CAPITOLO

9

L'integrale indefinito

Derivare è smontare un orologio pezzo per pezzo; integrare è rimontarlo sapendo soltanto come si muovono le lancette. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la primitiva e l'integrale indefinito e dimostrare che, su un intervallo, due primitive differiscono per una costante.
2. Calcolare gli integrali immediati e immediati generalizzati, verificando ogni risultato con la derivata.
3. Integrare per sostituzione e per parti, scegliendo la sostituzione o i fattori più convenienti.
4. Integrare le funzioni razionali fratte con denominatore di primo o di secondo grado.
5. Risolvere problemi inversi: ricavare una funzione dalla sua derivata e da una condizione iniziale, in geometria, in fisica e in economia.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Primitive e integrale indefinito 2
9.2 Gli integrali immediati 6
9.3 L'integrazione per sostituzione 11
9.4 L'integrazione per parti 13
9.5 L'integrazione delle funzioni razionali fratte 16
9.6 Dalla derivata alla funzione: problemi inversi 18

Matematica 5 · Parte III · Calcolo integrale ed equazioni differenziali · versione 1.0
Capitolo 9: L'integrale indefinito · pagine 251–278 del volume completo · estratto per lo studio

Fino a questo punto il calcolo differenziale ha percorso sempre la stessa strada: data una funzione, se ne ricava la derivata. Dalla legge oraria $s(t)$ di un'automobile si ottiene la velocità $v(t) = s'(t)$; dal costo totale $C(q)$ di un'impresa si ottiene il costo marginale $C'(q)$; dall'equazione di una curva si ottiene la pendenza della sua tangente in ogni punto. Molto spesso, però, la vita reale pone il problema al contrario. Il tachimetro di un'auto registra istante per istante la velocità, e si vuole sapere dove si trova l'auto; un ufficio tecnico conosce quanto costa produrre un pezzo in più, e vuole ricostruire il costo totale; di una curva si sa quale pendenza deve avere in ogni punto, e se ne cerca l'equazione.

Questo capitolo affronta il **problema inverso della derivazione**: data una funzione f, trovare le funzioni la cui derivata è f. Vedremo che, su un intervallo, queste funzioni sono infinite ma si somigliano tutte, perché differiscono soltanto per una costante; impareremo a riconoscerle leggendo «al contrario» la tabella delle derivate e a trovarle, nei casi meno immediati, con due tecniche che discendono dalle regole di derivazione: la sostituzione, figlia della derivata della funzione composta, e l'integrazione per parti, figlia della derivata del prodotto. Il capitolo 10 darà a tutto questo un significato geometrico inatteso, il calcolo delle aree; il capitolo 12 userà gli stessi strumenti per risolvere le equazioni differenziali.

9.1 Primitive e integrale indefinito

9.1.1 Il problema inverso della derivazione

Cerchiamo una funzione la cui derivata sia $2x$. La risposta viene subito: x^2, perché $(x^2)' = 2x$. Ma non è l'unica: anche $x^2 + 5$, $x^2 - 3$, $x^2 + \pi$ hanno derivata $2x$, perché la derivata di una costante è zero. Allo stesso modo $\operatorname{sen} x$ ha derivata $\cos x$, e così $\operatorname{sen} x + 1$ o $\operatorname{sen} x - 7$. Diamo un nome a questa situazione.

Definizione. Sia f una funzione definita in un intervallo I. Una funzione F, derivabile in I, si dice **primitiva** di f in I se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

La definizione chiede che I sia un **intervallo**, e il motivo apparirà tra poco: è la condizione sotto la quale il teorema di Lagrange (capitolo 6) permette di descrivere *tutte* le primitive di una funzione. Se I contiene un estremo, in quel punto la derivata si intende destra o sinistra.

Trovare una primitiva è un problema di natura diversa dal calcolo di una derivata. Per derivare esistono regole che, applicate meccanicamente, danno sempre il risultato: la derivata di una funzione elementare è ancora una funzione elementare, scritta con le stesse operazioni. Per «antiderivare» le regole sono meno potenti, e a volte una formula semplice non esiste affatto. In compenso c'è un controllo sicuro: **una primitiva si verifica sempre derivandola**.

9.1.2 Tutte le primitive di una funzione

Se F è una primitiva di f, ogni funzione $F + c$, con c costante, è ancora una primitiva. Il fatto importante è che, su un intervallo, non ce ne sono altre.

IN SINTESI

Teorema (delle primitive). **Ipotesi:** F è una primitiva di f nell'intervallo I. **Tesi:** a) per ogni numero reale c, anche $F(x) + c$ è una primitiva di f in I; b) ogni primitiva G di f in I è della forma $G(x) = F(x) + c$ per un opportuno numero reale c.

Dimostrazione. a) Per la linearità della derivata, $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$ per ogni $x \in I$. b) Sia G un'altra primitiva e consideriamo la differenza $H(x) = G(x) - F(x)$. È derivabile in I e $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Nel capitolo 6 abbiamo dimostrato, come conseguenza del teorema di Lagrange, che una funzione con derivata nulla in tutti i punti di un *intervallo* è costante in quell'intervallo. Dunque esiste c tale che $H(x) = c$, cioè $G(x) = F(x) + c$, per ogni $x \in I$. c.v.d.

Il significato geometrico è semplice (Figura 9.1). I grafici delle primitive di una stessa funzione si ottengono l'uno dall'altro con una **traslazione verticale**: se $G = F + c$, il grafico di G è quello di F spostato di c verso l'alto (o verso il basso, se $c < 0$). In punti che hanno la stessa ascissa, le rette tangenti ai grafici sono parallele, perché la loro pendenza è $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

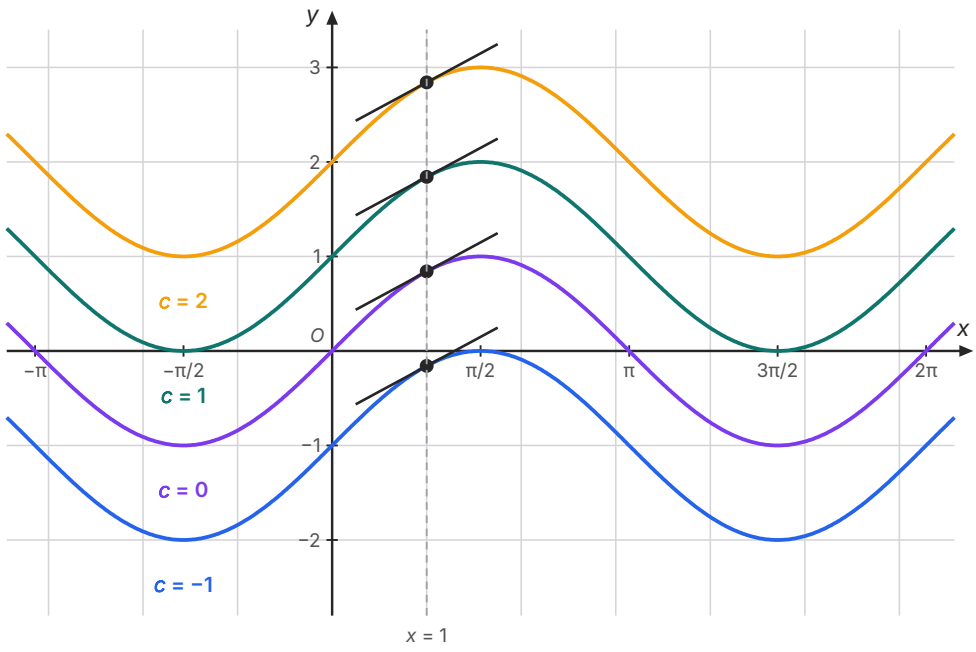


Figura 9.1 Quattro primitive di $f(x) = \cos x$: i grafici di $y = \text{sen}\, x + c$ per $c = -1, 0, 1, 2$ si ottengono l'uno dall'altro con traslazioni verticali. Nei punti di ascissa $x = 1$ le tangenti (in nero) sono parallele: hanno tutte pendenza $\cos 1 \approx 0{,}54$. Unità uguali sui due assi.

L'ipotesi che il dominio sia un intervallo non si può togliere. La funzione $f(x) = 1/x^2$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che è l'unione di due intervalli; una sua primitiva è $F(x) = -1/x$. Ma anche la funzione G che vale $-1/x$ per $x < 0$ e $-1/x + 3$ per $x > 0$ ha derivata $1/x^2$ in ogni punto del dominio, e la differenza $G - F$ vale 0 a sinistra e 3 a destra: non è costante. Su ciascuno dei due intervalli la costante può essere scelta in modo indipendente. È lo stesso fenomeno già incontrato nel capitolo 6 con $\text{arctg}\, x + \text{arctg}(1/x)$, che vale $\pi/2$ per $x > 0$ e $-\pi/2$ per $x < 0$.

9.1.3 L'integrale indefinito

Definizione. Sia F una primitiva di f nell'intervallo I. L'insieme di tutte le primitive di f in I si chiama **integrale indefinito** di f e si indica con

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

La funzione f è la **funzione integranda**, x è la **variabile d'integrazione**, c è la **costante d'integrazione** (o costante arbitraria).

Il simbolo $\int$ è una S allungata, l'iniziale di *summa*: lo introdusse Leibniz, che pensava l'integrale come una somma di infiniti termini piccolissimi $f(x)\,\mathrm{d}x$. Il motivo diventerà chiaro nel capitolo 10, dove il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ indicherà un'area. Per ora il $\mathrm{d}x$ ha due compiti pratici: di-

chiara qual è la variabile d'integrazione (in $\int t\,x^2\,\mathrm{d}x$ la lettera t è una costante, in $\int t\,x^2\,\mathrm{d}t$ lo è x) e, come vedremo nella sostituzione, si comporta come il differenziale del capitolo 5.

Derivazione e integrazione indefinita sono operazioni inverse, nel senso preciso dato da due uguaglianze. Se si integra e poi si deriva, si ritrova la funzione di partenza: $D[\int f(x)\,\mathrm{d}x] = f(x)$. Se si deriva e poi si integra, si ritrova la funzione di partenza *a meno di una costante*: $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c$.

