CAPITOLO

10

L'integrale definito

Sommare infinite strisce sottilissime sembra un lavoro senza fine; il teorema fondamentale lo riduce a una sottrazione.

OBIETTIVI

1. Approssimare l'area di un trapezoide con somme inferiori e superiori e calcolarne il limite in casi semplici.
2. Definire l'integrale definito con le somme di Riemann e interpretarlo come area con segno.
3. Enunciare e usare le proprietà dell'integrale; dimostrare il teorema della media e interpretare il valore medio.
4. Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale e calcolare integrali con la formula di Newton–Leibniz, anche per sostituzione e per parti.
5. Calcolare aree di regioni delimitate da curve, ritrovando i risultati di Archimede sulla parabola e l'area dell'ellisse.
6. Studiare una funzione integrale a partire dal grafico della funzione integranda.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Il problema delle aree 2
10.2 L'integrale definito 6
10.3 Le proprietà dell'integrale definito 10
10.4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale 13
10.5 Il calcolo delle aree 17
10.6 Lo studio delle funzioni integrali 22

Matematica 5 · Parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali · versione 1.0
Capitolo 10: L'integrale definito · pagine 279–308 del volume completo · estratto per lo studio

Un'automobile accelera lungo un rettilineo e il tachimetro registra, istante per istante, la sua velocità. Quanta strada ha percorso in un minuto? Se la velocità fosse costante basterebbe moltiplicarla per il tempo: nel grafico velocità–tempo sarebbe l'area di un rettangolo. Ma la velocità cambia di continuo, e il grafico è una curva. Un geometra deve misurare un terreno delimitato da un fiume dalla riva irregolare; un ingegnere deve calcolare la portata d'acqua che attraversa una sezione di un canale; un medico vuole sapere quanto farmaco è passato nel sangue in un'ora. Sono tutti, in fondo, lo stesso problema: calcolare l'*area* di una regione delimitata da una curva.

Il problema è antichissimo: Archimede lo risolse per la parabola più di duemila anni fa, con un ragionamento ingegnoso che però valeva solo per quella curva. In questo capitolo costruiamo uno strumento generale, l'*integrale definito*: si approssima la regione con molti rettangoli sottili e si passa al limite, come nel capitolo 1 si passava al limite in una successione. Poi arriva la sorpresa che dà il nome a tutto il calcolo infinitesimale: l'area sotto una curva e le primitive del capitolo 9 sono legate da un teorema, il *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Grazie a esso un'area che richiederebbe infinite somme si calcola con una sottrazione.

Nell'ultima parte del capitolo useremo l'integrale per calcolare aree di regioni piane, ritrovando i risultati di Archimede sulla parabola e l'area dell'ellisse, e studieremo le *funzioni integrali*, che compaiono spesso nella seconda prova dell'esame di Stato. Le applicazioni a volumi, lavoro e fenomeni fisici sono l'argomento del capitolo 11.

10.1 Il problema delle aree

10.1.1 Il trapezoide

Sia f una funzione continua e non negativa su un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. La regione del piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$ si chiama **trapezoide** di f su $[a; b]$ (Figura 10.1). Il nome ricorda il trapezio rettangolo, che è il trapezoide di una funzione lineare; quando il «lato obliquo» è una curva, nessuna formula della geometria elementare ne dà l'area.

L'idea per misurarlo è la stessa che hai usato per la lunghezza della circonferenza e per l'area del cerchio: si approssima la figura con figure di cui si sa calcolare l'area, sempre più numerose e sottili, e si studia che cosa succede al limite. Dividiamo $[a; b]$ in n intervalli di uguale ampiezza

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, \qquad \text{con i punti di suddivisione } x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Sopra ciascun intervallo $[x_{k-1}; x_k]$ costruiamo un rettangolo di base Δx e altezza uguale a un valore di f nell'intervallo, per esempio $f(\xi_k)$ con ξ_k scelto fra x_{k-1} e x_k. L'area di questo rettangolo, $f(\xi_k)\Delta x$, approssima l'area della «striscia» di trapezoide sopra lo stesso intervallo, e tanto meglio quanto più l'intervallo è stretto, perché una funzione continua su un intervallo piccolo varia poco.

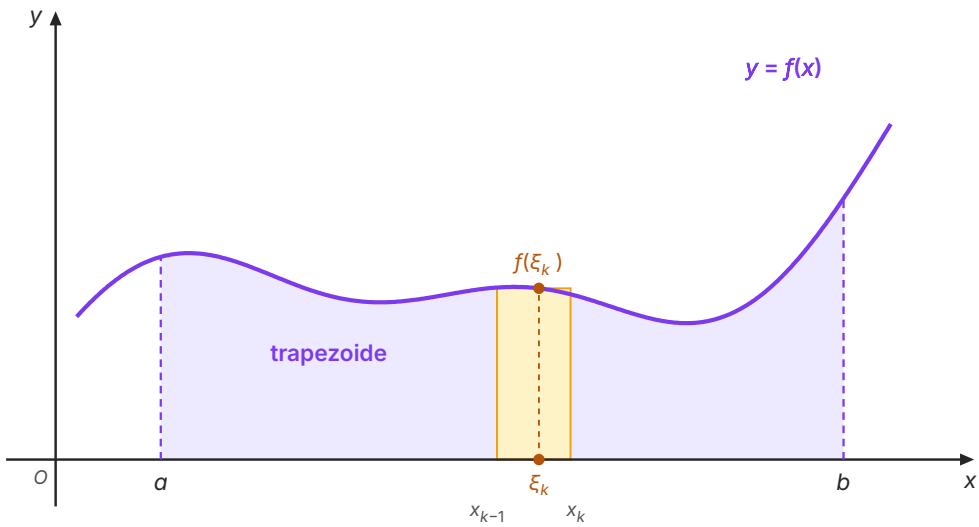


Figura 10.1 Il trapezoide della funzione continua e non negativa $y = f(x)$ sull'intervallo $[a; b]$ (in viola). Il rettangolo arancio ha per base l'intervallo $[x_{k-1}; x_k]$, di ampiezza Δx, e per altezza il valore $f(\xi_k)$ in un punto ξ_k dell'intervallo: la sua area $f(\xi_k)\Delta x$ approssima quella della striscia di trapezoide sopra lo stesso intervallo.

10.1.2 Somme inferiori e somme superiori

Per avere un'approssimazione per difetto e una per eccesso scegliamo l'altezza in modo particolare. Poiché f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[x_{k-1}; x_k]$, per il teorema di Weierstrass (capitolo 4) vi assume un valore minimo m_k e un valore massimo M_k. Le somme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \quad \text{e} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x$$

si chiamano **somma inferiore** e **somma superiore** di f relative alla suddivisione in n parti. I rettangoli della somma inferiore stanno tutti dentro il trapezoide, quelli della somma superiore lo ricoprono: se il trapezoide ha un'area A, deve essere $s_n \le A \le S_n$ per ogni n. Se al crescere di n le due successioni (s_n) e (S_n) convergono allo stesso limite, quel limite è l'unico numero compreso fra tutte le somme inferiori e tutte le superiori, e lo prendiamo come *definizione* dell'area del trapezoide.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola le somme inferiori e superiori di $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0; 1]$ con n rettangoli uguali e studiane il limite.

Soluzione. Qui $\Delta x = \frac{1}{n}$ e $x_k = \frac{k}{n}$. La funzione è crescente su $[0; 1]$, quindi su ogni intervallo $[x_{k-1}; x_k]$ il minimo è nell'estremo sinistro e il massimo nell'estremo destro: $m_k = \frac{(k-1)^2}{n^2}$, $M_k = \frac{k^2}{n^2}$. La somma superiore è

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

dove abbiamo usato la formula della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, dimostrata per induzione in *Matematica 3*. Nella somma inferiore gli addendi sono gli stessi, ma l'indice si ferma a $n - 1$ (il primo rettangolo ha altezza 0):

$$s_n = \frac{1}{n^3}(0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

Per $n = 5$ si ottiene $s_5 = 0{,}24$ e $S_5 = 0{,}44$; per $n = 10$, $s_{10} = 0{,}285$ e $S_{10} = 0{,}385$ (Figura 10.2). Il numeratore e il denominatore sono polinomi di secondo grado in n, quindi entrambe le successioni hanno limite uguale al rapporto dei coefficienti direttivi:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Il trapezoide di $y = x^2$ su $[0; 1]$ ha dunque area $\frac{1}{3}$: un terzo del quadrato di lato 1. Osserva anche che $S_n - s_n = \frac{1}{n}$: è l'area del rettangolo più alto, perché ogni rettangolo superiore coincide con il rettangolo inferiore successivo. La differenza tende a zero, e questo garantisce che le due successioni si «stringano» sullo stesso numero.

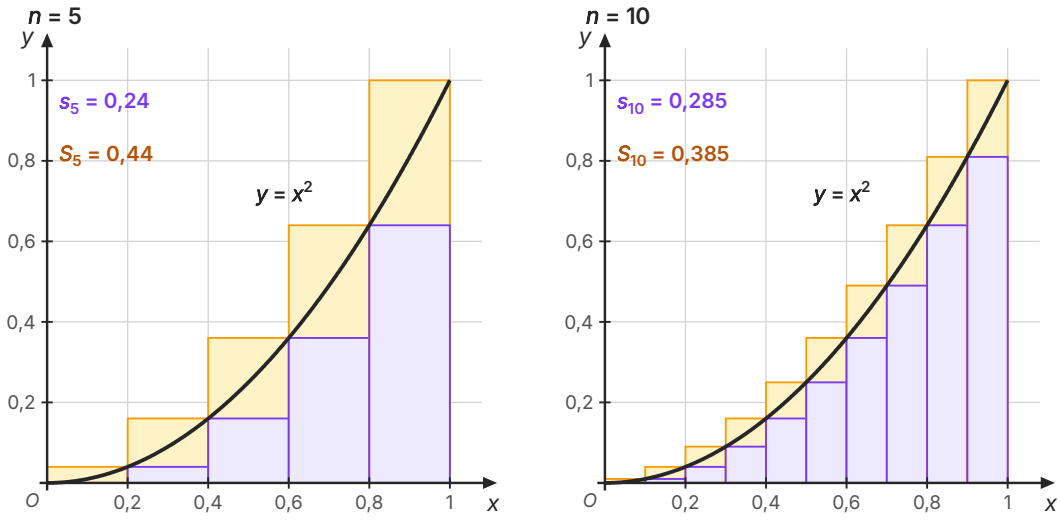


Figura 10.2 Somme inferiori (rettangoli viola) e superiori (i rettangoli viola insieme alle parti arancio) di $y = x^2$ su $[0; 1]$, con $n = 5$ e $n = 10$ rettangoli. Raddoppiando n la differenza $S_n - s_n = \frac{1}{n}$, cioè l'area complessiva delle parti arancio, si dimezza; entrambe le somme tendono a $\frac{1}{3}$.

