CAPITOLO

8

Ottimizzazione, approssimazione e modelli

Fra tutte le scelte possibili ce n'è spesso una migliore delle altre: la derivata è lo strumento per riconoscerla e il calcolo approssimato per raggiungerla.

OBIETTIVI

1. Impostare un problema di ottimizzazione: scegliere la variabile e le sue limitazioni, scrivere la funzione obiettivo, studiarla e rispondere alla domanda.
2. Risolvere problemi di massimo e di minimo di geometria piana, solida e analitica, di fisica e di economia.
3. Ricavare la legge della rifrazione dal principio di Fermat.
4. Risolvere problemi di velocità di variazione correlate.
5. Separare le radici di un'equazione e approssimarle con la bisezione e con il metodo di Newton, conoscendone la condizione di convergenza.
6. Confrontare modelli diversi per gli stessi dati con il metodo dei minimi quadrati.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 Come si imposta un problema di ottimizzazione 2
8.2 Problemi di geometria 4
8.3 Ottimizzare in fisica, in economia e nelle scienze 10
8.4 Velocità di variazione correlate 14
8.5 Risoluzione approssimata di equazioni 17
8.6 Modelli diversi per gli stessi dati 20

Matematica 5 · Parte II · Calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 8: Ottimizzazione, approssimazione e modelli · pagine 217–244 del volume completo · estratto per lo studio

Una lattina deve contenere 330 mL di bibita: quale forma richiede meno lamiera? Un raggio di luce passa dall'aria all'acqua: perché piega proprio di quell'angolo? Un'azienda decide quanti pezzi produrre: quale quantità rende massimo il guadagno? Sono domande di tipo diverso, ma hanno la stessa struttura: una grandezza dipende da una scelta, e fra tutte le scelte possibili cerchiamo la *migliore*. Le *Indicazioni nazionali* chiedono di acquisire «l'idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi ambiti»: questo capitolo è dedicato a lei.

Nei capitoli 6 e 7 abbiamo costruito gli strumenti: il teorema di Fermat, il criterio di monotonia, lo studio del segno della derivata, il confronto fra i punti stazionari e gli estremi di un intervallo. Qui li usiamo per *risolvere problemi*, cioè per tradurre una situazione descritta a parole in una funzione da studiare. Mantenere una promessa di *Matematica 4* (la lattina più economica ha l'altezza uguale al diametro) sarà uno dei primi risultati.

La derivata serve anche ad *approssimare*. Molte equazioni, anche semplicissime come $x^3 - 2x - 5 = 0$ o $\cos x = x$, non si risolvono con una formula; il metodo delle tangenti di Newton ne calcola le soluzioni con tutte le cifre che vogliamo in pochi passi. L'ultimo paragrafo, infine, mette a confronto modelli diversi per gli stessi dati e mostra che anche «scegliere il modello migliore» è un problema di ottimizzazione.

8.1 Come si imposta un problema di ottimizzazione

8.1.1 Dalla situazione alla funzione obiettivo

Un **problema di ottimizzazione** chiede di trovare, fra tutte le configurazioni ammesse da una situazione, quella che rende massima o minima una certa grandezza. La grandezza da ottimizzare si chiama **funzione obiettivo**; le condizioni che la situazione impone (un volume fissato, un perimetro assegnato, una figura inscritta in un'altra) si chiamano **vincoli**. In questo volume trattiamo problemi in cui, usando i vincoli, la funzione obiettivo si può scrivere in funzione di *una sola* variabile.

La parte più delicata non è il calcolo, ma la traduzione. Prendiamo un esempio classico. Da un foglio quadrato di cartone di lato 30 cm si tagliano agli angoli quattro quadratini uguali e si piegano i lembi per formare una scatola aperta. Quanto deve essere il lato dei quadratini perché la scatola abbia volume massimo?

La scelta che possiamo fare è il lato x dei quadratini: è la *variabile* del problema. La scatola ha per base un quadrato di lato $30 - 2x$ e altezza x, quindi il suo volume è

$$V(x) = x(30 - 2x)^2.$$

Non tutti i valori di x hanno senso. Il lato dei quadratini deve essere positivo e la base deve esistere, cioè $30 - 2x > 0$: dunque $0 < x < 15$. Queste sono le **limitazioni geometriche** della variabile, e vanno scritte *prima* di fare i conti: sono il dominio della funzione obiettivo *nel problema*, che di solito è più piccolo del dominio naturale dell'espressione. Agli estremi la scatola degenera: per $x = 0$ non ha altezza, per $x = 15$ non ha base, e il volume è 0 in entrambi i casi.

Deriviamo con la regola del prodotto e raccogliamo:

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x).$$

Nell'intervallo $]0; 15[$ il fattore $30 - 2x$ è positivo, quindi il segno di V' è quello di $30 - 6x$: positivo per $x < 5$, negativo per $x > 5$. La funzione cresce fino a $x = 5$ e poi decresce, perciò $x = 5$ è il punto di massimo assoluto in $]0; 15[$. Il volume massimo è $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000$ cm^3, cioè 2 litri. Notiamo l'ultimo passo, spesso dimenticato: la risposta va data *con le parole del problema* — «bisogna tagliare quadratini di lato 5 cm; la scatola ha base 20 cm × 20 cm, altezza 5 cm e contiene 2 L».

IN SINTESI

Il metodo per i problemi di ottimizzazione.

1. **Scegli la variabile** x e dichiarane il significato (con l'unità di misura).
2. **Scrivi le limitazioni** di x imposte dal problema: un intervallo I, chiuso o aperto.
3. **Scrivi la funzione obiettivo** $f(x)$, usando i vincoli per eliminare le altre grandezze.
4. **Studia f su I**: punti stazionari, segno di f', eventuali punti di non derivabilità.
5. **Controlla gli estremi** di I: su un intervallo chiuso confronta i valori agli estremi con quelli nei punti stazionari; su un intervallo aperto studia i limiti agli estremi.
6. **Rispondi alla domanda** con le parole del problema, verificando che il risultato sia sensato.

8.1.2 Massimi assoluti su un intervallo

Il passo 5 merita attenzione. Se la funzione obiettivo è continua su un intervallo *chiuso e limitato* $[a; b]$, il teorema di Weierstrass (capitolo 4) garantisce che massimo e minimo assoluti esistono; per il teorema di Fermat (capitolo 6), se sono assunti in un punto interno in cui f è derivabile, lì la derivata è nulla. Quindi i candidati sono pochi: i punti stazionari interni, i punti interni in cui f non è derivabile e i due estremi a e b. Basta calcolare f in ciascuno e confrontare.

Se invece l'intervallo è aperto o illimitato, come nel problema della scatola, il massimo potrebbe non esistere, e bisogna ragionare sulla monotonia. In molti problemi si incontra una situazione fortunata, che conviene riconoscere subito.

DA RICORDARE

Un solo punto stazionario. Sia f derivabile su un intervallo I (aperto o chiuso, limitato o no) e sia x_0 l'*unico* punto di I in cui f' si annulla. Se x_0 è un punto di massimo relativo, allora è il punto di massimo assoluto di f su I; se è di minimo relativo, è di minimo assoluto.

L'idea della dimostrazione: se esistesse x_1 con $f(x_1) > f(x_0)$, sull'intervallo chiuso di estremi x_0 e x_1 il minimo di f, che esiste per Weierstrass, sarebbe assunto in un punto interno, e lì f' si annullerebbe ancora, contro l'ipotesi (la dimostrazione completa è un esercizio). Attenzione: l'ipotesi «un solo punto stazionario» è essenziale.

8.2 Problemi di geometria

8.2.1 Il rettangolo inscritto in una semicirconferenza

In *Matematica 4* abbiamo trovato con la goniometria il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio r, con un lato sul diametro: se θ è l'angolo al centro, l'area è $r^2 \operatorname{sen} 2\theta$, massima per $\theta = \pi/4$. Ritroviamo il risultato con le derivate, scegliendo come variabile la metà della base, x, con $0 \le x \le r$ (Figura 8.1). Il vertice P sulla semicirconferenza ha ordinata $\sqrt{r^2 - x^2}$, quindi

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le r.$$

Agli estremi l'area è nulla. Derivando:

$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 0 \le x < r.$$

Il numeratore si annulla per $x = r/\sqrt{2} = (\sqrt{2}/2)r$; prima di quel valore $A' > 0$, dopo $A' < 0$. Il massimo è $A = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$: la base è $r\sqrt{2}$, l'altezza $r/\sqrt{2}$, cioè la base è il doppio dell'altezza. È la stessa risposta di *Matematica 4*, con $x = r\cos\theta$ e $\theta = \pi/4$.

Un'osservazione utile per i conti: poiché $A(x) \ge 0$, A e A^2 hanno il massimo nello stesso punto (la funzione $t \mapsto t^2$ è crescente per $t \ge 0$). Massimizzare $A^2 = 4x^2(r^2 - x^2) = 4r^2x^2 - 4x^4$ evita la radice: la derivata $8r^2x - 16x^3 = 8x(r^2 - 2x^2)$ si annulla per $x = r/\sqrt{2}$, come prima. Lo stesso trucco vale per le distanze, che sono sempre radici quadrate.

