CAPITOLO

11

Applicazioni del calcolo integrale

Dividi, approssima, somma, passa al limite: con la stessa ricetta si misurano un volume, un lavoro, una carica.

OBIETTIVI

1. Calcolare il volume di un solido di rotazione con il metodo dei dischi, delle rondelle e dei gusci cilindrici.
2. Calcolare volumi con il metodo delle sezioni e dimostrare il principio di Cavalieri e la formula della superficie sferica.
3. Definire e calcolare gli integrali impropri, e riconoscere quando $\int \frac{1}{x^p}\,dx$ converge.
4. Usare l'integrale per calcolare spostamenti, lavori, cariche, masse, valori medi ed efficaci.
5. Approssimare un integrale con i metodi dei rettangoli e dei trapezi, valutando l'errore.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 I volumi dei solidi di rotazione 2
11.2 Il metodo delle sezioni e la superficie sferica 6
11.3 Gli integrali impropri 10
11.4 Applicazioni alla fisica e alle scienze 13
11.5 L'integrazione numerica 18

Matematica 5 · Parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali · versione 1.0
Capitolo 11: Applicazioni del calcolo integrale · pagine 309–334 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente l'integrale definito ha risolto il problema delle aree: si divide il trapezoide in strisce sottili, si approssima ogni striscia con un rettangolo, si sommano le aree e si passa al limite. Quell'idea, però, non riguarda solo le aree. Funziona per *qualunque* grandezza che si possa spezzare in tanti piccoli contributi da sommare: il volume di un solido tagliato a fette, lo spazio percorso da un'auto la cui velocità cambia di continuo, il lavoro di una molla che si allunga, la carica che attraversa un circuito, la massa di un'asta più densa a un'estremità che all'altra.

In questo capitolo useremo l'integrale come uno strumento di misura. Ritroveremo con poche righe di calcolo i volumi del cono, della sfera e del tronco di cono che in *Matematica 4* avevano richiesto il principio di Cavalieri, e quel principio, accettato allora come postulato, diventerà un teorema. Manterremo una promessa del capitolo 11 di *Matematica 4*: dimostrare che la superficie sferica misura $4\pi r^2$. Impareremo a integrare su intervalli illimitati, scoprendo che una regione infinitamente lunga può avere area finita, e chiuderemo con i metodi numerici, indispensabili quando una primitiva non si sa scrivere.

11.1 I volumi dei solidi di rotazione

11.1.1 Il metodo dei dischi

Sia f una funzione continua e non negativa sull'intervallo $[a; b]$. Se il trapezoide delimitato dal grafico di f, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ compie un giro completo attorno all'asse x, descrive un **solido di rotazione**. Ogni punto del grafico descrive una circonferenza, e il piano perpendicolare all'asse x nel punto di ascissa x taglia il solido secondo un cerchio di raggio $f(x)$, quindi di area $\pi[f(x)]^2$.

Dividiamo $[a; b]$ in n intervalli di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e in ognuno scegliamo un punto ξ_k. La fetta di solido compresa fra due piani consecutivi somiglia a un cilindro basso, un **disco**, di raggio $f(\xi_k)$ e altezza Δx (Figura 11.1): il suo volume è $\pi[f(\xi_k)]^2\,\Delta x$. La somma dei volumi dei dischi

$$\sum_{k=1}^{n} \pi[f(\xi_k)]^2\,\Delta x$$

è una somma di Riemann della funzione $\pi[f(x)]^2$, che è continua; per $n \to +\infty$ tende quindi all'integrale di questa funzione. È naturale *definire* il volume del solido come questo limite: per i solidi di cui conosciamo già il volume (cilindro, cono, sfera) la definizione dà, come vedremo, i valori noti.

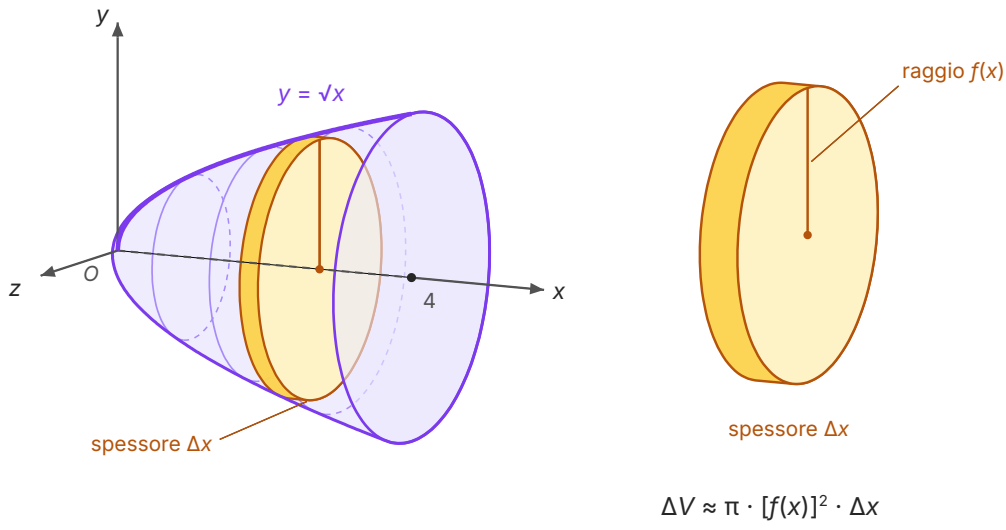


Figura 11.1 Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide di $y = \sqrt{x}$ su $[0; 4]$. Il piano perpendicolare all'asse nel punto x taglia il solido secondo un cerchio di raggio $f(x)$; la fetta di spessore Δx è approssimata da un disco di volume $\pi[f(x)]^2\,\Delta x$, disegnato a parte a destra. I tratti interni all'asse e alle sezioni nascoste sono tratteggiati.

IN SINTESI

Volume di un solido di rotazione (metodo dei dischi). Se f è continua e non negativa su $[a; b]$, il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide di f ha volume

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

Il quadrato riguarda il *raggio*: l'area di ogni sezione è $\pi\, r^2$, con $r = f(x)$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione compresa fra il grafico di $y = \sqrt{x}$, l'asse x e la retta $x = 4$ (Figura 11.1). Confrontalo con il volume del cilindro e del cono che hanno la stessa base e la stessa altezza.

Soluzione. La funzione è continua e non negativa su $[0; 4]$, e $[f(x)]^2 = x$. Quindi

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25{,}13$$

La base del solido è il cerchio di raggio $f(4) = 2$ e l'altezza è 4. Il cilindro con la stessa base e la stessa altezza ha volume $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$, il cono $\frac{16\pi}{3}$. Il solido, che si chiama *paraboloide di rotazione*, è dunque esattamente la metà del cilindro e una volta e mezza il cono: un risultato che Archimede aveva già ottenuto con il metodo di esaustione.

11.1.2 Il cono, la sfera e il tronco di cono

Il metodo dei dischi ritrova in poche righe le formule che in *Matematica 4* avevamo ricavato con il principio di Cavalieri.

Cono. Il cono di raggio r e altezza h è generato dalla rotazione del triangolo rettangolo che ha i cateti sull'asse x e sulla retta $x = h$, cioè del trapezoide di $f(x) = \frac{r}{h}\,x$ su $[0; h]$:

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2\,dx = \pi\,\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2 h$$

Sfera. La sfera di raggio r è generata dalla rotazione del semicerchio che sta sopra l'asse x, trapezoide di $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ su $[-r; r]$ (Figura 11.2a). Qui il quadrato toglie la radice, e la funzione integranda $r^2 - x^2$ è pari:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

Tronco di cono. Il tronco di cono con raggi r e R ($r \neq R$) e altezza h è generato dal trapezio rettangolo sotto il segmento che va da $(0; r)$ a $(h; R)$, cioè dal trapezoide di $f(x) = r + \frac{R - r}{h}\,x$. Con la sostituzione $t = f(x)$, da cui $dx = \frac{h}{R - r}\,dt$, e cambiando gli estremi (per $x = 0$ è $t = r$, per $x = h$ è $t = R$):

$$V = \pi\,\frac{h}{R - r} \int_r^R t^2\,dt = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

dove abbiamo scomposto la differenza di cubi. È la formula di *Matematica 4*; per $r = R$ il trapezio diventa un rettangolo e si ottiene il cilindro $\pi R^2 h$.

11.1.3 Il solido fra due curve: la rondella

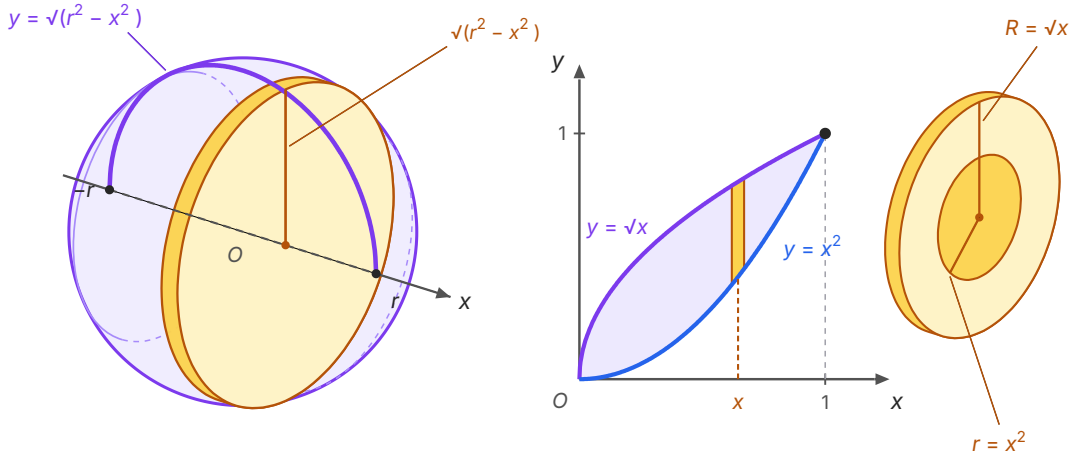
Siano f e g continue su $[a; b]$, con $0 \le g(x) \le f(x)$. Se la regione compresa fra i due grafici ruota attorno all'asse x, si ottiene un solido «bucato»: la sezione con un piano perpendicolare all'asse è una **corona circolare** di raggio esterno $f(x)$ e raggio interno $g(x)$, e la fetta sottile è una **rondella**, un disco con un foro al centro (Figura 11.2b). L'area della corona è la differenza delle aree dei due cerchi, quindi

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) \mathrm{d}x$$

Il volume del solido bucato è il volume del solido «pieno» generato da f meno quello del solido generato da g. Attenzione: la differenza dei quadrati *non* è il quadrato della differenza, e $\pi \int (f-g)^2 \mathrm{d}x$ è un errore classico, che ritroverai fra gli esercizi.