Dalla linearità della derivata segue la **linearità dell'integrale indefinito**: se f e g hanno primitive in I e α, β sono numeri reali,

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Infatti, se F e G sono primitive di f e g, la derivata di $\alpha F + \beta G$ è $\alpha f + \beta g$. L'uguaglianza va letta tra insiemi di funzioni: le costanti arbitrarie dei due membri si fondono in una sola. In pratica: **l'integrale di una somma è la somma degli integrali, e le costanti moltiplicative si portano fuori dal segno di integrale**. Non esiste invece una regola semplice per l'integrale di un prodotto, così come non esisteva una regola «prodotto delle derivate» per la derivata di un prodotto.

9.1.4 Quali funzioni hanno una primitiva

Non tutte le funzioni hanno primitive, ma tutte quelle che incontreremo più spesso sì. Vale infatti il seguente risultato, che dimostreremo nel capitolo 10 come conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale: **ogni funzione continua in un intervallo ammette primitive in quell'intervallo**.

Avere una primitiva, però, non significa averne una scritta con le funzioni elementari. La funzione e^{-x^2} è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi ha primitive; nessuna di esse si può esprimere combinando con un numero finito di operazioni potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche e le loro inverse. La sua primitiva che si annulla in 0 esiste comunque, e si può calcolare con la precisione voluta (Figura 9.2): è una funzione crescente, perché la sua derivata e^{-x^2} è positiva, dispari, e con due asintoti orizzontali. Questa funzione è al centro della distribuzione normale, che studieremo nel capitolo 16.

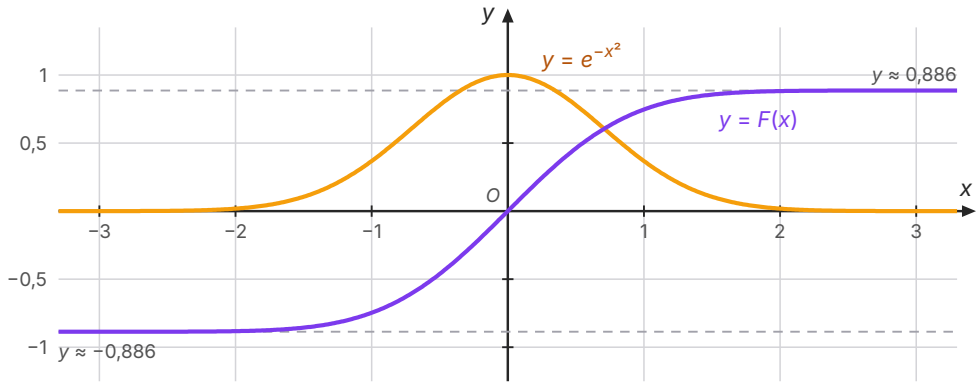


Figura 9.2 La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ (in arancio) e la sua primitiva F tale che $F(0) = 0$ (in viola), calcolata numericamente. F cresce perché $F' = f > 0$, ha un flesso in 0, dove f ha il massimo, e tende a $\pm\sqrt{\pi}/2 \approx \pm 0{,}886$ per $x \to \pm\infty$. Nessuna formula elementare la esprime.

APPROFONDIMENTO · PRIMITIVE NON ELEMENTARI

Che certe funzioni elementari non abbiano primitive elementari fu dimostrato nell'Ottocento dal matematico francese Joseph Liouville, che sviluppò una teoria dell'«integrazione in termini finiti». Da essa segue, per esempio, che non sono elementari le primitive di e^{-x^2}, di $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ e di $\dfrac{1}{\ln x}$, e neppure quelle di $\sqrt{1+x^3}$. Non si tratta di formule non ancora trovate: si dimostra che non possono esistere.

Questo non è un difetto del calcolo, ma un'indicazione del suo limite naturale. Le primitive non elementari si studiano come funzioni nuove, definite proprio come integrali; si tabulano e si calcolano con metodi numerici, come si fa per i logaritmi o per il seno. Nel capitolo 16 la tavola della distribuzione normale sarà appunto la tavola di una di queste funzioni.

9.2 Gli integrali immediati

9.2.1 La tabella degli integrali immediati

Ogni derivata nota, letta da destra a sinistra, fornisce una primitiva. Gli integrali che si ottengono così si chiamano **integrali immediati** e sono raccolti nella Tabella 9.1. Conviene impararli a memoria con la derivata da cui provengono: chi ricorda le derivate li ricostruisce in pochi secondi.

Tabella 9.1 Gli integrali immediati. In ogni riga la primitiva si verifica derivando; gli integrali valgono in ogni intervallo contenuto nel dominio della funzione integranda.

Integrale	Primitive	Si legge dalla derivata
$\int x^\alpha \, dx$, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)\,x^\alpha$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$
$\int e^x \, dx$	$e^x + c$	$(e^x)' = e^x$
$\int a^x \, dx$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$\int \operatorname{sen} x \, dx$	$-\cos x + c$	$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
$\int \cos x \, dx$	$\operatorname{sen} x + c$	$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$\operatorname{tg} x + c$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx$	$-\operatorname{cotg} x + c$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$\operatorname{arctg} x + c$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$\operatorname{arcsen} x + c$	$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La prima riga, la **regola della potenza**, vale per ogni esponente reale α diverso da -1, quindi anche per le radici e per le potenze a esponente negativo: basta scriverle come potenze. Per esempio $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + c$, e $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$. Per $\alpha = -1$ la formula perderebbe senso, perché si dividerebbe per zero: l'integrale di $x^{-1} = 1/x$ è un caso a parte, e non è una potenza.

Perché nella seconda riga compare il **valore assoluto**? La funzione $1/x$ è definita sia per $x > 0$ sia per $x < 0$, mentre $\ln x$ esiste solo per $x > 0$. Per $x < 0$ consideriamo $\ln(-x)$: per la derivata della funzione composta, $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Dunque $\ln x$ è primitiva di $1/x$ nell'intervallo $]0; +\infty[$, e $\ln(-x)$ lo è in $]-\infty; 0[$. Le due formule si riassumono in $\ln \lvert x \rvert$ (Figura 9.3). Il dominio di $1/x$ non è un intervallo: scrivendo $\ln \lvert x \rvert + c$ si sottintende che si lavora in uno dei due intervalli, come accade sempre nei problemi.

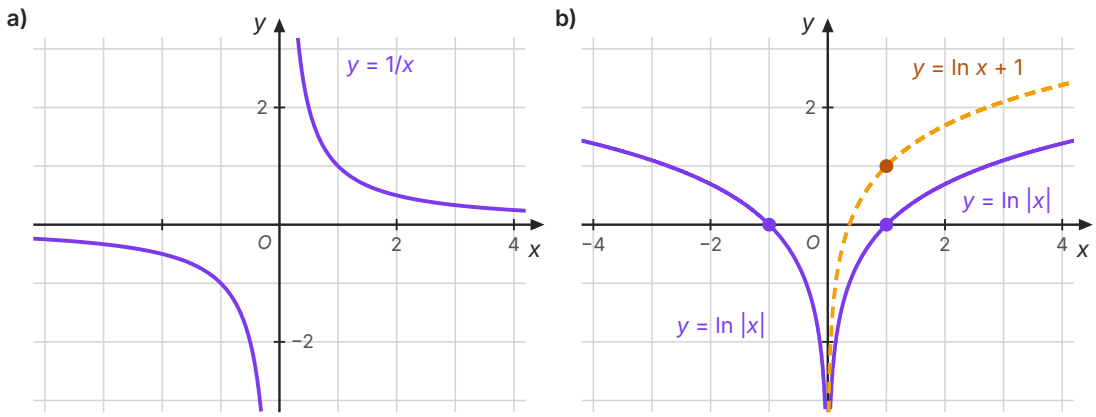


Figura 9.3 **a)** La funzione $y = 1/x$, definita nell'unione di due intervalli. **b)** In viola $y = \ln|x|$, primitiva di $1/x$ sia per $x > 0$ sia per $x < 0$: il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. In arancio tratteggiato, $\ln x + 1$: per $x > 0$ si può cambiare la costante senza toccare il ramo di sinistra.

Dalla tabella si vede anche che una funzione può avere primitive dall'aspetto molto diverso. Poiché $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, anche $-\arccos x$ è una primitiva di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $]-1;\,1[$. Il teorema delle primitive garantisce che $\arcsen x$ e $-\arccos x$ differiscono per una costante, e infatti $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$ (*Matematica 4*): $\arcsen x = -\arccos x + \pi/2$. Due risultati diversi di un integrale indefinito possono essere entrambi corretti; per confrontarli si deriva o si calcola la loro differenza.

9.2.2 Primi calcoli

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo alcuni integrali con la linearità e la tabella. Ogni risultato si controlla derivando.

a) $\int (4x^3 - 6x + 2)\,dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + c = x^4 - 3x^2 + 2x + c$.

b) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^2}\,dx$. Si sviluppa il quadrato e si divide termine a termine: $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} = x^2 + 2 + x^{-2}$. Quindi l'integrale vale $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c$, in ciascuno dei due intervalli $x < 0$ e $x > 0$.

c) $\int \left(\frac{3}{x} - 2e^x + 5\cos x\right) dx = 3\ln|x| - 2e^x + 5\operatorname{sen} x + c$.

d) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (x^{1/3} + x^{-1/2})\,dx = \frac{3}{4}\,x^{4/3} + 2\,x^{1/2} + c = \frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + c$.

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. Non è nella tabella, ma $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$. Quindi $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + c$. **Verifica:** $(\operatorname{tg} x - x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$.

L'ultimo esempio mostra una strategia generale: quando l'integranda non compare nella tabella, si prova a trasformarla, con l'algebra o con le identità goniometriche, in una somma di funzioni che vi compaiono.

