CAPITOLO

# 12

# Le equazioni differenziali

*Una legge che dice come una grandezza cambia, insieme al punto da cui si parte, basta a prevedere tutto il resto. (testo della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Riconoscere un'equazione differenziale e il suo ordine, e verificare che una funzione ne è soluzione.
2. Distinguere integrale generale e particolare e risolvere un problema di Cauchy, leggendo le soluzioni nel campo delle direzioni.
3. Risolvere equazioni a variabili separabili e lineari del primo ordine.
4. Costruire e interpretare modelli: decadimento, raffreddamento, crescita logistica, circuito RC, caduta con attrito.
5. Scrivere l'equazione di Newton e risolvere l'oscillatore armonico e le equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti.
6. Approssimare una soluzione con il metodo di Eulero.

**INDICE DEL CAPITOLO**


12.1 Che cos'è un'equazione differenziale ..... 2
12.2 Equazioni del primo ordine ..... 5
12.3 Modelli del primo ordine ..... 8
12.4 L'equazione di Newton e l'oscillatore armonico ..... 13
12.5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti ..... 16
12.6 Il metodo di Eulero ..... 20

**Matematica 5** · Parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali · versione 1.0
Capitolo 12: Le equazioni differenziali · pagine 335–360 del volume completo · estratto per lo studio

Una tazza di caffè lasciata sul tavolo si raffredda in fretta nei primi minuti e poi sempre più lentamente. Nessuno ci consegna la formula della temperatura in funzione del tempo: quello che la fisica sa dire è *come cambia* la temperatura, cioè che diminuisce tanto più rapidamente quanto più il caffè è caldo rispetto alla stanza. È una legge che riguarda la **derivata** della funzione incognita, non la funzione.

Accade lo stesso in moltissimi fenomeni. In una molla l'accelerazione del corpo appeso è proporzionale allo spostamento; in un condensatore la corrente di carica è proporzionale a quanto manca alla carica finale; in una popolazione di batteri il numero di nuove cellule per ora è proporzionale al numero di cellule presenti. In ogni caso la natura ci dà una relazione tra una funzione e le sue derivate, e il nostro compito è risalire alla funzione. Questo capitolo, che chiude il calcolo infinitesimale, mostra come farlo nei casi più importanti e come leggere le soluzioni anche quando non si sanno scrivere: usa le primitive del capitolo 9, gli integrali del capitolo 10 e i numeri complessi di *Matematica 4*.

## 12.1 Che cos'è un'equazione differenziale

### 12.1.1 Definizioni

Un'**equazione differenziale** (ordinaria) è un'equazione in cui l'incognita è una funzione $y = y(x)$ di una variabile reale e che lega fra loro $x$, $y$ e alcune derivate $y'$, $y''$, .... L'**ordine** dell'equazione è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono. Ecco alcuni esempi:

- $y' = 2x$ e $y' = -0{,}1y$ sono equazioni del primo ordine;
- $xy' - y = x^2$ è del primo ordine, anche se contiene il prodotto $xy'$;
- $y'' + 4y = 0$ e la legge di Newton $mx'' = F$ sono del secondo ordine.

Un'equazione del primo ordine si dice in **forma normale** quando è risolta rispetto alla derivata: $y' = f(x; y)$. Quando la variabile è il tempo la indichiamo con $t$ e la funzione con la lettera della grandezza fisica: $x(t)$ per una posizione, $q(t)$ per una carica, $N(t)$ per un numero di nuclei.

Una **soluzione** (o **integrale**) di un'equazione di ordine $n$ su un intervallo $I$ è una funzione derivabile $n$ volte su $I$ che, sostituita nell'equazione insieme alle sue derivate, la trasforma in un'identità vera per ogni $x \in I$. Il grafico di una soluzione si chiama **curva integrale**. L'intervallo fa parte della risposta: vedremo un'equazione definita per ogni $x$ la cui soluzione «esplode» in un punto, e oltre quel punto non esiste più.

### 12.1.2 Integrale generale e integrale particolare

L'equazione $y' = 2x$ chiede una funzione la cui derivata sia $2x$: sono le primitive di $2x$, cioè $y = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono infinite, una per ogni valore di $c$, e le curve integrali sono le parabole ottenute traslando verticalmente $y = x^2$. Un'equazione del secondo ordine come $y'' = 6x$ si risolve integrando due volte: $y' = 3x^2 + c_1$ e $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Ogni integrazione porta con sé una costante.

In generale la famiglia di tutte le soluzioni di un'equazione di ordine $n$ dipende da $n$ costanti arbitrarie e si chiama **integrale generale**; ogni soluzione che si ottiene fissando il valore delle costanti è un **integrale particolare**. Alcune equazioni hanno anche soluzioni che non si ottengono da nessun valore delle costanti: le incontreremo fra le equazioni a variabili separabili, ed è importante non perderle.

**ESEMPIO SVOLTO**

Verifica che, per ogni $C \in \mathbb{R}$, la funzione $y = Ce^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$ è soluzione dell'equazione $y' + 2y = 2x$ su tutto $\mathbb{R}$, e trova la soluzione tale che $y(0) = 1$.

**Derivata.** $y' = -2Ce^{-2x} + 1$.

**Sostituzione.** $y' + 2y = -2Ce^{-2x} + 1 + 2Ce^{-2x} + 2x - 1 = 2x$: l'identità vale per ogni $x$ e per ogni $C$. Non serve risolvere nulla: verificare una soluzione è sempre un calcolo di derivate.

**Condizione iniziale.** $y(0) = C - \dfrac{1}{2} = 1$, quindi $C = \dfrac{3}{2}$ e la soluzione cercata è $y = \dfrac{3}{2}e^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$.

### 12.1.3 Il problema di Cauchy

Per scegliere una soluzione nella famiglia si assegnano delle **condizioni iniziali**. Per un'equazione del primo ordine basta il valore $y(x_0) = y_0$; per una del secondo ordine servono il valore e la derivata nello stesso punto, $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$: in meccanica, la posizione e la velocità all'istante iniziale. Un'equazione con le sue condizioni iniziali si chiama **problema di Cauchy**. Il risultato fondamentale dice che, sotto ipotesi semplici, il problema ha una sola soluzione.

**IN SINTESI**

**Teorema di esistenza e unicità (per il problema di Cauchy). Ipotesi:** la funzione $f(x; y)$ è continua, insieme alla sua derivata rispetto a $y$ (calcolata pensando $x$ come costante), in un rettangolo che contiene il punto $(x_0; y_0)$ al suo interno. **Tesi:** esiste un intervallo $I$, che contiene $x_0$ al suo interno, sul quale il problema $y' = f(x; y)$, $y(x_0) = y_0$ ha una e una sola soluzione.

Un enunciato analogo vale per l'equazione del secondo ordine $y'' = f(x; y; y')$ con le condizioni $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Non dimostriamo il teorema: ne useremo le conseguenze.

Il significato geometrico dell'unicità è che, dove le ipotesi valgono, **due curve integrali distinte non si incontrano mai**: se avessero un punto in comune, sarebbero due soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Le ipotesi non sono un dettaglio. Il problema $y' = 3y^{2/3}$ con $y(0) = 0$ ha almeno due soluzioni: $y = 0$ e $y = x^3$ (infatti $(x^3)' = 3x^2 = 3(x^3)^{2/3}$). Qui la derivata di $3y^{2/3}$ rispetto a $y$ è $2y^{-1/3}$, che non esiste per $y = 0$: l'ipotesi del teorema cade proprio nel punto iniziale.

### 12.1.4 Il campo delle direzioni

Un'equazione in forma normale $y' = f(x; y)$ ha una lettura geometrica immediata: in ogni punto $(x; y)$ del piano assegna la pendenza che deve avere una curva integrale che passi di lì. Se in molti punti disegniamo un trattino con quella pendenza otteniamo il **campo delle direzioni** dell'equazione; una soluzione è una curva che in ogni suo punto è tangente al trattino che vi si trova. Le curve lungo le quali la pendenza assegnata è costante si chiamano **isocline** e aiutano a disegnare il campo a mano.

La Figura 12.1 mostra il campo di $y' = x - y$. Le isocline sono le rette $x - y = k$, parallele alla bisettrice. Lungo la retta $y = x - 1$ la pendenza assegnata è $x - (x - 1) = 1$, uguale alla pendenza della retta stessa: quella retta è una curva integrale. Le altre soluzioni, $y = x - 1 + Ce^{-x}$ (si ottengono con il metodo del paragrafo seguente), si avvicinano a essa per $x \to +\infty$, perché $Ce^{-x} \to 0$. Il campo fa «vedere» le soluzioni prima di calcolarle, ed è anche il punto di partenza del metodo numerico di Eulero, che chiude il capitolo.

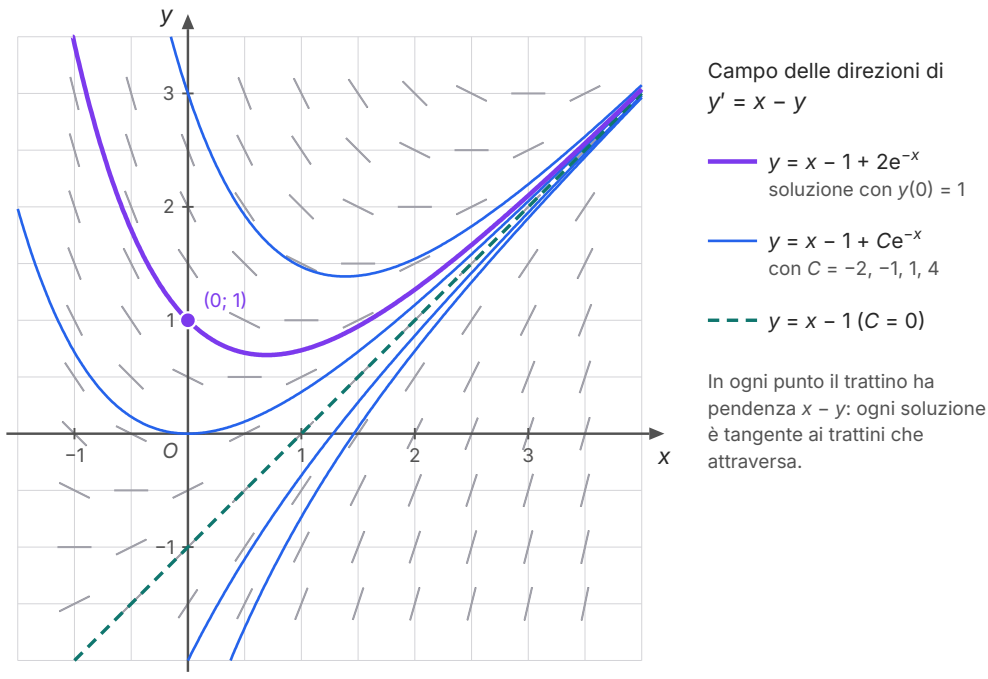



**Figura 12.1** Il campo delle direzioni di $y' = x - y$ (scala uguale sui due assi) e alcune curve integrali $y = x - 1 + Ce^{-x}$. La soluzione con $y(0) = 1$ (viola) corrisponde a $C = 2$; la retta $y = x - 1$ (tratteggiata) è anch'essa una soluzione, e tutte le altre si avvicinano a lei per $x \to +\infty$. Le curve integrali non si incontrano.