Esempio. Le curve $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ si incontrano dove $\sqrt{x} = x^2$, cioè per $x = 0$ e $x = 1$; fra le due ascisse è $x^2 \le \sqrt{x}$. La regione compresa fra le curve, ruotando attorno all'asse x, genera il solido di volume

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10} \approx 0{,}942$$



a) la sfera **b) la rondella**

Figura 11.2 a) La sfera di raggio r come solido generato dalla rotazione del semicerchio $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x: la sezione nel punto x è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$. b) La regione fra $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ su $[0; 1]$, con una sua striscia verticale nel punto x: ruotando attorno all'asse x, la striscia genera una rondella, di raggio esterno $R = \sqrt{x}$ e raggio interno $r = x^2$.

11.1.4 La rotazione attorno all'asse y

Se la regione ruota attorno all'asse y, le sezioni perpendicolari all'asse di rotazione sono orizzontali, e i raggi si leggono come distanze dall'asse y, cioè come ascisse. Ci sono due strade.

Invertire la funzione. Se la regione si descrive come $0 \le x \le g(y)$ con $c \le y \le d$, il metodo dei dischi si applica scambiando i ruoli delle variabili: $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$. Per esempio, la regione delimitata da $y = x^2$ (con $x \ge 0$), dalla retta $y = 4$ e dall'asse y si descrive come $0 \le x \le \sqrt{y}$, con $0 \le y \le 4$; ruotando attorno all'asse y genera il solido di volume $\pi \int_0^4 y \, dy = 8\pi$.

Il metodo dei gusci cilindrici. Quando invertire è scomodo, si taglia la regione in strisce *verticali*. La striscia fra x e $x + \Delta x$, alta $f(x)$, ruotando attorno all'asse y descrive un **guscio cilindrico**, un tubo sottile di raggio x, altezza $f(x)$ e spessore Δx. Se lo tagliamo lungo una generatrice e lo srotoliamo, diventa quasi una lastra di dimensioni $2\pi x$, $f(x)$ e Δx: il suo volume è circa $2\pi x f(x) \, \Delta x$. Sommando e passando al limite, per una regione con $0 \le a \le x \le b$:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$$

Esempio. La parabola $y = 2x - x^2$ delimita con l'asse x una regione per $0 \le x \le 2$. Ruotandola attorno all'asse y, per invertire dovremmo risolvere $x^2 - 2x + y = 0$, cioè $x = 1 \pm \sqrt{1 - y}$: ogni sezione orizzontale è una corona, con due raggi diversi. Con i gusci, invece,

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) \, dx = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8\pi}{3}$$

I due metodi danno lo stesso risultato, come devono: lo si può verificare sul solido precedente, dove la striscia verticale è alta $4 - x^2$ e $2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) \, dx = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Dimenticare il quadrato, o sbagliare asse.** Nel metodo dei dischi si integra l'area della sezione, $\pi[f(x)]^2$, non $\pi f(x)$: per $y = \sqrt{x}$ su $[0; 4]$ il calcolo $\int_0^4 \pi\sqrt{x} \, dx = \frac{16\pi}{3}$ non ha alcun significato geometrico (il volume è 8π). Allo stesso modo, la formula $\pi \int [f(x)]^2 \, dx$ vale solo per la rotazione attorno all'asse x: attorno all'asse y bisogna invertire la funzione e integrare in dy, oppure usare i gusci. Prima di scrivere un integrale, chiediti: quale asse? quale raggio? la sezione è un cerchio o una corona?

11.2 Il metodo delle sezioni e la superficie sferica

11.2.1 Il volume come integrale delle sezioni

Nel metodo dei dischi abbiamo usato una sola proprietà dei solidi di rotazione: conoscere l'area della sezione nel punto x. Il ragionamento vale per ogni solido. Sia un solido compreso fra i

piani perpendicolari all'asse x nei punti a e b, e sia $S(x)$ l'area della sua sezione con il piano perpendicolare all'asse nel punto x; supponiamo S continua. Una fetta sottile fra x e $x + \Delta x$ ha volume circa $S(x)\,\Delta x$, come un prisma basso; sommando e passando al limite si ottiene il **metodo delle sezioni**.

IN SINTESI

Volume con il metodo delle sezioni. Se un solido è compreso fra i piani $x = a$ e $x = b$ e la sua sezione con il piano perpendicolare all'asse x nel punto x ha area $S(x)$, con S continua su $[a; b]$, allora

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

Per un solido di rotazione attorno all'asse x è $S(x) = \pi[f(x)]^2$, e si ritrova il metodo dei dischi.

11.2.2 Il principio di Cavalieri diventa un teorema

In *Matematica 4* il principio di Cavalieri era un postulato: se due solidi tagliati da piani paralleli a un piano fissato hanno, a ogni altezza, sezioni con la stessa area, allora hanno lo stesso volume. Con il volume definito come integrale delle sezioni, l'enunciato si dimostra in una riga. Prendiamo l'asse x perpendicolare ai piani; se le sezioni hanno aree $S_1(x) = S_2(x)$ per ogni x di $[a; b]$, allora le funzioni integrande coincidono e quindi

$$V_1 = \int_a^b S_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S_2(x)\,\mathrm{d}x = V_2$$

La piramide. Una piramide di base B e altezza h viene tagliata, a distanza x dal vertice, secondo un poligono simile alla base con rapporto di similitudine $\frac{x}{h}$; le aree di figure simili stanno come i quadrati del rapporto, quindi $S(x) = B\,\frac{x^2}{h^2}$. Mettendo il vertice nell'origine e l'asse x lungo l'altezza:

$$V = \int_0^h B\,\frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Bh$$

È la formula che in *Matematica 4* aveva richiesto la scomposizione di un prisma in tre piramidi equivalenti. Il calcolo integrale non la rende più vera, ma la rende *automatica*: il fattore $\frac{1}{3}$ è lo stesso fattore che compare in $\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{3}$.

Il metodo delle sezioni è molto usato nei quesiti dell'esame per solidi che *non* sono di rotazione: si dà una regione del piano come base e si dice di quale forma sono le sezioni perpendicolari a un asse (Figura 11.3).

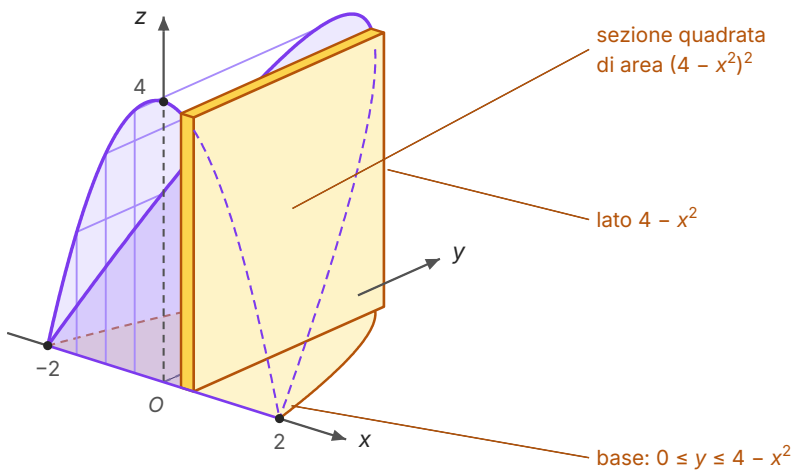


Figura 11.3 Il solido che ha per base la regione $0 \le y \le 4 - x^2$ del piano xy e le sezioni perpendicolari all'asse x quadrate, con il lato nella base. La sezione nel punto x è un quadrato di lato $4 - x^2$; la fetta di spessore Δx (in giallo) ha volume circa $(4 - x^2)^2\,\Delta x$. La parte del solido davanti alla fetta è indicata solo dal contorno tratteggiato; tratteggiati anche il bordo nascosto della base e gli assi nascosti.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Quesito. Sia R la regione delimitata dalla parabola $y = 4 - x^2$ e dall'asse x. a) Calcola l'area di R. b) Calcola il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno all'asse x. c) R è la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati: calcolane il volume. d) Determina k in modo che la retta $y = k$ divida R in due parti equivalenti.

Soluzione. a) La parabola incontra l'asse x in $x = \pm 2$ ed è non negativa fra le due intersezioni; la funzione è pari, quindi

$$A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

b) Con il metodo dei dischi, sviluppando $(4 - x^2)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$:

$$V = 2\pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)\,dx = 2\pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512\pi}{15} \approx 107{,}2$$

c) Il lato del quadrato nel punto x è il segmento verticale di R, lungo $4 - x^2$; quindi $S(x) = (4 - x^2)^2$ e $V = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\,dx = \frac{512}{15} \approx 34{,}1$. Ritroviamo l'integrale del punto b) senza il fattore π: la sezione quadrata ha area $(4 - x^2)^2$, quella circolare $\pi(4 - x^2)^2$.

d) Deve essere $0 < k < 4$. La retta $y = k$ taglia la parabola in $x = \pm\sqrt{4 - k}$, e la parte di R che sta sopra la retta ha area

$$A_k = 2\int_0^{\sqrt{4-k}} (4 - k - x^2)\,dx = 2\left[(4 - k)x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-k}} = \frac{4}{3}(4 - k)^{3/2}$$

Imponiamo che sia metà di $\frac{32}{3}$: $\frac{4}{3}(4 - k)^{3/2} = \frac{16}{3}$, cioè $(4 - k)^{3/2} = 4$, da cui $4 - k = 4^{2/3} = \sqrt[3]{16}$ e $k = 4 - \sqrt[3]{16} = 4 - 2\sqrt[3]{2} \approx 1{,}48$. Il valore è accettabile perché sta fra 0 e 4.