9.2.3 Le forme generalizzate

La tabella si estende enormemente grazie alla derivata della funzione composta. Se F è una primitiva di f e g è derivabile, allora $[F(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Letta al contrario:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

In parole: se l'integranda è il prodotto di una funzione composta per la derivata della funzione «interna», la primitiva si ottiene applicando la primitiva della funzione esterna alla funzione interna. Applicando questo principio alle righe della Tabella 9.1 si ottengono gli integrali della Tabella 9.2, detti **integrali immediati generalizzati**.

Tabella 9.2 Gli integrali immediati generalizzati: f è una funzione derivabile e ogni formula vale dove l'integranda è definita.

Integrale	Primitive
$\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx$, $\alpha \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln \lvert f(x)\rvert + c$
$\int f'(x)\, e^{f(x)}\,dx$	$e^{f(x)} + c$
$\int f'(x)\, a^{f(x)}\,dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int f'(x)\,\text{sen}\, f(x)\,dx$	$-\cos f(x) + c$
$\int f'(x)\cos f(x)\,dx$	$\text{sen}\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx$	$\text{tg}\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx$	$\text{arctg}\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx$	$\text{arcsen}\, f(x) + c$

Il caso più frequente è quello in cui la funzione interna è lineare, $g(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. Poiché $g'(x) = a$ è una costante, basta dividere per a: **se F è una primitiva di f, allora $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$**. Così $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\,\text{sen}\, 3x + c$, $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} + c$, $\int \frac{1}{5x-1}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x-1| + c$.

Vediamo alcuni esempi; ciascuno si controlla derivando il risultato.

- a) $\int 2x\,(x^2+1)^5\,dx$. Con $f(x) = x^2+1$ si ha $f'(x) = 2x$, ed è proprio il fattore presente: $\int (x^2+1)^5 \cdot 2x\,dx = \frac{(x^2+1)^6}{6} + c$.
- b) $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$. La derivata del denominatore è $2x$; il numeratore è x. Moltiplichiamo e dividiamo per 2: $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c$. Il valore assoluto non serve, perché $x^2+4 > 0$.
- c) $\int \text{tg}\, x\,dx = \int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$: il numeratore è, a meno del segno, la derivata del denominatore.
- d) $\int x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c$.

- e) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int (\ln x)^1 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$, per $x > 0$.
- f) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$. Raccogliendo 4 al denominatore: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+(x/2)^2}$. Con $f(x) = x/2$ si ha $f'(x) = 1/2$, quindi $\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1+(x/2)^2}$ e l'integrale vale $\frac{1}{2}\arctg\frac{x}{2} + c$.

Nei calcoli precedenti abbiamo «aggiustato» l'integranda moltiplicando e dividendo per un numero, che poi si porta fuori dall'integrale. Questo è lecito solo con le **costanti**. Non si può fare con una funzione della variabile: per esempio $\int e^{x^2}\,dx$ non diventa immediato «moltiplicando e dividendo per $2x$», perché $\frac{1}{2x}$ non si può portare fuori dal segno di integrale. E infatti e^{x^2}, come e^{-x^2}, non ha primitive elementari.

9.3 L'integrazione per sostituzione

9.3.1 Il metodo

Le forme generalizzate richiedono di riconoscere a colpo d'occhio una funzione e la sua derivata. Il **metodo di sostituzione** rende sistematica questa ricerca: si introduce una nuova variabile t legata a x, in modo che l'integrale nella nuova variabile sia più semplice.

IN SINTESI

Integrazione per sostituzione. Sia f continua in un intervallo e sia $x = \varphi(t)$ una funzione invertibile, derivabile con derivata continua e mai nulla, con inversa $t = \varphi^{-1}(x)$. Allora

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

In pratica: si sostituisce x con $\varphi(t)$ e dx con $\varphi'(t)\,dt$, si calcola l'integrale in t e infine si torna alla variabile x.

Giustificazione. Sia $G(t)$ una primitiva di $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ e poniamo $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$. Per la derivata della funzione composta e della funzione inversa (capitolo 5), $F'(x) = G'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$ con $t = \varphi^{-1}(x)$, purché $\varphi'(t) \neq 0$. Poiché $G'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, si ottiene $F'(x) = f(\varphi(t)) = f(x)$: F è una primitiva di f.

La regola «$dx = \varphi'(t)\,dt$» si ricorda facilmente con il linguaggio dei differenziali del capitolo 5: da $x = \varphi(t)$ segue $dx = \varphi'(t)\,dt$. Spesso è più comodo partire dalla relazione opposta, $t = g(x)$: allora $dt = g'(x)\,dx$. È il caso delle forme generalizzate, che sono sostituzioni fatte «a mente»: in $\int 2x\,(x^2+1)^5\,dx$ si pone $t = x^2 + 1$, $dt = 2x\,dx$, e l'integrale diventa $\int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + c$.

La sostituzione in quattro passi. 1) Scegli la sostituzione, $t = g(x)$ oppure $x = \varphi(t)$. 2) Esprimi in t *tutta* l'integranda, compreso dx. 3) Calcola l'integrale in t. 4) Torna alla variabile x e control-

la derivando. Una sostituzione è utile solo se l'integrale in t è più semplice di quello di partenza: se non lo è, se ne prova un'altra.

9.3.2 Le sostituzioni più comuni

La sostituzione lineare $t = ax + b$. Da $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x$ si ricava $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$. Per esempio, in $\int (3x-2)^5\,\mathrm{d}x$ si pone $t = 3x - 2$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$: l'integrale diventa $\frac{1}{3}\int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{t^6}{18} + c = \frac{(3x-2)^6}{18} + c$. Si evita così di sviluppare la potenza quinta di un binomio. Allo stesso modo $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,t^{3/2} + c = \frac{1}{3}\,(2x+1)\sqrt{2x+1} + c$.

La sostituzione $t = \sqrt{x}$ (o, più in generale, t uguale alla radice che complica l'integranda). Calcoliamo $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ per $x \geq 0$. Con $t = \sqrt{x}$ si ha $x = t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2t - 2\ln(1+t) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

Il passaggio intermedio, $\frac{t}{1+t} = \frac{(1+t)-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, è il primo esempio dell'algebra delle funzioni razionali che svilupperemo più avanti in questo capitolo. Il valore assoluto non serve, perché $1 + t > 0$.

La sostituzione $t = e^x$. È utile quando l'integranda è una funzione razionale di e^x. Da $x = \ln t$ si ricava $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Per esempio:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = t - \ln(t+1) + c = e^x - \ln(e^x+1) + c.$$

Derivando: $e^x - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$, come doveva essere.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\int x\sqrt{x+1}\,dx$, per $x \geq -1$.

Scelta. La radice è il fattore che complica: poniamo $t = \sqrt{x+1}$, con $t \geq 0$. Allora $x = t^2 - 1$ e $dx = 2t\,dt$.

Integrale in t. $\int (t^2-1)\cdot t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 2t^2)\,dt = \frac{2}{5}\,t^5 - \frac{2}{3}\,t^3 + c$.

Ritorno a x. Poiché $t^5 = (x+1)^{5/2}$ e $t^3 = (x+1)^{3/2}$, si ha

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}\,(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}\,(x+1)\sqrt{x+1} + c = \frac{2}{15}\,(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1} + c.$$

Verifica. Derivando la prima forma: $(x+1)^{3/2} - (x+1)^{1/2} = (x+1)^{1/2}\,[(x+1) - 1] = x\sqrt{x+1}$. La seconda forma si ottiene raccogliendo $\frac{2}{15}\,(x+1)\sqrt{x+1}$, perché $\frac{2}{5}(x+1) - \frac{2}{3} = \frac{2}{15}(3x+3-5)$.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare la costante. Scrivere $\int 2x\,dx = x^2$ è sbagliato: x^2 è *una* primitiva, l'integrale indefinito è $x^2 + c$. Nei problemi con una condizione iniziale (ultima sezione del capitolo) la costante è proprio ciò che si deve determinare: chi la omette trova la soluzione sbagliata.

Il logaritmo senza valore assoluto. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$ vale solo per $x > 0$. Per una funzione definita anche per $x < 0$ si scrive $\ln|x| + c$; analogamente $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + c$.

L'integrale del prodotto come prodotto degli integrali. $\int f(x)\,g(x)\,dx$ *non* è $\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$. Basta un esempio: $\int x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3} + c$, mentre $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}$, che ha derivata x^3. Lo stesso vale per il quoziente: $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$, non $\ln(x^2+1)$, perché il numeratore non è la derivata del denominatore.

Sostituire la variabile ma non il dx. Con $t = 3x - 2$, scrivere $\int (3x-2)^5\,dx = \int t^5\,dt$ è sbagliato: dx non è uguale a dt, ma a $\frac{1}{3}\,dt$. Il risultato $\frac{(3x-2)^6}{6}$ ha derivata $3(3x-2)^5$, il triplo dell'integranda. L'errore si scopre subito verificando con la derivata.

9.4 L'integrazione per parti

9.4.1 La formula

La sostituzione nasce dalla derivata della funzione composta; la seconda grande tecnica nasce dalla derivata del prodotto. Siano f e g derivabili con derivate continue in un intervallo. Dalla

regola $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$, integrando entrambi i membri, si ha $f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$, dove la costante d'integrazione è sottintesa negli integrali indefiniti. Isolando l'ultimo termine:

IN SINTESI

Integrazione per parti. Se f e g hanno derivate continue in un intervallo,

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

$f(x)$ si chiama **fattore finito**, $g'(x)\,dx$ **fattore differenziale**.

Dimostrazione. Basta verificare che il secondo membro, derivato, dà l'integranda del primo. Se H è una primitiva di $f'\,g$, la derivata di $f\,g - H$ è $f'\,g + f\,g' - f'\,g = f\,g'$. Quindi $f\,g - H$ è una primitiva di $f\,g'$. c.v.d.

La formula non calcola l'integrale: lo **trasforma** in un altro, $\int f'\,g\,dx$. Il metodo è utile quando questo secondo integrale è più semplice del primo, e la buona riuscita dipende tutta dalla scelta dei due fattori. Calcoliamo $\int x\,e^x\,dx$. Scegliamo come fattore finito $f(x) = x$, che derivando diventa 1, e come fattore differenziale $e^x\,dx$, cioè $g'(x) = e^x$ e $g(x) = e^x$:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x\,(x-1) + c.$$

Con la scelta opposta, $f(x) = e^x$ e $g'(x) = x$, si avrebbe $g(x) = \frac{x^2}{2}$ e $\int x\,e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\,e^x - \int \frac{x^2}{2}\,e^x\,dx$: un integrale più complicato di quello iniziale. La formula è giusta anche così, ma non porta da nessuna parte.