10.1.3 Con il computer: le somme nel foglio di calcolo

Per $y = x^2$ abbiamo trovato una formula chiusa delle somme, ma per la maggior parte delle funzioni non ce n'è una: le somme si calcolano numericamente. In un foglio di calcolo scrivi n in una cella e, in una colonna, i valori $k = 1, 2, \ldots, n$; nella colonna accanto calcola l'area del k-esimo rettangolo superiore, $(k/n)^2 \cdot (1/n)$, e in un'altra quella del rettangolo inferiore, $((k-1)/n)^2 \cdot (1/n)$; infine somma le due colonne. Con $n = 1000$ servono mille righe, che il foglio riempie trascinando la prima. La Tabella 10.1 riporta i risultati.

Tabella 10.1 Somme inferiori e superiori di $y = x^2$ su $[0; 1]$ con n rettangoli uguali. La loro differenza è esattamente $\frac{1}{n}$ ed entrambe si avvicinano a $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$

n	s_n	S_n	$S_n - s_n$
5	0,24	0,44	0,2
10	0,285	0,385	0,1
100	0,32835	0,33835	0,01
1000	0,3328335	0,3338335	0,001

La convergenza è lenta: per avere tre cifre decimali esatte servono circa mille rettangoli. Nel capitolo 11 vedremo metodi numerici molto più efficienti, come il metodo dei trapezi; ma per le funzioni che hanno una primitiva nota il teorema fondamentale, più avanti in questo capitolo, renderà inutile ogni somma.

APPROFONDIMENTO · ARCHIMEDE E LA QUADRATURA DELLA PARABOLA

Nel trattato *Quadratura della parabola* Archimede di Siracusa (III secolo a.C.) dimostrò che un *segmento parabolico*, la regione delimitata da una parabola e da una sua corda, ha area uguale ai $\frac{4}{3}$ del triangolo che ha per base la corda e per vertice il punto della parabola in cui la tangente è parallela alla corda. Il suo metodo, detto in seguito *metodo di esaustione*, riempiva il segmento con triangoli: al primo triangolo se ne aggiungono due, inscritti nei due segmenti rimasti, la cui area totale è un quarto della prima; poi quattro, con area totale un quarto della precedente, e così via. L'area del segmento risulta allora la somma $T(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots)$, che oggi scriviamo come serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ e somma $\frac{4}{3}T$.

Archimede non usava il limite: dimostrava che l'area non può essere né maggiore né minore di $\frac{4}{3}T$, con una doppia riduzione all'assurdo. Fra qualche pagina ritroveremo il suo risultato con l'integrale, in poche righe.

10.2 L'integrale definito

10.2.1 Le somme di Riemann

Nella costruzione del paragrafo precedente non c'è niente che richieda $f \geq 0$: le somme hanno senso per qualsiasi funzione limitata, anche quando non rappresentano un'area. Inoltre non è necessario scegliere proprio il minimo o il massimo: possiamo prendere in ogni intervallo $[x_{k-1}; x_k]$ un punto ξ_k qualsiasi e formare la **somma di Riemann**

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x = [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$$

Se f è continua, $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ e quindi $s_n \leq R_n \leq S_n$ per ogni scelta dei punti: quando le somme inferiori e superiori hanno lo stesso limite, per il teorema del confronto anche ogni successione di somme di Riemann tende a quel limite.

IN SINTESI

Integrale definito. Sia f una funzione limitata sull'intervallo $[a; b]$, con $a < b$. Si dice che f è **integrabile** su $[a; b]$ se, al tendere di n a $+\infty$, le somme di Riemann R_n tendono a uno stesso limite finito comunque si scelgano i punti ξ_k. Quel limite si chiama **integrale definito** di f da a a b e si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x.$$

Se f è continua e non negativa, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è l'area del trapezoide di f su $[a; b]$.

I numeri a e b sono gli **estremi di integrazione** (inferiore e superiore), f è la *funzione integranda* (capitolo 9). Il simbolo, introdotto da Leibniz, racconta la costruzione: $\int$ è una S allungata, l'iniziale di *summa*, e $\mathrm{d}x$ ricorda l'ampiezza Δx dei rettangoli, diventata «infinitamente piccola». La lettera x è una **variabile muta**: l'integrale è un *numero*, che dipende da f, da a e da b ma non dal nome della variabile, per cui $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$. È lo stesso ruolo dell'indice k in una sommatoria.

La definizione con suddivisioni in parti uguali è sufficiente per le funzioni che studieremo. In un corso universitario si usano suddivisioni qualsiasi, con intervalli di ampiezze diverse che tendono tutte a zero; per le funzioni continue il risultato è lo stesso.

10.2.2 Quali funzioni sono integrabili

Non è facile dimostrare che le somme inferiori e superiori di una funzione continua qualsiasi si avvicinano fra loro: per x^2 lo abbiamo verificato con un calcolo esplicito, ma in generale serve una proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso, la continuità uniforme, che va oltre il nostro programma. Enunciamo il risultato senza dimostrazione.

IN SINTESI

Teorema (integrabilità delle funzioni continue). Ipotesi: f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. **Tesi:** f è integrabile su $[a; b]$. Sono integrabili anche le funzioni limitate su $[a; b]$ che hanno un numero finito di punti di discontinuità.

La seconda parte dell'enunciato dice che un salto non disturba l'integrale. Consideriamo per esempio la funzione che vale 1 per $0 \le x \le 1$ e 2 per $1 < x \le 2$: ha una discontinuità di prima specie in $x = 1$, ma il suo grafico delimita con l'asse x due rettangoli, e il suo integrale su $[0; 2]$ è $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$. Nelle somme di Riemann solo il rettangolo che contiene il punto di salto «sbaglia», e la sua area tende a zero con Δx. Per la stessa ragione, cambiare il valore di una funzione in un numero finito di punti non cambia il suo integrale.

APPROFONDIMENTO · UNA FUNZIONE NON INTEGRABILE

Nel capitolo 4 abbiamo incontrato la funzione di Dirichlet, che vale 1 nei numeri razionali e 0 negli irrazionali ed è discontinua in ogni punto: in ogni intervallo, per piccolo che sia, cadono sia numeri razionali sia numeri irrazionali (*Matematica 3*). Su [0; 1], quindi, ogni intervallo $[x_{k-1}; x_k]$ contiene punti in cui la funzione vale 0 e punti in cui vale 1: scegliendo tutti i ξ_k razionali si ottiene $R_n = 1$ per ogni n, scegliendoli tutti irrazionali $R_n = 0$. Le somme di Riemann non hanno un unico limite e la funzione non è integrabile, benché sia limitata.

Esempi come questo spinsero a precisare che cosa si intende per area e per integrale: la definizione che usiamo è dovuta a Bernhard Riemann, nell'Ottocento; nel Novecento Henri Lebesgue ne ha data una più generale, per la quale la funzione di Dirichlet è integrabile con integrale 0.

10.2.3 L'integrale come area con segno

Se f è continua e $f(x) \leq 0$ su $[a; b]$, ogni prodotto $f(\xi_k)\Delta x$ è negativo o nullo e l'integrale è l'*opposto* dell'area della regione compresa fra il grafico e l'asse x, che ora sta sotto l'asse. Quando f cambia segno, le parti sopra l'asse contano positivamente, quelle sotto negativamente: l'integrale è un'**area con segno**.

Nella Figura 10.3 la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ è negativa su $]0; 2[$ e positiva su $]2; 3]$. Calcoleremo con il teorema fondamentale che le due regioni hanno la stessa area $\frac{4}{3}$: perciò $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$, mentre l'area complessiva della regione colorata è $\frac{8}{3}$.

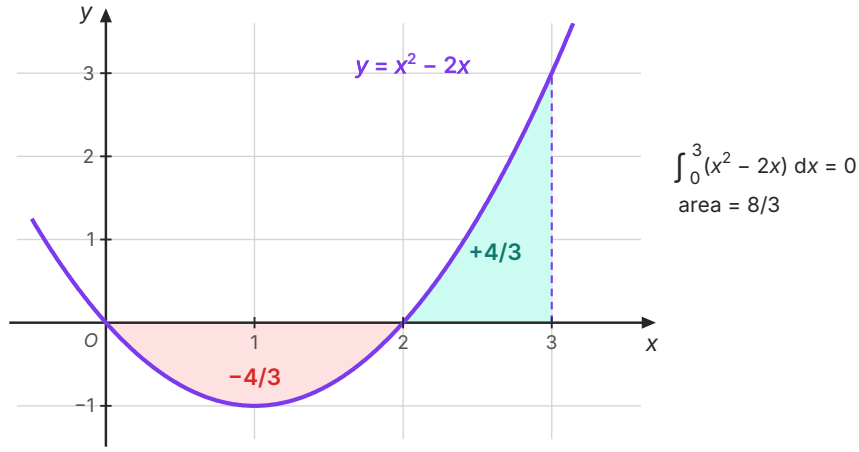


Figura 10.3 L'integrale come area con segno. Su $[0; 3]$ la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ delimita con l'asse x una regione sotto l'asse (rossa), che conta $-\frac{4}{3}$, e una sopra l'asse (verde), che conta $+\frac{4}{3}$. L'integrale è 0, l'area della regione colorata $\frac{8}{3}$. Le unità sui due assi hanno lunghezze diverse.