11.2.3 La superficie sferica

In *Matematica 4* abbiamo enunciato che la superficie di una sfera di raggio r misura $4\pi r^2$, rimandando la dimostrazione a quest'anno. Ecco l'argomento, che lega la superficie al volume. Indichiamo con $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ il volume e con $S(r)$ l'area della superficie della sfera di raggio r, e consideriamo due sfere concentriche di raggi r e $r + h$, con $h > 0$. Lo strato compreso fra le due, come una buccia di spessore h, ha volume $V(r + h) - V(r)$.

Una buccia sottile è quasi una lastra di spessore h: il suo volume è compreso fra quello di una lastra con l'area della superficie interna e quello di una lastra con l'area della superficie esterna. Accettiamo questo fatto intuitivo (è lo stesso che usiamo quando stimiamo la vernice per uno strato di spessore h):

$$S(r)\cdot h \le V(r+h)-V(r) \le S(r+h)\cdot h$$

Dividiamo per h e facciamo tendere h a 0^+. Il rapporto centrale tende alla derivata $V'(r)$, mentre i due membri esterni tendono entrambi a $S(r)$, se S è continua; per il teorema del confronto

$$S(r)=V'(r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=4\pi r^2$$

La superficie della sfera è la derivata del volume rispetto al raggio. Nel piano accade lo stesso: la derivata dell'area del cerchio πr^2 è $2\pi r$, la lunghezza della circonferenza. E vale il viceversa, per il teorema fondamentale: il volume si ottiene «sommando le bucce», $V(r)=\int_0^r 4\pi t^2\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi r^3$.

APPROFONDIMENTO · LUNGHEZZA DI UN ARCO E SUPERFICI DI ROTAZIONE

Anche la lunghezza di una curva si calcola con un integrale. Sia f derivabile con derivata continua su $[a;\,b]$. Approssimiamo il grafico con una spezzata: il lato che va da $(x;\,f(x))$ a $(x+\Delta x;\,f(x+\Delta x))$ è lungo $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$, e per il teorema di Lagrange $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)$ per un c dell'intervallo. Sommando e passando al limite si ottiene la **lunghezza dell'arco**

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

Per esempio, per $f(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}$ su $[0;\,3]$ è $1+[f'(x)]^2=1+x$, e $L=\int_0^3\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$. Le radici rendono però questi integrali spesso difficili da calcolare con le primitive: già la lunghezza di un arco di parabola richiede tecniche di integrazione che non studiamo, e quella di un arco di ellisse non si esprime affatto con funzioni elementari.

Se l'arco ruota attorno all'asse x, ogni lato della spezzata descrive la superficie laterale di un tronco di cono; sommando si ottiene l'area della superficie di rotazione

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

Per il semicerchio $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ è $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ e $f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}=r$: la superficie sferica è $2\pi\int_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}x=4\pi r^2$, in accordo con il calcolo precedente. Le due formule di questo riquadro vanno oltre il programma.

11.3 Gli integrali impropri

L'integrale definito del capitolo 10 richiede due condizioni: un intervallo *limitato* $[a;\,b]$ e una funzione *limitata* su di esso, perché solo allora le somme di Riemann hanno senso. Molte do-

mande naturali escono da questi confini: quanta carica attraversa un circuito in un tempo illimitato? Ha area finita la regione sotto $y = \frac{1}{x^2}$ per $x \geq 1$? E quella sotto $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fra 0 e 1, dove la funzione diventa infinita? Per rispondere si integra su intervalli limitati e poi si passa al limite.

11.3.1 Integrali su un intervallo illimitato

Sia f continua su $[a; +\infty[$. Per ogni $t > a$ l'integrale $\int_a^t f(x)\,dx$ è un numero, che dipende da t. Si chiama **integrale improprio** di f su $[a; +\infty[$ il limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Se il limite esiste ed è finito, l'integrale si dice **convergente**; se vale $+\infty$ o $-\infty$ si dice **divergente**; se il limite non esiste, l'integrale non esiste (per esempio $\int_0^t \cos x\,dx = \operatorname{sen} t$ oscilla). In modo analogo si definisce $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$; per un integrale su tutto $\mathbb{R}$ si spezza l'intervallo in un punto qualsiasi c e si richiede che *entrambi* gli integrali $\int_{-\infty}^c$ e $\int_c^{+\infty}$ convergano.

Confrontiamo due funzioni che tendono entrambe a 0 per $x \to +\infty$ (Figura 11.4):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$$

La regione sotto $y = \frac{1}{x^2}$ è infinitamente lunga ma ha area 1; quella sotto $y = \frac{1}{x}$ ha area infinita. Non basta che la funzione tenda a 0: deve tendervi *abbastanza in fretta*. Il confine è proprio $\frac{1}{x}$.

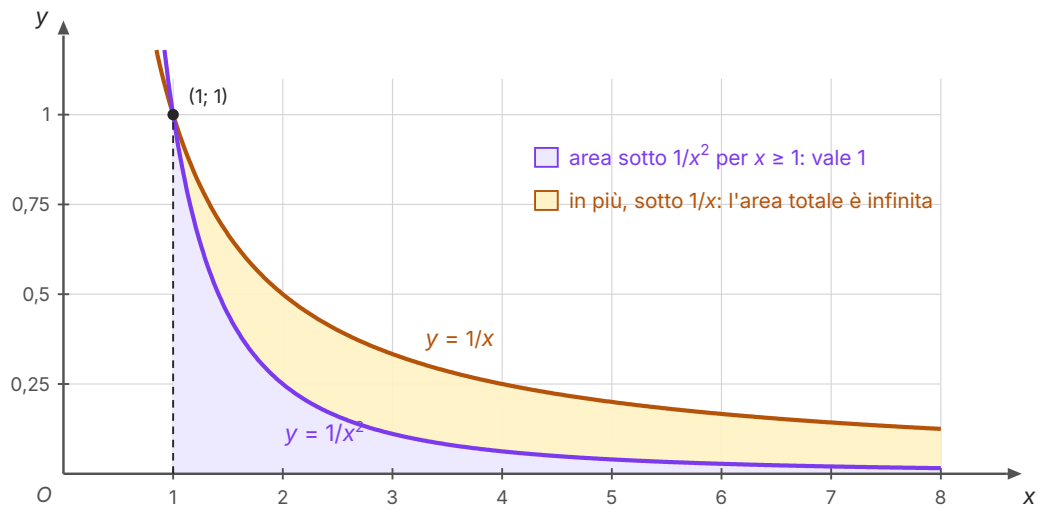


Figura 11.4 I grafici di $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ per $x \geq 1$ (scale diverse sui due assi). La regione sotto $\frac{1}{x^2}$ (in viola) ha area 1; la regione sotto $\frac{1}{x}$, che la contiene, ha area infinita.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: p è un numero reale. **Tesi:** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p > 1$, e in tal caso vale $\frac{1}{p-1}$; $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p < 1$, e in tal caso vale $\frac{1}{1-p}$.

Dimostrazione (prima parte). Per $p = 1$ abbiamo appena visto che l'integrale diverge. Per $p \neq 1$ una primitiva di x^{-p} è $\frac{x^{1-p}}{1-p}$, quindi

$$\int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Se $p > 1$ l'esponente $1 - p$ è negativo, $t^{1-p} \to 0$ e l'integrale tende a $\frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$. Se $p < 1$ l'esponente è positivo, $t^{1-p} \to +\infty$ e l'integrale diverge a $+\infty$. c.v.d.

L'esponenziale. Per $\lambda > 0$ è $\int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$, e per $t \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Questo integrale tornerà nel capitolo 16, dove la funzione $\lambda e^{-\lambda x}$ sarà la densità della distribuzione esponenziale: l'area totale sotto il suo grafico vale 1.

11.3.2 Integrali di funzioni illimitate

Sia f continua su $]a; b]$ e illimitata vicino ad a, come $\frac{1}{\sqrt{x}}$ vicino a 0. Si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

con le stesse parole di prima: convergente, divergente, non esistente. Per esempio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0^+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2$: la regione è infinitamente *alta*, ma ha area finita. La seconda parte del teorema si dimostra come la prima: per $p \neq 1$ è $\int_t^1 x^{-p}\,dx = \frac{1 - t^{1-p}}{1-p}$, e per $t \to 0^+$ la potenza t^{1-p} tende a 0 se $p < 1$ e a $+\infty$ se $p > 1$; per $p = 1$ si ottiene $-\ln t \to +\infty$. Ora gli esponenti si scambiano i ruoli: vicino a 0 la funzione $\frac{1}{x^p}$ è tanto più grande quanto più grande è p. Per $p = 1$ entrambi gli integrali divergono, quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge due volte: per il comportamento vicino a 0 e per quello all'infinito.

Se il punto in cui f è illimitata è *interno* all'intervallo, si spezza l'intervallo in quel punto e si studiano i due integrali impropri separatamente: l'integrale converge solo se convergono entrambi.