## 12.2 Equazioni del primo ordine

### 12.2.1 Il caso $y' = f(x)$

Se il secondo membro dipende solo da $x$, risolvere l'equazione significa trovare le primitive: $y = \int f(x)\,dx + c$, su ogni intervallo in cui $f$ è continua. Con la condizione $y(x_0) = y_0$, il teorema fondamentale del calcolo integrale dà direttamente $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. È quanto si fa in cinematica quando si passa dall'accelerazione alla velocità: da $v' = a$ costante segue $v = v_0 + at$.

### 12.2.2 Equazioni a variabili separabili

Un'equazione del primo ordine si dice **a variabili separabili** se ha la forma $y' = g(x) \cdot h(y)$, cioè se il secondo membro è il prodotto di una funzione della sola $x$ per una funzione della sola $y$. Sono separabili $y' = xy$, $y' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ e $y' = y(2 - y)$; non lo è $y' = x + y$. Il metodo di risoluzione ha quattro passi.

1. **Soluzioni costanti.** Se $h(k) = 0$, la funzione costante $y = k$ è una soluzione: la sua derivata è 0 e anche il secondo membro vale $g(x) \cdot h(k) = 0$.

2. **Separazione.** Dove $h(y) \neq 0$ si divide: $\dfrac{y'}{h(y)} = g(x)$.
3. **Integrazione.** Si integrano i due membri rispetto a $x$. A sinistra la sostituzione $t = y(x)$, $\mathrm{d}t = y'(x)\,\mathrm{d}x$ (capitolo 9) trasforma l'integrale in $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)}$; si ottiene $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$, con **una sola** costante.
4. **Esplicitazione.** Si ricava $y$, quando è possibile, e si impone l'eventuale condizione iniziale.

Con la notazione di Leibniz il procedimento si ricorda così: da $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$ si «separano le variabili» scrivendo $\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$, e si integra. È solo un modo di scrivere, giustificato dalla sostituzione del passo 3.

**ESEMPIO SVOLTO**

Risolvi il problema di Cauchy $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.

**Soluzioni costanti.** $h(y) = y^2$ si annulla per $y = 0$: la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione (non del problema, perché non vale 1 in 0).

**Separazione e integrazione.** Per $y \neq 0$: $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\,\mathrm{d}x$, cioè $-\dfrac{1}{y} = x^2 + c$, da cui $y = -\dfrac{1}{x^2 + c}$.

**Condizione iniziale.** $y(0) = -\dfrac{1}{c} = 1$ dà $c = -1$, quindi $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

**Intervallo.** La formula ha senso per $x \neq \pm 1$, ma una soluzione è una funzione su un intervallo che contiene $x_0 = 0$: la soluzione del problema è $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$ su $]-1; 1[$. Per $x \to 1^-$ essa tende a $+\infty$: la soluzione «esplode» a distanza finita, anche se l'equazione è definita su tutto il piano. Per questo il teorema di Cauchy promette soltanto *un* intervallo intorno a $x_0$.

**Un'altra condizione.** Con $y(0) = 0$ la soluzione è $y = 0$, l'unica per il teorema; la formula $y = -\dfrac{1}{x^2 + c}$ non la dà per nessun $c$. Chi avesse dimenticato il primo passo l'avrebbe persa.

**ERRORE FREQUENTE**

- **Perdere le soluzioni costanti.** Dividendo per $h(y)$ si escludono i valori in cui $h(y) = 0$. Per $y' = xy$ si ottiene $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$, cioè $y = \pm e^c\, e^{x^2/2}$: con $C = \pm e^c$ si hanno tutte le costanti *non nulle*, e la soluzione $y = 0$ va aggiunta a mano. Il risultato completo è $y = Ce^{x^2/2}$ con $C \in \mathbb{R}$.
- **Aggiungere la costante alla fine.** Da $\ln|y| = \frac{x^2}{2}$ scrivere «$y = e^{x^2/2} + c$» è sbagliato: quella funzione non è una soluzione (verifica: $y' = xe^{x^2/2} \neq x(e^{x^2/2} + c)$ se $c \neq 0$). La costante nasce dall'integrazione e va scritta lì; solo dopo si esplicita $y$ e, per ultima, si impone la condizione iniziale.
- **Contare male le costanti.** L'integrale generale di un'equazione del secondo ordine contiene **due** costanti: con una sola non si possono imporre insieme posizione e velocità iniziali.

### 12.2.3 Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione del primo ordine si dice **lineare** se si può scrivere nella forma $y' + a(x)y = b(x)$, con $a$ e $b$ continue su un intervallo $I$: la funzione e la sua derivata compaiono al primo grado e non sono moltiplicate fra loro. Se $b = 0$ l'equazione si dice **omogenea**; l'equazione $y' + a(x)y = 0$ è anche separabile e, detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, ha integrale generale $y = Ce^{-A(x)}$.

Per il caso generale c'è un'idea elegante. Moltiplichiamo i due membri per $e^{A(x)}$, che non si annulla mai. Poiché $(e^{A(x)})' = a(x)e^{A(x)}$, il primo membro diventa la derivata di un prodotto:

$$e^{A(x)}y' + a(x)e^{A(x)}y = (e^{A(x)}y)', \text{ quindi } (e^{A(x)}y)' = b(x)e^{A(x)}.$$

Ora basta integrare: $e^{A(x)}y = \int b(x)e^{A(x)}\,dx + c$. La funzione $e^{A(x)}$ si chiama **fattore integrante**.

**IN SINTESI**

**Equazione lineare del primo ordine** $y' + a(x)y = b(x)$, con $a$, $b$ continue su $I$ e $A$ primitiva di $a$:

$$y = e^{-A(x)}\left[\int b(x)e^{A(x)}\,dx + c\right].$$

L'integrale generale è la somma dell'integrale generale dell'omogenea, $Ce^{-A(x)}$, e di una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione completa (esercizio 19). Con coefficienti costanti, $y' + ay = b$ con $a \neq 0$: $y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.

Nel caso a coefficienti costanti la funzione costante $y = \frac{b}{a}$ è una soluzione: si chiama **soluzione di equilibrio**, perché un sistema che parte da lì vi resta. Se $a > 0$, tutte le altre soluzioni tendono a essa per $x \to +\infty$, perché $Ce^{-ax} \to 0$. Vedremo che il raffreddamento di un corpo, la carica di un condensatore e la caduta in un fluido viscoso hanno esattamente questa struttura.

**ESEMPIO SVOLTO**

Risolvi il problema $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 2$.

**Intervallo.** $a(x) = \frac{1}{x}$ e $b(x) = 3x$ sono continue su $]0; +\infty[$, che contiene $x_0 = 1$: lavoriamo lì.

**Fattore integrante.** $A(x) = \ln x$ (non serve il valore assoluto, perché $x > 0$), quindi $e^{A(x)} = x$.

**Integrazione.** $(xy)' = 3x \cdot x = 3x^2$, dunque $xy = x^3 + c$ e $y = x^2 + \frac{c}{x}$.

**Condizione iniziale.** $y(1) = 1 + c = 2$, quindi $c = 1$: la soluzione è $y = x^2 + \frac{1}{x}$ su $]0; +\infty[$. Verifica: $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$ e $y' + \frac{y}{x} = 2x - \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x^2} = 3x$.

## 12.3 Modelli del primo ordine

Costruire un modello significa tradurre una legge sulla *velocità di variazione* di una grandezza in un'equazione differenziale, risolverla e confrontare le conseguenze con i fatti. I modelli di questo paragrafo sono tutti del primo ordine e si risolvono con i metodi appena visti; i dati numerici, salvo dove indicato, sono inventati.

### 12.3.1 Crescita e decadimento esponenziale

L'equazione $y' = ky$ dice che la grandezza cresce (o diminuisce) con una velocità proporzionale al suo valore. È lineare e separabile, e la soluzione con $y(0) = y_0$ è $y = y_0 e^{kt}$: crescita esponenziale per $k > 0$, decadimento per $k < 0$. In *Matematica 3* la funzione esponenziale era un modello scelto per adattarsi ai dati; qui è la *conseguenza* di una legge sulla derivata, e l'interesse composto continuo del capitolo 3, $C_0 e^{rt}$, risolve proprio $C' = rC$.

Nel **decadimento radioattivo** ogni nucleo ha, in ogni secondo, la stessa probabilità di decadere, indipendentemente dagli altri: il numero di nuclei che decadono nell'unità di tempo è quindi proporzionale al numero $N$ di quelli presenti, e $N' = -kN$ con $k > 0$. Il **tempo di dimezzamento** $T$ è il tempo dopo il quale ne resta la metà: da $e^{-kT} = \frac{1}{2}$ segue

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Il tempo di dimezzamento non dipende né dalla quantità iniziale né dall'istante in cui si comincia a contare, perché $N(t + T) = N_0 e^{-kt} e^{-kT} = \frac{1}{2} N(t)$ per ogni $t$. Per il carbonio-14, usato per datare

i resti organici, $T = 5730$ anni (Figura 12.2): un reperto con il 25% del carbonio-14 iniziale ha $2T = 11\,460$ anni; dopo 10 000 anni ne resta la frazione $(\frac{1}{2})^{10\,000/5730} \approx 0{,}298$, cioè circa il 29,8%.