Finora $a < b$. Conviene definire l'integrale anche quando gli estremi sono uguali o «scambiati»:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

La prima convenzione dice che un trapezoide di base nulla ha area nulla. La seconda si giustifica con le somme di Riemann: percorrendo l'intervallo da b verso a, l'ampiezza $\Delta x = \frac{a-b}{n}$ è negativa e ogni addendo cambia segno. Con queste convenzioni le proprietà che seguono valgono in qualunque ordine siano gli estremi.

ERRORE FREQUENTE

Confondere l'integrale con l'area. $\int_a^b f(x)\,dx$ è un'area solo se $f \geq 0$ su $[a; b]$. Se f cambia segno, le parti sotto l'asse si sottraggono: $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$, ma la regione fra la sinusoide e l'asse x su $[0; 2\pi]$ ha area 4. Per un'area bisogna prima studiare il segno di f e spezzare l'intervallo nei suoi zeri, come vedremo nel calcolo delle aree.

Confondere un numero con una funzione. $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero: non dipende da x, che è una variabile muta. Invece $\int_a^x f(t)\,dt$, con l'estremo superiore variabile, è una funzione di x, la funzione integrale che studieremo fra poco. Scrivere $\int_a^x f(x)\,dx$, con la stessa lettera per l'estremo e per la variabile di integrazione, è un errore di notazione che genera confusione.

10.3 Le proprietà dell'integrale definito

10.3.1 Linearità, additività, confronto

Dalle somme di Riemann discendono, passando al limite, le proprietà fondamentali dell'integrale. Se nelle somme sostituiamo f con $f+g$, ogni somma si spezza in due; se moltiplichiamo f per una costante k, ogni somma si moltiplica per k; se $f(x) \le g(x)$ in ogni punto, ogni somma di f è minore o uguale alla corrispondente somma di g, e la disuguaglianza si conserva al limite (capitolo 1, permanenza del segno).

IN SINTESI

Proprietà dell'integrale definito. Siano f e g integrabili su un intervallo che contiene i punti a, b, c, e sia k un numero reale.

- **Linearità:** $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ e $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.
- **Additività rispetto all'intervallo:** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, comunque siano ordinati a, b, c.
- **Confronto:** se $a < b$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a;\,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. In particolare, se $f \ge 0$ su $[a;\,b]$, il suo integrale è ≥ 0.
- **Valore assoluto:** se $a < b$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

L'**additività** rispetto all'intervallo, per $a < c < b$ e $f \ge 0$, dice che il trapezoide su $[a;\,b]$ è l'unione dei trapezoidi su $[a;\,c]$ e su $[c;\,b]$; grazie alle convenzioni sugli estremi scambiati vale anche quando c è fuori da $[a;\,b]$. L'ultima proprietà segue dal **confronto**: da $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ si ha $-\int_a^b |f|\,dx \le \int_a^b f\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$, che è la tesi. Il significato è chiaro pensando all'area con segno: nell'integrale di f le parti sotto l'asse si sottraggono, in quello di $|f|$ si sommano.

Il confronto è utile anche per *stimare* integrali che non si sanno calcolare. Per esempio, su $[0;\,1]$ si ha $0 \le x^3 \le 1$, quindi $1 \le \sqrt{1+x^3} \le \sqrt{2}$; integrando da 0 a 1 si ottiene $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \le \sqrt{2} \approx 1{,}414$. Un calcolo numerico dà 1,111..., che sta davvero nell'intervallo.

10.3.2 Il teorema della media

La media aritmetica di n numeri è la loro somma divisa per n. Che cosa vuol dire «valore medio» di una funzione che assume infiniti valori, per esempio la temperatura media di una giornata? Se prendiamo i valori $f(\xi_1)$, ..., $f(\xi_n)$ in n punti equidistanti, la loro media è

$$\frac{f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\,\Sigma_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\cdot R_n$$

e per $n \to +\infty$ tende a $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Questo numero si chiama **valore medio** di f su $[a; b]$. Il teorema seguente dice che una funzione continua assume davvero il suo valore medio in almeno un punto.

IN SINTESI

Teorema della media integrale. Ipotesi: f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, con $a < b$. **Tesi:** esiste almeno un punto $c \in [a; b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Dimostrazione. Poiché f è continua su $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass ha un minimo m e un massimo M: $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a; b]$. Per la proprietà di confronto, integrando i tre membri,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a), \quad \text{cioè} \quad m \le \mu \le M, \quad \text{con } \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Il numero μ è compreso fra il minimo e il massimo di f. Per il teorema dei valori intermedi (capitolo 4), una funzione continua su un intervallo chiuso assume tutti i valori compresi fra il suo minimo e il suo massimo: esiste quindi $c \in [a; b]$ con $f(c) = \mu$. Moltiplicando per $b - a$ si ottiene la tesi. c.v.d.

Geometricamente, se $f \ge 0$, il teorema dice che esiste un rettangolo di base $[a; b]$ e altezza $f(c)$ che ha la stessa area del trapezoide: le parti del trapezoide che sporgono sopra il rettangolo compensano esattamente quelle del rettangolo che restano scoperte. Entrambe le ipotesi servono: Weierstrass e i valori intermedi richiedono un intervallo chiuso e la continuità. Una funzione a gradini che vale 1 su $[0; 1]$ e 3 su $]1; 2]$ ha valore medio 2 su $[0; 2]$, ma non assume mai il valore 2.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola il valore medio di $f(x) = \sqrt{x}$ su $[0; 4]$ e trova il punto c del teorema della media, sapendo che $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{16}{3}$ (lo verificheremo con il teorema fondamentale).

Soluzione. Il valore medio è $\mu = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$. Il punto c si trova risolvendo $\sqrt{c} = \frac{4}{3}$, cioè $c = \frac{16}{9} \approx 1{,}78$, che appartiene a $[0; 4]$ (Figura 10.4). Osserva che c non è il punto medio dell'intervallo: la funzione cresce rapidamente vicino a 0 e poi lentamente, e il suo valore medio $\frac{4}{3}$ è maggiore della media $\frac{0+2}{2} = 1$ fra il valore minimo e il valore massimo.

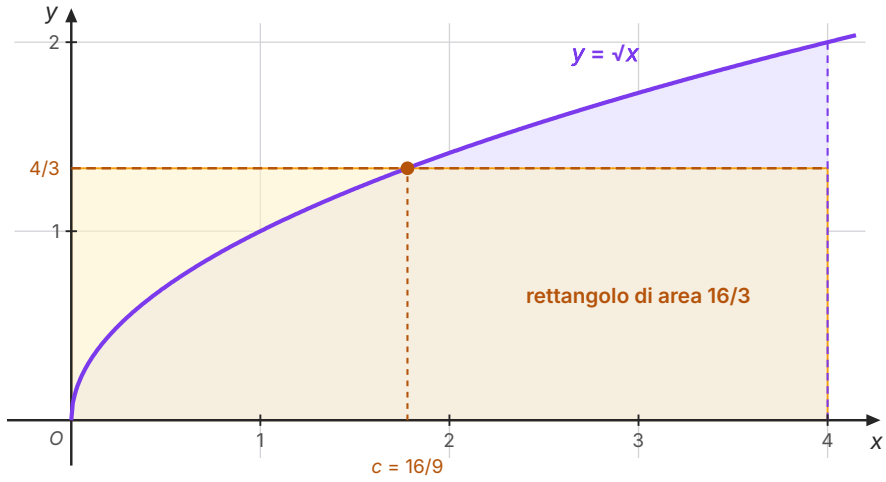


Figura 10.4 Il teorema della media per $f(x) = \sqrt{x}$ su $[0; 4]$. Il rettangolo arancio, di base 4 e altezza uguale al valore medio $\frac{4}{3}$, ha la stessa area $\frac{16}{3}$ del trapezoide viola. La funzione assume il valore medio nel punto $c = \frac{16}{9}$. Stessa unità sui due assi.

COLLEGAMENTI

Fisica: la velocità media. Un punto si muove lungo una retta con velocità $v(t)$ e posizione $s(t)$, con $s'(t) = v(t)$. Con il teorema fondamentale vedremo che $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$, lo spostamento. Il valore medio di v su $[t_1; t_2]$ è allora $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$: la velocità media della cinematica è il valore medio della velocità istantanea. Il teorema della media integrale, applicato a v, e il teorema di Lagrange, applicato a s (capitolo 6), dicono la stessa cosa: c'è un istante in cui la velocità istantanea è uguale a quella media.

Meteorologia. Un modello (dati inventati) descrive la temperatura di una giornata primaverile, fra le 6 e le 18, con $T(t) = 12 + 8 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$ gradi Celsius, dove t è il tempo in ore dalle 6. La temperatura media è $\frac{1}{12}\int_0^{12} T(t)\,dt = 12 + \frac{16}{\pi} \approx 17{,}1$ °C: più alta della media 16 °C fra la minima (12 °C, alle 6 e alle 18) e la massima (20 °C, a mezzogiorno), perché la temperatura resta a lungo vicina al massimo.

10.4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

10.4.1 La funzione integrale

Fissiamo una funzione f continua su un intervallo I e un punto $a \in I$, e lasciamo variare l'estremo superiore. A ogni $x \in I$ associamo il numero

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La funzione F si chiama **funzione integrale** di f di punto iniziale a. Per non confondere l'estremo variabile con la variabile di integrazione, quest'ultima è indicata con un'altra lettera, qui t. Se $f \geq 0$ e $x > a$, $F(x)$ è l'area del trapezoide da a fino a x: una «finestra» che si allarga quando x si sposta verso destra. Sempre $F(a) = 0$.