ERRORE FREQUENTE

Trattare un integrale improprio come un integrale ordinario. Il calcolo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2 \text{ (sbagliato!)}$$

è sbagliato, e il risultato lo denuncia: la funzione è positiva, quindi il suo integrale non può essere negativo. La formula di Newton–Leibniz richiede che la funzione sia continua su tutto l'intervallo chiuso, mentre $\frac{1}{x^2}$ non è definita in $x = 0$ ed è illimitata vicino a 0. Bisogna spezzare: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge ($p = 2 > 1$), quindi l'integrale proposto diverge. Prima di applicare una primitiva, controlla sempre che l'integranda sia continua su $[a; b]$.

APPROFONDIMENTO · LA TROMBA DI GABRIELE

Facciamo ruotare attorno all'asse x il grafico di $y = \frac{1}{x}$ per $x \geq 1$. Si ottiene una specie di imbuto infinitamente lungo, oggi chiamato *tromba di Gabriele*. Il suo volume è finito:

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi$$

La sua superficie, invece, è infinita. Con la formula del riquadro sulle superfici di rotazione, $S = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx$, e la funzione integranda è maggiore di $\frac{1}{x}$, il cui integrale diverge; per il confronto, diverge anche S.

Sembra un paradosso: la tromba si può riempire con una quantità finita di vernice, ma non si può verniciare. Il paradosso svanisce se si pensa che verniciare vuol dire stendere uno strato di spessore costante, che su una superficie infinita richiede un volume infinito; dentro la tromba, invece, la vernice forma uno «strato» sempre più sottile. Il solido fu studiato da Evangelista Torricelli, allievo di Galileo, che ne calcolò il volume con il metodo degli indivisibili e pubblicò il risultato nella raccolta *Opera geometrica* (1644); la scoperta che un solido infinitamente lungo potesse avere volume finito stupì i matematici del tempo.

11.4 Applicazioni alla fisica e alle scienze

Tutte le applicazioni di questo paragrafo seguono lo stesso schema. Una grandezza totale G si accumula su un intervallo, e su un tratto piccolo Δx il suo contributo è circa (*densità*) $\cdot\, \Delta x$, dove

la densità è una funzione $g(x)$ che varia da punto a punto. Allora $G = \int_a^b g(x)\,dx$. Se la densità fosse costante, l'integrale si ridurrebbe a un prodotto: spazio = velocità · tempo, lavoro = forza · spostamento, massa = densità · lunghezza.

11.4.1 Lo spazio percorso

Un corpo si muove lungo una retta con velocità $v(t)$. Poiché la posizione $s(t)$ è una primitiva della velocità, per il teorema fondamentale lo **spostamento** fra gli istanti t_1 e t_2 è $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$: nel grafico velocità-tempo è l'area con segno sotto la curva. Per il moto uniformemente accelerato $v(t) = v_0 + at$ l'area è un trapezio, e si ritrova la legge oraria $\Delta s = v_0\,t + \frac{1}{2}at^2$ (Figura 11.5). Con $v_0 = 2$ m/s, $a = 1{,}5$ m/s² e $t = 4$ s si ottiene $\Delta s = 8 + 12 = 20$ m.

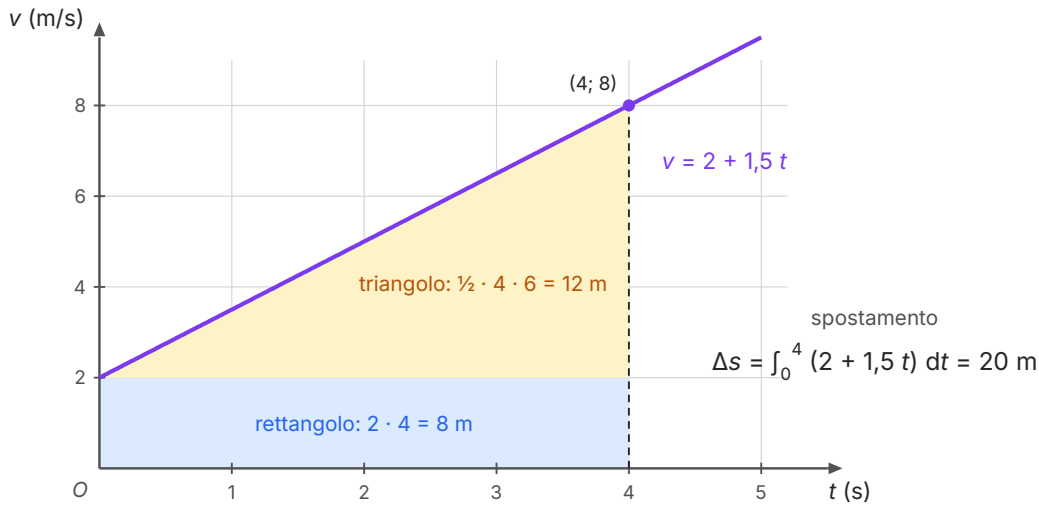


Figura 11.5 Grafico velocità-tempo del moto uniformemente accelerato $v = 2 + 1{,}5t$ (velocità in m/s, tempo in s). Lo spostamento nei primi 4 s è l'area sotto il grafico: il rettangolo $v_0\,t = 8$ m più il triangolo $\frac{1}{2}at^2 = 12$ m, in tutto 20 m. Nella versione interattiva si possono cambiare v_0, a e l'istante t.

Se la velocità cambia segno, il corpo torna indietro, e l'integrale di v conta come negativi i tratti percorsi all'indietro. La **distanza percorsa**, cioè la lunghezza totale del cammino, è invece $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$: per calcolarla si trovano gli istanti in cui v cambia segno e si spezza l'integrale.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un carrello si muove lungo una rotaia rettilinea con velocità $v(t) = t^2 - 4t + 3$ (in m/s, con t in secondi). Calcola lo spostamento e la distanza percorsa nei primi 4 secondi.

Soluzione. Una primitiva di v è

$$s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$$

Lo spostamento è $s(4) - s(0) = \frac{64}{3} - 32 + 12 = \frac{4}{3}$ m $\approx 1{,}33$ m.

La velocità $v(t) = (t - 1)(t - 3)$ si annulla per $t = 1$ e $t = 3$: è positiva su $[0; 1[$, negativa su $]1; 3[$, positiva su $]3; 4]$. Calcoliamo i tre integrali:

$$\int_0^1 v\,dt = \frac{4}{3}, \int_1^3 v\,dt = -\frac{4}{3}, \int_3^4 v\,dt = \frac{4}{3}$$

Il carrello avanza di $\frac{4}{3}$ m, torna indietro di $\frac{4}{3}$ m (ripassa per il punto di partenza all'istante $t = 3$) e avanza di nuovo di $\frac{4}{3}$ m. La distanza percorsa è $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ m, tre volte lo spostamento.

11.4.2 Il lavoro di una forza variabile

Se una forza costante F, diretta come lo spostamento, sposta il suo punto di applicazione di Δx, compie il lavoro $W = F\,\Delta x$. Se la forza dipende dalla posizione, $F = F(x)$, su un tratto piccolo la consideriamo costante: il contributo è $F(x)\,\Delta x$, e il **lavoro** della forza fra x_1 e x_2 è

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

La molla. Per la legge di Hooke, per tenere una molla allungata di x rispetto alla posizione di riposo serve una forza $F = kx$, dove k è la costante elastica. Il lavoro per allungarla da 0 a x è $\int_0^x kt\,dt = \frac{1}{2}kx^2$: nel piano F–x è l'area di un triangolo (Figura 11.6). Con $k = 200$ N/m, per allungare la molla di 10 cm servono $\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}10^2 = 1$ J; ma i primi 5 cm costano solo 0,25 J e gli ultimi 5 cm 0,75 J, perché la forza cresce mentre la molla si allunga. È l'*energia potenziale elastica* della fisica.

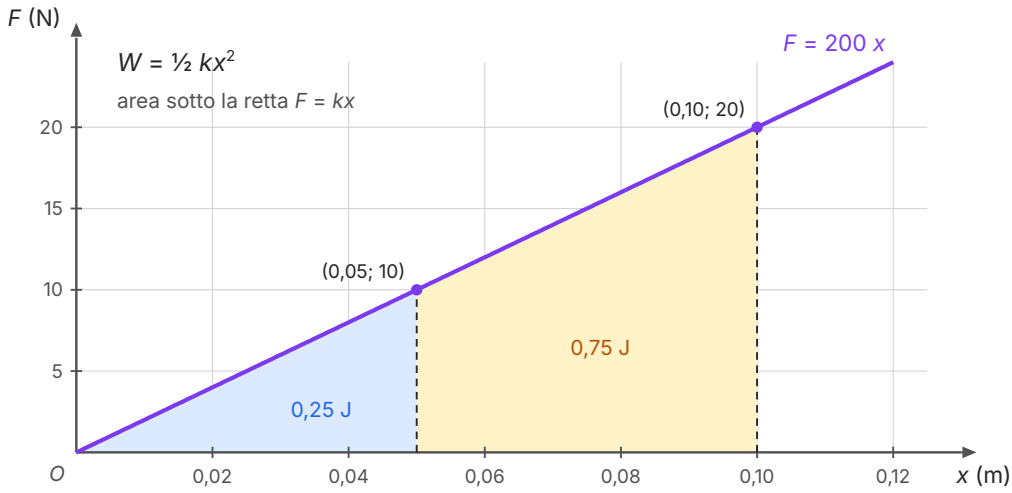


Figura 11.6 Il lavoro per allungare una molla di costante k = 200 N/m è l'area sotto la retta $F = kx$. Da 0 a 0,05 m (triangolo azzurro) il lavoro è 0,25 J; da 0,05 m a 0,10 m (trapezio giallo) è 0,75 J.