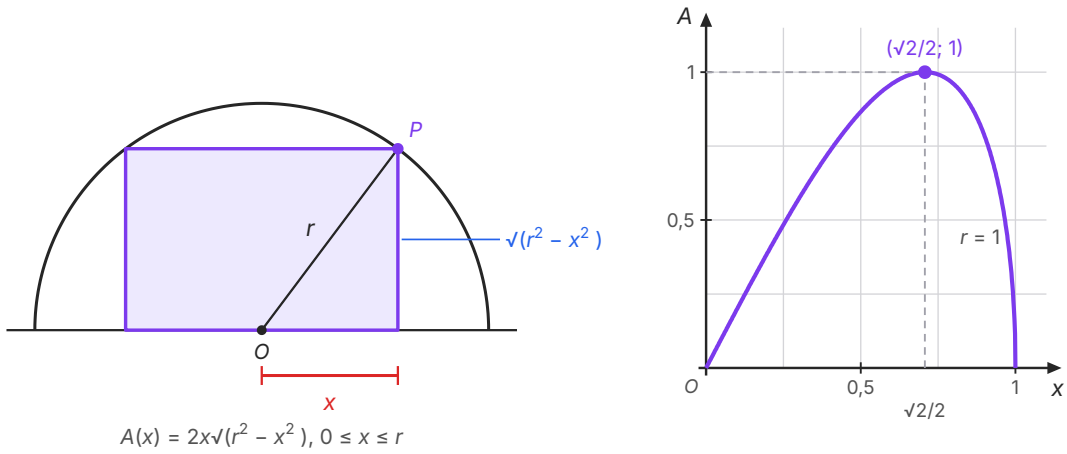


Figura 8.1 A sinistra, un rettangolo inscritto in una semicirconferenza di raggio r: la metà della base è x e l'altezza è $\sqrt{r^2 - x^2}$. A destra, il grafico dell'area $A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ per $r = 1$, calcolato dalla formula: il massimo è nel punto $(\sqrt{2}/2;\, 1)$, cioè per $x = r/\sqrt{2}$, con area r^2.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Fra i cilindri inscritti in una sfera di raggio R trova quello di volume massimo. Qual è il rapporto fra il suo volume e quello della sfera?

Soluzione. Nella sezione assiale il cilindro è un rettangolo inscritto nel cerchio massimo. Scegliamo come variabile l'altezza h del cilindro, con $0 \le h \le 2R$. Il raggio r di base, la metà dell'altezza e il raggio R della sfera formano un triangolo rettangolo, quindi $r^2 = R^2 - h^2/4$ e

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right).$$

La derivata $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$ si annulla in $[0;\, 2R]$ solo per $h = 2R/\sqrt{3}$; è positiva prima e negativa dopo, e agli estremi il volume è nullo. Quindi il massimo si ha per

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R, \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}R, \quad V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3.$$

Il rapporto con il volume della sfera è $V_{\max} : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$: il cilindro più capiente occupa poco meno del 58% della sfera.

Controllo. In *Matematica 4*, con un foglio di calcolo e $R = 10$ cm, avevamo trovato il massimo per $h \approx 11{,}55$ cm, con $V \approx 2418$ cm^3. La formula dà $h = 20/\sqrt{3} \approx 11{,}547$ cm e $V = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \cdot 1000 \approx 2418{,}4$ cm^3: la tabella aveva visto giusto, ora lo sappiamo con certezza.

8.2.2 La lattina più economica

Ecco la promessa di *Matematica 4*. Una lattina cilindrica deve avere volume V assegnato; vogliamo la superficie totale minima, cioè la minor quantità di lamiera. Con raggio r e altezza h il vincolo è $\pi r^2 h = V$, da cui $h = V/(\pi r^2)$; la funzione obiettivo, scritta in funzione del solo raggio, è

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0.$$

Il primo addendo (le due basi) cresce con r, il secondo (la superficie laterale) decresce: il minimo nasce dal compromesso fra i due (Figura 8.2). La variabile varia in un intervallo aperto e illimitato, ma $S(r) \to +\infty$ sia per $r \to 0^+$ sia per $r \to +\infty$. La derivata è

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2},$$

negativa per $r^3 < V/(2\pi)$ e positiva per $r^3 > V/(2\pi)$. Dunque il minimo assoluto si ha per $r^3 = V/(2\pi)$, cioè per $V = 2\pi r^3$. Sostituendo nel vincolo:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r.$$

La lattina più economica ha l'altezza uguale al diametro di base, qualunque sia il volume: è un *cilindro equilatero*, la cui sezione assiale è un quadrato. Per $V = 330$ cm^3 si trova $r = \sqrt[3]{330/(2\pi)}$, cioè $r \approx 3{,}74$ cm e $h \approx 7{,}49$ cm, con superficie minima $S = 6\pi r^2 \approx 264{,}4$ cm^2: sono i valori trovati in *Matematica 4* con il foglio di calcolo.

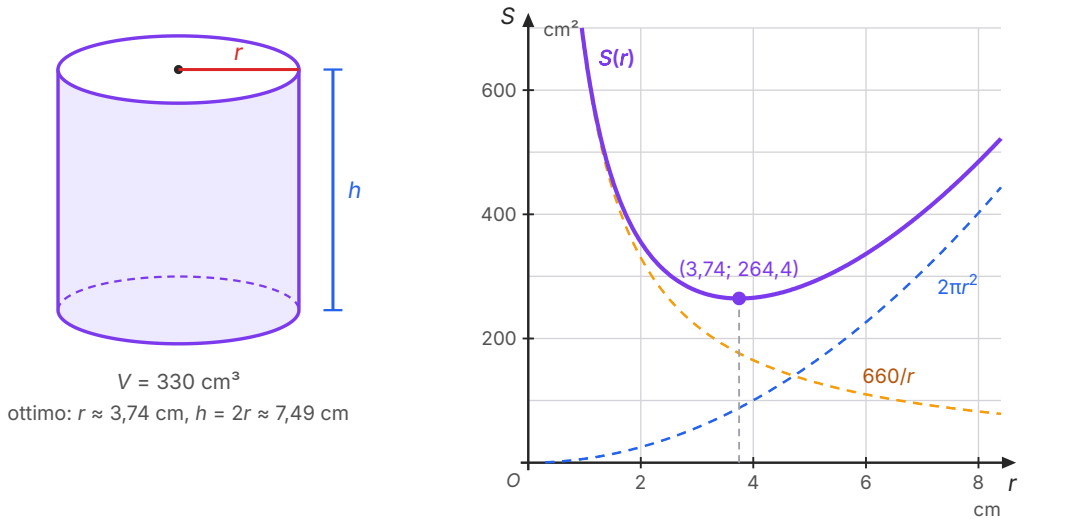


Figura 8.2 La lattina cilindrica di volume $V = 330$ cm³ e il grafico della superficie totale $S(r) = 2\pi r^2 + 660/r$ (in viola), somma dell'area delle basi $2\pi r^2$ (in blu, tratteggiata) e dell'area laterale $660/r$ (in arancione, tratteggiata). Il minimo è nel punto (3,74; 264,4): il raggio ottimo vale circa 3,74 cm e l'altezza è il doppio del raggio. Curve calcolate dalle formule.

Il problema ha un «gemello»: fissata la quantità di lamiera S, trovare la lattina di volume massimo. Dal vincolo $2\pi r^2 + 2\pi rh = S$ si ricava $h = (S - 2\pi r^2)/(2\pi r)$, e il volume diventa $V(r) = \pi r^2 h = \frac{1}{2}(Sr - 2\pi r^3)$, con $0 < r < \sqrt{S/(2\pi)}$. La derivata $V'(r) = \frac{1}{2}(S - 6\pi r^2)$ si annulla per $S = 6\pi r^2$, e allora $h = (6\pi r^2 - 2\pi r^2)/(2\pi r) = 2r$: *di nuovo il cilindro equilatero*. Non è un caso: i due problemi descrivono la stessa forma ottimale guardata da due lati.

Le lattine reali sono più alte e più strette: il modello trascura che fondo e coperchio sono più spessi della parete. Se la lamiera delle basi costa k volte quella della parete, si minimizza $2k\pi r^2 + 2V/r$ e l'ottimo diventa $h = 2kr$. Un modello è buono se le sue ipotesi descrivono il problema che ci interessa davvero.

Con il computer: la lattina di volume massimo

Fissiamo $S = 600$ cm² e scriviamo in un foglio di calcolo i valori di $V(r) = 300r - \pi r^3$, con r in centimetri (Tabella 8.1). In una colonna mettiamo i valori di r, nella successiva la formula, per esempio =300*A2-PI()*A2^3, e la copiamo verso il basso. La tabella mostra che il massimo è fra 5,5 e 5,7; affinando il passo si arriva a $r \approx 5{,}64$. Il calcolo esatto dà $r = \sqrt{600/(6\pi)} = 10/\sqrt{\pi} \approx 5{,}642$ cm, $h = 2r \approx 11{,}28$ cm e $V \approx 1128{,}4$ cm³. Il foglio di calcolo *suggerisce* dove sta il massimo, la derivata lo *trova* e dice perché è proprio quello.