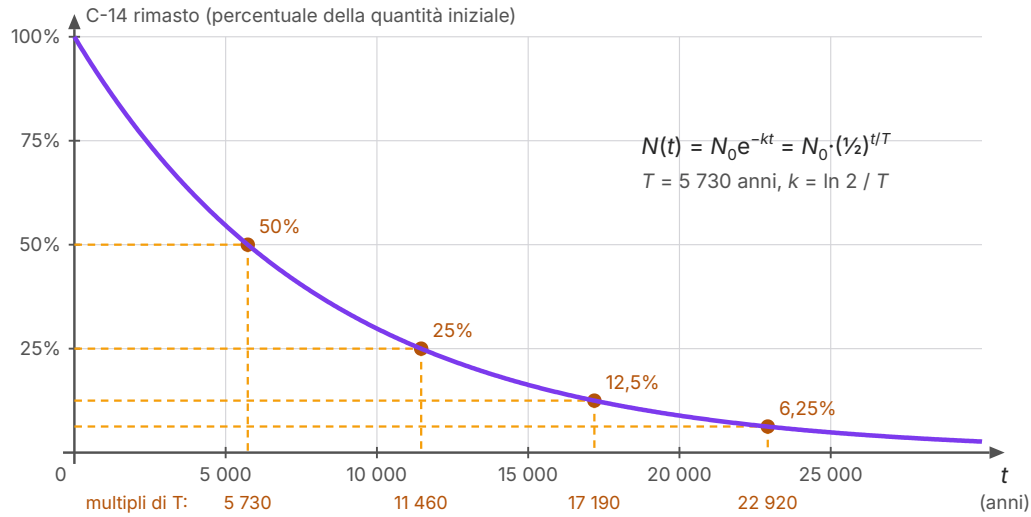



**Figura 12.2** Il decadimento del carbonio-14, $N(t) = N_0 e^{-kt}$ con $k = \frac{\ln 2}{T}$ e $T = 5730$ anni. Dopo ogni tempo di dimezzamento la quantità si dimezza: 50%, 25%, 12,5%, 6,25%.

### 12.3.2 Il raffreddamento di Newton

Secondo la **legge di raffreddamento di Newton**, un corpo a temperatura $T$ in un ambiente a temperatura costante $T_a$ cambia temperatura con velocità proporzionale alla differenza: $T' = -k(T - T_a)$, con $k > 0$. È un'equazione lineare a coefficienti costanti con soluzione di equilibrio $T = T_a$, e la soluzione con $T(0) = T_0$ è

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Un caffè a 90 °C viene lasciato in una stanza a 20 °C e dopo 10 minuti è a 60 °C. Da $60 = 20 + 70e^{-10k}$ si ha $e^{-10k} = \frac{4}{7}$, cioè $k = \frac{\ln(7/4)}{10} \approx 0{,}0560$ al minuto. Il caffè arriva a 40 °C quando $70e^{-kt} = 20$, cioè dopo $t = \frac{\ln 3{,}5}{k} \approx 22{,}4$ minuti; dopo mezz'ora è a $20 + 70 \cdot (\frac{4}{7})^3 \approx 33{,}1$ °C. La differenza di temperatura con la stanza si dimezza ogni $\frac{\ln 2}{k} \approx 12{,}4$ minuti: è un decadimento esponenziale della differenza.

### 12.3.3 La crescita logistica

Una crescita esponenziale non può durare: prima o poi le risorse finiscono. Il modello **logistico**, proposto dal matematico belga Pierre-François Verhulst nella prima metà dell'Ottocento per le popolazioni umane, corregge la legge $y' = ry$ moltiplicandola per la frazione di risorse ancora libere:

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right), \text{ con } r > 0,\ K > 0.$$

Il numero $K$ è la **capacità portante** già incontrata nel capitolo 8: è la popolazione massima che l'ambiente può sostenere. Le soluzioni costanti sono $y = 0$ e $y = K$. Per $y$ piccolo il fattore $1 - \frac{y}{K}$ è quasi 1 e la crescita è quasi esponenziale; vicino a $K$ la crescita rallenta; sopra $K$ la popolazione diminuisce.

L'equazione è separabile. Con la scomposizione in fratti semplici del capitolo 9, $\frac{K}{y(K-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}$, si ottiene $\ln|y| - \ln|K-y| = rt + c$ e infine, con $y(0) = y_0 > 0$,

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \text{ dove } A = \frac{K - y_0}{y_0}.$$

Per trovare il flesso non serve la formula: derivando l'equazione stessa si ha $y'' = ry'\left(1 - \frac{2y}{K}\right)$. Per $0 < y_0 < K$ la funzione cresce ($y' > 0$) e $y''$ cambia segno quando $y = \frac{K}{2}$: la curva ha un flesso a metà della capacità portante, all'istante $t^* = \frac{\ln A}{r}$, dove la velocità di crescita è massima e vale $y' = \frac{rK}{4}$. Per esempio, con $K = 1000$ individui, $r = 0{,}5$ al giorno e $y_0 = 100$ si ha $A = 9$: il flesso cade a $t^* = 2\ln 9 \approx 4{,}39$ giorni e dopo 10 giorni $y \approx 943$ individui. La Figura 12.3 confronta tre condizioni iniziali con la crescita esponenziale.

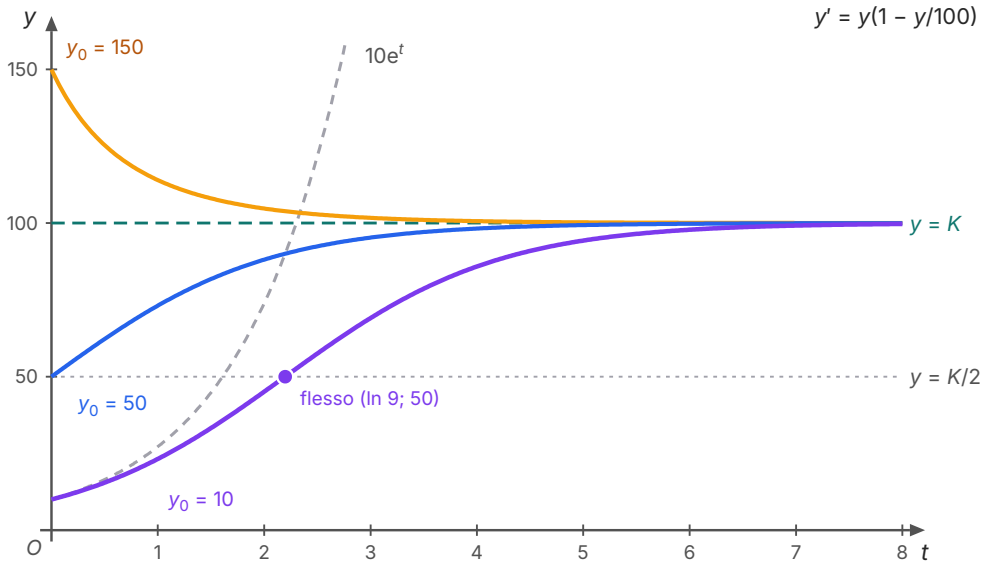



**Figura 12.3** Soluzioni dell'equazione logistica $y' = y(1 - \frac{y}{100})$ ($r = 1$, $K = 100$) per $y_0 = 10, 50, 150$, e la crescita esponenziale $10e^t$ (grigio) che ha la stessa partenza. Tutte le soluzioni positive tendono a $K$; quella con $y_0 = 10$ ha il flesso in (ln 9; 50), a metà della capacità portante.

### 12.3.4 Il circuito RC e la caduta con attrito

Un condensatore di capacità $C$, scarico, viene collegato in serie a una resistenza $R$ e a un generatore di tensione $V$. In ogni istante la tensione del generatore si ripartisce fra resistenza e condensatore, $V = Ri + \frac{q}{C}$, e la corrente è la derivata della carica, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Si ottiene l'equazione lineare

$$q' + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R}, \text{ con } q(0) = 0, \text{ da cui } q(t) = CV(1 - e^{-t/RC}).$$

La corrente è $i = q' = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$. Il prodotto $\tau = RC$ ha le dimensioni di un tempo e si chiama **costante di tempo**: dopo un tempo $\tau$ il condensatore ha il $1 - e^{-1} \approx 63{,}2\%$ della carica finale $Q = CV$, dopo $5\tau$ più del 99%. La retta tangente al grafico nell'origine ha pendenza $q'(0) = \frac{V}{R} = \frac{Q}{\tau}$ e quindi raggiunge il valore finale proprio all'istante $\tau$ (Figura 12.4). Nella scarica, senza generatore, l'equazione è $q' + \frac{q}{RC} = 0$ e la carica decresce come $q = Q_0 e^{-t/RC}$.

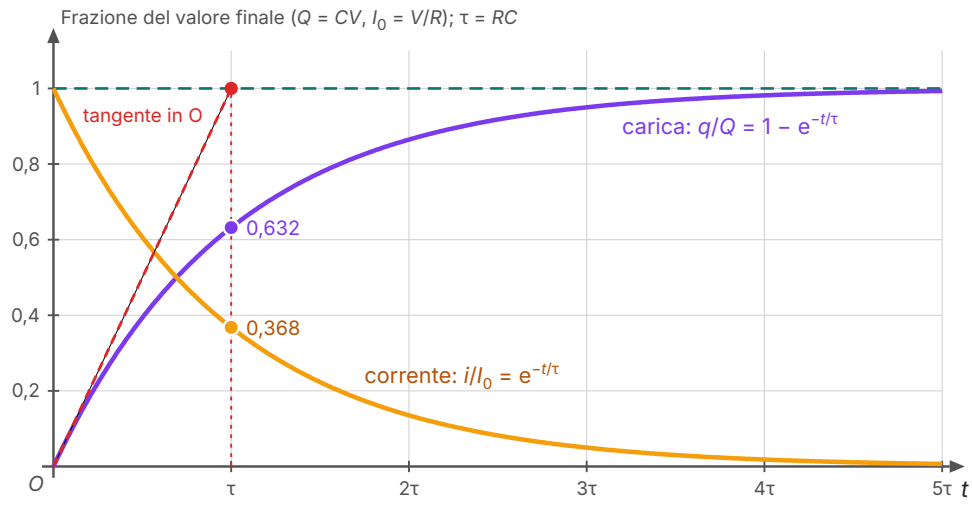



**Figura 12.4** Carica (viola) e corrente (arancio) di un condensatore in un circuito RC, come frazioni dei valori $Q = CV$ e $I_0 = \dfrac{V}{R}$, in funzione del tempo misurato in costanti di tempo $\tau = RC$ (scale diverse sui due assi). La tangente nell'origine alla curva di carica raggiunge il valore finale all'istante $\tau$, quando la carica è il 63,2% di $Q$.

Un piccolo corpo di massa $m$ che cade in un fluido viscoso, a bassa velocità, subisce una forza di attrito proporzionale alla velocità e opposta: $mv' = mg - bv$ (asse verso il basso). È la stessa equazione del circuito, con un altro significato: con $v(0) = 0$ la soluzione è $v(t) = \dfrac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$, e la velocità tende alla **velocità limite** $v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{b}$, raggiunta quando la forza d'attrito equilibra il peso. Equazioni uguali hanno soluzioni uguali, qualunque cosa descrivano: è uno dei motivi per cui la matematica è così efficace nelle scienze.