Il gas che si espande. Un gas racchiuso in un cilindro da un pistone di area A esercita su di esso la forza $F = pA$. Se il pistone avanza di Δx, il volume aumenta di $\Delta V = A\Delta x$ e il gas compie il lavoro $pA\Delta x = p\Delta V$; quindi il lavoro del gas quando il volume passa da V_1 a V_2 è $\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$. In una trasformazione *isoterma* di un gas perfetto è $pV = nRT$ con T costante, quindi

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Per esempio, una mole di gas a 300 K che raddoppia il suo volume compie il lavoro $1 \cdot 8{,}314 \cdot 300 \cdot \ln 2 \approx 1{,}73 \cdot 10^3$ J, qualunque sia il volume iniziale. Se il gas viene compresso, $V_2 < V_1$, il logaritmo è negativo: il lavoro lo compie l'ambiente sul gas.

11.4.3 Carica, valore medio e valore efficace

L'intensità di corrente è la derivata della carica rispetto al tempo, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; quindi la carica che attraversa una sezione del circuito fra t_1 e t_2 è $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,\mathrm{d}t$. Se la corrente decresce come $i(t) = I_0\, e^{-t/\tau}$, come accade nella scarica di un condensatore (capitolo 12), con $I_0 = 0{,}02$ A e $\tau = 0{,}5$ s (dati inventati), nel primo intervallo di durata τ passa la carica $I_0\,\tau\,(1 - e^{-1}) \approx 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ C, e in tutto, con un integrale improprio,

$$q = \int_0^{+\infty} I_0 e^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = I_0\,\tau = 0{,}01\ \mathrm{C}$$

Nel capitolo 10 il teorema della media ha definito il valore medio di una funzione continua su $[a; b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Per una corrente alternata $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, il valore medio su un periodo è 0, perché le due semionde hanno aree opposte; su mezzo periodo vale $\frac{2I_0}{\pi} \approx 0{,}64\, I_0$.

Per gli effetti termici conta invece il **valore efficace** I_{eff}: l'intensità della corrente *continua* che in un periodo dissiperebbe in una resistenza R la stessa energia. La potenza istantanea dissipata è Ri^2, quindi deve essere $R\, I_{\text{eff}}^2\, T = \int_0^T R\, i^2\,dt$: il valore efficace è la radice del valore medio di i^2. Con la formula di duplicazione $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)\,dt = \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{I_0^2}{2}$$

perché l'integrale di $\cos(2\omega t)$ su un periodo, che contiene due oscillazioni complete, è nullo. Quindi $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, e allo stesso modo per la tensione $V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

COLLEGAMENTI

Fisica ed elettrotecnica. In *Matematica 4* il valore efficace era stato ricavato osservando che sen^2 è una sinusoide che oscilla attorno a $\frac{1}{2}$; ora quel valore medio è un integrale, e il risultato è dimostrato. La tensione della rete elettrica domestica è di 230 V *efficaci*, alla frequenza di 50 Hz: il valore di picco è $230 \cdot \sqrt{2} \approx 325$ V, e il segno della tensione si inverte cento volte al secondo. Una stufa da 2000 W collegata alla rete scalda come se fosse alimentata da una tensione continua di 230 V. I tester misurano di solito il valore efficace, perché è quello che determina la potenza.

Biologia e medicina. Lo stesso schema «la quantità totale è l'integrale di un flusso» si usa per stimare quanto sangue pompa il cuore o quanta sostanza un organismo assorbe nel tempo: si misura il flusso istante per istante e si calcola l'area sotto il suo grafico, spesso con i metodi numerici del paragrafo seguente.

11.4.4 La massa di un'asta non omogenea

Un'asta sottile, disposta lungo l'asse x fra 0 e ℓ, è fatta di un materiale la cui **densità lineare** $\lambda(x)$ (massa per unità di lunghezza, in kg/m) varia da punto a punto. Un tratto lungo Δx ha massa circa $\lambda(x)\,\Delta x$, quindi la massa dell'asta è $m = \int_0^\ell \lambda(x)\,dx$. Per esempio, se $\lambda(x) = 1 + x^2$ kg/m con $\ell = 3$ m (dati inventati), $m = \int_0^3 (1+x^2)\,dx = 3 + 9 = 12$ kg; la densità media è $\frac{12}{3} = 4$ kg/m, cioè il valore medio di λ su $[0; 3]$. Con lo stesso schema la fisica calcola il *baricentro* dell'asta, $x_G = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\lambda(x)\,dx$, che qui vale $\frac{33}{16} \approx 2{,}06$ m: più vicino all'estremo dove l'asta è più densa.

11.5 L'integrazione numerica

La formula di Newton–Leibniz richiede una primitiva, e non sempre la si sa scrivere: nel capitolo 9 abbiamo visto che e^{-x^2} non ha una primitiva elementare. Altre volte la funzione non ha nemmeno un'espressione: è una tabella di misure, la velocità letta ogni secondo da un sensore. In questi casi si calcola un **valore approssimato** dell'integrale con l'**integrazione numerica**: si usano solo i valori della funzione in un numero finito di punti. Come esempio guida prendiamo

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0{,}746824\ldots$$

il cui valore, calcolato con un metodo molto preciso, ci servirà per misurare gli errori. Dividiamo $[a; b]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \dfrac{b-a}{n}$, con i punti $x_i = a + ih$, e poniamo $y_i = f(x_i)$, per $i = 0, 1, \ldots, n$.

11.5.1 Il metodo dei rettangoli

Il modo più semplice è sostituire a ogni striscia un rettangolo, alto quanto la funzione nell'estremo sinistro ($L_n = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$) o nell'estremo destro ($R_n = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$). Sono somme di Riemann, quindi tendono a I per $n \to +\infty$; se f è monotòna, una approssima per eccesso e l'altra per difetto. Per e^{-x^2}, decrescente su $[0; 1]$, con $n = 4$ si ottiene $L_4 \approx 0{,}8220$ e $R_4 \approx 0{,}6640$: il valore vero sta in mezzo, ma la forbice è larga.

11.5.2 Il metodo dei trapezi

Molto meglio è sostituire all'arco di curva sopra ogni striscia la corda che ne congiunge gli estremi: la striscia diventa un trapezio di altezza h e basi y_{i-1} e y_i, di area $\dfrac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)$ (Figura 11.7). Sommando, ogni ordinata interna compare in due trapezi:

$$T_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

È la media fra L_n e R_n. Il segno dell'errore dipende dalla concavità: se il grafico volge la concavità verso l'alto la corda sta sopra l'arco e T_n approssima per eccesso; se la volge verso il basso, per difetto. Per e^{-x^2} si ha $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$: la concavità è verso il basso su $[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}[$ e verso l'alto dopo, e i due errori si compensano in parte. Con i valori della figura,

$$T_4 = 0{,}25 \cdot \left(\frac{1 + 0{,}3679}{2} + 0{,}9394 + 0{,}7788 + 0{,}5698\right) \approx 0{,}7430$$

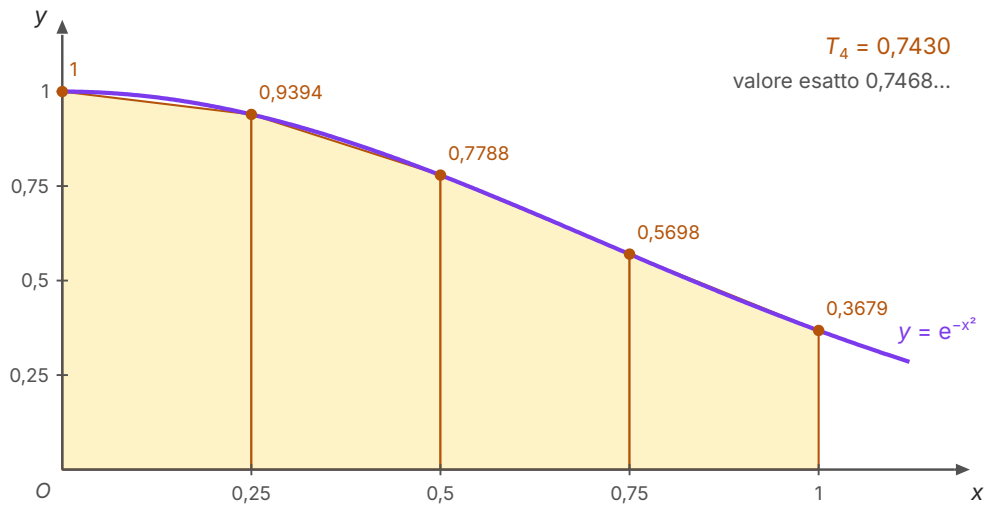


Figura 11.7 Il metodo dei trapezi per $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con $n = 4$: i punti del grafico in $x = 0$; 0,25; 0,5; 0,75; 1 (con le ordinate arrotondate a quattro cifre) sono uniti da corde. La somma delle aree dei trapezi è $T_4 \approx 0{,}7430$, contro il valore esatto 0,7468...

La Tabella 11.1 confronta i metodi. Passando da 4 a 10 intervalli, cioè dividendo h per 2,5, l'errore dei rettangoli si divide circa per 2,5, quello dei trapezi circa per $2{,}5^2 \approx 6$: si può dimostrare che, per funzioni con derivata seconda continua, l'errore dei rettangoli è, all'incirca, proporzionale a h e quello dei trapezi a h^2.

Tabella 11.1 Approssimazioni di $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0{,}746824...$ con $n = 4$ e $n = 10$ intervalli; l'errore è il valore approssimato meno il valore esatto.