Tabella 8.1 Volume $V(r) = 300r - \pi r^3$ (in cm³) della lattina con superficie totale 600 cm², per alcuni valori del raggio r (in cm). Valori arrotondati al centesimo.

r	$V(r)$	r	$V(r)$
1	296,86	5,6	1128,29
2	574,87	5,7	1128,20
3	815,18	6	1121,42
4	998,94	7	1022,43
5	1107,30	8	791,50
5,5	1127,32	9	409,78

8.2.3 Il cono circoscritto a una sfera

Un problema di minimo in cui la variabile è legata alla figura in modo meno immediato. Fra i coni circoscritti a una sfera di raggio r (cioè con la sfera tangente alla base e alla superficie laterale) cerchiamo quello di volume minimo. Nella sezione assiale il cono è un triangolo isoscele di altezza h e raggio di base R, circoscritto a un cerchio di raggio r con il centro O sull'altezza, a distanza r dalla base. Sia C il vertice del cono e T il punto in cui il cerchio tocca il lato obliquo: il triangolo CTO è rettangolo in T, con $CO = h - r$ e $OT = r$, quindi $CT = \sqrt{(h-r)^2 - r^2} = \sqrt{h^2 - 2rh}$. È simile al triangolo formato dal vertice, dal centro della base e da un estremo del diametro di base (hanno l'angolo in C in comune e un angolo retto), perciò

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{h^2 - 2rh}}, \quad R^2 = \frac{r^2h^2}{h^2 - 2rh} = \frac{r^2h}{h - 2r}, \quad h > 2r.$$

Il volume del cono è dunque $V(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2r}$, e

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{2h(h-2r) - h^2}{(h-2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2}.$$

Per $2r < h < 4r$ la derivata è negativa, per $h > 4r$ è positiva: il minimo assoluto è per $h = 4r$, con $R^2 = 2r^2$, cioè $R = r\sqrt{2}$. Il volume minimo è $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2r^2 \cdot 4r = \frac{8}{3}\pi r^3$, esattamente *il doppio* del volume della sfera. Agli estremi dell'intervallo il volume tende a $+\infty$: un cono bassissimo deve essere larghissimo, uno altissimo è comunque largo almeno $2r$ alla base.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Quesito. Fra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio R, determina quello di volume massimo e verifica che il suo volume è $\frac{8}{27}$ del volume della sfera.

Soluzione. Nella sezione assiale il cono è un triangolo isoscele inscritto in un cerchio massimo; il diametro che passa per il vertice del cono contiene l'altezza h del cono, e il suo prolungamento oltre la base è lungo $2R - h$. Il raggio ρ della base è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo inscritto nella semicirconferenza, quindi, per il secondo teorema di Euclide, $\rho^2 = h(2R - h)$. La variabile è h, con $0 \le h \le 2R$, e la funzione obiettivo è

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3).$$

Agli estremi il cono degenera e $V = 0$. La derivata $V'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = \frac{\pi}{3}h(4R - 3h)$ è positiva per $0 < h < \frac{4}{3}R$ e negativa per $\frac{4}{3}R < h < 2R$: il massimo si ha per $h = \frac{4}{3}R$, con $\rho^2 = \frac{4}{3}R \cdot \frac{2}{3}R = \frac{8}{9}R^2$ e

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{9}R^2 \cdot \frac{4}{3}R = \frac{32}{81}\pi R^3.$$

Il rapporto con il volume della sfera è $\frac{32}{81} : \frac{4}{3} = \frac{32 \cdot 3}{81 \cdot 4} = \frac{8}{27}$, come richiesto. Il cono ottimo è più alto del raggio: la sua base sta sotto il centro della sfera, a distanza $\frac{R}{3}$ da esso.

Che cosa valuta un correttore. La dichiarazione della variabile e del suo intervallo, la relazione $\rho^2 = h(2R - h)$ motivata, lo studio del segno della derivata (non solo $V' = 0$) e la verifica finale del rapporto.

8.2.4 Il punto di una curva più vicino a un punto dato

Un problema di geometria analitica: qual è il punto della parabola $y = x^2$ più vicino al punto $A(0; 2)$? Un punto della parabola è $P(x; x^2)$, e invece della distanza minimizziamo il suo quadrato:

$$d(x) = AP^2 = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha $d'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$, che si annulla per $x = 0$ e per $x = \pm\sqrt{6}/2$. Lo studio del segno dice che d decresce su $]-\infty; -\sqrt{6}/2[$, cresce fino a 0, decresce fino a $\sqrt{6}/2$ e poi cresce: $x = 0$ è un punto di *massimo* relativo e i due punti simmetrici $x = \pm\sqrt{6}/2$ sono di minimo assoluto. I punti cercati sono $P(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2})$, a distanza $\sqrt{7/4} = \sqrt{7}/2 \approx 1{,}32$ da A, mentre il vertice O dista 2. Il verti-

ce, che «a occhio» sembrava il candidato naturale, è proprio il punto stazionario sbagliato. Si verifica anche che la retta AP è perpendicolare alla tangente in P: la tangente ha pendenza $2x = \sqrt{6}$, la retta AP ha pendenza $(\frac{3}{2} - 2) : \frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, e il prodotto è -1. È un fatto generale: il segmento di distanza minima da un punto a una curva derivabile è perpendicolare alla tangente.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare le limitazioni della variabile. Nel problema della scatola, l'equazione $V'(x) = 0$ ha due soluzioni, $x = 5$ e $x = 15$; la seconda è fuori dall'intervallo $]0; 15[$ (e dà una scatola senza base). Un «massimo» che cade fuori dalla figura non è una risposta.

Prendere un punto stazionario qualsiasi. Nel problema della parabola il punto stazionario $x = 0$ è di massimo, mentre la domanda chiede un minimo. Un punto stazionario va sempre classificato con il segno di f' (o di f'') prima di essere usato.

Dimenticare gli estremi dell'intervallo. Su un intervallo chiuso il massimo può stare in un estremo, dove la derivata non si annulla affatto.

8.3 Ottimizzare in fisica, in economia e nelle scienze

8.3.1 Il principio di Fermat e la legge della rifrazione

Quando la luce passa dall'aria all'acqua cambia direzione: è la *rifrazione*. La legge che la descrive si può ricavare da un principio di ottimizzazione, il **principio di Fermat**: *fra tutti i percorsi possibili fra due punti, la luce segue quello che richiede il tempo minimo* (più precisamente, un percorso in cui il tempo è stazionario; nei casi che vediamo è un minimo).

Mettiamo la superficie di separazione dei due mezzi sull'asse x. La luce parte da $A(0; a)$, nel primo mezzo, dove ha velocità v_1, e arriva in $B(d; -b)$, nel secondo mezzo, dove ha velocità v_2, con a, b, $d > 0$. In ciascun mezzo la luce va in linea retta, quindi il percorso è una spezzata APB con $P(x; 0)$ sulla superficie, e la variabile è x, con $0 \le x \le d$ (Figura 8.3). Il tempo impiegato è

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Derivando:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2},$$

dove θ_1 e θ_2 sono gli angoli che i due tratti del percorso formano con la *normale* alla superficie in P: nel triangolo rettangolo di ipotenusa AP e cateto a verticale, il cateto orizzontale è x, quindi $\operatorname{sen}\theta_1 = x/\sqrt{a^2 + x^2}$, e allo stesso modo per θ_2. Nessun bisogno di risolvere l'equazione $T'(x) = 0$

esplicitamente: basta sapere che c'è un solo punto stazionario e che è un minimo. Infatti $T'(0) < 0$ e $T'(d) > 0$, e la derivata seconda,

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2(b^2 + (d - x)^2)^{3/2}},$$

è positiva: T' è strettamente crescente e, per il teorema degli zeri, si annulla in uno e un solo punto, dove T ha il minimo assoluto. La condizione di minimo è

IN SINTESI

Legge della rifrazione (di Snell). Il percorso di tempo minimo fra due punti posti in due mezzi in cui la luce ha velocità v_1 e v_2 soddisfa

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}, \quad \text{ovvero} \quad n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

dove $n = c/v$ è l'**indice di rifrazione** del mezzo (c è la velocità della luce nel vuoto).

Nella Figura 8.3 $A(0; 3)$ è in aria ($n_1 \approx 1$) e $B(6; -3)$ è in acqua ($n_2 \approx 1{,}33$). Il punto di minimo, calcolato numericamente, è $x \approx 3{,}81$: la luce attraversa la superficie a destra del punto medio $(3; 0)$, allungando il tratto in aria, dove è più veloce, e accorciando quello in acqua. Gli angoli sono $\theta_1 \approx 51{,}7°$ e $\theta_2 \approx 36{,}2°$, e il rapporto dei seni è 1,33. Il percorso rettilineo AB è più corto ma richiede circa l'1% di tempo in più. Lo stesso calcolo vale per un bagnino che deve raggiungere un nuotatore: corre sulla sabbia più veloce di quanto nuoti, e gli conviene entrare in acqua più vicino al nuotatore di quanto suggerirebbe la linea retta (lo vedremo negli esercizi).

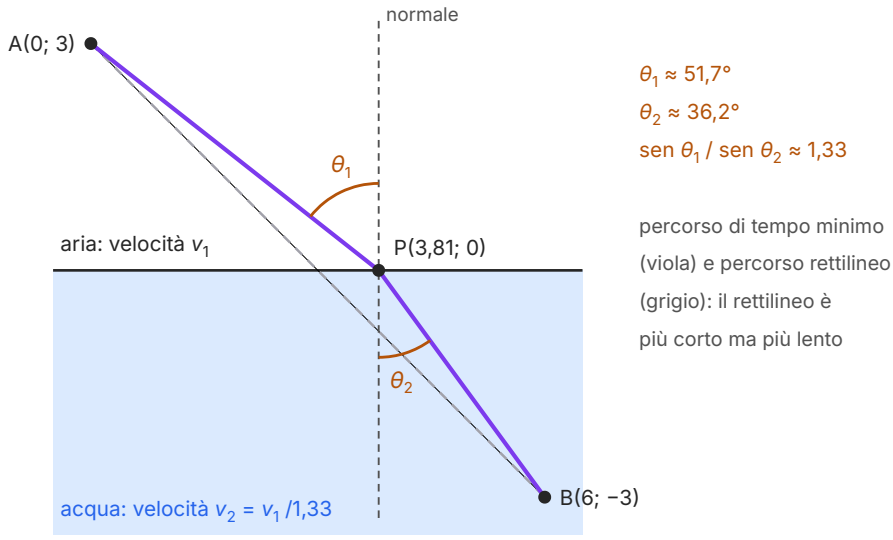


Figura 8.3 Il percorso di tempo minimo da $A(0; 3)$, in aria, a $B(6; -3)$, in acqua, dove la luce è 1,33 volte più lenta: attraversa la superficie in $P(3{,}81; 0)$, con $\theta_1 \approx 51{,}7°$ e $\theta_2 \approx 36{,}2°$ misurati dalla normale, e sen θ_1 / sen $\theta_2 \approx 1{,}33$. In grigio il segmento AB: più corto, ma più lento. Valori calcolati minimizzando $T(x)$.