**COLLEGAMENTI**

**Fisica:** decadimento radioattivo, circuiti RC, caduta con attrito, raffreddamento. **Biologia:** crescita di colture e popolazioni. **Medicina:** nel modello più semplice la quantità di un farmaco nel sangue diminuisce con velocità proporzionale alla quantità presente, $Q' = -kQ$, e si parla di tempo di dimezzamento del farmaco (esercizio 27, con parametri inventati). **Economia:** un capitale con interesse composto continuo al tasso $r$ soddisfa $C' = rC$.

**Due idee di modello.** Nella meccanica classica l'equazione di Newton e le condizioni iniziali determinano il moto in modo univoco: è la visione «deterministica» della corrispondenza fra matematica e natura. Per una popolazione, invece, il modello esponenziale e quello logistico descrivono entrambi bene i primi dati e divergono più tardi: scegliere fra i due è una decisione di chi modella, da verificare sui fatti, non una verità contenuta nel fenomeno.

## 12.4 L'equazione di Newton e l'oscillatore armonico

### 12.4.1 La legge della dinamica come equazione differenziale

Per un punto materiale che si muove lungo una retta, la seconda legge della dinamica $F = ma$ con $a = x''$ è un'equazione differenziale del secondo ordine nella posizione $x(t)$: $mx'' = F$, dove la forza può dipendere dal tempo, dalla posizione e dalla velocità. Il teorema di Cauchy dice che posizione e velocità iniziali determinano tutto il moto: è la forma matematica del determinismo della meccanica classica.

I moti studiati in fisica si ritrovano integrando due volte. Senza forze, $x'' = 0$ dà $x' = v_0$ e $x = x_0 + v_0 t$: il moto rettilineo uniforme. Nella caduta libera, con l'asse rivolto verso l'alto, $x'' = -g$ dà $x' = v_0 - gt$ e $x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$: il moto uniformemente accelerato. Le due costanti dell'integrale generale sono la posizione e la velocità iniziali.

### 12.4.2 L'oscillatore armonico

Un corpo di massa $m$ attaccato a una molla di costante elastica $k$, su un piano senza attrito, subisce la forza di Hooke $F = -kx$, dove $x$ è lo spostamento dalla posizione di equilibrio. L'equazione del moto $mx'' = -kx$ si scrive

$$x'' + \omega^2 x = 0, \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

È l'equazione dell'**oscillatore armonico**. La funzione $x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ ne è soluzione per ogni $A$ e $B$: infatti $x'' = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x$. Ma sono *tutte* le soluzioni? Data una soluzione qualsiasi, con posizione $x_0$ e velocità $v_0$ all'istante 0, la funzione con $A = x_0$ e $B = \frac{v_0}{\omega}$ ri-

solve lo stesso problema di Cauchy (perché $x(0) = A$ e $x'(0) = \omega B$); per l'unicità le due soluzioni coincidono. Dunque $A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ è l'integrale generale.

Con il metodo dell'angolo aggiunto di *Matematica 4* la soluzione si riscrive $x = R \cos(\omega t + \varphi)$, con $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{A}{R}$ e $\operatorname{sen} \varphi = -\dfrac{B}{R}$: il moto è sinusoidale, di ampiezza $R$ e periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Il periodo non dipende dall'ampiezza: le oscillazioni sono **isocrone**. La velocità $x' = -R\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ è nulla negli estremi del moto e massima, in valore assoluto $R\omega$, al passaggio per l'equilibrio, dove l'accelerazione $x'' = -\omega^2 x$ si annulla.

**IN SINTESI**

**Oscillatore armonico** $x'' + \omega^2 x = 0$ $(\omega > 0)$.

- Integrale generale: $x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = R \cos(\omega t + \varphi)$.
- Condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$: $A = x_0$, $B = \dfrac{v_0}{\omega}$, $R = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$.
- Periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; per la molla $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, per il pendolo (piccole oscillazioni) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

**ESEMPIO SVOLTO**

Un corpo di massa 0,5 kg è attaccato a una molla con $k = 50$ N/m. All'istante $t = 0$ si trova a 3 cm dall'equilibrio e si allontana con velocità 0,4 m/s. Scrivi la legge del moto e calcola periodo, ampiezza e velocità massima.

**Pulsazione e periodo.** $\omega = \sqrt{\dfrac{50}{0{,}5}} = 10$ rad/s, $T = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5} \approx 0{,}628$ s.

**Legge del moto.** In centimetri, $A = x_0 = 3$ e $B = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{40}{10} = 4$: $x(t) = 3 \cos 10t + 4 \operatorname{sen} 10t$.

**Ampiezza e fase.** $R = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm; $\cos \varphi = \dfrac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} \varphi = -\dfrac{4}{5}$, quindi $\varphi = -\operatorname{arctg} \dfrac{4}{3} \approx -0{,}927$ e $x(t) = 5 \cos(10t - 0{,}927)$. Il primo massimo dello spostamento si ha quando $10t - 0{,}927 = 0$, cioè a $t \approx 0{,}093$ s.

**Velocità.** $v(t) = x'(t) = -30 \operatorname{sen} 10t + 40 \cos 10t$ cm/s; il valore massimo è $R\omega = 50$ cm/s $= 0{,}5$ m/s. Controllo: $v(0) = 40$ cm/s, il dato iniziale (Figura 12.5).

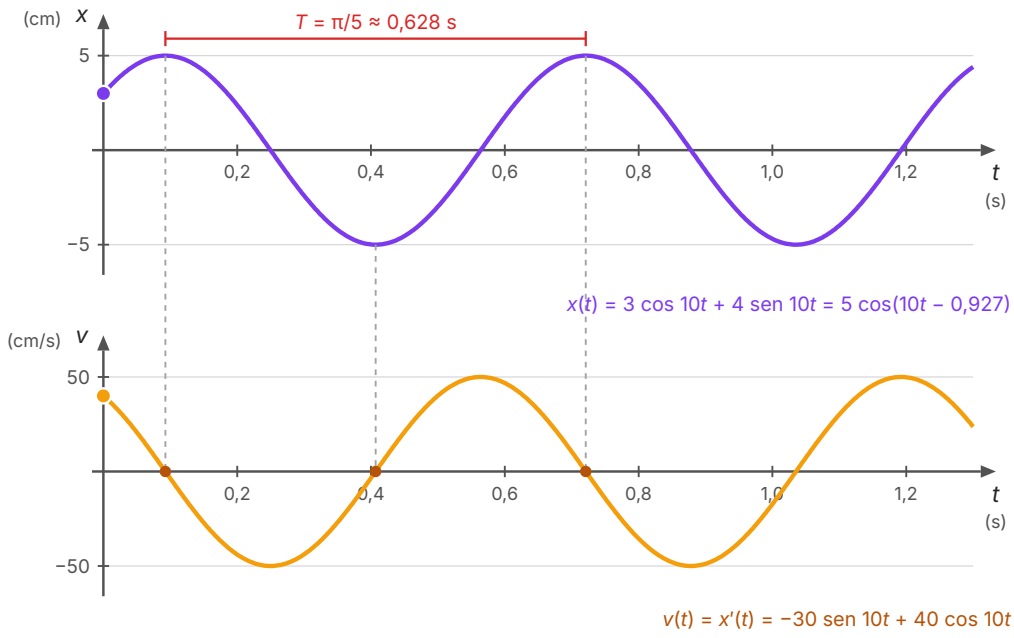


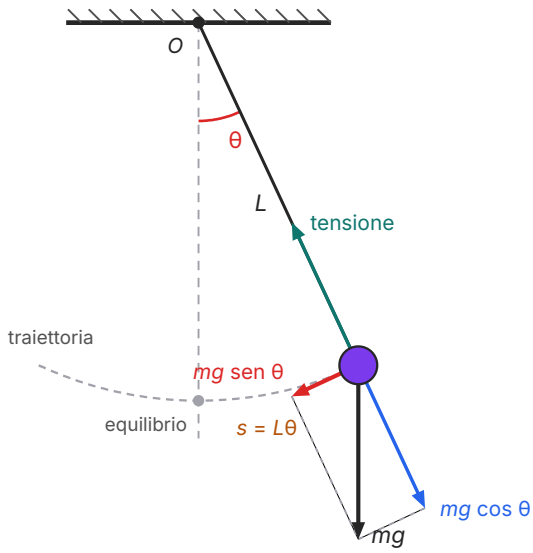

**Figura 12.5** Posizione (in alto, in cm) e velocità (in basso, in cm/s) dell'oscillatore dell'esempio, con $\omega = 10$ rad/s. Le linee tratteggiate mostrano che la velocità è nulla negli istanti in cui lo spostamento è massimo o minimo; i punti sull'asse verticale sono i dati iniziali $x(0) = 3$ cm e $v(0) = 40$ cm/s.

### 12.4.3 Il pendolo per piccole oscillazioni

In un pendolo semplice di lunghezza $L$ il punto si muove su un arco di circonferenza; se $\theta$ è l'angolo con la verticale, lo spostamento lungo l'arco è $s = L\theta$ e la componente del peso lungo la traiettoria vale $-mg \operatorname{sen}\theta$ (Figura 12.6). La seconda legge della dinamica lungo l'arco dà $mL\theta'' = -mg \operatorname{sen}\theta$, cioè

$$\theta'' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Questa equazione **non** è lineare e le sue soluzioni non si esprimono con le funzioni elementari. Per piccoli angoli, però, $\operatorname{sen}\theta \sim \theta$ (capitolo 3) e l'equazione si approssima con $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$: un oscillatore armonico con $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, che non dipende dalla massa né, entro l'approssimazione, dall'ampiezza. Per un'ampiezza di 10°, cioè 0,1745 rad, si ha $\operatorname{sen}\theta \approx 0{,}1736$: l'errore relativo dell'approssimazione è circa lo 0,5%. Con $L = 1$ m il periodo è circa 2,01 s. Per ampiezze grandi il periodo reale è più lungo di quello calcolato: la linearizzazione è essa stessa una scelta di modello.




**Componente lungo la traiettoria**
(verso l'equilibrio): $-mg$ sen θ

**Seconda legge della dinamica**
lungo l'arco, con $s = L\theta$:
$mL\theta'' = -mg$ sen θ

**Piccole oscillazioni (sen θ ≈ θ):**
$\theta'' + (g/L)\,\theta = 0$
$\omega = \sqrt{(g/L)}$, $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$

Posizione estrema (velocità nulla): tensione = $mg$ cos θ. Angolo ingrandito per chiarezza (θ = 25°).