Metodo	$n = 4$	errore	$n = 10$	errore
rettangoli, estremo sinistro	0,821999	+0,075175	0,777817	+0,030993
rettangoli, estremo destro	0,663969	−0,082855	0,714605	−0,032219
trapezi	0,742984	−0,003840	0,746211	−0,000613
Cavalieri–Simpson	0,746855	+0,000031	0,746825	+0,000001

11.5.3 Con il computer: la regola dei trapezi nel foglio di calcolo

Il metodo dei trapezi è fatto per il foglio di calcolo. Nella cella B1 scriviamo il numero n di intervalli e in B2 l'ampiezza $h = 1/n$. Nella colonna A, a partire dalla riga 4, mettiamo gli indici $i = 0, 1, \ldots, n$; nella colonna B le ascisse $x_i = i \cdot h$; nella colonna C le ordinate, con la formula =EXP(-(B4^2)) copiata verso il basso (le parentesi servono: nei fogli di calcolo il segno meno davanti a una cella si applica prima della potenza, e =EXP(-B4^2) calcolerebbe e^{x^2}); nella colonna D

i pesi: $\frac{1}{2}$ nella prima e nell'ultima riga, 1 nelle altre. Il valore T_n è h per la somma dei prodotti delle colonne C e D (la funzione MATR.SOMMA.PRODOTTO, o SUMPRODUCT nelle versioni inglesi). Con $n = 10$ si ritrova 0,746211; con $n = 100$, 0,746818: l'errore è sceso a circa $6 \cdot 10^{-6}$, cento volte meno che con $n = 10$, come prevede la regola «errore proporzionale a h^2».

Un sistema di calcolo simbolico (CAS) serve invece a controllare i calcoli esatti. Per il solido di rotazione dell'esempio svolto «Verso l'esame», il comando che integra $\pi(4 - x^2)^2$ fra -2 e 2 restituisce $\frac{512\pi}{15}$; chiedendo l'integrale di e^{-x^2} fra 0 e 1, il CAS risponde con una funzione speciale (la cosiddetta «funzione degli errori», che non è elementare), coerentemente con il fatto, ricordato nel capitolo 9, che una primitiva elementare non esiste.

APPROFONDIMENTO · LA FORMULA DI CAVALIERI–SIMPSON

Invece di una corda si può far passare per tre punti consecutivi del grafico un arco di parabola. Con n pari, raggruppando gli intervalli a due a due, si ottiene la formula che in Italia si chiama di *Cavalieri–Simpson* e altrove *regola di Simpson*, dal matematico inglese Thomas Simpson (XVIII secolo):

$$S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Per $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con $n = 4$:

$$S_4 = \frac{0{,}25}{3}(1 + 4 \cdot 0{,}939413 + 2 \cdot 0{,}778801 + 4 \cdot 0{,}569783 + 0{,}367879) \approx 0{,}746855$$

con un errore di $3 \cdot 10^{-5}$, oltre cento volte più piccolo di quello dei trapezi con gli stessi cinque valori della funzione. La formula è esatta per tutti i polinomi di grado fino a 3, e il suo errore è proporzionale a h^4.

SINTESI

- Una grandezza che si accumula su un intervallo, con una «densità» $g(x)$ variabile, vale $\int_a^b g(x)\,dx$: si divide, si approssima, si somma e si passa al limite.
- **Metodo dei dischi:** il solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide di $f \geq 0$ su $[a; b]$ ha volume $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$; fra due curve $0 \leq g \leq f$, $V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2)\,dx$ (rondella).
- Attorno all'asse y: si inverte la funzione e si integra in dy, oppure si usano i **gusci cilindrici**, $V = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$.
- **Metodo delle sezioni:** $V = \int_a^b S(x)\,dx$, dove $S(x)$ è l'area della sezione perpendicolare all'asse x; il principio di Cavalieri ne è un corollario, e la piramide ha volume $\frac{1}{3}Bh$.
- La superficie sferica è la derivata del volume rispetto al raggio: $S = V'(r) = 4\pi r^2$.
- **Integrale improprio:** $\int_a^{+\infty} f = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f$, e per una funzione illimitata vicino ad a, $\int_a^b f = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f$; converge se il limite è finito.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p > 1$; $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ se e solo se $p < 1$; $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$ per $\lambda > 0$.
- Prima di usare Newton–Leibniz si controlla che l'integranda sia continua sull'intervallo chiuso: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge.
- Lo spostamento è $\int v\,dt$, la distanza percorsa $\int |v|\,dt$; il lavoro di una forza variabile è $\int F(x)\,dx$ (molla: $\frac{1}{2}kx^2$; gas isotermo: $nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$); la carica è $\int i\,dt$; la massa di un'asta è $\int \lambda(x)\,dx$.
- Il valore efficace di una grandezza sinusoidale di ampiezza I_0 è $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$: la radice del valore medio del quadrato.
- **Integrazione numerica:** $T_n = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1})$; l'errore dei rettangoli è proporzionale a h, quello dei trapezi a h^2; il segno dell'errore dei trapezi dipende dalla concavità.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide della funzione continua $f \geq 0$ su $[a; b]$ è:

   A. $\int_a^b \pi f(x)\,dx$

   B. $\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

   C. $2\pi \int_a^b f(x)\,dx$

   D. $\pi [\int_a^b f(x)\,dx]^2$

2. ● La regione compresa fra i grafici di f e g, con $0 \le g(x) \le f(x)$ su $[a; b]$, ruota attorno all'asse x. Il volume del solido è:

   A. $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$
   B. $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$
   C. $2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, dx$
   D. $\pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \, dx$

3. ● L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$ converge se e solo se:

   A. $p > 1$
   B. $p \ge 1$
   C. $p < 1$
   D. $p > 0$

4. ● L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx$, con $p > 0$, converge se e solo se:

   A. $p > 1$
   B. $p = 1$
   C. $p < 1$
   D. $p \le 2$

5. ● Il lavoro necessario per allungare di x una molla di costante elastica k, partendo dalla posizione di riposo, è:

   A. kx
   B. kx^2
   C. $2kx$
   D. $\frac{1}{2}kx^2$

6. ●● Il valore efficace della corrente alternata $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ è:

   A. $\frac{I_0}{2}$
   B. $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$
   C. $\frac{2I_0}{\pi}$
   D. $I_0\sqrt{2}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$.

   b) L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge.

   c) Se due solidi, tagliati con piani perpendicolari all'asse x, hanno sezioni con la stessa area per ogni x, hanno lo stesso volume.

   d) Il metodo dei trapezi approssima sempre l'integrale per eccesso.

   e) Lo spostamento $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ e la distanza percorsa coincidono sempre.

8. ● Completa.

   a) Con il metodo dei gusci cilindrici, il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y del trapezoide di $f \geq 0$ su $[a; b]$, con $a \geq 0$, è $V =$ _____ .

   b) La superficie di una sfera di raggio r è la _____ del volume rispetto a r, e vale _____ .

   c) Per $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx =$ _____ .

   d) Nel metodo dei trapezi con n intervalli di ampiezza h, le ordinate y_0 e y_n hanno peso _____ , tutte le altre hanno peso _____ .

Calcolare

9. ● Calcola il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide della funzione sull'intervallo indicato.

   a) $y = x$, $[0; 3]$ b) $y = e^x$, $[0; 1]$ c) $y = \text{sen}\, x$, $[0; \pi]$

10. ● Come nell'esercizio precedente.

    a) $y = \frac{1}{x}$, $[1; 3]$ b) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $[-3; 3]$ c) $y = x^2 + 1$, $[0; 1]$

11. ●● La regione R è compresa fra la retta $y = x$ e la parabola $y = x^2$.

    a) Calcola il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno all'asse x.

    b) Calcola, con il metodo dei gusci, il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno all'asse y.

12. ●● La regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse y e dalla retta $y = 8$ ruota attorno all'asse y. Calcola il volume del solido in due modi: invertendo la funzione e con il metodo dei gusci.

13. ●● Calcola con il metodo dei gusci il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della regione delimitata dalla parabola $y = x(3 - x)$ e dall'asse x.

14. ●● Un solido ha per base il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$. Calcola il suo volume sapendo che le sezioni con i piani perpendicolari all'asse x sono: a) quadrati; b) triangoli equilateri, con un lato nella base.

15. ● Stabilisci se l'integrale converge e, in caso affermativo, calcolalo.

    a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ c) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

16. ●● Stabilisci se l'integrale converge e, in caso affermativo, calcolalo.
a) $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ c) $\int_0^1 \ln x\,dx$ d) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

17. ●● Calcola l'area della regione illimitata compresa fra il grafico di $y = \frac{1}{x^2}$, l'asse x e la retta $x = 2$, per $x \geq 2$, e il volume del solido che essa genera ruotando attorno all'asse x.

18. ●● Calcola un valore approssimato di $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ con il metodo dei trapezi e $n = 4$. Confrontalo con il valore esatto ln 2 e spiega, con la concavità, perché l'approssimazione è per eccesso.

Dimostrare e argomentare

19. ● Dimostra con il metodo dei dischi che un segmento sferico a una base, di altezza h, staccato da una sfera di raggio R, ha volume $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$ (la formula di *Matematica 4*).

20. ●● Spiega perché l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ diverge per *ogni* valore reale di p.

21. ●● Trova l'errore. Uno studente calcola il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione compresa fra $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ scrivendo $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)^2\,dx$. Che cosa ha calcolato in realtà? Quanto vale il suo risultato, e quanto il volume corretto?

22. ●●● Dimostra che l'ellissoide generato dalla rotazione attorno all'asse x dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ha volume $\frac{4}{3}\pi a b^2$. Che cosa diventa la formula per $a = b$? Spiega perché lo stesso risultato si ottiene «stirando» lungo l'asse x, del fattore $\frac{a}{b}$, una sfera di raggio b.

Problemi

23. ●● Una ciotola ha la forma del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y dell'arco di parabola $y = \frac{x^2}{4}$, con $0 \leq y \leq 9$ (misure in cm). a) Esprimi il volume dell'acqua contenuta quando il livello è all'altezza h dal fondo. b) Calcola la capacità della ciotola in cm^3. c) A quale altezza arriva l'acqua quando la ciotola è piena a metà?

24. ●● Una molla ha costante elastica $k = 400$ N/m. Calcola il lavoro necessario per portarne l'allungamento da 3 cm a 8 cm, e rappresentalo come un'area nel piano F–x.

25. ●● Due moli di gas perfetto alla temperatura costante di 350 K vengono compresse da 30 L a 10 L. Calcola il lavoro compiuto dal gas e quello compiuto dall'ambiente sul gas ($R = 8{,}314$ J/(mol · K)).