APPROFONDIMENTO · ERONE, FERMAT E IL CAMMINO PIÙ BREVE

Erone di Alessandria, vissuto probabilmente nel I secolo d.C., mostrò nella sua *Catottrica* che un raggio di luce riflesso da uno specchio piano segue, fra tutti i percorsi che toccano lo specchio, quello di *lunghezza* minima, e che da qui segue l'uguaglianza degli angoli di incidenza e di riflessione. Il suo argomento è puramente geometrico: si riflette uno dei due punti rispetto allo specchio, e il percorso più breve diventa un segmento rettilineo (lo ritroverai negli esercizi con le derivate).

Nel Seicento Pierre de Fermat estese l'idea alla rifrazione, sostituendo la lunghezza con il *tempo*, e ne ricavò la legge del seno, già trovata per via sperimentale. Il principio di Fermat è il primo esempio di un'idea che ha avuto grande fortuna in fisica: descrivere un fenomeno dicendo che una certa grandezza, fra tutte le possibilità, è minima o stazionaria.

8.3.2 Gittata massima e potenza massima

In *Matematica 4* abbiamo visto che un proiettile lanciato dal suolo con velocità v e inclinazione α, trascurando la resistenza dell'aria, ricade alla distanza $R(\alpha) = v^2 \text{ sen } 2\alpha / g$, con $0 \le \alpha \le \pi/2$. Ora la derivata $R'(\alpha) = 2v^2 \cos 2\alpha / g$ si annulla in $[0; \pi/2]$ solo per $\alpha = \pi/4$, è positiva prima e ne-

gativa dopo: la gittata massima, v^2/g, si ottiene a 45°, e i valori agli estremi ($\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$) sono nulli.

Un esempio dall'elettrotecnica. Un generatore di forza elettromotrice E e resistenza interna r alimenta un resistore di resistenza R, il *carico*. La corrente è $I = E/(R + r)$ e la potenza dissipata nel carico è

$$P(R) = RI^2 = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}, \quad R \geq 0, \quad P'(R) = E^2 \frac{(R + r)^2 - 2R(R + r)}{(R + r)^4} = E^2 \frac{r - R}{(R + r)^3}.$$

La potenza cresce finché $R < r$ e poi decresce: il massimo è per $R = r$ e vale $E^2/(4r)$. Con $E = 12$ V e $r = 2\ \Omega$ il carico ideale è di 2 Ω, che riceve 18 W. È il principio dell'*adattamento* del carico al generatore. Ma con $R = r$ metà della potenza totale EI si disperde dentro il generatore: massimizzare la potenza non è la stessa cosa che massimizzare il rendimento.

8.3.3 Costo medio minimo e profitto massimo

Un'impresa che produce q unità di un bene sostiene un costo totale $C(q)$, somma di un costo fisso e di costi che crescono con q. Il **costo medio** è il costo per unità, $C_m(q) = C(q)/q$; il *costo marginale* (capitolo 5) è la derivata $C'(q)$, che misura approssimativamente il costo di un'unità in più. Se il bene si vende al prezzo $p(q)$, il **ricavo** è $R(q) = q \cdot p(q)$ e il **profitto** è $\Pi(q) = R(q) - C(q)$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema (dati inventati). Un laboratorio artigiano ha costi settimanali, in euro, $C(q) = 2000 + 10q + 0{,}05q^2$, dove q è il numero di pezzi prodotti. a) Per quale produzione il costo medio è minimo? b) Il prezzo al quale riesce a vendere tutti i pezzi dipende dalla quantità secondo la legge $p(q) = 85 - 0{,}1q$ euro. Quanti pezzi conviene produrre per avere il profitto massimo, e a che prezzo vanno venduti?

Soluzione. a) Il costo medio è $C_m(q) = \dfrac{2000}{q} + 10 + 0{,}05q$ per $q > 0$, con derivata $C_m'(q) = -\dfrac{2000}{q^2} + 0{,}05$, che si annulla per $q^2 = 40\,000$, cioè $q = 200$; è negativa prima e positiva dopo, quindi è un minimo assoluto. Il costo medio minimo è $C_m(200) = 10 + 10 + 10 = 30$ euro a pezzo. Osserviamo che anche il costo marginale vale $C'(200) = 10 + 0{,}1 \cdot 200 = 30$: non è una coincidenza, perché $C_m' = (qC' - C)/q^2$ si annulla proprio dove $C' = C/q$. *Nel punto di costo medio minimo, costo medio e costo marginale coincidono.*

b) Il ricavo è $R(q) = 85q - 0{,}1q^2$ e il profitto

$$\Pi(q) = 85q - 0{,}1q^2 - 2000 - 10q - 0{,}05q^2 = -0{,}15q^2 + 75q - 2000.$$

$\Pi'(q) = 75 - 0{,}3q$ si annulla per $q = 250$ (massimo, perché $\Pi'' = -0{,}3 < 0$). Il profitto massimo è $\Pi(250) = 18\,750 - 9375 - 2000 = 7375$ euro, con prezzo $p(250) = 85 - 25 = 60$ euro. Si controlla che in $q = 250$ il *ricavo marginale* $R'(250) = 85 - 0{,}2 \cdot 250 = 35$ è uguale al costo marginale $C'(250) = 10 + 25 = 35$: conviene produrre finché un pezzo in più fa guadagnare più di quanto costa.

COLLEGAMENTI

Biologia: la tosse. Un modello semplificato, molto usato nei corsi di analisi, descrive la tosse così: la trachea si contrae, il raggio r della sua sezione diminuisce rispetto al valore a riposo r_0, e l'aria esce con velocità $v(r) = k(r_0 - r)r^2$, con $k > 0$ costante. Se la contrazione è al più della metà, cioè $r_0/2 \le r \le r_0$, la derivata $v'(r) = k(2r_0 r - 3r^2) = kr(2r_0 - 3r)$ si annulla per $r = \dfrac{2}{3}r_0$, dentro l'intervallo: la velocità è massima quando il raggio si riduce di un terzo. Agli estremi $v(r_0/2) = \dfrac{1}{8}kr_0^3$ e $v(r_0) = 0$, mentre $v(\dfrac{2}{3}r_0) = \dfrac{4}{27}kr_0^3$, che è più grande. È un modello, non una legge: le sue conclusioni valgono finché valgono le ipotesi.

8.4 Velocità di variazione correlate

Spesso due grandezze che variano nel tempo sono legate da una relazione, e conosciamo la velocità con cui varia una delle due: vogliamo quella dell'altra. Sono problemi di **velocità di variazione correlate**. Il metodo è sempre lo stesso: si scrive la relazione fra le grandezze, la si deriva

rispetto al tempo t con la regola della funzione composta e si sostituiscono i valori nell'istante che interessa. È la «velocità di variazione di un processo» delle *Indicazioni*.

8.4.1 La scala che scivola

Una scala lunga 5 m è appoggiata a un muro verticale. Il piede della scala scivola allontanandosi dal muro con velocità costante di 0,5 m/s. Con che velocità scende la cima della scala quando il piede dista dal muro 3 m? E quando dista 4 m?

Siano $x(t)$ la distanza del piede dal muro e $y(t)$ l'altezza della cima, in metri. La scala, il muro e il pavimento formano un triangolo rettangolo, quindi in ogni istante

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25.$$

Deriviamo i due membri rispetto a t (il secondo è costante):

$$2xx' + 2yy' = 0, \quad \text{quindi} \quad y' = -\frac{x}{y}x'.$$

Quando $x = 3$ si ha $y = 4$ e $y' = -\frac{3}{4} \cdot 0{,}5 = -0{,}375$ m/s; quando $x = 4$ si ha $y = 3$ e $y' = -\frac{4}{3} \cdot 0{,}5 \approx -0{,}667$ m/s (Figura 8.4). Il segno meno dice che y diminuisce. Il piede si muove con velocità costante, ma la cima *accelera*: la sua velocità $\frac{x}{y} \cdot 0{,}5$ cresce senza limite quando $y \to 0^+$. Il modello prevede una velocità infinita nell'istante in cui la scala tocca terra, il che è impossibile: in realtà, molto prima, la cima si stacca dal muro e l'ipotesi «la cima resta appoggiata» non vale più.