**Figura 12.6** Le forze su un pendolo semplice in una posizione estrema (angolo ingrandito per chiarezza). Il peso $mg$ si scompone in una componente lungo il filo, $mg$ cos θ, equilibrata dalla tensione, e in una tangente alla traiettoria, $mg$ sen θ, rivolta verso la posizione di equilibrio: è questa a produrre l'oscillazione.

## 12.5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

### 12.5.1 Il principio di sovrapposizione

L'oscillatore armonico è il caso più semplice di un'equazione **lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti**:

$$ay'' + by' + cy = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

**IN SINTESI**

**Principio di sovrapposizione. Ipotesi:** $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni di $ay'' + by' + cy = 0$ su un intervallo $I$. **Tesi:** per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ anche $c_1y_1 + c_2y_2$ è soluzione su $I$.

Per la linearità della derivata, sostituendo $c_1y_1 + c_2y_2$ nel primo membro e raccogliendo si ottiene

$$c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \text{ c.v.d.}$$

Questo risultato si chiama **principio di sovrapposizione**. Si dimostra inoltre (lo accettiamo) che, se $y_1$ e $y_2$ **non sono proporzionali**, la combinazione $c_1y_1 + c_2y_2$ è l'integrale generale: scegliendo $c_1$ e $c_2$ si può soddisfare qualunque coppia di condizioni iniziali, e l'unicità fa il resto, come per l'oscillatore armonico. Basta quindi trovare due soluzioni non proporzionali.

### 12.5.2 L'equazione caratteristica

Cerchiamo soluzioni della forma $y = e^{\lambda x}$, suggerite dal primo ordine. Da $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ si ottiene $e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$, e poiché l'esponenziale non si annulla mai, $e^{\lambda x}$ è una soluzione se e solo se $\lambda$ risolve l'**equazione caratteristica**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Un'equazione differenziale si trasforma così in un'equazione di secondo grado. I casi sono tre, secondo il segno di $\Delta = b^2 - 4ac$ (Tabella 12.1).

- **$\Delta > 0$:** due radici reali distinte $\lambda_1$, $\lambda_2$ danno le soluzioni non proporzionali $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$.
- **$\Delta = 0$:** c'è una sola radice $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$, e la seconda soluzione è $xe^{\lambda x}$: lo dimostrerai nell'esercizio 22.
- **$\Delta < 0$:** le radici sono complesse coniugate, $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$ con $\beta > 0$ (*Matematica 4*). La formula di Eulero, $e^{i\,\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x$, suggerisce che $e^{(\alpha + i\,\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$; poiché i coefficienti dell'equazione sono reali, la parte reale e la parte immaginaria di questa soluzione complessa sono soluzioni reali: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$. Lo si può controllare con un calcolo diretto di derivate, e per $\alpha = 0$ si ritrova l'oscillatore armonico.

**Tabella 12.1** Integrale generale di $ay'' + by' + cy = 0$ secondo il discriminante dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

| Discriminante | Radici | Integrale generale |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali | $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| $\Delta = 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ | $y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ |
| $\Delta < 0$ | $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$ | $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$ |

**ESEMPIO SVOLTO**

**a)** Risolvi $y'' - 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ha radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, quindi $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ e $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$. Le condizioni danno $c_1 + c_2 = 1$ e $c_1 + 2c_2 = 0$, da cui $c_2 = -1$, $c_1 = 2$: $y = 2e^x - e^{2x}$.

**b)** Risolvi $y'' + 2y' + 5y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ ha $\Delta = 4 - 20 = -16$ e radici $\lambda = -1 \pm 2i$: $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$. Derivando, $y' = e^{-x}[(-c_1 + 2c_2)\cos 2x - (2c_1 + c_2)\operatorname{sen} 2x]$. Le condizioni danno $c_1 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 1$, cioè $c_2 = 1$: $y = e^{-x}(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$.

### 12.5.3 L'oscillatore smorzato

Se sul corpo attaccato alla molla agisce anche un attrito viscoso $-bx'$, l'equazione diventa $mx'' + bx' + kx = 0$, che scriviamo $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$ con $2\gamma = \dfrac{b}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Le radici caratteristiche sono $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ e i tre casi della Tabella 12.1 diventano tre comportamenti fisici (Figura 12.7).

- **Moto sovrasmorzato** ($\gamma > \omega_0$): due radici reali negative; il corpo torna verso l'equilibrio senza oscillare, lentamente.
- **Smorzamento critico** ($\gamma = \omega_0$): $x = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}$; il ritorno è il più rapido possibile senza oscillazioni, ed è il comportamento a cui si mira nel progetto di ammortizzatori e strumenti a lancetta.
- **Moto sottosmorzato** ($\gamma < \omega_0$): $\lambda = -\gamma \pm i\,\omega$ con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ e $x = e^{-\gamma t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$; il corpo oscilla con ampiezza che decresce esponenzialmente. Il tempo $\dfrac{2\pi}{\omega}$ fra due massimi successivi si chiama **pseudoperiodo**: con $\omega_0 = 2$ e $\gamma = 0{,}4$ vale $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3{,}84}} \approx 3{,}21$.

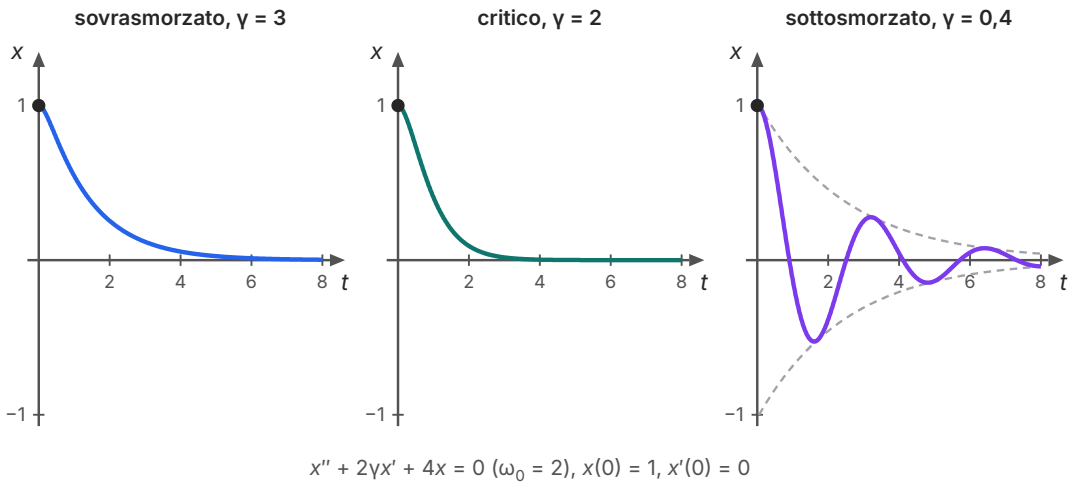



**Figura 12.7** I tre regimi dell'oscillatore smorzato $x'' + 2\gamma x' + 4x = 0$, con $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$: sovrasmorzato ($\gamma = 3$), critico ($\gamma = 2$, soluzione $(1 + 2t)e^{-2t}$) e sottosmorzato ($\gamma = 0{,}4$), con le curve tratteggiate $\pm 1{,}02e^{-0{,}4t}$ che inviluppano le oscillazioni.

### 12.5.4 Un termine noto costante

Se il secondo membro è una costante, $ay'' + by' + cy = d$ con $c \neq 0$, la funzione costante $y = \dfrac{d}{c}$ è una soluzione; la differenza fra due soluzioni dell'equazione completa risolve l'omogenea, quindi l'integrale generale è quello dell'omogenea più $\dfrac{d}{c}$. Per un corpo appeso a una molla verticale, con l'asse $x$ verso l'alto e l'origine nella posizione della molla a riposo, $mx'' = -kx - mg$, cioè $x'' + \omega^2 x = -g$: la soluzione è $x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t - \dfrac{g}{\omega^2}$. Il peso sposta il centro dell'oscillazione in $-\dfrac{mg}{k}$, la posizione di equilibrio, ma non cambia il periodo.

**APPROFONDIMENTO · OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA**

Se una forza periodica agisce su un oscillatore senza attrito, l'equazione diventa $x'' + \omega_0{}^2 x = F \cos \Omega t$. Per $\Omega \neq \omega_0$ si verifica per sostituzione che $x_p = \dfrac{F}{\omega_0{}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$ è una soluzione particolare: l'ampiezza dell'oscillazione forzata cresce quando la frequenza della forza si avvicina a quella propria del sistema. Per $\Omega = \omega_0$ una soluzione particolare è $x_p = \dfrac{F}{2\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t$, la cui ampiezza cresce senza limite: è la **risonanza**. Nei sistemi reali l'attrito mantiene l'ampiezza finita, ma può renderla molto grande; è per risonanza che un circuito oscillante, in un ricevitore radio, seleziona la frequenza di una stazione.

**ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME**

Determina la funzione $f$ soluzione dell'equazione $y'' - 2y' + 2y = 0$ il cui grafico passa per l'origine ed è tangente in essa alla retta $y = x$. Calcola poi l'area della regione delimitata dal grafico di $f$ e dall'asse $x$ nell'intervallo $[0; \pi]$.

**Integrale generale.** $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ha $\Delta = -4$ e radici $\lambda = 1 \pm i$; quindi $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

**Condizioni.** Passare per l'origine significa $y(0) = 0$, da cui $c_1 = 0$; essere tangente a $y = x$ significa $y'(0) = 1$. Con $y = c_2 e^x \operatorname{sen} x$ si ha $y' = c_2 e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$ e $y'(0) = c_2 = 1$. Dunque $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

**Area.** Su $[0; \pi]$ si ha $f(x) \geq 0$, quindi l'area è $\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x \, dx$. Integrando due volte per parti (l'integrale «che ritorna» del capitolo 9) si trova la primitiva $\frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$, e

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x \, dx = \left[\frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)\right]_0^\pi = \frac{e^\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^\pi + 1}{2} \approx 12{,}07.$$

## 12.6 Il metodo di Eulero

La maggior parte delle equazioni differenziali non si sa risolvere con formule: l'equazione del pendolo senza approssimazioni, una popolazione con prelievi variabili, un corpo che cade con attrito proporzionale al quadrato della velocità. Il campo delle direzioni suggerisce però come procedere numericamente: partendo da $(x_0; y_0)$ si avanza di un passo $h$ lungo la direzione assegnata dall'equazione, e si ripete.

$$x_{n+1} = x_n + h, \qquad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n; y_n).$$

È il **metodo di Eulero**; i punti $(x_n; y_n)$, uniti da segmenti, formano la **poligonale di Eulero**. Ogni passo è l'approssimazione lineare del capitolo 5, $y(x + h) \approx y(x) + y'(x)h$, applicata ripetutamente; l'errore di ogni passo si somma a quelli precedenti.