Facciamo un esempio in cui l'area si calcola con la geometria elementare. Se $f(t) = t$ e $a = 0$, per $x > 0$ il trapezoide è un triangolo rettangolo isoscele di cateti x, e $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$; la stessa formula vale per $x < 0$ (il triangolo sta sotto l'asse, ma anche gli estremi sono scambiati). Ora deriviamo: $F'(x) = x = f(x)$. La funzione integrale di f è una primitiva di f. Non è un caso.

10.4.2 Il teorema di Torricelli–Barrow

> **IN SINTESI**
>
> **Teorema fondamentale del calcolo integrale.** **Ipotesi:** f è continua sull'intervallo I, $a \in I$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. **Tesi:** F è derivabile in ogni punto di I e $F'(x) = f(x)$.
>
> In parole: la funzione integrale di una funzione continua è una sua primitiva.

Dimostrazione. Sia $x \in I$ e sia $h \neq 0$ tale che $x + h \in I$. Per l'additività dell'integrale,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Per il teorema della media, applicato all'intervallo di estremi x e $x + h$ (se $h < 0$ si scambiano gli estremi e i segni si compensano), esiste un punto c_h compreso fra x e $x + h$ tale che $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_h) \cdot h$. Il rapporto incrementale di F è quindi

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h).$$

Quando $h \to 0$, il punto c_h, che sta fra x e $x + h$, tende a x per il teorema del confronto; poiché f è continua in x, $f(c_h) \to f(x)$. Il limite del rapporto incrementale esiste ed è $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$. c.v.d.

Il teorema ha una conseguenza che il capitolo 9 aveva lasciato in sospeso: **ogni funzione continua su un intervallo ha una primitiva**, anche quando questa non si può scrivere con le funzioni elementari. Per esempio $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ è una primitiva di e^{-x^2}, che studieremo alla fine del capitolo. La continuità di f è essenziale: per la funzione che vale -1 per $t < 0$ e 1 per $t \geq 0$, la funzione integrale $\int_0^x f(t)\,dt = |x|$ è continua ma non è derivabile in 0.

10.4.3 La formula di Newton–Leibniz

Ora possiamo calcolare gli integrali definiti senza somme. Sia G una qualsiasi primitiva di f, continua su $[a; b]$. Anche $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva, e due primitive della stessa funzione su un intervallo differiscono per una costante (capitolo 9, conseguenza del teorema di Lagrange): $G(x) = F(x) + k$. Allora

$$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - 0.$$

IN SINTESI

Formula di Newton–Leibniz. Se f è continua su $[a; b]$ e G è una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Il risultato non dipende dalla primitiva scelta: la costante $+c$ si elimina nella differenza.

Con la **formula di Newton–Leibniz** l'area sotto la parabola, che ci era costata una formula di induzione e un limite, si trova in una riga: una primitiva di x^2 è $\frac{x^3}{3}$, quindi $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Allo stesso modo $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$, come promesso, e $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$, come nella Figura 10.3.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)dx$; b) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$, e interpreta il risultato b come un'area.

Soluzione. a) Una primitiva è $\frac{x^3}{3} + \ln|x|$; su $[1; 2]$ il valore assoluto si può omettere. Quindi $\left[\frac{x^3}{3} + \ln x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} + 0\right) = \frac{7}{3} + \ln 2 \approx 3{,}03$.

b) Una primitiva di $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$: $[-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$. Poiché $\operatorname{sen} x \geq 0$ su $[0; \pi]$, l'integrale è l'area della regione sotto un arco di sinusoide: esattamente 2, un numero intero, anche se la curva non ha niente di «squadrato».

DA RICORDARE

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ con f continua: 1) trova una primitiva G (capitolo 9), senza la costante; 2) scrivi $[G(x)]_a^b$; 3) calcola $G(b) - G(a)$, con le parentesi: il segno meno si applica a tutto $G(a)$. Controlla il risultato con il segno di f: se $f > 0$ su $]a; b[$ e $a < b$, l'integrale deve essere positivo.

10.4.4 Funzioni integrali con estremi variabili

Spesso l'estremo superiore non è x ma una funzione di x, per esempio $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$. Detta $F(u) = \int_a^u f(t)\,dt$, si ha $G(x) = F(g(x))$: una funzione composta. Per la regola di derivazione delle funzioni composte (capitolo 5) e per il teorema fondamentale, se f è continua e g derivabile,

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Se anche l'estremo inferiore varia, si spezza l'integrale in un punto fisso a: $\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$, e la derivata è $f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$. Per esempio, per $x > 0$, la derivata di $\int_1^{x^2} \ln t\,dt$ è $\ln(x^2) \cdot 2x = 4x \ln x$: non serve calcolare l'integrale.

10.4.5 Sostituzione e integrazione per parti negli integrali definiti

Le due tecniche del capitolo 9 si trasportano agli integrali definiti attraverso la formula di Newton–Leibniz. Nell'**integrazione per parti** basta valutare fra gli estremi anche il termine «già integrato»:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Nell'**integrazione per sostituzione** $x = \varphi(t)$, con φ derivabile e con derivata continua, si cambiano anche gli estremi: se t va da α a β, x va da $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$, e

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

La dimostrazione è breve: se G è una primitiva di f, per la regola della funzione composta $G(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, e i due membri valgono entrambi $G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))$. Cambiando gli estremi non serve tornare alla variabile x.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$.

Soluzione. a) Poniamo $t = \sqrt{x}$, cioè $x = t^2$ con $t \geq 0$, da cui $dx = 2t\,dt$. Per $x = 0$ si ha $t = 0$, per $x = 4$ si ha $t = 2$. Allora

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = [2t - 2\ln(1+t)]_0^2 = 4 - 2\ln 3 \approx 1{,}80.$$

Controllo di plausibilità: su $[0; 4]$ la funzione integranda è compresa fra $\frac{1}{3}$ e 1, quindi per il confronto l'integrale sta fra $\frac{4}{3}$ e 4; il risultato 1,80 è in questo intervallo.

b) Per parti, con $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$, cioè $g(x) = -\cos x$:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = (\pi - 0) + [\operatorname{sen} x]_0^{\pi} = \pi.$$

ERRORE FREQUENTE

Sostituire senza cambiare gli estremi. Nell'esempio a) qui sopra, scrivere $\int_0^4 \frac{2t}{1+t}\,dt$, con gli estremi della vecchia variabile, dà $8 - 2\ln 5 \approx 4{,}78$, un numero sbagliato e perfino maggiore della stima superiore 4. Dopo una sostituzione ci sono due strade corrette: cambiare gli estremi, come abbiamo fatto, oppure trovare la primitiva, tornare alla variabile x e usare gli estremi originali. Mescolare le due è un errore.

APPROFONDIMENTO · TORRICELLI, BARROW, NEWTON E LEIBNIZ

Nella prima metà del Seicento le aree si calcolavano con il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri (*Matematica 4*), che considerava una figura come formata da infinite linee parallele e un solido da infinite sezioni piane, e con metodi ad hoc per singole curve. Le tangenti erano un problema diverso, con metodi propri. Evangelista Torricelli, allievo di Galileo, e l'inglese Isaac Barrow, maestro di Newton a Cambridge, si accorsero, in casi particolari e in forma geometrica, che i due problemi sono l'uno l'inverso dell'altro: per questo in Italia il teorema fondamentale porta spesso il nome di *teorema di Torricelli–Barrow*.

Furono Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, indipendentemente l'uno dall'altro, a trasformare questa osservazione in un metodo generale: calcolare un'area significa trovare una funzione di cui si conosce la derivata. Newton ragionava in termini di grandezze che variano nel tempo, le «flussioni»; Leibniz inventò le notazioni dx e $\int$ che usiamo ancora, e pubblicò il suo calcolo differenziale negli *Acta Eruditorum* del 1684. La questione di chi fosse arrivato prima divise per decenni i matematici inglesi da quelli del continente.

10.5 Il calcolo delle aree

10.5.1 Area fra una curva e l'asse x

Per calcolare l'area della regione compresa fra il grafico di una funzione continua f, l'asse x e le rette $x = a$, $x = b$ (con $a < b$) bisogna integrare $|f|$, non f. In pratica: si trovano gli zeri di f in $[a; b]$, si studia il segno di f negli intervalli che essi determinano, si integra f dove è positiva e $-f$ dove è negativa, e si sommano i risultati. Per $f(x) = x^2 - 2x$ su $[0; 3]$ (Figura 10.3) lo zero interno è $x = 2$:

$$\text{area} = \int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

10.5.2 Area fra due curve

Siano f e g continue su $[a; b]$, con $f(x) \le g(x)$. Se entrambe sono positive, la regione compresa fra i due grafici è il trapezoide di g privato di quello di f, e la sua area è $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$. La formula resta vera anche se i grafici scendono sotto l'asse x: traslando entrambe le curve verso l'alto di una stessa quantità q la regione si sposta senza deformarsi, e la differenza $(g + q) - (f + q) = g - f$ non cambia.

IN SINTESI

Area fra due curve. Se f e g sono continue su $[a; b]$, l'area della regione compresa fra i loro grafici e le rette $x = a$, $x = b$ è

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

che, se $f(x) \le g(x)$ su tutto $[a; b]$, diventa $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$: la curva «sopra» meno la curva «sotto». Se le curve si incrociano, si spezza l'intervallo nei punti di intersezione.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola l'area della regione finita delimitata dalla parabola $y = -x^2 + 4x$ e dalla retta $y = x$.

Soluzione. Prima le intersezioni: $-x^2 + 4x = x$ equivale a $x^2 - 3x = 0$, cioè $x = 0$ oppure $x = 3$. I punti comuni sono $O(0; 0)$ e $A(3; 3)$. In un punto interno, per esempio $x = 1$, la parabola vale 3 e la retta 1: su $[0; 3]$ la parabola sta sopra la retta (Figura 10.5). Quindi

$$A = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - x]\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

Non abbiamo avuto bisogno di sapere dove la regione taglia l'asse x: conta solo quale curva sta sopra l'altra.