Come scegliere i fattori. Come fattore finito f conviene una funzione che *si semplifica derivando*: un polinomio (scende di grado), $\ln x$ (diventa $1/x$), $\operatorname{arctg} x$ (diventa una funzione razionale). Come fattore differenziale g' conviene una funzione di cui si conosce una primitiva che *non si complica*: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Se non c'è un secondo fattore, si può usare $g'(x) = 1$.

9.4.2 Alcuni integrali classici

$\int x \operatorname{sen} x\,dx$. Con $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$, quindi $g(x) = -\cos x$: $\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$.

$\int \ln x\,dx$. Qui c'è un solo fattore: lo pensiamo moltiplicato per 1 e prendiamo $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$. Allora

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c,\ x > 0.$$

$\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Allo stesso modo, con $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = x$: $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$. Il secondo integrale è una forma generalizzata del tipo $\int f'/f$.

Calcoliamo $\int x^2 e^x\,dx$.

Prima integrazione. Il polinomio x^2 si semplifica derivando: $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$. Si ottiene $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx$.

Seconda integrazione. Il nuovo integrale, $\int x e^x\,dx = e^x (x-1) + c$, è stato calcolato sopra, ancora per parti.

Risultato. $\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2 e^x (x-1) + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$.

Verifica. $[e^x (x^2 - 2x + 2)]' = e^x (x^2 - 2x + 2) + e^x (2x - 2) = x^2 e^x$. In generale, per $\int x^n e^x\,dx$ servono n integrazioni per parti, ciascuna delle quali abbassa di uno il grado del polinomio.

9.4.3 Gli integrali che ritornano

In qualche caso, dopo due integrazioni per parti, ricompare l'integrale di partenza. Sembra di essere tornati al punto iniziale; in realtà si è ottenuta un'**equazione** in cui l'integrale è l'incognita.

Calcoliamo $I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Prima integrazione. Con $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g'(x) = e^x$: $I = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$.

Seconda integrazione. Nell'integrale rimasto scegliamo di nuovo l'esponenziale come fattore differenziale, $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = e^x$: $\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \cos x + I$.

L'equazione. Sostituendo: $I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$, quindi $2I = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$ e

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$$

La costante si aggiunge alla fine, perché nell'equazione I indica una primitiva. **Attenzione:** nella seconda integrazione bisogna mantenere lo stesso tipo di scelta della prima (l'esponenziale come fattore differenziale). Con la scelta opposta si ottiene l'identità $I = I$, vera ma inutile.

Con la stessa idea si calcola $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$. Per parti, con $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\,dx$. Detto J l'integrale cercato, $J = -\operatorname{sen} x \cos x + x - J$, da cui $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c$. Lo stesso risultato si ottiene più rapidamente con la formula di duplicazione $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ di *Matematica 4*: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$, e le due espressioni coincidono, perché $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

9.5 L'integrazione delle funzioni razionali fratte

Una **funzione razionale fratta** è il quoziente $\frac{N(x)}{D(x)}$ di due polinomi. Le funzioni razionali compaiono di continuo, anche come punto di arrivo di una sostituzione (lo abbiamo visto con $t = \sqrt{x}$ e $t = e^x$). Studiamo il caso in cui il denominatore ha **grado 1 o 2**, come prevedono le *Indicazioni nazionali*.

9.5.1 Quando il numeratore ha grado maggiore o uguale

Se il grado di $N(x)$ è maggiore o uguale a quello di $D(x)$, il primo passo è sempre la **divisione dei polinomi**: $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, con il resto $R(x)$ di grado minore di quello di $D(x)$. Allora

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

e il quoziente $Q(x)$, che è un polinomio, si integra subito. Per esempio, dividendo $x^2 + 3$ per $x + 1$ si trovano il quoziente $x - 1$ e il resto 4, quindi

$$\int \frac{x^2+3}{x+1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{4}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+1| + c.$$

D'ora in poi supponiamo quindi che il numeratore abbia grado minore del denominatore. Se il denominatore ha grado 1, il numeratore è una costante e l'integrale è immediato: $\int \frac{k}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$.

9.5.2 Denominatore di secondo grado

Sia $D(x)$ di secondo grado; dividendo numeratore e denominatore per il coefficiente di x^2 possiamo supporre $D(x) = x^2 + px + q$, e il numeratore è $mx + n$. Il comportamento dipende dal discriminante $\Delta = p^2 - 4q$, esattamente come la scomposizione del trinomio.

Primo caso: $\Delta > 0$. Il trinomio ha due radici reali distinte x_1 e x_2, e $D(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Si cercano due costanti A e B tali che

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

Le due frazioni a destra si chiamano **fratti semplici**. Riducendo allo stesso denominatore si ottiene l'uguaglianza tra polinomi $mx + n = A(x - x_2) + B(x - x_1)$, e per il principio d'identità dei polinomi (*Matematica 4*, capitolo 9) i coefficienti dei termini dello stesso grado devono coincidere. Spesso è più rapido sostituire $x = x_1$ e $x = x_2$, che annullano uno dei due addendi. Calcoliamo

così $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$. Le radici del denominatore sono 2 e −1, quindi $5x - 1 = A(x + 1) + B(x - 2)$. Per $x = 2$: $9 = 3A$, $A = 3$; per $x = -1$: $-6 = -3B$, $B = 2$. Allora

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}\right) dx = 3 \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + c.$$

Secondo caso: Δ = 0. Il trinomio è un quadrato, $D(x) = (x - x_0)^2$. Si scrive $\frac{mx+n}{(x-x_0)^2} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ e si usa $\int \frac{1}{(x-x_0)^2}\,dx = -\frac{1}{x-x_0} + c$ (regola della potenza con $\alpha = -2$). Per esempio, $2x + 1 = 2(x - 2) + 5$, quindi

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right) dx = 2 \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + c.$$

Terzo caso: Δ < 0. Il trinomio non si scompone in $\mathbb{R}$ ed è sempre positivo. Si procede in due mosse. Prima si scrive il numeratore come multiplo della derivata del denominatore più una costante, $mx + n = \frac{m}{2}(2x + p) + (n - \frac{mp}{2})$: la prima parte dà un logaritmo, del tipo $\int f'/f$. Poi, per la parte costante, si esegue il **completamento del quadrato**: $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + k^2$ con $k^2 = q - \frac{p^2}{4} = -\frac{\Delta}{4} > 0$, e si usa la formula, che si ottiene come nell'esempio f) sulle forme generalizzate,

$$\int \frac{1}{(x+h)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x+h}{k} + c,\ k > 0.$$

Calcoliamo $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx$; qui $\Delta = 4 - 20 = -16$. La derivata del denominatore è $2x + 2$, e $x + 3 = \frac{1}{2}(2x + 2) + 2$. Inoltre $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, con $k = 2$. Quindi

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c.$$

IN SINTESI

Integrale di $\frac{N(x)}{D(x)}$, con D di grado 1 o 2. 0) Se grado $N \geq$ grado D, si divide: $\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$.

1) D di grado 1: $\int \frac{k}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$.

2) $D = x^2 + px + q$ con $\Delta > 0$: fratti semplici $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ → somma di due logaritmi.

3) $\Delta = 0$: $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$ → un logaritmo e $-\frac{B}{x-x_0}$.

4) $\Delta < 0$: numeratore = multiplo di D' + costante; completamento del quadrato → un logaritmo e un'arcotangente.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\int \frac{x^3-3x+4}{x^2-3x+2}\,dx$.

Divisione. Il numeratore ha grado 3, il denominatore grado 2. Dividendo si ottengono il quoziente $x + 3$ e il resto $4x - 2$: infatti $(x^2 - 3x + 2)(x + 3) = x^3 - 7x + 6$ e $(x^3 - 3x + 4) - (x^3 - 7x + 6) = 4x - 2$.

Fratti semplici. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, con $\Delta = 1 > 0$. Da $4x - 2 = A(x-2) + B(x-1)$: per $x = 1$, $2 = -A$, quindi $A = -2$; per $x = 2$, $6 = B$.

Integrazione.

$$\int \frac{x^3-3x+4}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(x+3-\frac{2}{x-1}+\frac{6}{x-2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x-1| + 6\ln|x-2| + c.$$

Controllo. Il risultato vale in ciascuno dei tre intervalli $]-\infty; 1[$, $]1; 2[$, $]2; +\infty[$ in cui è definita l'integranda; in ciascuno la costante può essere diversa.

9.6 Dalla derivata alla funzione: problemi inversi

9.6.1 Una curva di pendenza assegnata

Torniamo ai problemi dell'introduzione. Supponiamo di sapere che la tangente a una curva $y = F(x)$ ha, in ogni punto di ascissa x, pendenza $2x$, e che la curva passa per il punto $(1; 3)$. Le funzioni con derivata $2x$ sono tutte e sole le $F(x) = x^2 + c$; la condizione di passaggio per $(1; 3)$ dà $1 + c = 3$, cioè $c = 2$. La curva cercata è la parabola $y = x^2 + 2$, ed è l'unica (Figura 9.4).