Proviamolo su un problema di cui conosciamo la soluzione: $y' = y$, $y(0) = 1$, la cui soluzione è $e^x$. La regola diventa $y_{n+1} = (1 + h)y_n$, quindi $y_n = (1 + h)^n$, e con $h = \frac{1}{n}$ il valore approssimato in $x = 1$ è $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: la successione che nel capitolo 1 definiva il numero $e$. La Tabella 12.2 e la Figura 12.8 mostrano che l'errore è circa proporzionale a $h$: dimezzando il passo si dimezza l'errore, e il rapporto fra errore e passo si avvicina a $\frac{e}{2} \approx 1{,}36$. Si dice che il metodo è del **primo ordine**: semplice, ma lento a migliorare.

**Tabella 12.2** Il metodo di Eulero per $y' = y$, $y(0) = 1$: valore approssimato in $x = 1$ ($e \approx 2{,}718282$).

| Passo $h$ | Passi $n$ | $y_n = (1 + h)^n$ | Errore $e - y_n$ | Errore / $h$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 2 | 2,25 | 0,4683 | 0,94 |
| 0,25 | 4 | 2,441406 | 0,2769 | 1,11 |
| 0,1 | 10 | 2,593742 | 0,1245 | 1,25 |
| 0,01 | 100 | 2,704814 | 0,0135 | 1,35 |
| 0,001 | 1000 | 2,716924 | 0,00136 | 1,36 |

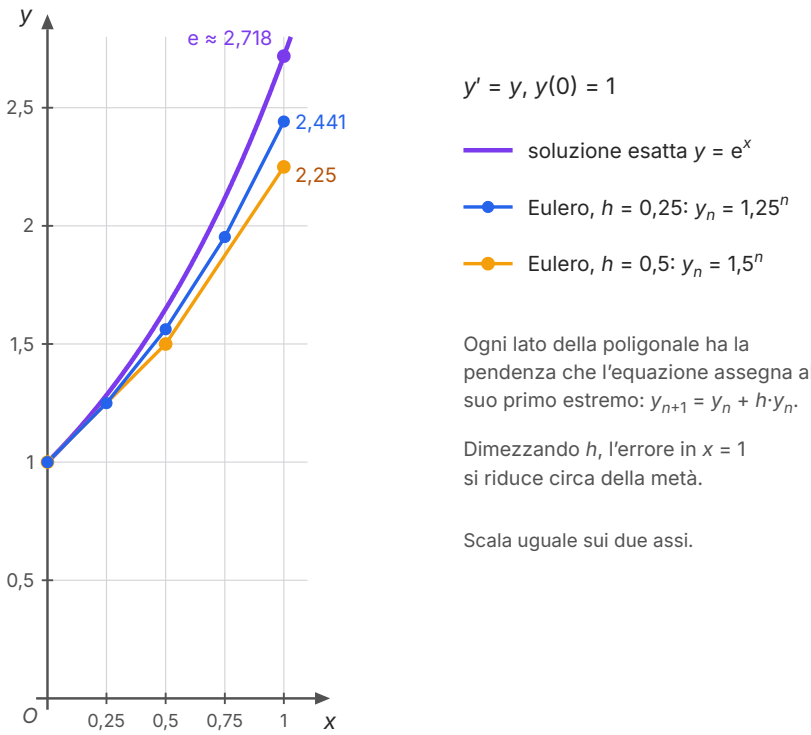



**Figura 12.8** Le poligonali di Eulero per $y' = y$, $y(0) = 1$, con passo $h = 0{,}5$ (arancio) e $h = 0{,}25$ (blu), confrontate con la soluzione esatta $y = e^x$ (viola). Le poligonali restano sotto la curva, che volge la concavità verso l'alto: ogni lato segue la tangente nel suo primo estremo.

## Con il computer

Un foglio di calcolo è lo strumento naturale per il metodo di Eulero. In una colonna si scrivono i valori di $x$ (il primo, e poi «cella sopra più $h$»), nella colonna accanto quelli di $y$ (il primo è il dato iniziale, ogni altro è «cella sopra più $h$ per la pendenza calcolata nella riga sopra»); trasci-

nando la formula verso il basso si ottengono centinaia di passi in un istante, e un grafico a dispersione mostra la poligonale. Aggiungendo una colonna con la soluzione esatta, quando c'è, si legge l'errore; cambiando $h$ si osserva come diminuisce. Lo stesso foglio funziona per qualsiasi equazione in forma normale: basta cambiare la formula della pendenza (esercizio 29).

**SINTESI**

- Un'equazione differenziale lega una funzione incognita alle sue derivate; l'ordine è quello della derivata più alta. Una soluzione è una funzione, definita su un intervallo, che rende l'equazione un'identità.
- L'integrale generale di un'equazione di ordine $n$ dipende da $n$ costanti; fissandole si ottiene un integrale particolare.
- Il problema di Cauchy assegna le condizioni iniziali ($y(x_0)$, e anche $y'(x_0)$ al secondo ordine); sotto ipotesi di regolarità ha una e una sola soluzione su un intervallo intorno a $x_0$, e due curve integrali non si incontrano.
- Il campo delle direzioni rappresenta $y' = f(x; y)$: le curve integrali sono tangenti ai suoi trattini.
- Le equazioni a variabili separabili $y' = g(x)h(y)$ si risolvono con $\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$, senza dimenticare le soluzioni costanti $h(y) = 0$.
- Le equazioni lineari $y' + a(x)y = b(x)$ si risolvono con il fattore integrante $e^{A(x)}$: $y = e^{-A(x)}[\int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c]$.
- $y' = ky$ dà $y = y_0 e^{kt}$; nel decadimento il tempo di dimezzamento è $T = \frac{\ln 2}{k}$. Raffreddamento di Newton, circuito RC e caduta viscosa hanno la stessa struttura $y' = -k(y - y_{\mathrm{eq}})$.
- Il modello logistico $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ ha soluzione $y = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$, tende alla capacità portante $K$ e ha il flesso a $y = \frac{K}{2}$.
- L'equazione di Newton $mx'' = F$ è del secondo ordine; l'oscillatore armonico $x'' + \omega^2 x = 0$ ha integrale generale $A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ e periodo $\frac{2\pi}{\omega}$; il pendolo lo è solo per piccoli angoli.
- Per $ay'' + by' + cy = 0$ si risolve l'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$: radici reali distinte, coincidenti o complesse $\alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$ danno $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, $(c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$, $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$.
- L'oscillatore smorzato è sovrasmorzato, critico o sottosmorzato secondo che $\gamma$ sia maggiore, uguale o minore di $\omega_0$.
- Il metodo di Eulero $y_{n+1} = y_n + hf(x_n; y_n)$ approssima la soluzione seguendo il campo delle direzioni; il suo errore è circa proporzionale al passo $h$.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● L'ordine dell'equazione $y'' + 3(y')^3 = xy$ è:
   - **A.** 1
   - **B.** 3
   - **C.** 2
   - **D.** 4

2. ● Quale di queste funzioni è soluzione dell'equazione $y' = 3y$?
   - **A.** $y = 5e^{3x}$
   - **B.** $y = 3e^{x}$
   - **C.** $y = e^{3x} + 1$
   - **D.** $y = x^3$

3. ● L'integrale generale dell'equazione $y'' = 6x$ è:
   - **A.** $y = 3x^2 + c$
   - **B.** $y = x^3 + c$
   - **C.** $y = 3x^2 + c_1x + c_2$
   - **D.** $y = x^3 + c_1x + c_2$

4. ●● L'integrale generale di $y'' - 4y' + 4y = 0$ è:
   - **A.** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
   - **B.** $y = (c_1 + c_2x)e^{2x}$
   - **C.** $y = ce^{2x}$
   - **D.** $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

5. ●● Una sostanza radioattiva ha tempo di dimezzamento di 8 giorni. Dopo 24 giorni ne resta la frazione:
   - **A.** $\frac{1}{3}$
   - **B.** $\frac{1}{6}$
   - **C.** $\frac{1}{8}$
   - **D.** $\frac{1}{24}$

6. ●● Nel modello logistico $y' = 0{,}2y\left(1 - \frac{y}{500}\right)$ la popolazione cresce più rapidamente quando vale:

   **A.** 0
   **B.** 100
   **C.** 500
   **D.** 250

7. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni equazione differenziale del primo ordine ha almeno una soluzione costante. b) Il problema di Cauchy $y' = y$, $y(0) = 0$ ha come unica soluzione $y = 0$. c) La funzione $y = 0$ è soluzione di ogni equazione lineare omogenea. d) L'integrale generale di un'equazione del secondo ordine contiene una sola costante arbitraria.

8. ● Completa. Un'equazione del primo ordine è a variabili separabili se si può scrivere nella forma _____ ; è lineare se si può scrivere nella forma _____ . Le soluzioni costanti di $y' = g(x)h(y)$ sono le funzioni $y = k$ con _____ . Un problema di Cauchy del secondo ordine assegna in un punto $x_0$ i valori di _____ e di _____ .

**Calcolare**

9. ● Verifica che: a) $y = xe^x$ è soluzione di $y'' - 2y' + y = 0$; b) $y = \frac{1}{1+x}$ è soluzione di $y' = -y^2$ su $]-1; +\infty[$; c) $y = \text{sen } 2x$ è soluzione di $y'' + 4y = 0$.

10. ● Risolvi i problemi di Cauchy: a) $y' = 3x^2 - 2$, $y(1) = 0$; b) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$; c) $y' = \cos 2x$, $y(0) = 1$.

11. ●● Risolvi le equazioni a variabili separabili con la condizione data: a) $y' = 2xy$, $y(0) = 3$; b) $y' = x(1 + y^2)$, $y(0) = 0$ (indica l'intervallo su cui la soluzione è definita); c) $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \ln 2$.

12. ●● Considera l'equazione $y' = y^2 - 1$. a) Trova le soluzioni costanti. b) Trova l'integrale generale. c) Risolvi il problema di Cauchy con $y(0) = 0$.

13. ●● Risolvi le equazioni lineari: a) $y' + 3y = 6$, $y(0) = 0$; b) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$; c) $y' + 2y = 4x$ (integrale generale).

14. ●● a) Risolvi $y' - \frac{2}{x}y = x^3$ su $]0; +\infty[$ con $y(1) = 1$. b) Trova l'integrale generale di $y' + 2xy = 2x$ in due modi: come equazione lineare e come equazione a variabili separabili.

15. ●● Scrivi l'integrale generale delle equazioni: a) $y'' - y' - 6y = 0$; b) $y'' + 6y' + 9y = 0$; c) $y'' + 9y = 0$; d) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

16. ●● Risolvi i problemi di Cauchy: a) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$; b) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

17. ●● Risolvi il problema $y'' + 4y = 8$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, e indica il valore massimo della soluzione.