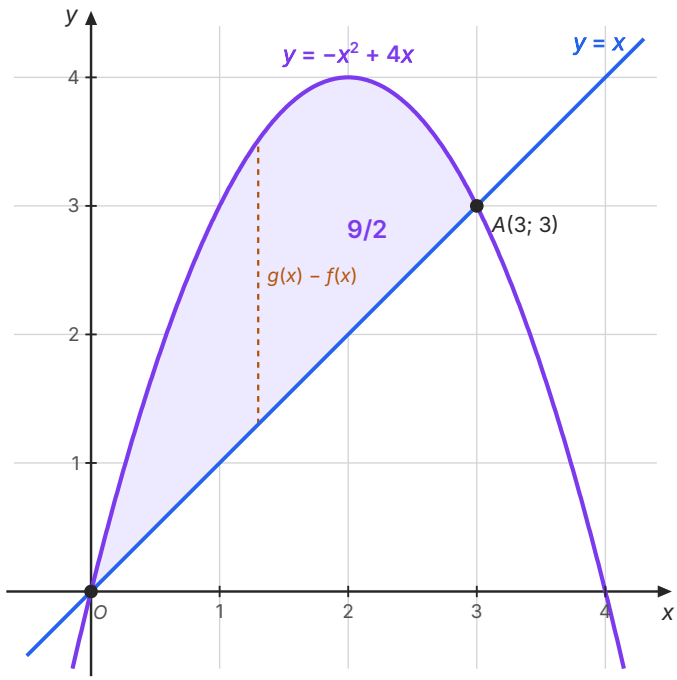


Figura 10.5 La regione delimitata dalla parabola $y = -x^2 + 4x$ e dalla retta $y = x$, che si incontrano in $O(0; 0)$ e $A(3; 3)$. In ogni striscia verticale l'altezza è la differenza $g(x) - f(x)$ fra la curva superiore e quella inferiore; l'area è $\frac{9}{2}$. Stessa unità sui due assi.

Lo stesso metodo vale per le regioni delimitate da una curva e da una sua tangente. La tangente a $y = x^2$ nel punto $(1; 1)$ è $y = 2x - 1$; la regione compresa fra la parabola, la tangente e l'asse y ha

area $\int_0^1 [x^2 - (2x-1)]\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = [\frac{(x-1)^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$. Una parabola con $a > 0$ sta sempre sopra le sue tangenti (volge la concavità verso l'alto), e la differenza è un quadrato.

10.5.3 Il segmento parabolico e l'ellisse

Ritroviamo il teorema di Archimede su un esempio. La parabola $y = x^2$ e la retta $y = x + 2$ si incontrano in $A(-1;\,1)$ e $B(2;\,4)$, e su $[-1;\,2]$ la retta sta sopra la parabola. Il **segmento parabolico**, la regione compresa fra la parabola e la corda AB, ha area

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = [\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = \frac{9}{2}.$$

Il punto della parabola in cui la tangente è parallela alla corda AB (che ha pendenza 1) si trova imponendo $2x = 1$: è $V(\frac{1}{2};\,\frac{1}{4})$. L'area del triangolo ABV si calcola con le coordinate (*Matematica 3*): $\frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_V - y_A) - (x_V - x_A)(y_B - y_A)| = \frac{1}{2}|3 \cdot (-\frac{3}{4}) - \frac{3}{2} \cdot 3| = \frac{27}{8}$. Il rapporto è $\frac{9}{2} : \frac{27}{8} = \frac{4}{3}$, esattamente come aveva dimostrato Archimede (Figura 10.6). In generale, se la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e una retta si incontrano nei punti di ascisse $x_1 < x_2$, l'area del segmento parabolico è $\frac{|a|(x_2 - x_1)^3}{6}$ (lo dimostrerai negli esercizi): qui $\frac{1 \cdot 3^3}{6} = \frac{9}{2}$.

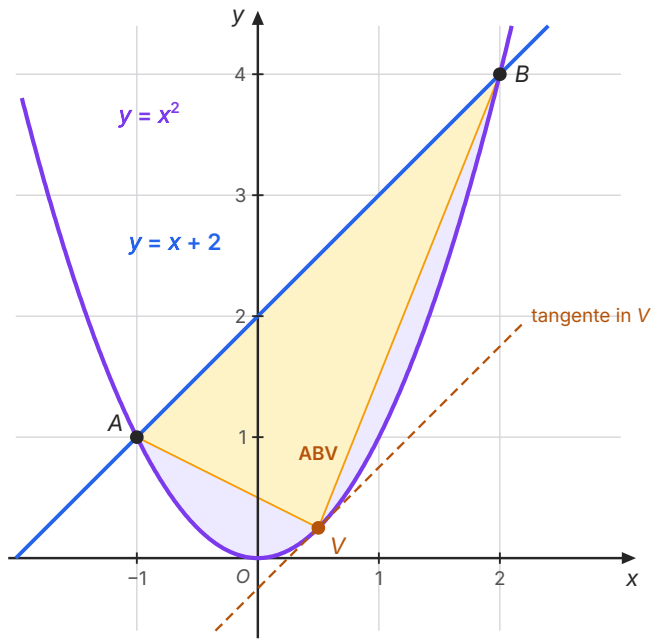


Figura 10.6 Il segmento parabolico delimitato da $y = x^2$ e dalla retta $y = x + 2$ (viola), di area $\frac{9}{2}$, e il triangolo inscritto ABV (arancio), di area $\frac{27}{8}$. In $V(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ la tangente alla parabola (tratteggiata) è parallela alla corda AB. Il rapporto fra le due aree è $\frac{4}{3}$, come nel teorema di Archimede. Stessa unità sui due assi.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, delimita una regione di area πab.

Soluzione. L'ellisse è simmetrica rispetto ai due assi, quindi la sua area è quattro volte quella della parte nel primo quadrante, che è il trapezoide della funzione $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ su $[0; a]$. Allora

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

L'integrale rimasto non richiede una primitiva: il grafico di $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ su $[0; a]$ è un quarto della circonferenza di centro O e raggio a, e l'integrale è l'area del quarto di cerchio, $\frac{\pi a^2}{4}$. Quindi $A = \frac{4b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$. Per $a = b = r$ si ritrova l'area del cerchio πr^2. È il risultato che in *Matematica 3* avevamo ottenuto «schiacciando» il cerchio con una dilatazione; qui l'integrale lo rende evidente: ogni ordinata del cerchio di raggio a è moltiplicata per $\frac{b}{a}$, e così l'area.

10.5.4 Simmetrie: funzioni pari e dispari

Se l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la parità della funzione semplifica il calcolo. Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y, quello di una funzione dispari rispetto all'origine: nel secondo caso le aree con segno a destra e a sinistra dell'asse y sono uguali e opposte.

IN SINTESI

Integrali su intervalli simmetrici. Sia f continua su $[-a; a]$. Se f è pari, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$; se f è dispari, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Dimostrazione (caso pari). Per l'additività, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. Nel primo integrale poniamo $x = -t$, $dx = -dt$; per $x = -a$ è $t = a$, per $x = 0$ è $t = 0$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)(-1)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $f(-t) = f(t)$. Sommando i due integrali si ottiene la tesi. c.v.d. Il caso dispari si dimostra allo stesso modo (lo vedrai negli esercizi). Così, senza calcoli, $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = 0$, perché $x^2 \operatorname{sen} x$ è dispari, e $\int_{-2}^{2} (x^4 + 1)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} + x\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{5} + 2\right) = \frac{84}{5}$.

10.6 Lo studio delle funzioni integrali

10.6.1 Dal grafico di f al grafico di F

Nella seconda prova compare spesso una funzione definita da un integrale, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, di cui si chiede di studiare il grafico, a volte senza conoscere un'espressione di F ma solo il grafico di f. Il teorema fondamentale traduce le proprietà di f in proprietà di F:

- $F(a) = 0$, e F è continua (anzi derivabile) dove f è continua;
- $F' = f$: dove $f > 0$ la funzione F è crescente, dove $f < 0$ è decrescente;
- dove f si annulla cambiando segno da positivo a negativo, F ha un massimo relativo; da negativo a positivo, un minimo relativo;
- $F'' = f'$: dove f cresce, F volge la concavità verso l'alto; dove f decresce, verso il basso; nei punti di massimo o di minimo di f il grafico di F ha un flesso;
- $F(x)$ è l'area con segno fra a e x: le aree sopra e sotto l'asse si leggono sul grafico di f.

Prendiamo $f(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (Figura 10.7). La funzione f è positiva fuori da $[1; 3]$ e negativa all'interno: F cresce fino a $x = 1$, dove ha un massimo, decresce fino a $x = 3$, dove ha un minimo, e poi cresce di nuovo. La funzione f decresce per $t < 2$ e cresce per $t > 2$: F ha la concavità verso il basso a sinistra di 2 e verso l'alto a destra, con un flesso in $x = 2$. I valori si leggono come aree: $F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{4}{3}$ è l'area verde, e da 1 a 3 si sottrae l'area rossa, che vale anch'essa $\frac{4}{3}$, per cui $F(3) = 0$. Il calcolo esplicito conferma tutto: $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, con $F(1) = \frac{4}{3}$, $F(2) = \frac{2}{3}$, $F(3) = 0$.