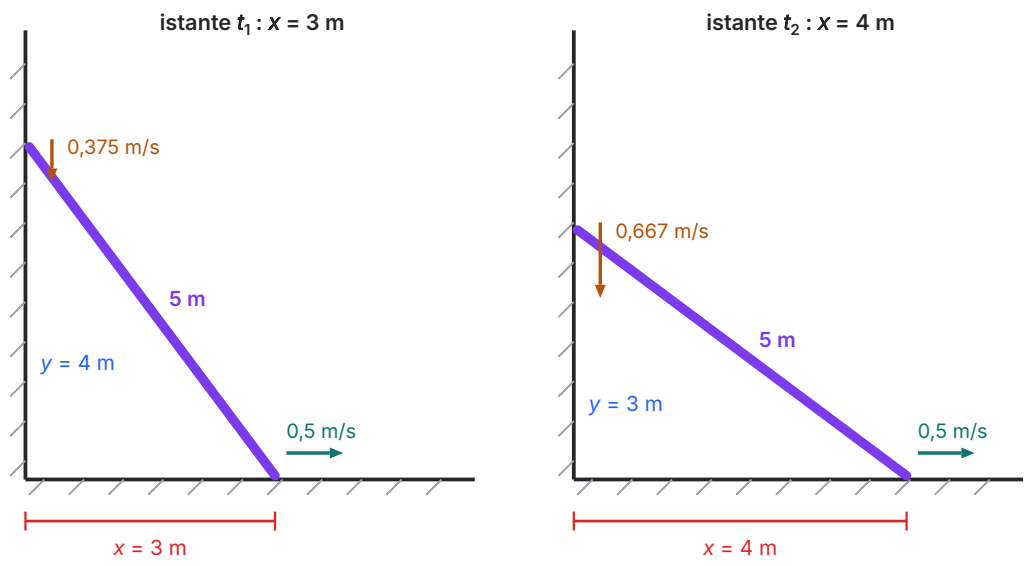


Figura 8.4 La scala lunga 5 m in due istanti: il piede si allontana dal muro a 0,5 m/s. Quando $x = 3$ m la cima scende a 0,375 m/s; quando $x = 4$ m scende a circa 0,667 m/s. Le frecce sono proporzionali alle velocità.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un serbatoio ha la forma di un cono con il vertice in basso, alto 12 dm e con raggio della bocca 4 dm. Vi si versa acqua alla portata costante di 2 dm^3 al minuto (cioè 2 litri al minuto). Con che velocità sale il livello quando l'acqua è alta 3 dm? E quando è alta 6 dm?

Soluzione. Sia $h(t)$ l'altezza dell'acqua e $\rho(t)$ il raggio della sua superficie. L'acqua forma un cono simile al serbatoio, quindi $\rho/h = 4/12$, cioè $\rho = h/3$, e il volume è

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi}{27}h^3.$$

Deriviamo rispetto al tempo: $V' = \frac{\pi}{9}h^2 h'$. Poiché $V' = 2$ dm^3/min, si ha $h' = \frac{18}{\pi h^2}$. Per $h = 3$ dm: $h' = \frac{18}{9\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$ dm/min; per $h = 6$ dm: $h' = \frac{18}{36\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ dm/min, cioè circa 1,6 cm al minuto.

Osservazione. Raddoppiando l'altezza, la velocità di salita diventa un quarto: la superficie dell'acqua, che a ogni minuto deve «alzarsi» di uno strato di 2 dm^3, ha area $\pi\rho^2$ quattro volte più grande. Infatti $V' = \pi\rho^2 h'$: la portata è l'area della superficie libera per la velocità con cui sale.

8.5 Risoluzione approssimata di equazioni

Le equazioni che si risolvono con una formula sono poche: le equazioni di primo e di secondo grado, alcune equazioni di terzo e quarto grado con formule scomode, alcune equazioni esponenziali, logaritmiche e goniometriche elementari. Già $x^3 - 2x - 5 = 0$ o $e^x = 3 - x$ richiedono un metodo numerico. Il *calcolo approssimato* procede in due tempi: prima si *separano* le radici, poi si *approssima* ciascuna.

8.5.1 Separazione delle radici

Un intervallo $[a; b]$ che contiene una e una sola soluzione di $f(x) = 0$ si chiama **intervallo di separazione** di quella soluzione. Trovare questi intervalli è la **separazione delle radici**, e si fa unendo due teoremi già noti: se f è continua su $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, per il teorema degli zeri (capitolo 4) c'è almeno una soluzione; se inoltre $f' > 0$ (o $f' < 0$) in $]a; b[$, f è strettamente monotòna (capitolo 6) e la soluzione è unica.

Riprendiamo l'equazione di *Matematica 4*, $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$. Allora sapevamo che le radici razionali non c'erano e che tra 2 e 3 il polinomio cambia segno. Ora possiamo dire di più. La derivata $f'(x) = 3x^2 - 2$ si annulla in $x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0{,}816$: f cresce fino a $-\sqrt{2/3}$, decresce fino a $\sqrt{2/3}$ e poi cresce. Il massimo relativo vale $f(-\sqrt{2/3}) \approx -3{,}91 < 0$: su $]-\infty; \sqrt{2/3}]$ la funzione è sempre negativa. Su $[\sqrt{2/3}; +\infty[$ è crescente, e $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 16 > 0$. Dunque l'equazione ha *una sola* soluzione reale α, e $[2; 3]$ è un suo intervallo di separazione.

Il metodo di bisezione (capitolo 4) dimezza a ogni passo l'intervallo di separazione: dopo n passi l'errore è al più $(b - a)/2^n$. Per garantire un errore minore di $\varepsilon = 10^{-6}$ partendo da $[2; 3]$ servono n passi con $2^n > 10^6$, cioè $n \geq 20$; per 10^{-15} ne servono 50. È un metodo sicuro ma lento: ogni passo aggiunge un bit di precisione, circa una cifra decimale ogni tre passi e un terzo.

8.5.2 Il metodo delle tangenti di Newton

L'idea del **metodo delle tangenti**, o **metodo di Newton**, è di sostituire il grafico di f, vicino alla soluzione, con la sua retta tangente, che sappiamo intersecare con l'asse x. Si parte da un'approssimazione x_0. La tangente al grafico nel punto $(x_0; f(x_0))$ ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; se $f'(x_0) \neq 0$, interseca l'asse x nel punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si ripete il procedimento partendo da x_1, e così via: si ottiene la successione definita per ricorrenza (capitolo 1)

IN SINTESI

Metodo delle tangenti (di Newton).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Teorema (condizione sufficiente di convergenza). Ipotesi: f è derivabile due volte su $[a; b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, e f' e f'' hanno segno costante (non nullo) su $[a; b]$; x_0 è l'estremo dell'intervallo in cui $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. **Tesi:** la successione (x_n) è monotòna, resta in $[a; b]$ e converge all'unica soluzione α di $f(x) = 0$ in $[a; b]$.

L'estremo da cui partire si chiama **estremo di Fourier**. Vediamo il caso $f' > 0$, $f'' > 0$ (funzione crescente e con la concavità verso l'alto): l'estremo di Fourier è b, dove $f(b) > 0$. Poiché la funzione volge la concavità verso l'alto, il grafico sta sopra ogni sua tangente; in particolare la tangente in $(x_n; f(x_n))$, con $x_n > \alpha$, incontra l'asse x in un punto x_{n+1} che sta fra α e x_n. La successione è quindi decrescente e limitata inferiormente da α, e per il teorema sulle successioni monotòne (capitolo 1) converge a un limite L. Passando al limite nella formula, per la continuità di f e f', si ottiene $L = L - f(L)/f'(L)$, cioè $f(L) = 0$: L è la soluzione α. Gli altri casi si trattano allo stesso modo. La condizione è *sufficiente*, non necessaria: il metodo spesso funziona anche partendo da altri punti, ma senza garanzia.

Per $x^3 - 2x - 5$ su $[2; 3]$ si ha $f' = 3x^2 - 2 > 0$ e $f'' = 6x > 0$, e $f(3) \cdot f''(3) > 0$: l'estremo di Fourier è 3. Partendo da $x_0 = 3$ si trova $x_1 = 3 - \frac{16}{25} = 2{,}36$, poi $x_2 \approx 2{,}1272$, $x_3 \approx 2{,}0951$, sempre da destra verso α (Figura 8.5). Partendo invece da $x_0 = 2$, che non è l'estremo di Fourier, il primo passo «scavalca» la soluzione:

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{-1}{10} = 2{,}1,$$

ma $x_1 = 2{,}1$ è a destra di α, nella zona in cui valgono le ipotesi del teorema, e da lì la successione decresce verso α. La Tabella 8.2 mostra che cosa succede: l'errore passa da circa 10^{-2} a 10^{-5}, poi a 10^{-10}, poi a 10^{-20}. A ogni passo il numero di cifre esatte, grosso modo, *raddoppia*: si parla di **convergenza quadratica**. Quattro passi di Newton danno una precisione che la bisezione raggiungerebbe in più di sessanta. È, fra l'altro, l'equazione con cui lo stesso Newton illustrò il suo metodo.