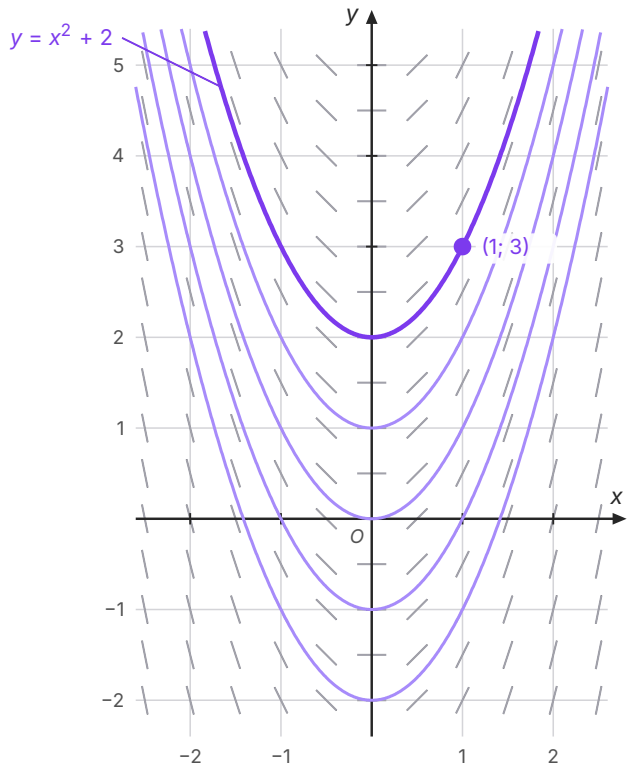


Figura 9.4 Il campo delle pendenze di $y' = 2x$: in ogni punto $(x; y)$ della griglia è tracciato un trattino di pendenza $2x$. Le primitive $y = x^2 + c$ (in viola chiaro, per $c = -2, -1, 0, 1$) sono tangenti in ogni loro punto al trattino corrispondente. Tra esse, una sola passa per $(1; 3)$: $y = x^2 + 2$. Unità uguali sui due assi.

La figura suggerisce una lettura geometrica. La conoscenza della derivata assegna a ogni punto del piano una pendenza, cioè un piccolo segmento di direzione; l'insieme di questi segmenti si chiama **campo delle pendenze** (o campo di direzioni). Le primitive sono le curve che seguono il campo, tangenti in ogni punto al segmento che vi è disegnato, e una **condizione iniziale** come $F(1) = 3$ sceglie tra esse quella che passa per un punto dato. Nel capitolo 12 la stessa idea servirà per le equazioni differenziali, nelle quali la pendenza può dipendere anche da y.

Se è nota la derivata seconda, servono due integrazioni e quindi due costanti, e per determinarle occorrono due condizioni. Se, per esempio, $f''(x) = 6x$, $f'(1) = 0$ e $f(1) = 2$, si ha $f'(x) = 3x^2 + c_1$ con $3 + c_1 = 0$, cioè $c_1 = -3$; poi $f(x) = x^3 - 3x + c_2$ con $1 - 3 + c_2 = 2$, cioè $c_2 = 4$. La funzione è $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

9.6.2 Dall'accelerazione alla legge oraria

In fisica la velocità è la derivata della posizione e l'accelerazione è la derivata della velocità: $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t)$. Se si conosce l'accelerazione, due integrazioni restituiscono la legge ora-

ria; le due costanti sono fissate dalla posizione e dalla velocità iniziali, $s(0) = s_0$ e $v(0) = v_0$.

Il caso più importante è quello di un corpo lanciato verticalmente, quando si può trascurare la resistenza dell'aria. Orientiamo l'asse verso l'alto: l'accelerazione è costante, $a(t) = -g$, con $g \approx 9{,}8$ m/s^2. Integrando una prima volta, $v(t) = \int (-g)\,dt = -gt + c_1$, e la condizione $v(0) = v_0$ dà $c_1 = v_0$. Integrando di nuovo, $s(t) = \int (v_0 - gt)\,dt = v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 + c_2$, e $s(0) = s_0$ dà $c_2 = s_0$:

$$v(t) = v_0 - gt,\; s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Sono le leggi del moto uniformemente accelerato studiate in fisica nel primo biennio, ricavate qui con due righe di calcolo. Il metodo, però, va molto oltre: funziona allo stesso modo per qualunque accelerazione nota in funzione del tempo, anche non costante, purché se ne sappia calcolare la primitiva.

ESEMPIO SVOLTO

Una palla viene lanciata verso l'alto dal livello del suolo con velocità $v_0 = 19{,}6$ m/s. Trascurando l'attrito dell'aria e posto $g = 9{,}8$ m/s^2, troviamo $v(t)$ e $s(t)$, l'istante e la quota di massima altezza, l'istante e la velocità del ritorno a terra.

Integrazione. Con $s_0 = 0$ e $v_0 = 19{,}6$, le formule precedenti danno $v(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$ (in m/s) e $s(t) = 19{,}6t - 4{,}9t^2$ (in m).

Massima altezza. La palla sale finché $v > 0$; si ferma quando $v(t) = 0$, cioè per $t = 2$ s. La quota è $s(2) = 39{,}2 - 19{,}6 = 19{,}6$ m. Nello stesso istante $s(t)$ ha il suo massimo: $s'(2) = v(2) = 0$ e $s'' = -9{,}8 < 0$.

Ritorno a terra. $s(t) = 0$ per $t(19{,}6 - 4{,}9t) = 0$, cioè $t = 0$ (la partenza) o $t = 4$ s. Allora $v(4) = 19{,}6 - 39{,}2 = -19{,}6$ m/s: la palla torna a terra con la stessa velocità in modulo, diretta verso il basso. I grafici sono nella Figura 9.5.

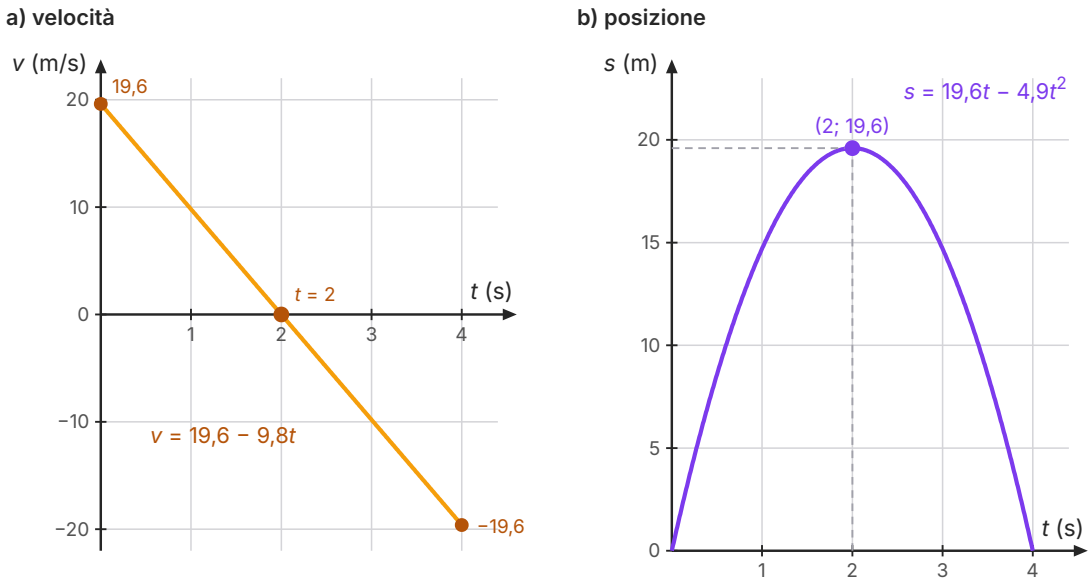


Figura 9.5 Il lancio verticale dell'esempio, con $v_0 = 19{,}6$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2. **a)** La velocità $v(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$ è una primitiva dell'accelerazione costante $-9{,}8$ m/s^2: una retta di pendenza $-9{,}8$. Si annulla per $t = 2$ s. **b)** La posizione $s(t) = 19{,}6t - 4{,}9t^2$ è una primitiva di $v(t)$: una parabola con il vertice in $(2; 19{,}6)$, dove la tangente è orizzontale perché $v(2) = 0$.

COLLEGAMENTI

Integrare per ricostruire. In molte scienze si misura direttamente una *velocità di variazione* e si deve ricostruire la grandezza che varia. In un circuito, l'intensità di corrente è la derivata della carica, $i(t) = q'(t)$: nota la corrente, la carica che ha attraversato il circuito si ottiene integrando. In biologia, se si conosce il tasso di crescita $N'(t)$ di una popolazione e il numero iniziale di individui, $N(t)$ è la primitiva che parte da quel valore. In economia il costo marginale $C'(q)$ e il costo fisso $C(0)$ determinano il costo totale.

In tutti questi casi la costante d'integrazione ha un significato preciso: è il valore della grandezza nell'istante iniziale (la quota di partenza, la carica iniziale, la popolazione iniziale, il costo fisso), cioè l'informazione che la sola velocità di variazione non può dare.

9.6.3 Dal costo marginale al costo totale

Un'azienda (*dati inventati*) stima che il costo marginale per produrre la q-esima unità di un prodotto sia $C'(q) = 0{,}03\,q^2 - 1{,}2\,q + 20$ euro, e che i costi fissi, sostenuti anche se non si produce nulla, ammontino a 500 euro. Il costo totale è la primitiva di C' che vale 500 per $q = 0$:

$$C(q) = \int (0{,}03\,q^2 - 1{,}2\,q + 20)\,\mathrm{d}q = 0{,}01\,q^3 - 0{,}6\,q^2 + 20\,q + c,\ C(0) = c = 500.$$

Per produrre 50 unità si spendono quindi $C(50) = 1250 - 1500 + 1000 + 500 = 1250$ euro. Il costo marginale è sempre positivo (il suo discriminante è $1{,}44 - 2{,}4 < 0$), quindi il costo totale è crescente, come deve essere: produrre di più costa di più. Il modello, naturalmente, ha senso solo per $q \geq 0$, e la variabile q, che in realtà è un numero intero, viene trattata come continua.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Determina la primitiva F di $f(x) = x\,e^{-x}$ il cui grafico passa per l'origine. Studia la monotonia di F e calcola $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Che cosa rappresenta geometricamente il limite trovato?

La primitiva. Per parti, con fattore finito x e fattore differenziale $e^{-x}\,dx$ (una primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$): $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)\,e^{-x} + c$.

La condizione. $F(0) = -1 + c = 0$ dà $c = 1$, quindi $F(x) = 1 - (x+1)\,e^{-x}$. Verifica: $F'(x) = -e^{-x} + (x+1)\,e^{-x} = x\,e^{-x}$.