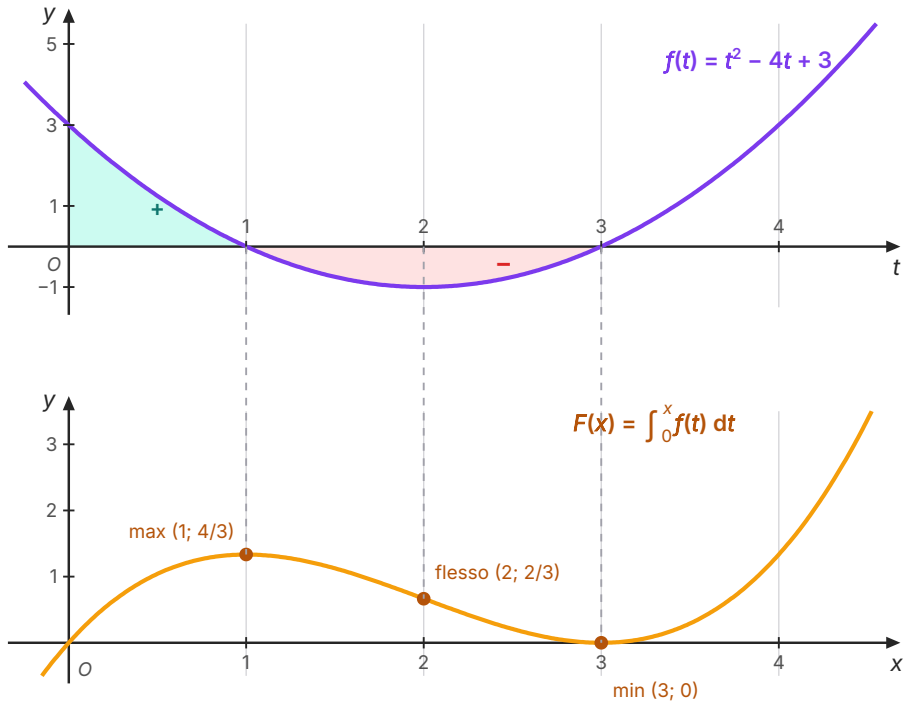


Figura 10.7 In alto la funzione $f(t) = t^2 - 4t + 3$, in basso la sua funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, sulla stessa scala orizzontale. Gli zeri di f ($t = 1$ e $t = 3$) sono il massimo e il minimo di F; il minimo di f ($t = 2$) è il flesso di F. L'area verde ($\frac{4}{3}$) e l'area rossa ($\frac{4}{3}$) si compensano, quindi $F(3) = 0$. Le scale verticali dei due grafici sono diverse.

10.6.2 Una funzione senza primitiva elementare

La funzione e^{-x^2} è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi ha primitive; si dimostra però che nessuna di esse si può scrivere combinando un numero finito di funzioni elementari (capitolo 9). Il metodo appena visto permette di studiarne una lo stesso. La funzione e^{-x^2} è la «curva a campana» che, opportunamente trasformata, descrive la distribuzione normale delle probabilità (capitolo 16).

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Quesito. Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. a) Stabilisci il dominio di F e se F è pari o dispari. b) Studia la monotonia di F. c) Studia la concavità di F e scrivi la retta tangente al suo grafico nell'origine. d) Dimostra che F è limitata e che ha due asintoti orizzontali.

Soluzione. a) La funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$, quindi F è definita per ogni x reale e, per il teorema fondamentale, $F'(x) = e^{-x^2}$. L'integranda è pari: come per le funzioni pari e dispari, con la sostituzione $t = -u$ si ha $F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt = -\int_0^x e^{-u^2}\,du = -F(x)$. Dunque F è dispari, e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

b) $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ per ogni x: F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Poiché $F(0) = 0$, F è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$.

c) $F''(x) = -2x\,e^{-x^2}$, positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$: il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso per $x > 0$, e l'origine è un punto di flesso. Poiché $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$, la tangente inflessionale è $y = x$.

d) Per $t \geq 1$ si ha $t^2 \geq t$ e quindi $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Per $x > 1$, per l'additività e il confronto,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq 1 + \int_1^x e^{-t}\,dt = 1 + e^{-1} - e^{-x} < 1 + \frac{1}{e},$$

dove abbiamo maggiorato il primo integrale con 1, perché $e^{-t^2} \leq 1$. Dunque F è crescente e limitata superiormente, e, per la completezza di $\mathbb{R}$, come nel teorema delle successioni monotone (capitolo 1), esiste finito $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$, con $0 < \ell \leq 1 + \frac{1}{e}$. Per la simmetria, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\ell$: le rette $y = \pm\,\ell$ sono asintoti orizzontali. Si dimostra, con strumenti che vanno oltre il programma, che $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}886$ (Figura 10.8).

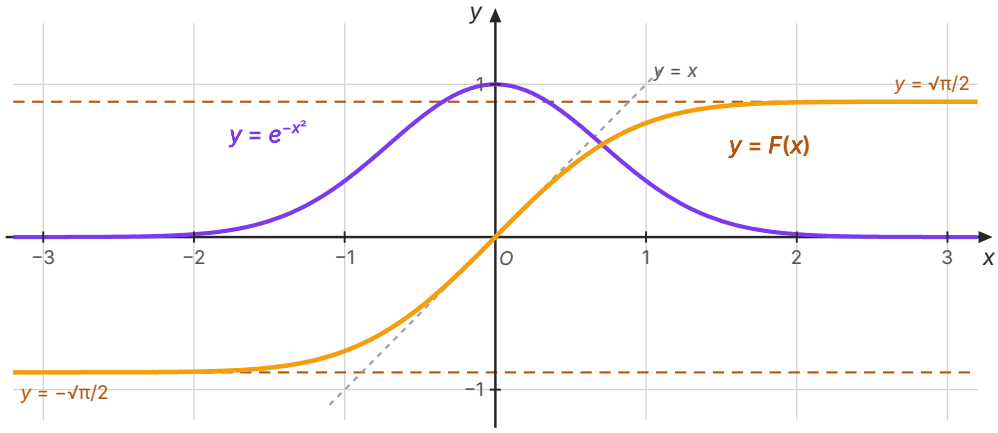


Figura 10.8 La curva a campana $y = e^{-x^2}$ (viola) e la sua funzione integrale $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ (arancio). F è dispari e crescente, ha un flesso nell'origine con tangente $y = x$ (grigia, tratteggiata) e tende a $\pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \approx \pm\,0{,}886$ per $x \to \pm\infty$ (asintoti tratteggiati). Stessa unità sui due assi.

Il valore $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ è sorprendente: π, il numero del cerchio, compare nell'area sotto una curva che con il cerchio non sembra avere nulla in comune. È anche il motivo per cui la costante $\sqrt{2\pi}$ compare nella formula della distribuzione normale. I valori di F non si possono calcolare con la formula di Newton–Leibniz e si ottengono numericamente: per esempio $F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \approx 0{,}7468$, che nel capitolo 11 approssimeremo con il metodo dei trapezi.

SINTESI

- Il **trapezoide** di una funzione continua $f \geq 0$ su $[a; b]$ si approssima con **somme inferiori** s_n e **superiori** S_n; per $y = x^2$ su $[0; 1]$ entrambe tendono a $\frac{1}{3}$.
- Una **somma di Riemann** è $R_n = \sum f(\xi_k)\Delta x$, con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e ξ_k qualsiasi in ogni intervallo; se tutte le somme hanno lo stesso limite, f è **integrabile** e il limite è $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili, e così quelle limitate con un numero finito di discontinuità; la funzione di Dirichlet non lo è.
- L'integrale è un'**area con segno**: le parti sotto l'asse x contano negativamente. Per convenzione $\int_a^a f = 0$ e $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
- Proprietà: linearità, additività rispetto all'intervallo, confronto, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ (con $a < b$).
- **Teorema della media**: se f è continua su $[a; b]$, esiste $c \in [a; b]$ con $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$; $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ è il **valore medio** di f.
- **Teorema fondamentale**: se f è continua, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile e $F' = f$; ogni funzione continua su un intervallo ha una primitiva.
- **Formula di Newton–Leibniz**: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ per ogni primitiva G di f. Nelle sostituzioni si cambiano gli estremi.
- $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x)$.
- L'area fra due curve è $\int_a^b |g - f|\,dx$: si trovano le intersezioni e si integra la curva superiore meno quella inferiore. Il segmento parabolico vale $\frac{4}{3}$ del triangolo inscritto; l'ellisse ha area πab.
- Su $[-a; a]$ l'integrale di una funzione dispari è 0, quello di una pari è il doppio dell'integrale su $[0; a]$.
- Per studiare $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$: segno di f → monotonia di F; zeri di f con cambio di segno → estremi di F; monotonia di f → concavità di F.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● L'integrale $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ vale:

   A. 8

   B. 0

   C. 4

   D. 16

2. ● Se $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$, allora $F'(e)$ vale:

   A. 0

   B. e

   C. 1

   D. $\frac{1}{e}$

3. ● Il valore medio di $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0; 3]$ è:

   A. 3

   B. 9

   C. 4,5

   D. 1

4. ●● Sia f continua con $\int_0^5 f(x)\,dx = 7$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$. Allora $\int_2^5 f(x)\,dx$ vale:

   A. 10

   B. -4

   C. $\frac{7}{3}$

   D. 4

5. ●● La derivata della funzione $G(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è:

   A. e^{-x^4}

   B. $2x\, e^{-x^2}$

   C. $2x\, e^{-x^4}$

   D. e^{-x^2}

6. ●● Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni funzione f continua su $[a; b]$, con $a < b$?

   A. $\int_a^b |f(x)|\,dx \le \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

   B. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

   C. $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

   D. $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$

7. ●● La somma superiore di $f(x) = x^2$ su $[0; 1]$ con $n = 4$ rettangoli uguali è:

   A. $\frac{15}{32}$

   B. $\frac{7}{32}$

   C. $\frac{1}{3}$

   D. $\frac{1}{4}$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
a) Se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a; b]$.
b) $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero, mentre $\int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione di x.
c) Ogni funzione integrabile su $[a; b]$ è continua su $[a; b]$.
d) Se $a < b$ e $f(x) \le g(x)$ su $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
e) $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(u)\,du$.

9. ● Completa: «Se f è continua su $[a; b]$, esiste un punto $c \in$ _____ tale che $\int_a^b f(x)\,dx =$ _____. Il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ si chiama _____ di f su $[a; b]$; per dimostrare il teorema si usano il teorema di _____ e il teorema dei _____.»

Calcolare

10. ● Calcola: a) $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$; b) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$; c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; d) $\int_0^1 e^x\,dx$.