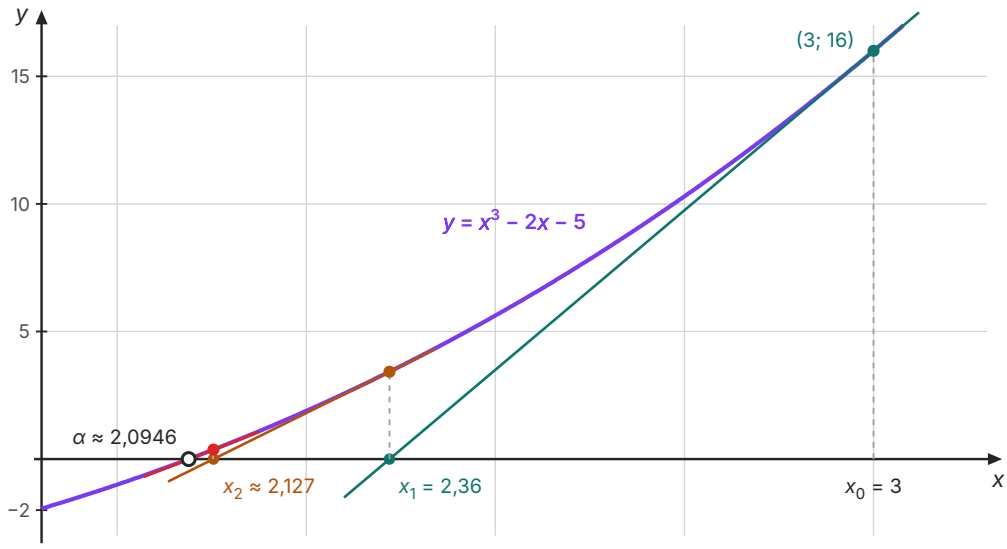


Figura 8.5 Il metodo delle tangenti per $x^3 - 2x - 5 = 0$ a partire dall'estremo di Fourier $x_0 = 3$: la tangente in (3; 16) incontra l'asse x in $x_1 = 2{,}36$, la tangente in $(x_1; f(x_1))$ in $x_2 \approx 2{,}127$, e così via, sempre da destra verso la soluzione $\alpha \approx 2{,}0946$ (cerchietto). Grafico e tangenti calcolati dalle formule.

Tabella 8.2 Il metodo di Newton per $x^3 - 2x - 5 = 0$ a partire da $x_0 = 2$. La soluzione è $\alpha = 2{,}094551481542\ldots$; l'errore è $|x_n - \alpha|$, arrotondato. Calcoli eseguiti con 30 cifre significative.

n	x_n	$f(x_n)$	errore
0	2	−1	$9{,}5 \cdot 10^{-2}$
1	2,1	0,061	$5{,}4 \cdot 10^{-3}$
2	2,094568121104	$1{,}9 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
3	2,094551481698	$1{,}7 \cdot 10^{-9}$	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$
4	2,094551481542	$1{,}5 \cdot 10^{-19}$	$1{,}4 \cdot 10^{-20}$

Il metodo di Newton contiene come caso particolare un algoritmo antichissimo. Applicato a $f(x) = x^2 - 2$ dà $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$: è il metodo di Erone per $\sqrt{2}$ del capitolo 1, ora visto come un metodo delle tangenti.

8.5.3 Quando il metodo non funziona

Senza le ipotesi del teorema il metodo può fallire in due modi tipici. Il primo: se in qualche passo $f'(x_n) = 0$, la tangente è orizzontale e non incontra l'asse x; se $f'(x_n)$ è solo *vicina* a zero, la tangente è quasi orizzontale e manda x_{n+1} lontanissimo, magari verso un'altra soluzione o fuori dal dominio. Il secondo: la successione può *oscillare* senza convergere. Per $f(x) = x^3 - 2x + 2$, partendo da $x_0 = 0$, si ottiene

$$x_1 = 0 - \frac{2}{-2} = 1, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{1} = 0, \quad x_3 = 1, \quad \dots$$

e la successione salta fra 0 e 1 per sempre, mentre l'unica soluzione reale dell'equazione è $\alpha \approx -1{,}769$. In $[0; 1]$, infatti, f non cambia segno ($f(0) = 2$, $f(1) = 1$) e f' si annulla in $\sqrt{2/3}$: le ipotesi del teorema non sono soddisfatte. Per questo, nella pratica, si fa prima la separazione delle radici e poi si parte dall'estremo giusto; e per fermarsi si usa un **criterio d'arresto**, per esempio $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, verificando poi che f cambi segno fra $x_{n+1} - \varepsilon$ e $x_{n+1} + \varepsilon$, il che garantisce (teorema degli zeri) che la soluzione dista da x_{n+1} meno di ε.

ERRORE FREQUENTE

Partire dove $f' = 0$ o quasi. Per risolvere $x^3 - 2x - 5 = 0$ con $x_0 = \sqrt{2/3} \approx 0{,}816$ la formula divide per zero; con $x_0 = 0{,}8$ la tangente è quasi orizzontale e si trova $x_1 = -75{,}3$, lontanissimo dalla soluzione. Prima si separa la radice, poi si sceglie x_0.

Confondere «i numeri si stabilizzano» con «ho trovato la soluzione». Una successione che si ferma su un valore va controllata calcolando f in quel punto e verificando il cambio di segno: il metodo può anche stabilizzarsi vicino a un minimo di $|f|$ che non è uno zero.

Con il computer: il metodo di Newton nel foglio di calcolo

In un foglio di calcolo scriviamo $x_0 = 2$ nella cella A1 e in A2 la formula `=A1-(A1^3-2*A1-5)/(3*A1^2-2)`; copiando A2 verso il basso si ottengono x_2, x_3, … Impostando la visualizzazione con 15 cifre decimali si vede che dalla cella A5 in poi il valore non cambia più: 2,094551481542327. Basta cambiare la cella A1 per provare altri punti di partenza (si provi con 0,8) e cambiare la formula per altre equazioni: per $e^x = 3 - x$, già risolta per bisezione nel capitolo 4, la formula è `=A1-(EXP(A1)-3+A1)/(EXP(A1)+1)` e, da $x_0 = 1$, dopo tre passi si legge 0,79206, la soluzione con cinque cifre decimali esatte.

8.6 Modelli diversi per gli stessi dati

Le *Indicazioni* chiedono di capire «la possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci». Un **modello matematico** è una funzione (o un'equazione) che

descrive un fenomeno in modo semplificato; spesso più modelli sono plausibili, e bisogna sceglierne uno. Anche questa scelta, come vedremo, ha un cuore di ottimizzazione.

8.6.1 Il metodo dei minimi quadrati

Supponiamo di avere n misure $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di una stessa grandezza e di volerle riassumere con un solo numero c. La differenza $y_i - c$ fra un dato e il valore del modello si chiama **residuo**. Una scelta naturale è il numero che rende minima la *somma dei quadrati dei residui*:

$$S(c) = (y_1 - c)^2 + (y_2 - c)^2 + \ldots + (y_n - c)^2.$$

S è un polinomio di secondo grado in c, con derivata

$$S'(c) = -2[(y_1 - c) + \ldots + (y_n - c)] = -2(y_1 + \ldots + y_n - nc),$$

che si annulla per

$$c = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n},$$

e $S''(c) = 2n > 0$: è il minimo. Il numero che rende minima la somma dei quadrati dei residui è la *media aritmetica*. Questo è il **metodo dei minimi quadrati**, usato da Gauss e da Legendre all'inizio dell'Ottocento: il modello migliore, in una famiglia di modelli, è quello che rende minima la somma dei quadrati dei residui. La retta di regressione di *Matematica 3* è la retta $y = mx + q$ che minimizza la somma dei quadrati dei residui fra tutte le rette: la funzione obiettivo dipende allora da due variabili, m e q, e qui ne accettiamo il risultato senza dimostrazione.

8.6.2 Tre modelli per una crescita

In un laboratorio si misura ogni due ore la concentrazione N di cellule di lievito in una coltura, in migliaia di cellule per millilitro (*dati inventati*, ma di forma realistica): Tabella 8.3, prime due colonne. Proviamo tre modelli (Figura 8.6):

- **lineare**, $N = mt + q$: la retta di regressione, calcolata con le formule di *Matematica 3*, è $N = 3{,}84t + 0{,}11$;
- **esponenziale**, $N = N_0 e^{kt}$: si calcola la retta di regressione fra t e $\ln N$ (perché $\ln N = \ln N_0 + kt$ è lineare in t). Usando solo le prime quattro misure, fino a 6 ore, si ottiene $N = 2{,}15e^{0{,}408t}$;
- **logistico**, $N = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$: è il modello della crescita con risorse limitate (capitolo 12), in cui K è la **capacità portante**, il valore a cui la popolazione si stabilizza. Stimato $K = 50$ dalle ultime misure, la regressione fra t e $\ln(K/N - 1) = \ln A - rt$ dà $N = \frac{50}{1 + 24{,}7e^{-0{,}508t}}$.

Tabella 8.3 Le misure (dati inventati) e i valori dei tre modelli, arrotondati al decimo; nell'ultima riga, la somma dei quadrati dei residui su tutte le otto misure.

t (ore)	N misurato	lineare	esponenziale	logistico
0	2,0	0,1	2,2	1,9
2	5,3	7,8	4,9	5,0
4	11,5	15,5	11,0	11,8
6	23,4	23,2	24,9	23,0
8	34,0	30,8	56,2	35,1
10	43,6	38,5	127,2	43,3
12	46,8	46,2	287,6	47,4
14	49,2	53,9	650,3	49,0
somma dei quadrati dei residui		83,7	oltre 400 000	1,95

Il confronto è istruttivo. Il modello esponenziale descrive molto bene le prime sei ore (sulle prime quattro misure la somma dei quadrati dei residui è circa 2,6), ma poi prevede una crescita senza limite: 650 a 14 ore, oltre 7000 a 20 ore, contro i circa 50 osservati. Il modello lineare sbaglia di qualche unità ovunque, e soprattutto ha la forma sbagliata: i residui (dato meno modello) hanno segni raggruppati a blocchi, positivo a 0 ore, negativi a 2 e 4 ore, positivi da 6 a 12 ore, negativo a 14 ore: residui con un andamento regolare sono il segnale tipico di un modello inadatto. Il modello logistico ha residui piccoli e senza regolarità, e ha anche un significato: la coltura cresce in modo quasi esponenziale finché il nutrimento abbonda e poi rallenta fino alla capacità portante. Il suo punto di flesso, dove la crescita è più rapida, cade a metà della capacità portante, $N = 25$, intorno a $t \approx 6{,}3$ ore.

