -3$ oppure $k = -15$. **d)** $d(C, \beta) = \frac{|1 + 4 + 4 - 3|}{3} = 2$; il punto di S più lontano da β è sulla retta per C perpendicolare a β, dalla parte di C: $V = C + (1; 2; 2) = (2; 4; 4)$, con $d(V, \beta) = \frac{|2 + 8 + 8 - 3|}{3} = 5 = 2 + 3$. Il cono ha raggio di base $\sqrt{5}$ e altezza 5: volume $\frac{1}{3}\pi \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25\pi}{3} \approx 26{,}2\ \text{dm}^3$.