11. ● Calcola: a) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$; c) $\int_{-1}^1 (x^5 - 3x^3 + x)\,dx$; d) $\int_{-2}^2 (x^2 + 1)\,dx$.

12. ●● Calcola, con una sostituzione o riconoscendo una forma immediata generalizzata: a) $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$; b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$; c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$; d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

13. ●● Calcola per parti: a) $\int_0^1 x\,e^x\,dx$; b) $\int_0^{\pi/2} x \cos x\,dx$; c) $\int_1^e x \ln x\,dx$.

14. ●● Calcola: a) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$; c) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

15. ●● Calcola l'area: a) della regione delimitata dalla parabola $y = 4 - x^2$ e dall'asse x; b) della regione delimitata da $y = x^2$ e $y = 2x$; c) della regione finita delimitata dai grafici di $y = x^3$ e $y = x$.

16. ●● Calcola $\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$ e l'area della regione compresa fra il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e l'asse x sull'intervallo $[0; \frac{3}{2}\pi]$. Spiega perché i due numeri sono diversi.

17. ●● Calcola l'area della regione delimitata dal grafico di $y = e^x$, dalla sua tangente nel punto di ascissa 0 e dalla retta $x = 1$.

18. ●● Calcola il valore medio di $f(x) = 3x^2 - 2x$ su $[0; 2]$ e trova i punti $c \in [0; 2]$ in cui f assume tale valore.

19. ●● Calcola la derivata delle funzioni: a) $F(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^3}\,dt$, e il valore $F'(2)$; b) $G(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\,dt$; c) $H(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$; d) $K(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, per $x > 0$.

20. ●●● Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$.

Dimostrare e argomentare

21. ● Dimostra che, se f è continua e dispari su $[-a; a]$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

22. ●● Sia f continua su $\mathbb{R}$ e $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$. Dimostra che, se $f > 0$, F è crescente; spiega perché, se f cambia segno in x_0 passando da positiva a negativa, F ha un massimo relativo in x_0.

23. ●● Trova l'errore: «$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$.»

24. ●● Usando il confronto, dimostra che $1 \le \int_{0}^{1} e^{x^2}\,dx \le e$. Poi, sapendo che $e^u \ge 1 + u$ per ogni u, migliora la stima inferiore.

25. ●●● Dimostra che, se la parabola $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) e una retta si incontrano nei punti di ascisse $x_1 < x_2$, l'area del segmento parabolico è $\frac{|a|(x_2 - x_1)^3}{6}$.

26. ●● Sia $f(t) = -1$ per $t < 0$ e $f(t) = 1$ per $t \ge 0$. Calcola $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ e spiega perché questo esempio non contraddice il teorema fondamentale.

Problemi

27. ●● In una giornata estiva la temperatura di una città fra le 8 e le 20 è descritta (dati inventati) da $T(t) = 14 + 6 \operatorname{sen} \frac{\pi(t - 8)}{12}$ gradi Celsius, con t l'ora del giorno. Calcola la temperatura media fra le 8 e le 20 e confrontala con la media fra la temperatura minima e la massima dello stesso intervallo.

28. ●● Un ciclista parte da fermo e la sua velocità, in m/s, nei primi 6 secondi è $v(t) = 6t - t^2$ (dati inventati). Calcola la velocità media nei 6 secondi e gli istanti in cui la velocità istantanea è uguale a quella media.

29. ●● Un'azienda produce q unità di un bene; il costo marginale, cioè la derivata del costo totale, è $C'(q) = 0{,}03q^2 - 1{,}2q + 20$ euro per unità (dati inventati). Di quanto aumenta il costo totale quando la produzione passa da 10 a 30 unità?

30. ●●● La regione R è delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 4$. Calcola l'area di R e determina k in modo che la retta $y = k$ divida R in due parti di uguale area.

Con il computer

31. ●● Con un foglio di calcolo costruisci le somme inferiori e superiori di $f(x) = x^3$ su $[0; 1]$ con $n = 10$, 100 e 1000 rettangoli uguali. Verso quale valore tendono? Verifica la congettura con la formula di Newton–Leibniz.

Verso l'esame

32. ●● Determina il valore del parametro $k > 0$ per cui la regione delimitata dalla parabola $y = kx - x^2$ e dall'asse x ha area 36.

33. ●● Data $F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3)e^t \, dt$, determina senza calcolare l'integrale i punti di massimo e di minimo relativo e le ascisse dei punti di flesso di F.

34. ●●● Calcola l'area della regione finita del primo quadrante delimitata dal ramo dell'iperbole equilatera $xy = 4$ e dalla retta $x + y = 5$.

35. ●●● Sia f continua su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo T. Dimostra che $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ non dipende da a.

36. ●●● **Problema.** Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = x^3 - ax$, con $a > 0$.
a) Determina a in modo che la regione finita delimitata dal grafico di f_a e dal semiasse positivo delle x abbia area 4.
b) Posto $a = 4$, cioè $f(x) = x^3 - 4x$, scrivi l'equazione della retta t tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1 e calcola l'area della regione delimitata dal grafico di f e dalla retta t.
c) Sia $F(x) = \int_0^x (t^3 - 4t)\,dt$. Determina gli zeri, i punti di massimo e di minimo relativo e le ascisse dei flessi di F.
d) Calcola il valore medio di $f(x) = x^3 - 4x$ sull'intervallo $[0; 2]$ e spiega perché esistono almeno un punto, anzi due, in $]0; 2[$ in cui f assume tale valore; approssimali al centesimo.

PER APPROFONDIRE

- [SPI] Spivak, *Calculus*: la definizione dell'integrale con le somme inferiori e superiori, la dimostrazione che le funzioni continue sono integrabili e il teorema fondamentale in tutto il suo rigore.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: un'introduzione all'integrale che parte, come il nostro capitolo, dalle aree e dal metodo di esaustione di Archimede.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul calcolo infinitesimale, con il teorema fondamentale presentato come idea centrale di tutta l'analisi.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Archimede, Cavalieri, Torricelli, Barrow, e la nascita del calcolo con Newton e Leibniz.

Glossario del capitolo

Additività rispetto all'intervallo
Proprietà dell'integrale: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ per ogni terna di punti a, b, c dell'intervallo in cui f è integrabile.

Area con segno
Significato geometrico dell'integrale definito di una funzione continua: le parti della regione fra il grafico e l'asse x che stanno sopra l'asse contano positivamente, quelle sotto negativamente.

Estremi di integrazione
I numeri a (estremo inferiore) e b (estremo superiore) nell'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Formula di Newton–Leibniz
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$, dove G è una qualsiasi primitiva della funzione continua f; si scrive anche $[G(x)]_a^b$.

Funzione integrabile
Funzione limitata su $[a; b]$ le cui somme di Riemann tendono, per $n \to +\infty$, a uno stesso limite finito comunque si scelgano i punti ξ_k. Sono integrabili le funzioni continue e quelle limitate con un numero finito di discontinuità.

Funzione integrale
Data f continua su un intervallo e un punto a di esso, la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Integrale definito
Il limite delle somme di Riemann di una funzione integrabile su $[a; b]$, indicato con $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; per f continua e non negativa è l'area del trapezoide.

Segmento parabolico
Regione delimitata da una parabola e da una sua corda; la sua area è $\frac{4}{3}$ di quella del triangolo inscritto con vertice nel punto in cui la tangente è parallela alla corda (Archimede).

Somma di Riemann
Somma $\Sigma_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$, con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e ξ_k un punto qualsiasi del k-esimo intervallo della suddivisione di $[a; b]$.

Somma inferiore, somma superiore
Le somme di Riemann in cui l'altezza di ogni rettangolo è il minimo, rispettivamente il massimo, di f nell'intervallo corrispondente.

Teorema della media integrale
Se f è continua su $[a; b]$, esiste $c \in [a; b]$ tale che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a)$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale
Detto anche di Torricelli–Barrow: se f è continua su un intervallo, la sua funzione integrale è derivabile e ha derivata f; dunque ogni funzione continua su un intervallo ha una primitiva.

Trapezoide
Regione del piano compresa fra il grafico di una funzione continua e non negativa su $[a; b]$, l'asse x e le rette $x = a$, $x = b$.

Valore medio
Di una funzione integrabile su $[a; b]$: il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Variabile muta
La variabile di integrazione: si può indicare con qualsiasi lettera senza cambiare il valore dell'integrale definito.

Soluzioni

1. B. La funzione x^3 è dispari e l'intervallo è simmetrico: l'integrale è 0. Con la formula: $[\frac{x^4}{4}]_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$.

2. C. Per il teorema fondamentale $F'(x) = \ln x$, quindi $F'(e) = \ln e = 1$.

3. A. $\frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot [\frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$.

4. D. Per l'additività $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f$, quindi $\int_2^5 f = 7 - 3 = 4$.

5. C. Per la regola con l'estremo variabile, $G'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2x\,e^{-x^4}$.

6. B. È la proprietà del valore assoluto. A è falsa (per esempio $f(x) = x$ su $[-1; 1]$: $1 \le 0$ è falso), C vale solo se $f \ge 0$, D confonde f con una sua primitiva.

7. A. $S_4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$; la somma inferiore è $\frac{7}{32}$ (risposta B), il valore esatto dell'area $\frac{1}{3}$.

8. a) Falso: $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ ma x non è identicamente nulla; l'integrale nullo dice solo che le aree con segno si compensano. b) Vero. c) Falso: una funzione limitata con un salto è integrabile ma non continua (per esempio quella che vale 1 su $[0; 1]$ e 2 su $]1; 2]$). d) Vero (confronto). e) Vero: la variabile di integrazione è muta.

9. $[a; b]$; $f(c)(b - a)$; valore medio; Weierstrass; valori intermedi.

10. a) $[x^3 - x^2 + x]_1^3 = 21 - 1 = 20$. b) $[-\cos x]_0^{\pi} = 2$. c) $[2\sqrt{x}]_1^4 = 4 - 2 = 2$. d) $[e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1{,}718$.