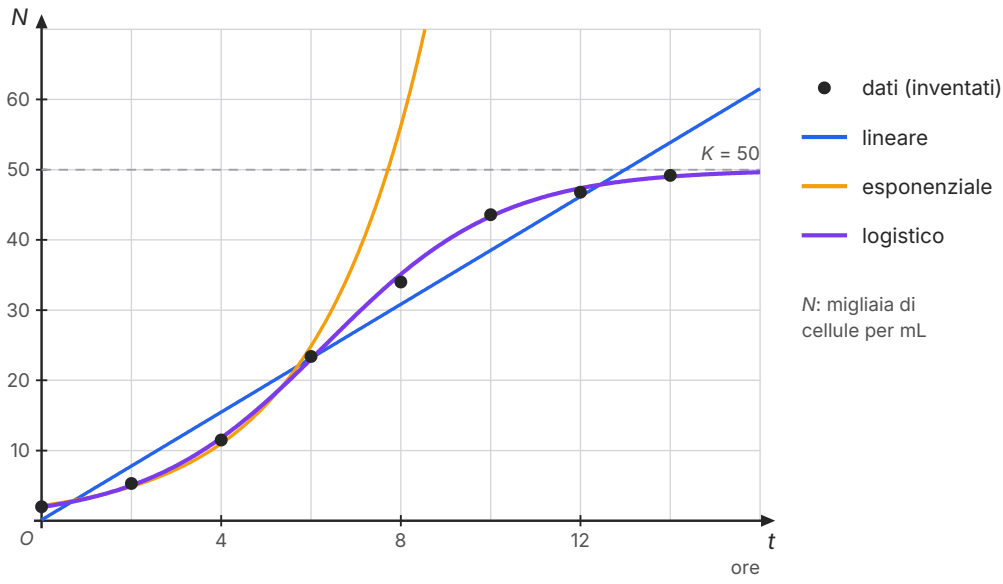


Figura 8.6 Le otto misure (punti, dati inventati) e i tre modelli: lineare $N = 3{,}84t + 0{,}11$ (in blu), esponenziale $N = 2{,}15e^{0{,}408t}$, adattato alle prime quattro misure (in arancione), e logistico $N = 50/(1 + 24{,}7e^{-0{,}508t})$ (in viola), con la capacità portante $K = 50$ tratteggiata. Curve calcolate dalle formule.

Scegliere un modello. La somma dei quadrati dei residui misura quanto un modello si adatta ai dati, ma non basta. Un buon modello ha residui piccoli *e* senza andamento regolare, poche costanti da stimare e un significato coerente con il fenomeno; e va usato con prudenza fuori dall'intervallo in cui è stato costruito.

Questo è il punto che le *Indicazioni* sottolineano nel confronto fra la fisica classica e la modellistica. Nella meccanica di Newton (capitolo 12) le leggi e le condizioni iniziali determinano il moto: matematica e natura sembrano corrispondere uno a uno. Nella modellistica, invece, la stessa crescita si può descrivere con funzioni diverse, ciascuna valida in un certo intervallo e con certe ipotesi, e la scelta fra esse è un giudizio fondato sui dati, sul significato e sullo scopo.

SINTESI

- Un **problema di ottimizzazione** si risolve in sei passi: variabile, limitazioni, funzione obiettivo, studio della derivata, controllo degli estremi, risposta con le parole del problema.
- Su un intervallo chiuso i candidati al massimo e al minimo assoluti sono i punti stazionari interni, i punti di non derivabilità e gli estremi; se una funzione derivabile su un intervallo ha **un solo** punto stazionario e questo è di massimo (minimo) relativo, è di massimo (minimo) assoluto.
- Se $f \geq 0$, f e f^2 hanno il massimo nello stesso punto: per le distanze si minimizza il quadrato.
- Il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio r ha area r^2; il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera ha $h = 2R/\sqrt{3}$; il cono di volume minimo circoscritto a una sfera ha $h = 4r$ e volume doppio della sfera.
- La **lattina più economica** di volume fissato ha l'altezza uguale al diametro, $h = 2r$; la lattina di volume massimo con superficie fissata ha la stessa forma.
- Dal **principio di Fermat** (tempo minimo) segue la legge della rifrazione $\text{sen}\,\theta_1/v_1 = \text{sen}\,\theta_2/v_2$.
- In economia, all'ottimo il costo medio è uguale al costo marginale (costo medio minimo) e il ricavo marginale è uguale al costo marginale (profitto massimo).
- Nei problemi di **velocità di variazione correlate** si deriva rispetto al tempo la relazione fra le grandezze e si sostituiscono i valori dell'istante richiesto.
- Le radici si **separano** con il teorema degli zeri e la monotonia; si **approssimano** con la bisezione (sicura e lenta) o con il **metodo di Newton** $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ (veloce: le cifre esatte circa raddoppiano a ogni passo).
- Il metodo di Newton converge se f' e f'' hanno segno costante sull'intervallo di separazione e si parte dall'estremo di Fourier, dove $f \cdot f'' > 0$; può fallire se f' è nulla o quasi, o oscillare.
- Il **metodo dei minimi quadrati** sceglie il modello che rende minima la somma dei quadrati dei residui; la media è la costante dei minimi quadrati.
- Modelli diversi (lineare, esponenziale, logistico) possono descrivere gli stessi dati; si confrontano con i residui, il significato e la prudenza nelle previsioni.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● In un problema di ottimizzazione, la grandezza che si vuole rendere massima o minima si chiama:

   A. vincolo
   B. funzione obiettivo
   C. funzione derivata
   D. dominio naturale

2. ● Una funzione continua su $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$ assume il massimo assoluto:

   A. sempre in un punto stazionario

   B. sempre in uno dei due estremi

   C. in un punto stazionario interno oppure in un estremo

   D. solo se la derivata si annulla in qualche punto

3. ●● Fra tutti i rettangoli di perimetro 20 cm, quello di area massima ha area:

   A. 25 cm²

   B. 20 cm²

   C. 50 cm²

   D. 100 cm²

4. ●● Applicando il metodo di Newton a $f(x) = x^2 - 2$ con $x_0 = 1$ si ottiene x_1 uguale a:

   A. 1,25

   B. 2

   C. 1,4

   D. 1,5

5. ●● Le grandezze $x(t)$ e $y(t)$ (in metri) soddisfano $x^2 + y^2 = 25$ in ogni istante, e $x' = 1$ m/s. Nell'istante in cui $x = 4$ e $y = 3$, y' vale:

   A. $-4/3$ m/s

   B. $-3/4$ m/s

   C. $4/3$ m/s

   D. -1 m/s

6. ●● Il metodo di Newton non si può applicare a partire da un punto x_0 in cui:

   A. $f(x_0) > 0$

   B. $f'(x_0) = 0$

   C. $f''(x) > 0$ su tutto l'intervallo

   D. la soluzione cercata è un numero irrazionale

7. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se x_0 è interno al dominio e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo. b) Se una funzione derivabile su un intervallo ha un solo punto stazionario e questo è di minimo relativo, allora è di minimo assoluto. c) Nella lattina cilindrica più economica di volume assegnato l'altezza è uguale al raggio. d) Il metodo di bisezione, quando si può applicare, converge più rapidamente del metodo di Newton.

8. ● Completa. Nel metodo delle tangenti il punto x_{n+1} è l'intersezione con l'asse x della _____ al grafico di f nel punto di ascissa _____, e si calcola con la formula $x_{n+1} =$ _____. Se f' e f'' hanno segno costante sull'intervallo di separazione, si parte dall'estremo in cui $f \cdot f''$ è _____, detto estremo di _____.

Calcolare

9. ● Trova due numeri positivi con somma 12 tali che il prodotto del primo per il quadrato del secondo sia massimo.

10. ● Fra tutti i rettangoli di area 36 cm² trova quello di perimetro minimo.

11. ● Determina il massimo e il minimo assoluti di $f(x) = xe^{-x}$ sull'intervallo $[0; 3]$.

12. ●● Trova il punto del grafico di $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto $A(3; 0)$ e calcola la distanza minima.

13. ●● Da un rettangolo di cartone di 16 cm × 10 cm si tagliano agli angoli quattro quadrati di lato x e si piegano i lembi per formare una scatola aperta. Trova x in modo che il volume sia massimo e calcola il volume massimo.

14. ●● In un cono di raggio di base 6 cm e altezza 12 cm è inscritto un cilindro, con la base sulla base del cono. Trova il raggio e l'altezza del cilindro di volume massimo e il rapporto fra il suo volume e quello del cono.

15. ●● Verifica che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ ha una sola soluzione reale, che appartiene a $[0; 1]$. Individua l'estremo di Fourier e calcola x_1, x_2, x_3 con il metodo di Newton.

16. ●● Dimostra che l'equazione $e^x = 3 - x$ ha una e una sola soluzione reale e approssimala con due passi del metodo di Newton a partire da $x_0 = 1$.