Monotonia. $F'(x) = x\,e^{-x}$ ha il segno di x, perché $e^{-x} > 0$: F decresce in $]-\infty; 0]$ e cresce in $[0; +\infty[$. Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto, con $F(0) = 0$; dunque $F(x) \geq 0$ per ogni x.

Il limite. $\lim_{x \to +\infty} (x+1)\,e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^{x}} = 0$ per la gerarchia degli infiniti (capitolo 3, dimostrata con de l'Hôpital nel capitolo 6). Quindi $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$: la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale del grafico di F per $x \to +\infty$. Il grafico, crescente per $x > 0$, si avvicina a questa retta restando sempre al di sotto, perché $(x+1)\,e^{-x} > 0$.

SINTESI

- Una **primitiva** di f in un intervallo I è una funzione F derivabile in I con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.
- Su un intervallo, due primitive della stessa funzione differiscono per una costante (conseguenza del teorema di Lagrange): i loro grafici sono traslati verticalmente e hanno tangenti parallele nei punti con la stessa ascissa.
- L'**integrale indefinito** $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ è l'insieme di tutte le primitive; è lineare. Si verifica sempre derivando.
- Ogni funzione continua su un intervallo ha primitive, ma alcune primitive non sono elementari: per esempio quelle di e^{-x^2}.
- Gli **integrali immediati** si leggono al contrario dalla tabella delle derivate; $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, con il valore assoluto, e $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ solo per $\alpha \neq -1$.
- Le **forme generalizzate** discendono dalla derivata della funzione composta: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$; in particolare $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + c$.
- **Sostituzione:** con $x = \varphi(t)$ si sostituisce anche $dx = \varphi'(t)\,dt$; alla fine si torna alla variabile x.
- **Per parti:** $\int f g'\,dx = f g - \int f' g\,dx$. Il fattore finito si sceglie tra le funzioni che si semplificano derivando; a volte l'integrale ritorna e si ricava da un'equazione.
- **Funzioni razionali** con denominatore di grado 1 o 2: divisione se necessario, poi fratti semplici ($\Delta > 0$), potenza -2 ($\Delta = 0$) o completamento del quadrato e arcotangente ($\Delta < 0$).
- Nei **problemi inversi** la costante d'integrazione è fissata da una condizione iniziale: dall'accelerazione $-g$ si ricavano $v = v_0 - gt$ e $s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$; dal costo marginale e dal costo fisso si ricava il costo totale.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti funzioni è una primitiva di $f(x) = 3x^2 + 2$?

   A. $6x$

   B. $x^3 + 2x + 7$

   C. $x^3 + 2$

   D. $3x^3 + 2x$

2. ● F e G sono due primitive della stessa funzione nell'intervallo $[0; 5]$, con $F(0) = 2$ e $G(0) = -1$. Allora $G(5) - F(5)$ vale

   A. -3

   B. 3

   C. 0

   D. non si può determinare senza conoscere la funzione

3. ● $\int \frac{1}{x}\,dx$ è uguale, nell'intervallo $]-\infty; 0[$, a

   A. $\ln x + c$

   B. $-\frac{1}{x^2} + c$

   C. $-\ln x + c$

   D. $\ln(-x) + c$

4. ● Quale uguaglianza è **falsa**?

   A. $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{3x} + c$

   B. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

   C. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + c$

   D. $\int x \cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + c$

5. ●● Per calcolare $\int x^2 \ln x\,dx$ per parti conviene scegliere

   A. $f(x) = x^2$ come fattore finito e $\ln x\,dx$ come fattore differenziale

   B. $f(x) = \ln x$ come fattore finito e $x^2\,dx$ come fattore differenziale

   C. $f(x) = x^2 \ln x$ e $g'(x) = 1$

   D. è indifferente: le due scelte richiedono lo stesso lavoro

6. ●● Nell'integrale $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+13}\,dx$ il denominatore ha

   A. $\Delta > 0$ e l'integrale è somma di due logaritmi

   B. $\Delta = 0$ e l'integrale contiene un termine $\frac{1}{x+2}$

   C. $\Delta < 0$ e l'integrale contiene un logaritmo e un'arcotangente

   D. $\Delta < 0$ e l'integrale contiene soltanto un'arcotangente

7. ●● Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, l'integrale $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ diventa

   A. $\int e^t\,dt$

   B. $\int \frac{e^t}{t}\,dt$

   C. $2\int e^t\,dt$

   D. $\int 2t\,e^t\,dt$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $F'(x) = G'(x)$ per ogni $x \neq 0$, allora $F - G$ è costante in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. b) $\int 0\,dx = c$. c) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$. d) $\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0} + c$. e) Ogni funzione continua in un intervallo ha una primitiva esprimibile con funzioni elementari.

9. ● Completa. Una funzione F si dice primitiva di f nell'intervallo I se è _____ in I e $F'(x) =$ _____ per ogni $x \in I$. Nella formula di integrazione per parti $\int f g'\,dx = f g - \int$ _____ dx, il fattore f si chiama fattore _____. Nella sostituzione $x = \varphi(t)$ il differenziale dx si sostituisce con _____.

Calcolare

10. ● Calcola gli integrali. a) $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\,dx$; b) $\int (2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2})\,dx$; c) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x}\,dx$; d) $\int (e^x + 2^x)\,dx$; e) $\int (3\operatorname{sen} x - \frac{2}{\cos^2 x})\,dx$; f) $\int \frac{4}{1 + x^2}\,dx$.

11. ● Calcola, trasformando prima l'integranda. a) $\int (x + 2)^2\,dx$ (in due modi, e confronta i risultati); b) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; c) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx$ (usa $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$); d) $\int \cos^2 x\,dx$ (usa la formula di duplicazione).

12. ● Calcola con le forme generalizzate. a) $\int 3x^2 (x^3 - 1)^4\,dx$; b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$; c) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$; d) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$; e) $\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx$; f) $\int \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx$.

13. ●● Calcola. a) $\int e^{4x-1}\,dx$; b) $\int \frac{1}{(2x + 1)^3}\,dx$; c) $\int \frac{1}{9 + x^2}\,dx$; d) $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$; e) $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$; f) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$.

14. ●● Calcola per sostituzione. a) $\int (1 - 5x)^7\,dx$; b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)}\,dx$ con $t = \sqrt{x}$; c) $\int \frac{1}{e^x + 1}\,dx$ con $t = e^x$; d) $\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}}\,dx$ con $t = \sqrt{x - 1}$.

15. ●● Calcola per parti. a) $\int x\,e^{-x}\,dx$; b) $\int x \cos x\,dx$; c) $\int x \ln x\,dx$; d) $\int (2x + 1)\,e^{2x}\,dx$.

16. ●● Calcola per parti (due volte, o con un integrale che ritorna). a) $\int x^2 \cos x\,dx$; b) $\int e^x \cos x\,dx$; c) $\int \ln^2 x\,dx$; d) $\int e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$.

17. ●● Calcola (denominatore di primo grado, o con $\Delta > 0$). a) $\int \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1}\,dx$; b) $\int \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$; c) $\int \frac{x + 4}{x^2 + 3x + 2}\,dx$; d) $\int \frac{3x}{2x^2 - 5x + 2}\,dx$.

18. ●● Calcola (con $\Delta = 0$ o $\Delta < 0$). a) $\int \frac{x}{(x + 3)^2}\,dx$; b) $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\,dx$; c) $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 4}\,dx$; d) $\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$.

19. ●● Trova la primitiva che soddisfa la condizione indicata. a) $f(x) = 6x^2 - 4x$, $F(1) = 5$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $F(e) = 0$; c) $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, $F(\pi) = 2$; d) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $F(0) = 3$.

20. ●●● Determina la funzione f tale che $f''(x) = 12x^2 - 6$, $f'(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Determina poi la funzione g tale che $g''(x) = e^{-x}$ e il cui grafico ha nel punto $(0; 2)$ una tangente orizzontale.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra la linearità dell'integrale indefinito: se F e G sono primitive di f e g in un intervallo e α, β sono reali, allora $\alpha F + \beta G$ è una primitiva di $\alpha f + \beta g$. Spiega perché, nel risultato, compare una sola costante arbitraria.

22. ●● Trova l'errore. «Integro $\int \frac{1}{x}\,dx$ per parti, con fattore finito $\frac{1}{x}$ e fattore differenziale $1 \cdot dx$: $\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$. Sottraendo $\int \frac{1}{x}\,dx$ da entrambi i membri ottengo $0 = 1$.»

23. ●● Dimostra che, se f è derivabile e non si annulla in un intervallo, allora $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln |f(x)| + c$. Distingui i casi $f > 0$ e $f < 0$ e spiega perché, in un intervallo, f non può cambiare segno.

24. ●●● Sia f una funzione continua e pari su $\mathbb{R}$, e sia F la sua primitiva tale che $F(0) = 0$. Dimostra che F è dispari. (Suggerimento: considera $G(x) = -F(-x)$, calcola G' e usa il teorema delle primitive.) Vale l'analogo con «dispari» al posto di «pari»?

25. ●● Spiega perché le funzioni $F(x) = \operatorname{arctg} x$ e $G(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ hanno la stessa derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcola $G - F$ in $]0; +\infty[$ e in $]-\infty; 0[$. Il risultato contraddice il teorema delle primitive?

Problemi

26. ●● Da un balcone alto 29,4 m si lancia un sasso verso l'alto con velocità 4,9 m/s. Trascura l'attrito e usa $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. a) Ricava $v(t)$ e $s(t)$ (quota dal suolo) integrando l'accelerazione. b) Trova la quota massima. c) Dopo quanto tempo, e con quale velocità, il sasso tocca il suolo?

27. ●● Un'auto parte da ferma e nei primi 10 secondi ha accelerazione $a(t) = 3 - 0{,}3t$ (in m/s^2, con t in secondi). a) Trova $v(t)$ e $s(t)$, con $s(0) = 0$. b) Quale velocità raggiunge dopo 10 s, e quanta strada ha percorso? c) Spiega perché nei 10 secondi la velocità cresce sempre, anche se l'accelerazione diminuisce.