26. ●● Un punto si muove lungo una retta con velocità $v(t) = 6t - 3t^2$ (in m/s). Calcola lo spostamento e la distanza percorsa fra $t = 0$ e $t = 3$ s, e spiega il significato dei due risultati.

27. ●● Un'asta lunga 2 m, disposta lungo l'asse x fra 0 e 2, ha densità lineare $\lambda(x) = 3 - \frac{x}{2}$ kg/m (dati inventati). Calcola la massa dell'asta, la sua densità media e l'ascissa del baricentro $x_G = \frac{1}{m}\int_0^2 x\lambda(x)\,dx$.

Con il computer

28. ●● Con un foglio di calcolo applica il metodo dei trapezi a $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ con $n = 10$ e $n = 100$. Calcola il valore esatto dell'integrale e confrontalo con le due approssimazioni: di quanto si riduce l'errore?

29. ●● Con un sistema di calcolo simbolico calcola il volume del solido (illimitato) generato dalla rotazione attorno all'asse x del grafico di $y = e^{-x^2}$ per $x \geq 0$, e dai il risultato con quattro cifre significative. Poi calcola *a mano*, con il metodo dei gusci, il volume del solido generato dalla rotazione della stessa regione attorno all'asse y.

Verso l'esame

30. ●● Determina $a > 0$ in modo che il solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione sotto il grafico di $y = e^{-x}$, per $0 \leq x \leq a$, abbia volume $\frac{\pi}{4}$. Qual è il volume del solido illimitato che si ottiene per $x \geq 0$?

31. ●● Una sfera è inscritta in un cilindro equilatero (con altezza uguale al diametro di base). Verifica, usando il calcolo integrale per la sfera, che il volume della sfera è $\frac{2}{3}$ di quello del cilindro e che la superficie sferica è uguale alla superficie laterale del cilindro: secondo la tradizione, è il risultato di cui Archimede andava più fiero.

32. ●●● Determina per quali valori del parametro reale a l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^a}\,dx$ converge, e calcolalo per $a = 2$.

33. ●● Un solido ha per base la regione compresa fra $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Le sue sezioni con i piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi con il diametro nella base. Calcola il volume del solido.

34. ●●● **Problema.** Per ogni $a > 0$ si consideri la funzione $f_a(x) = \sqrt{x}\,e^{-ax}$, definita per $x \geq 0$.
a) Studia il segno, la monotonia e i limiti di f_a; determina il punto di massimo e il valore massimo.
b) Il grafico di f_a ruota attorno all'asse x. Dimostra che il solido illimitato così ottenuto ha volume finito $V(a) = \pi\int_0^{+\infty} x\,e^{-2ax}\,dx$, e calcolalo.
c) Sapendo che $V(a) = \frac{\pi}{4a^2}$, determina a in modo che il volume sia π.
d) Per $a = \frac{1}{2}$, calcola il volume della parte di solido con $0 \leq x \leq 2$ e la percentuale che essa rappresenta del volume totale π.

PER APPROFONDIRE

- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: i capitoli sulle applicazioni dell'integrale (volumi, lavoro, valore medio) e sugli integrali impropri, con dimostrazioni accurate.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con il metodo di esaustione di Archimede e le prime applicazioni dell'integrale.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Archimede, Cavalieri, Torricelli e gli indivisibili, fino a Newton e Leibniz.
- [QDR] Ministero dell'Istruzione, *Quadri di riferimento per la seconda prova*: fra i nuclei tematici di matematica compaiono il calcolo di aree e volumi e gli integrali, anche in contesti presi dalla fisica.

Glossario del capitolo

Corona circolare
Regione del piano compresa fra due circonferenze concentriche; è la sezione di un solido di rotazione generato da una regione fra due curve.

Densità lineare
Massa per unità di lunghezza $\lambda(x)$ di un corpo sottile; la massa di un'asta fra 0 e ℓ è $\int_0^{\ell} \lambda(x)\,\mathrm{d}x$.

Distanza percorsa
Lunghezza totale del cammino di un corpo che si muove lungo una retta: $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Formula di Cavalieri–Simpson
Metodo di integrazione numerica che sostituisce al grafico archi di parabola per tre punti consecutivi; il suo errore è proporzionale a h^4.

Guscio cilindrico
Tubo sottile generato dalla rotazione attorno all'asse y di una striscia verticale; dà il volume $V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

Integrale divergente
Integrale improprio il cui limite vale $+\infty$ o $-\infty$.

Integrale improprio
Integrale su un intervallo illimitato, o di una funzione illimitata, definito come limite di integrali ordinari.

Integrale improprio convergente
Integrale improprio il cui limite esiste ed è finito.

Integrazione numerica
Calcolo di un valore approssimato di un integrale definito usando i valori della funzione in un numero finito di punti.

Lavoro di una forza variabile
$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$, con la forza diretta come lo spostamento; per una molla vale $\frac{1}{2}kx^2$.

Lunghezza di un arco
Per f con derivata continua su $[a; b]$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

Metodo dei dischi
Calcolo del volume di un solido di rotazione attorno all'asse x: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Metodo dei trapezi
Integrazione numerica che sostituisce al grafico la spezzata delle corde: $T_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$.

Metodo delle sezioni
Calcolo del volume di un solido come $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$, dove $S(x)$ è l'area della sezione perpendicolare all'asse x.

Rondella
Disco con un foro al centro: la fetta sottile di un solido di rotazione generato da una regione compresa fra due curve.

Solido di rotazione
Solido descritto da una regione piana che compie un giro completo attorno a una retta del suo piano.

Spostamento
Variazione di posizione di un corpo fra due istanti: $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$, l'area con segno sotto il grafico velocità-tempo.

Valore efficace
Valore della grandezza costante che produce lo stesso effetto termico di una grandezza variabile; per $I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ vale $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Soluzioni

1. B. L'area della sezione è $\pi[f(x)]^2$.

2. D. La sezione è una corona circolare di raggi $f(x)$ e $g(x)$, di area $\pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$.

3. A. Per $p > 1$ vale $\frac{1}{p-1}$; per $p \le 1$ diverge.

4. C. Per $0 < p < 1$ vale $\frac{1}{1-p}$; per $p \ge 1$ diverge.

5. D. $W = \int_0^x kt\,dt = \frac{1}{2}kx^2$, l'area del triangolo sotto la retta $F = kt$.

6. B. Il valore medio di $\text{sen}^2(\omega t)$ su un periodo è $\frac{1}{2}$, quindi $I_{\text{eff}} = \sqrt{I_0^2/2}$. $\frac{2I_0}{\pi}$ è il valore medio su mezzo periodo.

7. a) F: la funzione è illimitata in 0, interno all'intervallo, e $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge; l'integrale diverge (un integrale di una funzione positiva non può essere negativo). b) V: vale $\lim_{t\to+\infty}(1 - e^{-t}) = 1$. c) V: è il principio di Cavalieri, che con il metodo delle sezioni diventa un teorema. d) F: approssima per eccesso se il grafico volge la concavità verso l'alto, per difetto se la volge verso il basso. e) F: coincidono solo se la velocità non cambia segno; in generale la distanza percorsa è $\int |v(t)|\,dt$.

8. a) $2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$. b) derivata; $4\pi r^2$. c) $\frac{1}{\lambda}$. d) $\frac{1}{2}$; 1.

9. a) $\pi\int_0^3 x^2\,dx = 9\pi \approx 28{,}27$ (è il cono di raggio 3 e altezza 3). b) $\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \approx 10{,}04$. c) $\pi\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\,dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$, con $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

10. a) $\pi\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}$. b) $\pi\int_{-3}^3 (9 - x^2)\,dx = 36\pi$: è la sfera di raggio 3, $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$. c) $\pi\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{28\pi}{15}$.

11. Le curve si incontrano in $x = 0$ e $x = 1$, e su $[0; 1]$ è $x^2 \le x$. a) $\pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{2\pi}{15}$. b) La striscia verticale è alta $x - x^2$: $2\pi\int_0^1 x(x - x^2)\,dx = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$.

12. La regione è $0 \le x \le \sqrt[3]{y}$, $0 \le y \le 8$ (la curva incontra $y = 8$ in $x = 2$). Invertendo: $\pi\int_0^8 y^{2/3}\,dy = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 8^{5/3} = \frac{96\pi}{5}$. Con i gusci, la striscia verticale è alta $8 - x^3$: $2\pi\int_0^2 x(8 - x^3)\,dx = 2\pi(16 - \frac{32}{5}) = \frac{96\pi}{5} \approx 60{,}3$.

13. La parabola è non negativa su $[0; 3]$: $V = 2\pi\int_0^3 x \cdot x(3 - x)\,dx = 2\pi[x^3 - \frac{x^4}{4}]_0^3 = 2\pi(27 - \frac{81}{4}) = \frac{27\pi}{2} \approx 42{,}4$.

14. La corda del cerchio nel punto x è lunga $2\sqrt{4 - x^2}$. a) $S(x) = 4(4 - x^2)$, $V = \int_{-2}^2 4(4 - x^2)\,dx = 4 \cdot \frac{32}{3} = \frac{128}{3} \approx 42{,}7$. b) Il triangolo equilatero di lato ℓ ha area $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 = \sqrt{3}(4 - x^2)$, quindi $V = \sqrt{3} \cdot \frac{32}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \approx 18{,}5$.

15. a) Converge: $\frac{1}{2}$ ($p = 3$). b) Converge: $\frac{1}{2}$ ($\lambda = 2$). c) Converge: $\lim_{t\to0^+}(2\sqrt{4} - 2\sqrt{t}) = 4$. d) Diverge: $\lim_{t\to+\infty}(2\sqrt{t} - 2) = +\infty$ ($p = \frac{1}{2} \le 1$).