18. ●●● a) Determina i valori di $k$ per cui $y = e^{kx}$ è soluzione di $y'' + y' - 6y = 0$. b) Trova la soluzione con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.

### Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che, se $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni dell'equazione lineare $y' + a(x)y = b(x)$, la differenza $y_1 - y_2$ è soluzione dell'omogenea associata $y' + a(x)y = 0$. Deduci che l'integrale generale è la somma di una soluzione particolare e dell'integrale generale dell'omogenea.

20. ●● Trova l'errore. Uno studente risolve $y' = xy$ così: «$\frac{dy}{y} = x\,dx$, quindi $\ln y = \frac{x^2}{2}$ e $y = e^{x^2/2}$». Individua tutti gli errori e scrivi l'integrale generale corretto.

21. ●● Spiega perché una soluzione di $y' = y(2 - y)$ con $0 < y(0) < 2$ resta sempre compresa fra 0 e 2 ed è crescente.

22. ●●● Sia $\lambda$ radice doppia dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Dimostra che $y = xe^{\lambda x}$ è soluzione di $ay'' + by' + cy = 0$.

23. ●●● Dimostra che, se $x(t)$ risolve $x'' + \omega^2 x = 0$, la quantità $(x')^2 + \omega^2 x^2$ è costante. Che cosa significa questo risultato per un corpo attaccato a una molla?

### Problemi

24. ●● (dati inventati) Una torta esce dal forno a 180 °C in una cucina a 20 °C e dopo 10 minuti è a 100 °C. Secondo la legge di Newton: a) trova la costante $k$; b) calcola la temperatura dopo 30 minuti; c) dopo quanto tempo la torta è a 30 °C?

25. ●● Un condensatore da 100 µF, scarico, è collegato in serie a una resistenza da 10 kΩ e a un generatore da 9 V. a) Scrivi $q(t)$. b) Dopo quanto tempo la carica è il 90% di quella finale? c) Quanto vale la corrente all'istante iniziale?

26. ●● (dati inventati) Una pallina di massa 10 g cade da ferma in un olio che esercita una forza d'attrito $-bv$ con $b = 0{,}05$ kg/s. Con $g = 9{,}8$ m/s$^2$: a) scrivi e risolvi l'equazione per $v(t)$; b) calcola la velocità limite; c) dopo quanto tempo la pallina raggiunge il 99% della velocità limite?

27. ●●● (parametri inventati) Un farmaco ha tempo di dimezzamento di 6 ore. a) Dopo un'iniezione di 400 mg, dopo quanto tempo nel sangue ne restano 50 mg? b) Il farmaco viene invece somministrato per flebo, a 20 mg/h a partire da $Q(0) = 0$: scrivi l'equazione $Q' = 20 - kQ$, risolvila e trova il valore a cui tende $Q$. c) Quanto farmaco c'è dopo 24 ore di flebo?

28. ●●● (dati inventati) In un lago vengono immessi 200 pesci; la popolazione segue il modello logistico con $K = 2000$ e $r = 0{,}4$ all'anno. a) Scrivi $y(t)$. b) Quando la popolazione cresce più rapidamente, e con quale velocità? c) Quanti pesci ci sono dopo 10 anni?

### Con il computer

29. ●● Con un foglio di calcolo applica il metodo di Eulero all'equazione logistica $y' = 0{,}5y\left(1 - \frac{y}{1000}\right)$, $y(0) = 100$, con passo $h = 0{,}5$ fino a $t = 10$. Riporta i primi quattro valori approssimati e il valore in $t = 10$, e confrontali con la soluzione esatta $y = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}5t}}$.

30. ●● Con un software che disegna grafici con un cursore, traccia la soluzione di $x'' + bx' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, al variare di $b$ fra 0 e 6. Per quale valore di $b$ lo smorzamento è critico? Per $b = 1$ calcola lo pseudoperiodo e confrontalo con il grafico.

### Verso l'esame

31. ●● Verifica che $y = (x + 1)e^{-x}$ è la soluzione del problema di Cauchy $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, e calcola $\int_0^{+\infty} (x + 1)e^{-x}\,dx$.

32. ●● Determina la funzione $y(x)$, definita per $x > 0$, che soddisfa l'equazione $y' = \frac{y}{x} + x$ e il cui grafico passa per il punto $(1; 2)$. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 2.

33. ●●● Determina le curve del primo quadrante tali che, in ogni loro punto $P(x; y)$, la retta tangente incontra l'asse $x$ nel punto di ascissa $2x$. Dimostra che sono rami di iperboli equilatere.

34. ●● Un corpo di massa 2 kg, attaccato a una molla con $k = 8$ N/m su un piano orizzontale senza attrito, viene spostato di 10 cm dall'equilibrio e lasciato con velocità nulla. Scrivi la legge del moto, calcola il periodo e determina il primo istante in cui la velocità è massima in valore assoluto, e quanto vale.

35. ●●● **Problema.** Considera l'equazione differenziale $y' = y(2 - y)$.

a) Determina la soluzione $f$ con $f(0) = 1$ e verifica che $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$.

b) Studia la funzione $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$: asintoti, monotonia, concavità e flesso, con la retta tangente nel flesso; traccia il grafico.

c) Dimostra che il grafico di $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$ è simmetrico rispetto al punto $(0; 1)$.

d) Calcola l'area della regione illimitata compresa, per $x \geq 0$, fra il grafico di $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$ e il suo asintoto orizzontale $y = 2$.

## PER APPROFONDIRE

- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: il capitolo introduttivo alle equazioni differenziali, con le equazioni lineari del primo e del secondo ordine e molte applicazioni fisiche.
- [CJ] Courant, John, *Introduction to Calculus and Analysis*, vol. I: le equazioni differenziali dei moti più semplici, dalle oscillazioni libere a quelle smorzate e forzate.
- [KLI] Kline, *Storia del pensiero matematico*: come le equazioni differenziali sono nate, fra Sei e Settecento, dai problemi della meccanica.
- [QDR] *Quadri di riferimento* per la seconda prova: le equazioni differenziali fra i nuclei tematici dell'esame.

# Glossario del capitolo

**Campo delle direzioni**
Rappresentazione di $y' = f(x; y)$ con brevi segmenti che in ogni punto hanno la pendenza $f(x; y)$; le curve integrali sono tangenti a essi.

**Costante di tempo**
In un circuito RC il tempo $\tau = RC$; dopo $\tau$ la carica è il 63,2% di quella finale.

**Curva integrale**
Il grafico di una soluzione di un'equazione differenziale.

**Equazione a variabili separabili**
Equazione del primo ordine della forma $y' = g(x)h(y)$.

**Equazione caratteristica**
Per $ay'' + by' + cy = 0$, l'equazione $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$: $e^{\lambda x}$ è soluzione se e solo se $\lambda$ la risolve.

**Equazione differenziale**
Equazione che lega una funzione incognita di una variabile alle sue derivate; il suo ordine è quello della derivata più alta.

**Equazione lineare del primo ordine**
Equazione della forma $y' + a(x)y = b(x)$; è omogenea se $b = 0$.

**Fattore integrante**
Per $y' + a(x)y = b(x)$, la funzione $e^{A(x)}$, con $A$ primitiva di $a$, che trasforma il primo membro nella derivata di $e^{A(x)}y$.

**Integrale generale**
La famiglia di tutte le soluzioni di un'equazione di ordine $n$, dipendente da $n$ costanti arbitrarie (più eventuali soluzioni isolate, come quelle costanti delle equazioni separabili).

**Integrale particolare**
Una soluzione ottenuta dall'integrale generale fissando il valore delle costanti.

**Metodo di Eulero**
Metodo numerico che approssima la soluzione di $y' = f(x; y)$ con $y_{n+1} = y_n + hf(x_n; y_n)$, $x_{n+1} = x_n + h$.

**Oscillatore armonico**
Sistema descritto da $x'' + \omega^2 x = 0$; le soluzioni sono $A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$, con periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

**Principio di sovrapposizione**
Ogni combinazione lineare di soluzioni di un'equazione lineare omogenea è ancora una soluzione.

**Problema di Cauchy**
Un'equazione differenziale insieme alle condizioni iniziali ($y(x_0)$ al primo ordine, $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ al secondo) che ne selezionano una soluzione.

**Smorzamento critico**
Per $x'' + 2\gamma x' + \omega_0{}^2 x = 0$, il caso $\gamma = \omega_0$: il sistema torna all'equilibrio senza oscillare, nel modo più rapido.

**Soluzione di equilibrio**
Soluzione costante di un'equazione differenziale: un sistema che parte da quel valore vi resta.

**Tempo di dimezzamento**
Nel decadimento $N' = -kN$, il tempo $T = \dfrac{\ln 2}{k}$ dopo il quale la quantità si dimezza, qualunque sia il valore iniziale.

# Soluzioni

**1.** C. La derivata di ordine massimo è $y''$; l'esponente 3 di $y'$ non conta.

**2.** A. $(5e^{3x})' = 15e^{3x} = 3 \cdot 5e^{3x}$. Per $3e^x$ si ha $y' = 3e^x \neq 9e^x$; per $e^{3x} + 1$ si ha $y' = 3e^{3x} \neq 3e^{3x} + 3$.

**3.** D. Integrando due volte: $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_1x + c_2$.

**4.** B. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$: radice doppia $\lambda = 2$.

**5.** C. 24 giorni sono 3 tempi di dimezzamento: $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

**6.** D. La velocità di crescita è massima nel flesso, a $y = \frac{K}{2} = 250$.

**7.** a) Falso: $y' = 1$ non ha soluzioni costanti. b) Vero: $y = 0$ è soluzione e, per il teorema di Cauchy ($f(x; y) = y$ è regolare), è l'unica. c) Vero: tutte le derivate di $y = 0$ sono nulle e il secondo membro è 0. d) Falso: ne contiene due.

**8.** $y' = g(x) \cdot h(y)$; $y' + a(x)y = b(x)$; $h(k) = 0$; $y(x_0)$ e $y'(x_0)$.

**9.** a) $y' = (x + 1)e^x$, $y'' = (x + 2)e^x$; $(x + 2) - 2(x + 1) + x = 0$. b) $y' = -\frac{1}{(1 + x)^2} = -y^2$. c) $y'' = -4 \operatorname{sen} 2x = -4y$.

**10.** a) $y = x^3 - 2x + c$, $y(1) = -1 + c = 0$: $y = x^3 - 2x + 1$. b) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$. c) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + 1$.