11. a) $[\ln x]_1^e = 1$. b) $[\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. c) 0: l'integranda è dispari. d) Pari: $2[\frac{x^3}{3} + x]_0^2 = 2(\frac{8}{3} + 2) = \frac{28}{3}$.

12. a) $[\frac{1}{2}e^{x^2}]_0^1 = \frac{e-1}{2}$. b) $[-\frac{\cos^3 x}{3}]_0^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. c) Con $t = \ln x$ (estremi 0 e 1): $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. d) $[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

13. a) $[x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e - 1) = 1$. b) $[x \operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$. c) $[\frac{x^2}{2}\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$.

14. a) Il numeratore è la derivata del denominatore, che su $[2; 3]$ è positivo: $[\ln(x^2 + x - 2)]_2^3 = \ln 10 - \ln 4 = \ln\frac{5}{2}$. b) $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$: $[\operatorname{arctg}(x + 1)]_0^1 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}322$. c) $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1})$: $\frac{1}{2}[\ln\frac{x - 1}{x + 1}]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 0{,}203$.

15. a) Zeri ± 2: $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2[4x - \frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{32}{3}$. b) Intersezioni $x = 0$, $x = 2$; la retta sta sopra: $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. c) Intersezioni $x = -1$, 0, 1; su $[0; 1]$ è $x \ge x^3$, su $[-1; 0]$ il contrario; per la simmetria (le due funzioni sono dispari) l'area è $2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

16. $\int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{3\pi/2} = 0 + 1 = 1$. Area: $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\operatorname{sen} x)\,dx = 2 + 1 = 3$. Su $]\pi; \frac{3}{2}\pi[$ la funzione è negativa: nell'integrale quella parte (area 1) si sottrae, nell'area si somma.

17. La tangente in $(0; 1)$ è $y = x + 1$; poiché $e^x \ge x + 1$, l'area è $\int_0^1 (e^x - x - 1)\,dx = [e^x - \frac{x^2}{2} - x]_0^1 = e - \frac{5}{2} \approx 0{,}218$.

18. $\int_0^2 (3x^2 - 2x)\,dx = [x^3 - x^2]_0^2 = 4$, valore medio $\frac{4}{2} = 2$. Da $3c^2 - 2c = 2$: $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$; solo

$c = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}215$ appartiene a [0; 2] (l'altra radice è negativa).

19. a) $F'(x) = \sqrt{1+x^3}$, $F'(2) = 3$. b) $G(x) = -\int_1^x \cos(t^2)\,dt$, quindi $G'(x) = -\cos(x^2)$. c) $H'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ (infatti $H(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$). d) $K'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2x}\cdot 2 - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$.

20. Forma $\dfrac{0}{0}$: il numeratore è una funzione integrale nulla in 0. Per de l'Hôpital e il teorema fondamentale il limite è $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

21. Traccia: $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f$. Nel primo integrale, con $x = -t$: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt$, perché $f(-t) = -f(t)$. La somma è 0.

22. Per il teorema fondamentale $F' = f > 0$, quindi F è crescente (capitolo 6). Se $f > 0$ a sinistra di x_0 e $f < 0$ a destra, in un intorno di x_0 la funzione F cresce fino a x_0 e poi decresce: x_0 è un punto di massimo relativo. Geometricamente: finché $f > 0$ l'area si accumula, dopo x_0 si sottrae.

23. La formula di Newton–Leibniz richiede f continua su tutto [−1; 1], mentre $\dfrac{1}{x^2}$ non è definita in 0 e non è limitata vicino a 0: non è nemmeno integrabile secondo la definizione di integrale definito. Il risultato è assurdo anche per il segno: una funzione positiva non può avere integrale negativo (confronto). Si tratta di un integrale improprio, che studieremo nel capitolo 11 (e che risulterà divergente).

24. Su [0; 1] si ha $0 \le x^2 \le 1$, quindi $1 \le e^{x^2} \le e$; integrando su un intervallo di lunghezza 1 si ottiene $1 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e$. Con $u = x^2$: $e^{x^2} \ge 1 + x^2$, quindi l'integrale è almeno $\int_0^1 (1+x^2)\,dx = \dfrac{4}{3}$. (Il valore numerico è 1,4627...)

25. Traccia: se la retta è $y = mx + q$, la differenza fra parabola e retta è un polinomio di secondo grado con coefficiente direttivo a e radici x_1, x_2: $ax^2 + bx + c - (mx + q) = a(x - x_1)(x - x_2)$. L'area è $|a|\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x)\,dx$; con $x = x_1 + t$ e $d = x_2 - x_1$ si ottiene $|a|\int_0^d t(d-t)\,dt = |a|\left(\dfrac{d^3}{2} - \dfrac{d^3}{3}\right) = \dfrac{|a|d^3}{6}$.

26. Per $x \ge 0$, $F(x) = x$; per $x < 0$, $F(x) = \int_0^x (-1)\,dt = -x$. Dunque $F(x) = |x|$, continua ma non derivabile in 0. Il teorema fondamentale richiede che f sia continua, mentre qui f ha un salto in 0: la tesi $F' = f$ vale in ogni $x \ne 0$, dove f è continua.

27. $\dfrac{1}{12}\int_8^{20} T(t)\,dt = 14 + \dfrac{6}{12}\cdot\dfrac{12}{\pi}\left[-\cos\dfrac{\pi(t-8)}{12}\right]_8^{20} = 14 + \dfrac{12}{\pi} \approx 17{,}8$ °C. Minima 14 °C (alle 8 e alle 20), massima 20 °C (alle 14): la loro media è 17 °C, inferiore alla media integrale.

28. $\dfrac{1}{6}\int_0^6 (6t - t^2)\,dt = \dfrac{1}{6}(108 - 72) = 6$ m/s. Da $6t - t^2 = 6$: $t = 3 \pm \sqrt{3}$, cioè $t \approx 1{,}27$ s e $t \approx 4{,}73$ s. Il punto c del teorema della media non è necessariamente unico.

29. $C(30) - C(10) = \int_{10}^{30} C'(q)\,dq = [0{,}01q^3 - 0{,}6q^2 + 20q]_{10}^{30} = 330 - 150 = 180$ euro.

30. Area di R: $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \dfrac{32}{3}$. La parte sotto la retta $y = k$ $(0 < k < 4)$ ha area $\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (k - x^2)\,dx = \dfrac{4}{3}k\sqrt{k}$. Da $\dfrac{4}{3}k\sqrt{k} = \dfrac{16}{3}$ si ha $k\sqrt{k} = 4$, $k = 4^{2/3} = 2\sqrt[3]{2} \approx 2{,}52$.

31. La funzione è crescente: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^3 \dfrac{1}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^3 \dfrac{1}{n}$. Si ottiene $n = 10$: $s = 0{,}2025$, $S = 0{,}3025$; $n = 100$: 0,245025 e 0,255025; $n = 1000$: 0,24950025 e 0,25050025. Tendono a $\dfrac{1}{4} = \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_0^1$; la differenza $S_n - s_n = \dfrac{1}{n}$.

32. Zeri 0 e k; la parabola è positiva fra di essi: $\int_0^k (kx - x^2)\,dx = \dfrac{k^3}{2} - \dfrac{k^3}{3} = \dfrac{k^3}{6}$. Da $\dfrac{k^3}{6} = 36$: $k^3 = 216$, $k = 6$.

33. $F'(x) = (x-1)(x-3)e^x$: positiva per $x < 1$ e $x > 3$, negativa fra 1 e 3. Massimo relativo in $x = 1$, minimo relativo in $x = 3$. $F''(x) = (2x-4)e^x + (x^2 - 4x + 3)e^x = (x^2 - 2x - 1)e^x$, che cambia segno in $x = 1 \pm \sqrt{2}$: flessi in $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$. (Calcolando: $F(x) = (x-3)^2e^x - 9$, $F(1) = 4e - 9$, $F(3) = -9$.)

34. Intersezioni: $x(5 - x) = 4$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x = 1$ o $x = 4$, cioè (1; 4) e (4; 1). Su [1; 4] la retta sta sopra l'i-

perbole: $\int_1^4 (5 - x - \frac{4}{x})\,dx = [5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \approx 1{,}95$.

35. Sia $g(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^{a+T} f - \int_0^a f$. Per il teorema fondamentale $g'(a) = f(a + T) - f(a) = 0$ per ogni a, quindi g è costante su $\mathbb{R}$ (capitolo 6).

36. a) Per $x > 0$ il grafico incontra l'asse in $x = \sqrt{a}$ ed è sotto l'asse su $]0; \sqrt{a}[$: area $\int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)\,dx = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} = 4$, quindi $a = 4$. b) $f(1) = -3$, $f'(x) = 3x^2 - 4$, $f'(1) = -1$: t: $y = -x - 2$. $f(x) - (-x - 2) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, che si annulla in $x = -2$ e $x = 1$ ed è non negativa fra essi: area $\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\,dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x]_{-2}^1 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$. c) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$; zeri $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$. $F'(x) = x^3 - 4x$: minimi relativi in $x = \pm 2$ ($F = -4$), massimo relativo in $x = 0$ ($F = 0$). $F''(x) = 3x^2 - 4$: flessi in $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (con $F = -\frac{20}{9}$). d) $\frac{1}{2}\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = \frac{1}{2}(4 - 8) = -2$. Per il teorema della media esiste $c \in [0; 2]$ con $f(c) = -2$; poiché $f(0) = f(2) = 0 > -2$ e il minimo di f su $[0; 2]$ è $f(\frac{2}{\sqrt{3}}) \approx -3{,}08 < -2$, per il teorema dei valori intermedi c'è una soluzione in ciascuno degli intervalli $]0; \frac{2}{\sqrt{3}}[$ e $]\frac{2}{\sqrt{3}}; 2[$. Le soluzioni di $c^3 - 4c + 2 = 0$ in $]0; 2[$ sono $c \approx 0{,}54$ e $c \approx 1{,}68$.