16. a) Per parti, $\int_0^t xe^{-x}\,dx = [-(x + 1)e^{-x}]_0^t = 1 - (t + 1)e^{-t} \to 1$: converge a 1. b) Spezzando in 0: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \text{arctg}\, t = \frac{\pi}{2}$, e per simmetria anche l'altro; converge a π. c) Per parti, $\int_t^1 \ln x\,dx = [x \ln x - x]_t^1 = -1 - t \ln t + t \to -1$ (perché

$t \ln t \to 0$): converge a −1. d) La funzione è illimitata in $x = 1$, interno all'intervallo;
$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-}(\frac{1}{1-t} - 1) = +\infty$: diverge.

17. Area: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}) = \frac{1}{2}$. Volume: $\pi \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \pi \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{\pi}{24}$.

18. $h = 0{,}25$; ordinate 1; 0,8; 0,666667; 0,571429; 0,5. $T_4 = 0{,}25(\frac{1 + 0{,}5}{2} + 0{,}8 + 0{,}666667 + 0{,}571429) \approx$ 0,697024, mentre $\ln 2 \approx 0{,}693147$: l'errore è circa +0,0039. La funzione $\frac{1}{x}$ ha derivata seconda $\frac{2}{x^3} > 0$: il grafico volge la concavità verso l'alto, ogni corda sta sopra l'arco e i trapezi approssimano per eccesso.

19. Mettiamo il centro della sfera nell'origine: la sfera è generata da $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, e il segmento di altezza h corrisponde a $R - h \le x \le R$. $V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi[R^2 h - \frac{R^3 - (R-h)^3}{3}] = \pi[R^2 h - (R^2 h - Rh^2 + \frac{h^3}{3})] = \pi(Rh^2 - \frac{h^3}{3}) = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$. c.v.d.

20. Spezziamo in 1: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, e l'integrale converge solo se convergono entrambi. Il primo converge solo per $p < 1$, il secondo solo per $p > 1$: le due condizioni non sono mai vere insieme. (Per $p \le 0$ la funzione è limitata vicino a 0 e il primo converge, ma il secondo diverge.)

21. Ha usato il quadrato della differenza invece della differenza dei quadrati. Il suo integrale è il volume del solido generato dalla rotazione della regione sotto il grafico di $y = \sqrt{x} - x^2$, una figura diversa: $\pi \int_0^1 (x - 2x^{5/2} + x^4)\,dx = \pi(\frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{1}{5}) = \frac{9\pi}{70} \approx$ 0,404. Il volume corretto è $\pi \int_0^1 (x - x^4)\,dx = \frac{3\pi}{10} \approx$ 0,942.

22. Dall'equazione, $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ per $-a \le x \le a$. $V = \pi \int_{-a}^{a} b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})\,dx = \pi b^2(2a - \frac{2a}{3}) = \frac{4}{3}\pi a b^2$. Per $a = b$ si ottiene la sfera, $\frac{4}{3}\pi b^3$. Stirando la sfera di raggio b del fattore $\frac{a}{b}$ lungo l'asse x, la sezione dell'ellissoide nel punto x è uguale alla sezione della sfera nel punto $\frac{b}{a}x$: le fette hanno le stesse aree ma spessori moltiplicati per $\frac{a}{b}$, quindi il volume si moltiplica per $\frac{a}{b}$: $\frac{4}{3}\pi b^3 \cdot \frac{a}{b} = \frac{4}{3}\pi a b^2$.

23. a) All'altezza y la sezione è un cerchio di raggio x con $x^2 = 4y$: $V(h) = \pi \int_0^h 4y\,dy = 2\pi h^2$ cm^3. b) $V(9) = 162\pi \approx 508{,}9$ cm^3. c) $2\pi h^2 = 81\pi$, $h^2 = 40{,}5$, $h = \frac{9}{\sqrt{2}} \approx$ 6,36 cm: ben più della metà dell'altezza, perché la ciotola si allarga verso l'alto.

24. $W = \int_{0{,}03}^{0{,}08} 400x\,dx = 200(0{,}08^2 - 0{,}03^2) =$ $200 \cdot 0{,}0055 = 1{,}1$ J. È l'area del trapezio sotto la retta $F = 400x$ fra $x = 0{,}03$ m ($F = 12$ N) e $x = 0{,}08$ m ($F = 32$ N): $\frac{12 + 32}{2} \cdot 0{,}05 = 1{,}1$ J.

25. Lavoro del gas: $W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} =$ $2 \cdot 8{,}314 \cdot 350 \cdot \ln \frac{1}{3} \approx -6{,}39 \cdot 10^3$ J. È negativo perché il gas viene compresso; l'ambiente compie sul gas il lavoro $+6{,}39 \cdot 10^3$ J.

26. $v(t) = 3t(2 - t)$ è positiva su]0; 2[e negativa su]2; 3[. Spostamento: $\int_0^3 (6t - 3t^2)\,dt = [3t^2 - t^3]_0^3 = 0$. Distanza: $\int_0^2 v\,dt = 4$ e $\int_2^3 v\,dt = -4$, quindi $4 + 4 = 8$ m. Il punto avanza di 4 m fino a $t = 2$ s, poi torna indietro di 4 m e all'istante 3 s è di nuovo nella posizione di partenza.

27. $m = \int_0^2 (3 - \frac{x}{2})\,dx = 6 - 1 = 5$ kg; densità media $\frac{5}{2} = 2{,}5$ kg/m. $\int_0^2 x(3 - \frac{x}{2})\,dx = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$, quindi $x_G = \frac{14}{15} \approx 0{,}93$ m: meno della metà dell'asta, dalla parte dove è più densa.

28. Valore esatto: $4[\text{arctg}\,x]_0^1 = \pi$. $T_{10} \approx 3{,}139926$, errore $\approx -1{,}67 \cdot 10^{-3}$; $T_{100} \approx 3{,}141576$, errore

$\approx -1{,}67 \cdot 10^{-5}$. Moltiplicando n per 10 l'errore si divide per 100, come previsto da un errore proporzionale a h^2.

29. $V_x = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x^2}\,dx = \pi\sqrt{\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^{3/2} \approx 1{,}969$.
Con i gusci: $V_y = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,dx =$
$2\pi \lim_{t\to+\infty} [-\frac{1}{2} e^{-x^2}]_0^{\,t} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$.

30. $V(a) = \pi \int_0^{a} e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a})$. Da
$\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{\pi}{4}$ segue $e^{-2a} = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}347$.
Per $a \to +\infty$, $V \to \frac{\pi}{2}$: il solido illimitato ha volume $\frac{\pi}{2}$.

31. Sia r il raggio: il cilindro ha altezza $2r$ e volume $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$. La sfera, generata da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, ha volume $\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi r^3$, e $\frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{2}{3}$. La superficie sferica è $V'(r) = 4\pi r^2$ (oppure, con la formula delle superfici di rotazione, $2\pi \int_{-r}^{r} r\,dx$); la superficie laterale del cilindro è $2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$: sono uguali.

32. Con $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, e gli estremi diventano $\ln 2$ e $+\infty$: l'integrale è $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$. Poiché $\ln 2 > 0$, la funzione t^{-a} è continua su $[\ln 2; +\infty[$ e, come nel teorema sugli integrali impropri, l'integrale converge se e solo se $a > 1$ (per $a = 1$ si ottiene $\ln t \to +\infty$, per $a < 1$ $t^{1-a} \to +\infty$). Per $a = 2$: $\lim_{s\to+\infty} [-\frac{1}{t}]_{\ln 2}^{\,s} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443$.

33. Su $[0; 1]$ è $x^2 \le \sqrt{x}$, e il diametro della sezione è $d = \sqrt{x} - x^2$; il semicerchio ha area $\frac{1}{2}\pi(\frac{d}{2})^2 = \frac{\pi}{8}d^2$. $V = \frac{\pi}{8}\int_0^1 (x - 2x^{5/2} + x^4)\,dx =$
$\frac{\pi}{8}(\frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{1}{5}) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{9}{70} = \frac{9\pi}{560} \approx 0{,}0505$.

34. a) $f_a(0) = 0$ e $f_a(x) > 0$ per $x > 0$. Per $x > 0$, $f_a'(x) = e^{-ax}(\frac{1}{2\sqrt{x}} - a\sqrt{x}) = \frac{e^{-ax}(1 - 2ax)}{2\sqrt{x}}$: f_a cresce su $[0; \frac{1}{2a}]$ e decresce su $[\frac{1}{2a}; +\infty[$; inoltre $f_a'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ (tangente verticale nell'origine). Il massimo è in $x = \frac{1}{2a}$ e vale $\sqrt{\frac{1}{2a}}\, e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2ae}}$. Per $x \to +\infty$ l'esponenziale prevale e $f_a(x) \to 0$: l'asse x è asintoto orizzontale.

b) Il solido ha sezione di area $\pi[f_a(x)]^2 = \pi x\, e^{-2ax}$. Per parti: $\int_0^t x\, e^{-2ax}\,dx = [-\frac{x}{2a} e^{-2ax}]_0^{\,t} + \frac{1}{2a}\int_0^t e^{-2ax}\,dx =$
$-\frac{t}{2a} e^{-2at} + \frac{1 - e^{-2at}}{4a^2}$. Per $t \to +\infty$ il primo termine tende a 0 e il secondo a $\frac{1}{4a^2}$: l'integrale converge e $V(a) = \frac{\pi}{4a^2}$.

c) $\frac{\pi}{4a^2} = \pi$ se e solo se $a^2 = \frac{1}{4}$, cioè $a = \frac{1}{2}$ (accettabile perché positivo).

d) Con $a = \frac{1}{2}$: $\pi \int_0^2 x\, e^{-x}\,dx = \pi[-(x + 1)e^{-x}]_0^{\,2} =$
$\pi(1 - 3e^{-2}) \approx 0{,}594\pi \approx 1{,}87$. È circa il 59,4% del volume totale π: più della metà del solido infinitamente lungo sta nel tratto fra 0 e 2.