28. ●● Un laboratorio artigiano (*dati inventati*) ha costo marginale $C'(q) = 0{,}06q + 8$ euro per pezzo e costi fissi di 900 euro; vende ogni pezzo a 20 euro. a) Trova il costo totale $C(q)$ e il profitto $P(q) = 20q - C(q)$. b) Per quali quantità il profitto non è negativo? c) Qual è il profitto massimo?

29. ●● In un circuito (*dati inventati*) l'intensità di corrente, in ampere, è $i(t) = 0{,}2\, e^{-t/5}$, con t in secondi. La carica $q(t)$ che ha attraversato una sezione del circuito dall'istante 0 soddisfa $q'(t) = i(t)$ e $q(0) = 0$. a) Trova $q(t)$. b) Quanta carica è passata dopo 5 s? c) A quale valore tende $q(t)$ per $t \to +\infty$?

30. ●●● Una curva passa per $A(0; 2)$ e in ogni suo punto di ascissa x la tangente ha pendenza $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$. a) Trova l'equazione della curva. b) Dimostra che è un ramo di un'iperbole equilatera e trovane gli asintoti. c) Esiste un punto della curva in cui la tangente è parallela alla retta $y = x$?

Verso l'esame

31. ●● Determina i valori dei parametri a e b per i quali $F(x) = (ax + b)\, e^x$ è una primitiva di $f(x) = x\, e^x$. Fra tutte le primitive di f, trova quella che ha un punto stazionario sull'asse x.

32. ●● Dimostra che la funzione $H(x) = \arctg x - \arctg \dfrac{x - 1}{x + 1}$ è costante in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1[$ e $]-1; +\infty[$ e determina il valore della costante in ognuno di essi.

33. ●● La pendenza della retta tangente al grafico di una funzione f nel suo punto di ascissa x è $2x - 4$, e il grafico passa per il punto $(0; 5)$. Dimostra che il grafico è una parabola, trovane il vertice e calcola la distanza del vertice dalla retta $3x + 4y = 0$.

34. ●●● Trova il valore del parametro reale k per cui $\int \dfrac{x + k}{x^2 - 1}\, dx = \ln|x - 1| + c$ nell'intervallo $]1; +\infty[$. Per gli altri valori di k, scrivi l'integrale come somma di due logaritmi.

35. ●●● **Problema.** Una funzione F, derivabile su $\mathbb{R}$, ha derivata $F'(x) = (x + 1)\, e^{-x}$ e il suo grafico Γ passa per l'origine. a) Verifica che $F(x) = 2 - (x + 2)\, e^{-x}$. b) Studia la monotonia di F, trova il minimo assoluto e calcola i limiti di F per $x \to \pm\infty$; individua gli eventuali asintoti di Γ. c) Sapendo che $F(x) = 2 - (x + 2)\, e^{-x}$, dimostra che l'equazione $F(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni, una delle quali nell'intervallo $]-2; -1[$. d) Sapendo che $F''(x) = -x\, e^{-x}$, dimostra che Γ ha un solo punto di flesso e scrivi l'equazione della tangente in esso.

PER APPROFONDIRE

- SPI — i capitoli sulle primitive e sulle tecniche di integrazione, con molti esercizi e una discussione dell'integrazione delle funzioni razionali.
- APO — un'esposizione rigorosa dell'integrazione per sostituzione e per parti, con le loro ipotesi.
- CJ — le tecniche d'integrazione presentate insieme alle applicazioni alla fisica.
- KLI — la nascita del calcolo integrale nel Seicento e lo sviluppo delle tecniche di integrazione nel Settecento.

Glossario del capitolo

Campo delle pendenze
Insieme dei trattini di pendenza $f(x)$ disegnati nei punti del piano: le primitive di f sono le curve tangenti in ogni punto al trattino corrispondente.

Completamento del quadrato
Scrittura di un trinomio $x^2 + px + q$ con $\Delta < 0$ nella forma $(x + h)^2 + k^2$, che riconduce l'integrale di $\dfrac{1}{x^2 + px + q}$ a un'arcotangente.

Condizione iniziale
Valore assegnato alla funzione incognita in un punto (per esempio $F(1) = 3$, oppure $s(0) = s_0$), che determina la costante d'integrazione.

Costante d'integrazione
La costante arbitraria c che compare nell'integrale indefinito; su un intervallo descrive tutte le primitive.

Fattore differenziale
Nell'integrazione per parti, il fattore $g'(x)\,\mathrm{d}x$ di cui si prende una primitiva $g(x)$.

Fattore finito
Nell'integrazione per parti, il fattore $f(x)$ che viene derivato.

Fratti semplici
Frazioni del tipo $\dfrac{A}{x - x_1}$ o $\dfrac{B}{(x - x_0)^2}$ in cui si scompone una funzione razionale per integrarla.

Funzione integranda
La funzione f che compare sotto il segno di integrale in $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Integrale immediato
Integrale che si ottiene leggendo al contrario una derivata nota.

Integrale immediato generalizzato
Integrale della forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c$, ottenuto dalla derivata della funzione composta.

Integrale indefinito
L'insieme di tutte le primitive di una funzione in un intervallo, indicato con $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.

Integrazione per parti
Metodo basato sulla formula $\int f\,g'\,\mathrm{d}x = f\,g - \int f'\,g\,\mathrm{d}x$, che discende dalla derivata del prodotto.

Integrazione per sostituzione
Metodo che cambia variabile, $x = \varphi(t)$ con $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, per ricondurre un integrale a uno più semplice; discende dalla derivata della funzione composta.

Linearità
Proprietà dell'integrale indefinito: $\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f\,\mathrm{d}x + \beta \int g\,\mathrm{d}x$.

Primitiva
Funzione F derivabile in un intervallo I tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Variabile d'integrazione
La variabile indicata dal differenziale (x in $\int f(x)\,\mathrm{d}x$), rispetto alla quale si cerca la primitiva.

Soluzioni

1. B. $(x^3 + 2x + 7)' = 3x^2 + 2$. La A è la derivata di f; la C ha derivata $3x^2$; la D ha derivata $9x^2 + 2$.

2. A. Su un intervallo $G - F$ è costante, quindi $G(5) - F(5) = G(0) - F(0) = -1 - 2 = -3$.

3. D. Per $x < 0$ è $|x| = -x$ e $[\ln(-x)]' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$; $\ln x$ e $-\ln x$ non sono neppure definiti per $x < 0$.

4. D. L'integrale del prodotto non è il prodotto delle primitive: per parti, $\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$. Le altre tre si verificano derivando.

5. B. $\ln x$ si semplifica derivando $(1/x)$ e x^2 ha la primitiva $x^3/3$: $\int x^2 \ln x\,dx = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \int \dfrac{x^2}{3}\,dx = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \dfrac{x^3}{9} + c$. Con la scelta A servirebbe una primitiva di $\ln x$ e l'integrale si complicherebbe.

6. C. $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$. Il numeratore è $(2x + 4) - 1$: la prima parte dà $\ln(x^2 + 4x + 13)$, la seconda, con $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$, dà $-\dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x + 2}{3}$.

7. C. Da $x = t^2$ si ha $dx = 2t\,dt$, e $\dfrac{e^t}{t} \cdot 2t\,dt = 2e^t\,dt$. Quindi l'integrale vale $2e^{\sqrt{x}} + c$.

8. a) Falso: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo; $F - G$ è costante su $]-\infty; 0[$ e su $]0; +\infty[$, con costanti eventualmente diverse. b) Vero: le primitive di 0 sono le costanti. c) Vero (linearità). d) Falso: la regola della potenza vale per $\alpha \neq -1$; $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$. e) Falso: ha primitive (capitolo 10), ma non sempre elementari, per esempio e^{-x^2}.

9. Derivabile; $f(x)$; f' g; finito; $\varphi'(t)\,dt$.

10. a) $x^5 - x^3 + x + c$. b) $\dfrac{4}{3} x\sqrt{x} + \dfrac{3}{x} + c$. c) $\dfrac{x^3}{3} - 2x + \ln|x| + c$. d) $e^x + \dfrac{2^x}{\ln 2} + c$. e) $-3 \cos x - 2 \operatorname{tg} x + c$. f) $4 \operatorname{arctg} x + c$.

11. a) Sviluppando: $\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$; come forma generalizzata: $\dfrac{(x + 2)^3}{3} + c$. Le due espressioni differiscono per la costante $\dfrac{8}{3}$. b) $\dfrac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi $\dfrac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + c$. c) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, quindi $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$. d) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, quindi $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$.

12. a) $\dfrac{(x^3 - 1)^5}{5} + c$. b) $\sqrt{x^2 + 9} + c$. c) $\ln|\operatorname{sen} x| + c$. d) $\dfrac{1}{3} e^{x^3} + c$. e) $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + c$. f) $\ln(e^x + 2) + c$.

13. a) $\dfrac{1}{4} e^{4x - 1} + c$. b) $-\dfrac{1}{4(2x + 1)^2} + c$. c) $\dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} + c$. d) $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + c$ (con $f = x^2$, $f' = 2x$). e) $\ln|\ln x| + c$, per $x > 0$, $x \neq 1$ (forma f'/f con $f = \ln x$). f) $\dfrac{1}{2} \operatorname{arcsen} 2x + c$.

14. a) $-\dfrac{(1 - 5x)^8}{40} + c$. b) $dx = 2t\,dt$: $\int \dfrac{2}{1 + t^2}\,dt = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c$. c) $dx = \dfrac{dt}{t}$: $\int \dfrac{1}{t(t + 1)}\,dt = \int \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + 1}\right) dt = \ln t - \ln(t + 1) = x - \ln(e^x + 1) + c$. d) $x = t^2 + 1$, $dx = 2t\,dt$: $\int 2(t^2 + 1)\,dt = \dfrac{2}{3} t^3 + 2t + c = \dfrac{2}{3} (x - 1)\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 1} + c = \dfrac{2}{3} (x + 2)\sqrt{x - 1} + c$.