**11.** a) $\ln|y| = x^2 + c$, $y = Ce^{x^2}$; con $y(0) = 3$: $y = 3e^{x^2}$. b) $\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x\,dx$: $\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$, $c = 0$; $y = \operatorname{tg} \frac{x^2}{2}$ su $]-\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi}[$ (serve $\frac{x^2}{2} < \frac{\pi}{2}$). c) $e^y\,dy = e^x\,dx$: $e^y = e^x + c$, con $y(0) = \ln 2$: $2 = 1 + c$, $c = 1$; $y = \ln(e^x + 1)$.

**12.** a) $y = 1$ e $y = -1$. b) $\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln|\frac{y - 1}{y + 1}| = x + c$, da cui $\frac{y - 1}{y + 1} = Ke^{2x}$ e $y = \frac{1 + Ke^{2x}}{1 - Ke^{2x}}$ ($K \in \mathbb{R}$; $K = 0$ dà $y = 1$), più la soluzione $y = -1$. c) $y(0) = 0$ dà $K = -1$: $y = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

**13.** a) $y = Ce^{-3x} + 2$, $C = -2$: $y = 2 - 2e^{-3x}$. b) Fattore $e^{-x}$: $(ye^{-x})' = 1$, $y = (x + c)e^x$, $c = 1$: $y = (x + 1)e^x$. c) Fattore $e^{2x}$: $(ye^{2x})' = 4xe^{2x}$, $ye^{2x} = (2x - 1)e^{2x} + c$, $y = 2x - 1 + ce^{-2x}$.

**14.** a) $A = -2 \ln x$, fattore $\frac{1}{x^2}$: $(\frac{y}{x^2})' = x$, $\frac{y}{x^2} = \frac{x^2}{2} + c$, $y = \frac{x^4}{2} + cx^2$; $y(1) = \frac{1}{2} + c = 1$: $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$. b) Lineare: fattore $e^{x^2}$, $(ye^{x^2})' = 2xe^{x^2}$, $y = 1 + Ce^{-x^2}$. Separabile: $y' = 2x(1 - y)$; soluzione costante $y = 1$; $-\ln|1 - y| = x^2 + c$, $1 - y = Ke^{-x^2}$: lo stesso risultato.

**15.** a) $\lambda = 3$, $\lambda = -2$: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$. b) $\lambda = -3$ doppia: $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$. c) $\lambda = \pm 3i$: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. d) $\lambda = 2 \pm 3i$: $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

**16.** a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$, $c_1 = 1$, $2c_2 = -4$: $y = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$. b) $y = (c_1 + c_2x)e^x$, $c_1 = 2$, $y'(0) = c_1 + c_2 = 1$, $c_2 = -1$: $y = (2 - x)e^x$.

**17.** Soluzione costante $y = 2$; $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + 2$; $c_1 + 2 = 0$, $2c_2 = 0$: $y = 2 - 2 \cos 2x$. Il massimo è 4, per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

**18.** a) $k^2 + k - 6 = 0$: $k = 2$ o $k = -3$. b) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$; $c_1 + c_2 = 0$, $2c_1 - 3c_2 = 5$: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$; $y = e^{2x} - e^{-3x}$.

**19.** Sottraendo $y_1' + ay_1 = b$ e $y_2' + ay_2 = b$ si ottiene $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = 0$. Fissata una soluzione $y_p$, ogni soluzione $y$ soddisfa $y - y_p = Ce^{-A(x)}$, cioè $y = y_p + Ce^{-A(x)}$; viceversa ogni funzione di questa forma è soluzione.

**20.** Tre errori: manca il valore assoluto ($\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$); manca la costante di integrazione; è stata persa la soluzione costante $y = 0$. Da

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$ si ha $y = \pm e^c e^{x^2/2}$, e aggiungendo $y = 0$: $y = Ce^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

**21.** $y = 0$ e $y = 2$ sono soluzioni e $f(x; y) = y(2 - y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy in tutto il piano. Se la soluzione raggiungesse il valore 2 (o 0) in un punto $x_1$, in $x_1$ ci sarebbero due soluzioni diverse con lo stesso valore: impossibile per l'unicità. Quindi $0 < y < 2$ sempre, e allora $y' = y(2 - y) > 0$: la soluzione è crescente.

**22.** Con $y = xe^{\lambda x}$: $y' = (1 + \lambda x)e^{\lambda x}$, $y'' = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$. Allora $ay'' + by' + cy = e^{\lambda x}[x(a\lambda^2 + b\lambda + c) + (2a\lambda + b)]$. Il primo addendo è nullo perché $\lambda$ è radice; il secondo perché la radice doppia è $\lambda = -\frac{b}{2a}$, cioè $2a\lambda + b = 0$. c.v.d.

**23.** La derivata di $(x')^2 + \omega^2 x^2$ è $2x'x'' + 2\omega^2 xx' = 2x'(x'' + \omega^2 x) = 0$, quindi la quantità è costante. Moltiplicandola per $\frac{m}{2}$ e usando $\omega^2 = \frac{k}{m}$ si ottiene $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$: l'energia meccanica (cinetica più elastica) si conserva.

**24.** $T = 20 + 160e^{-kt}$. a) $100 = 20 + 160e^{-10k}$, $e^{-10k} = \frac{1}{2}$, $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0{,}0693$ al minuto. b) $T(30) = 20 + 160 \cdot \frac{1}{8} = 40$ °C. c) $160e^{-kt} = 10$, $e^{-kt} = \frac{1}{16}$: 4 dimezzamenti, $t = 40$ minuti.

**25.** $\tau = RC = 10^4 \cdot 10^{-4} = 1$ s, $Q = CV = 9 \cdot 10^{-4}$ C. a) $q(t) = 9 \cdot 10^{-4}(1 - e^{-t})$ C, $t$ in secondi. b) $1 - e^{-t} = 0{,}9$: $t = \ln 10 \approx 2{,}30$ s. c) $i(0) = \frac{V}{R} = 9 \cdot 10^{-4}$ A $= 0{,}9$ mA.

**26.** a) $0{,}01v' = 0{,}098 - 0{,}05v$, cioè $v' + 5v = 9{,}8$; con $v(0) = 0$: $v(t) = 1{,}96(1 - e^{-5t})$ m/s. b) $v_{\lim} = \frac{mg}{b} = 1{,}96$ m/s. c) $e^{-5t} = 0{,}01$: $t = \frac{\ln 100}{5} \approx 0{,}92$ s.

**27.** $k = \frac{\ln 2}{6} \approx 0{,}116$ all'ora. a) $400 \cdot (\frac{1}{2})^{t/6} = 50$: 3 dimezzamenti, $t = 18$ ore. b) $Q' + kQ = 20$, $Q(t) = \frac{20}{k}(1 - e^{-kt})$; $Q \to \frac{20}{k} = \frac{120}{\ln 2} \approx 173$ mg. c) $e^{-24k} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$: $Q(24) = 173{,}1 \cdot \frac{15}{16} \approx 162$ mg.

**28.** a) $A = \frac{2000 - 200}{200} = 9$: $y(t) = \frac{2000}{1 + 9e^{-0{,}4t}}$. b) Nel flesso, $y = 1000$, a $t = \frac{\ln 9}{0{,}4} \approx 5{,}49$ anni; velocità $\frac{rK}{4} = 200$ pesci all'anno. c) $y(10) = \frac{2000}{1 + 9e^{-4}} \approx 1717$ pesci.

**29.** $y_{n+1} = y_n + 0{,}5 \cdot 0{,}5y_n(1 - \frac{y_n}{1000})$: $y_1 = 122{,}5$; $y_2 \approx 149{,}37$; $y_3 \approx 181{,}14$; $y_4 \approx 218{,}22$ (valori esatti in $t = 0{,}5$ e $t = 1$: 124,86 e 154,83). In $t = 10$: Eulero $\approx 946{,}6$, esatto $\approx 942{,}8$.

**30.** Equazione caratteristica $\lambda^2 + b\lambda + 4 = 0$: critico per $b^2 = 16$, cioè $b = 4$ (oscillazioni per $b < 4$, nessuna per $b \geq 4$). Per $b = 1$: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, pseudoperiodo $\frac{4\pi}{\sqrt{15}} \approx 3{,}24$.

**31.** $y' = -xe^{-x}$, $y'' = (x - 1)e^{-x}$; $(x - 1) - 2x + (x + 1) = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; per l'unicità è la soluzione. Per parti: $\int_0^{+\infty} (x + 1)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[-(x + 2)e^{-x}]_0^b = 2$.

**32.** $y' - \frac{y}{x} = x$, fattore $\frac{1}{x}$: $(\frac{y}{x})' = 1$, $y = x^2 + cx$; per (1; 2): $c = 1$, $y = x^2 + x$. In $x = 2$: $y = 6$, $y' = 2x + 1 = 5$; tangente $y = 5x - 4$.

**33.** La tangente in $P$ è $Y - y = y'(X - x)$ e incontra l'asse $x$ in $X = x - \frac{y}{y'}$. La condizione $x - \frac{y}{y'} = 2x$ dà $y' = -\frac{y}{x}$; separando, $\ln y = -\ln x + c$ $(x, y > 0)$, cioè $xy = C$ con $C > 0$: rami di iperboli equilatere con asintoti gli assi.

**34.** $\omega = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$ rad/s, $T = \pi \approx 3{,}14$ s; $x(t) = 0{,}1 \cos 2t$ (m). $v = -0{,}2 \operatorname{sen} 2t$: massima in valore assoluto, 0,2 m/s, quando $2t = \frac{\pi}{2}$, cioè a $t = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ s (passaggio per l'equilibrio).

**35.** a) È logistica con $r = 2$, $K = 2$: $A = \frac{2 - 1}{1} = 1$ e $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$; verifica: $f' = \frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}$ e $f(2 - f) = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \cdot \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, uguali. b) Dominio $\mathbb{R}$, $0 < f < 2$; $\lim_{x\to-\infty} f = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f = 2$: asintoti $y = 0$ e $y = 2$. $f' > 0$: crescente. $f'' = f'(2 - 2f)$ si annulla per $f = 1$, cioè $x = 0$: concava verso l'alto per $x < 0$, verso

il basso per $x > 0$, flesso $(0; 1)$ con $f'(0) = 1$ e tangente $y = x + 1$. c) $f(-x) = \frac{2}{1 + e^{2x}} = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}$, quindi $f(x) + f(-x) = 2$, cioè $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$: simmetria centrale rispetto a $(0; 1)$. d) $2 - f = \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, con primitiva $-\ln(1 + e^{-2x})$: area $= \lim_{b \to +\infty}[-\ln(1 + e^{-2x})]_0^b = \ln 2 \approx 0{,}693$.