15. a) $-(x + 1)\, e^{-x} + c$. b) $x \operatorname{sen} x + \cos x + c$. c) $\dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{x^2}{4} + c$. d) Con $f = 2x + 1$, $g = \dfrac{1}{2} e^{2x}$: $\dfrac{2x + 1}{2} e^{2x} - \int e^{2x}\,dx = \dfrac{2x + 1}{2} e^{2x} - \dfrac{1}{2} e^{2x} + c = x\, e^{2x} + c$.

16. a) $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + c$. b) $\dfrac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$. c) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$.

d) $-\frac{1}{2}\,e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$.

17. a) Divisione: $2x + 1 + \frac{4}{x-1}$, quindi $x^2 + x + 4\ln|x-1| + c$. b) $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$, quindi $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$. c) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2}$, quindi $3\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + c$. d) $2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$ e $\frac{3x}{(2x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2x-1}$, quindi $2\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$.

18. a) $\frac{x}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}$, quindi $\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + c$. b) $(x+3)^2 + 1$: $\operatorname{arctg}(x+3) + c$. c) $\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$. d) $x + 1 = \frac{1}{2}(2x-2) + 2$ e $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$: $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c$.

19. a) $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + c$, $F(1) = c = 5$: $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$. b) $F(x) = \ln x + c$, $1 + c = 0$: $F(x) = \ln x - 1$. c) $F(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + c$, $F(\pi) = -1 + c = 2$: $F(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + 3$. d) $F(x) = \ln(x^2+1) + c$, $c = 3$: $F(x) = \ln(x^2+1) + 3$.

20. $f'(x) = 4x^3 - 6x + c_1$, $c_1 = 1$; $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + c_2$, $f(1) = 1 - 3 + 1 + c_2 = 0$, $c_2 = 1$: $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$. Per g: $g'(x) = -e^{-x} + c_1$, $g'(0) = -1 + c_1 = 0$, $c_1 = 1$; $g(x) = e^{-x} + x + c_2$, $g(0) = 1 + c_2 = 2$, $c_2 = 1$: $g(x) = e^{-x} + x + 1$.

21. $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$ per la linearità della derivata. Le primitive di $\alpha f + \beta g$ sono allora $\alpha F + \beta G + c$; scrivendo $\alpha(F + c_1) + \beta(G + c_2)$ si ottiene $\alpha F + \beta G + (\alpha c_1 + \beta c_2)$, e $\alpha c_1 + \beta c_2$ è ancora una costante arbitraria: le costanti si fondono in una.

22. I due membri sono integrali indefiniti, cioè insiemi di primitive definiti a meno di una costante: l'uguaglianza dice che aggiungendo 1 a una primitiva di $1/x$ si ottiene ancora una primitiva di $1/x$, il che è vero ($\ln|x| + 1$). Non si può «sottrarre» $\int \frac{1}{x}\,dx$ come se fosse un numero: le due occorrenze indicano primitive che possono differire per una costante.

23. Se $f > 0$: $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$. Se $f < 0$: $[\ln(-f)]' = \frac{-f'}{-f} = \frac{f'}{f}$. In entrambi i casi $\ln|f|$ è una primitiva. Una funzione derivabile è continua; se cambiasse segno in un intervallo, per il teorema degli zeri (capitolo 4) si annullerebbe in un punto, contro l'ipotesi.

24. $G'(x) = -F'(-x)\cdot(-1) = f(-x) = f(x)$, perché f è pari. Dunque G e F sono primitive di f su $\mathbb{R}$, che è un intervallo, e $G = F + c$; per $x = 0$: $G(0) = -F(0) = 0 = F(0) + c$, quindi $c = 0$ e $-F(-x) = F(x)$: F è dispari. Se f è dispari, ogni sua primitiva è pari: con $G(x) = F(-x)$ si ha $G'(x) = -f(-x) = f(x)$, quindi $G = F + c$ e, in $x = 0$, $c = 0$ (qui non serve la condizione $F(0) = 0$).

25. $G'(x) = -\frac{1}{1 + 1/x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2+1} = F'(x)$. Per $x > 0$: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, quindi $G - F = -\frac{\pi}{2}$; per $x < 0$ la somma vale $-\frac{\pi}{2}$, quindi $G - F = \frac{\pi}{2}$. Non c'è contraddizione: il teorema vale su un intervallo, e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non lo è; su ciascuno dei due intervalli la differenza è costante.

26. a) $v(t) = 4{,}9 - 9{,}8t$; $s(t) = 29{,}4 + 4{,}9t - 4{,}9t^2$. b) $v = 0$ per $t = 0{,}5$ s; $s(0{,}5) = 29{,}4 + 2{,}45 - 1{,}225 = 30{,}625$ m $\approx 30{,}6$ m. c) $s(t) = 0$: $t^2 - t - 6 = 0$, $t = 3$ s (l'altra radice, -2, non è accettabile); $v(3) = 4{,}9 - 29{,}4 = -24{,}5$ m/s, cioè 24,5 m/s verso il basso.

27. a) $v(t) = 3t - 0{,}15t^2$; $s(t) = 1{,}5t^2 - 0{,}05t^3$. b) $v(10) = 30 - 15 = 15$ m/s (54 km/h); $s(10) = 150 - 50 = 100$ m. c) $v'(t) = a(t) = 3 - 0{,}3t > 0$ per $0 \le t < 10$: l'accelerazione positiva fa crescere la velocità, anche se ogni secondo la fa crescere di meno.

28. a) $C(q) = 0{,}03q^2 + 8q + 900$; $P(q) = -0{,}03q^2 + 12q - 900$. b) $P(q) \ge 0$ per $q^2 - 400q + 30000 \le 0$, cioè $100 \le q \le 300$. c) $P'(q) = -0{,}06q + 12 = 0$ per $q = 200$; $P(200) = -1200 + 2400 - 900 = 300$ euro.

29. a) $q(t) = \int 0{,}2\,e^{-t/5}\,dt = -e^{-t/5} + c$; $q(0) = -1 + c = 0$: $q(t) = 1 - e^{-t/5}$ (in coulomb). b) $q(5) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$ C.

c) $q(t) \to 1$ C.

30. a) $y = \sqrt{x^2+9} + c$; $3 + c = 2$, $c = -1$: $y = \sqrt{x^2+9} - 1$. b) $y + 1 = \sqrt{x^2+9}$ con $y + 1 > 0$; elevando al quadrato, $(y+1)^2 - x^2 = 9$: è il ramo superiore dell'iperbole equilatera di centro $(0; -1)$, con asintoti $y = x - 1$ e $y = -x - 1$. c) No: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$ richiederebbe $x = \sqrt{x^2+9}$, impossibile perché $\sqrt{x^2+9} > |x|$; le pendenze sono comprese tra -1 e 1 esclusi.

31. $F'(x) = (ax + a + b)\, e^x = x\, e^x$ per ogni x se $a = 1$ e $a + b = 0$: $a = 1$, $b = -1$. Le primitive sono $(x-1)\, e^x + c$; l'unico punto stazionario è $x = 0$ (dove $f = 0$), e deve stare sull'asse x: $-1 + c = 0$, $c = 1$. La primitiva cercata è $F(x) = (x-1)\, e^x + 1$.

32. Posto $u = \dfrac{x-1}{x+1}$, $u' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ e $1 + u^2 = \dfrac{2(x^2+1)}{(x+1)^2}$, quindi $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $H'(x) = 0$. In $]-1; +\infty[$: $H(0) = 0 - \operatorname{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{4}$. In $]-\infty; -1[$: per $x \to -\infty$, $\operatorname{arctg} x \to -\dfrac{\pi}{2}$ e $u \to 1$, quindi $H = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$ (per esempio $H(-2) = \operatorname{arctg}(-2) - \operatorname{arctg} 3 = -\dfrac{3\pi}{4}$).

33. $f(x) = x^2 - 4x + c$, $f(0) = c = 5$: $y = x^2 - 4x + 5$, una parabola con asse verticale. Il vertice è dove $f'(x) = 0$, cioè in $V(2; 1)$. Distanza: $\dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

34. $\dfrac{x+k}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$ con $A = \dfrac{1+k}{2}$ e $B = \dfrac{1-k}{2}$ (si ottengono per $x = 1$ e $x = -1$). L'integrale è $\dfrac{1+k}{2} \ln|x-1| + \dfrac{1-k}{2} \ln|x+1| + c$, che coincide con $\ln|x-1| + c$ se $B = 0$ e $A = 1$, cioè $k = 1$: infatti $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}$.

35. a) Per parti, con $f = x + 1$ e $g = -e^{-x}$: $\int (x+1)\, e^{-x}\, dx = -(x+1)\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -(x+2)\, e^{-x} + c$; $F(0) = -2 + c = 0$, $c = 2$. b) $F' > 0$ per $x > -1$, $F' < 0$ per $x < -1$: F decresce in $]-\infty; -1]$, cresce in $[-1; +\infty[$; minimo assoluto $F(-1) = 2 - e \approx -0{,}718$. Per $x \to +\infty$, $(x+2)\, e^{-x} \to 0$ (gerarchia degli infiniti) e $F \to 2$: asintoto orizzontale $y = 2$. Per $x \to -\infty$, $(x+2) \to -\infty$ e $e^{-x} \to +\infty$, quindi $F \to +\infty$; inoltre $\dfrac{F(x)}{x} \to -\infty$, quindi non ci sono asintoti obliqui. Non ci sono asintoti verticali, perché F è continua su $\mathbb{R}$. c) In $[-1; +\infty[$ F è strettamente crescente e $F(0) = 0$: una sola soluzione, $x = 0$. In $]-\infty; -1]$ F è strettamente decrescente, con $F(-2) = 2 > 0$ e $F(-1) = 2 - e < 0$: per il teorema degli zeri c'è esattamente una soluzione, in $]-2; -1[$ (vale circa $-1{,}59$). d) F'' ha il segno opposto a quello di x: Γ volge la concavità verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso per $x > 0$; l'unico flesso è $O(0; 0)$. La pendenza è $F'(0) = 1$, la tangente inflessionale è $y = x$.