17. ●● Una macchia d'olio circolare si allarga e il suo raggio cresce di 2 cm al secondo. Con che velocità cresce l'area quando il raggio è di 10 cm?

18. ●● Un pallone sferico viene gonfiato immettendo 100 cm³ di aria al secondo. Con che velocità cresce il raggio quando è di 10 cm?

19. ●●● Applica il metodo di Newton a $f(x) = x^3 - 10$ e mostra che la ricorrenza diventa $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{10}{x_n^2}\right)$. Partendo da $x_0 = 2$ calcola x_1, x_2, x_3 e confronta con $\sqrt[3]{10}$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che fra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ il quadrato ha area massima, e che fra tutti i rettangoli di area assegnata A il quadrato ha perimetro minimo.

21. ●● Dimostra che il metodo di Newton applicato a $f(x) = x^2 - a$, con $a > 0$, dà la formula di Erone $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, e spiega perché, partendo da un qualsiasi $x_0 > \sqrt{a}$, la successione decresce verso $\sqrt{a}$.

22. ●●● Applica il metodo di Newton a $f(x) = \sqrt[3]{x}$, la cui unica soluzione è $x = 0$. Mostra che $x_{n+1} = -2x_n$ e che quindi la successione non converge per nessun $x_0 \neq 0$. Quali ipotesi della condizione sufficiente di convergenza non sono soddisfatte?

23. ●●● Dimostra la proprietà del box «Un solo punto stazionario»: se f è derivabile sull'intervallo I, x_0 è l'unico punto di I in cui $f' = 0$ e x_0 è un punto di massimo relativo, allora $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in I$. (Suggerimento: se fosse $f(x_1) > f(x_0)$, considera il minimo di f sull'intervallo chiuso di estremi x_0 e x_1.)

24. ●● Dimostra che il rettangolo di area massima inscritto nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con i lati paralleli agli assi, ha i lati lunghi $a\sqrt{2}$ e $b\sqrt{2}$ e area $2ab$.

Problemi

25. ●● *Il bagnino* (dati inventati). Un bagnino si trova sulla spiaggia in A, a 30 m dalla riva (rettilinea); un nuotatore in difficoltà è in B, in mare, a 20 m dalla riva; la distanza fra i piedi delle perpendicolari da A e da B alla riva è 50 m. Il bagnino corre a 5 m/s e nuota a 1 m/s. a) Detta x la distanza fra il piede della perpendicolare da A e il punto in cui entra in acqua, scrivi il tempo $T(x)$. b) Mostra che $T'(x) = 0$ equivale a $\frac{\text{sen}\,\theta_1}{5} = \frac{\text{sen}\,\theta_2}{1}$, con gli angoli misurati dalla perpendicolare alla riva. c) Con un foglio di calcolo o con il metodo di Newton trova x e il tempo minimo, e confrontalo con il tempo della corsa rettilinea verso B.

26. ●● Una pila di forza elettromotrice 9 V ha resistenza interna 1,5 Ω. Quale resistenza deve avere il carico per ricevere la potenza massima? Quanto vale questa potenza, e quale frazione della potenza totale erogata dalla pila arriva al carico?

27. ●● *Dati inventati.* Un'azienda ha costi giornalieri $C(q) = 800 + 4q + 0{,}02q^2$ euro per q pezzi e vende ogni pezzo al prezzo fisso di 16 euro. a) Per quale produzione il costo medio è minimo, e quanto vale? b) Quale produzione rende massimo il profitto, e quanto vale il profitto massimo? c) Verifica che nel punto di profitto massimo il costo marginale è uguale al prezzo.

28. ●● Un lampione è alto 6 m. Una persona alta 1,8 m si allontana dal lampione camminando a 1,5 m/s. Con che velocità si allunga la sua ombra? Con che velocità si muove l'estremità dell'ombra?

29. ●●● *Il problema di Erone.* I punti $A(0; 3)$ e $B(8; 5)$ stanno dalla stessa parte dello specchio rappresentato dall'asse x. a) Trova il punto $P(x; 0)$ che rende minima la lunghezza $AP + PB$, studiando la funzione $L(x)$. b) Verifica che i segmenti AP e PB formano angoli uguali con la normale allo specchio. c) Verifica che la lunghezza minima è uguale alla distanza fra B e il simmetrico di A rispetto all'asse x.

Con il computer

30. ● In un foglio di calcolo applica il metodo di Newton all'equazione $\cos x = x$ partendo da $x_0 = 1$. Scrivi x_1, x_2, x_3, x_4 e indica dopo quanti passi le prime dieci cifre decimali non cambiano più.

31. ●● Fissata la superficie totale $S = 400\ \text{cm}^2$, costruisci in un foglio di calcolo la tabella del volume $V(r)$ di una lattina cilindrica di raggio $r = 1, 2, \ldots, 8$ cm. Fra quali valori interi di r sta il massimo? Confronta con il valore esatto trovato con la derivata.

Verso l'esame

32. ●● Fra i coni circolari retti con apotema 6 cm, determina quello di volume massimo; calcola l'altezza, il raggio di base e il volume.

33. ●● Verifica che l'equazione $x^5 + x - 1 = 0$ ha una e una sola soluzione reale e approssimala con tre passi del metodo di Newton, giustificando la scelta del punto di partenza.

34. ●●● Una piramide retta a base quadrata è inscritta in una sfera di raggio R. Determina la piramide di volume massimo e verifica che il suo spigolo di base è uguale alla sua altezza.

35. ●● Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio, il cui diametro è il lato superiore del rettangolo. Il perimetro della finestra è 6 m. Determina le dimensioni che rendono massima l'area (e quindi la luce che entra) e verifica che, in questo caso, l'altezza del rettangolo è uguale al raggio del semicerchio.

36. ●●● *Problema* (modello inventato). La concentrazione di un farmaco nel sangue, in mg/L, t ore dopo l'assunzione, è descritta da $c(t) = at\,e^{-bt}$, con $a, b > 0$ e $t \geq 0$.
a) Determina a e b in modo che la concentrazione massima si raggiunga dopo 2 ore e valga 8 mg/L.
b) Con $c(t) = 4et\,e^{-t/2}$ (i valori trovati in a), studia la concavità di c e trova l'istante in cui la concentrazione diminuisce più rapidamente; quanto vale lì la velocità di variazione?
c) Il farmaco è efficace quando $c(t) \geq 4$ mg/L. Mostra che l'equazione $c(t) = 4$ ha esattamente due soluzioni $t_1 < 2 < t_2$ e approssimale con il metodo di Newton, partendo da $t = 0$ e da $t = 6$. Per quante ore il farmaco è efficace?
d) Con quale velocità varia la concentrazione 6 ore dopo l'assunzione? Interpreta il segno.

PER APPROFONDIRE

- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il metodo per impostare un problema (che cosa è dato, che cosa si cerca, qual è la condizione) applicato anche a problemi di massimo e di minimo.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sui massimi e minimi, con il problema di Erone, la rifrazione e molti problemi geometrici risolti anche senza derivate.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: problemi di massimo e minimo e il metodo di Newton trattati con tutte le dimostrazioni.
- [QDR] *Quadri di riferimento per la seconda prova*: fra le competenze richieste, «individuare strategie e applicare metodi per risolvere problemi» e «costruire e analizzare modelli»; questo capitolo ne è una palestra.

Glossario del capitolo

Capacità portante
Nel modello logistico, il valore K a cui la popolazione tende a stabilizzarsi, determinato dalle risorse disponibili.

Convergenza quadratica
Modo di convergere di un metodo numerico in cui l'errore a ogni passo è circa proporzionale al quadrato dell'errore precedente: il numero di cifre esatte circa raddoppia a ogni passo, come nel metodo di Newton.

Costo medio
Costo per unità prodotta, $C(q)/q$; nel punto in cui è minimo è uguale al costo marginale.

Criterio d'arresto
Regola che stabilisce quando fermare un metodo iterativo, per esempio $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, accompagnata da una verifica del cambio di segno.

Estremo di Fourier
Estremo dell'intervallo di separazione in cui $f \cdot f'' > 0$; partendo da esso, se f' e f'' hanno segno costante, il metodo di Newton converge in modo monotòno.

Funzione obiettivo
In un problema di ottimizzazione, la grandezza da rendere massima o minima, espressa in funzione della variabile scelta.

Indice di rifrazione
Rapporto $n = c/v$ fra la velocità della luce nel vuoto e quella nel mezzo.

Intervallo di separazione
Intervallo che contiene una e una sola soluzione di un'equazione $f(x) = 0$.

Limitazioni geometriche
Condizioni sulla variabile di un problema imposte dal suo significato (lunghezze positive, figure non degeneri); formano il dominio della funzione obiettivo nel problema.

Metodo dei minimi quadrati
Criterio per scegliere un modello: fra quelli di una famiglia si sceglie quello che rende minima la somma dei quadrati dei residui.

Metodo delle tangenti (di Newton)
Metodo di approssimazione delle soluzioni di $f(x) = 0$ con la ricorrenza $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$: x_{n+1} è l'intersezione con l'asse x della tangente nel punto di ascissa x_n.

Modello matematico
Funzione o equazione che descrive in modo semplificato un fenomeno, valida entro certe ipotesi e in un certo intervallo.

Principio di Fermat
Principio secondo cui la luce, fra due punti, segue il percorso che richiede il tempo minimo (più in generale, stazionario); ne seguono le leggi della riflessione e della rifrazione.

Problema di ottimizzazione
Problema che chiede, fra tutte le configurazioni ammesse da certi vincoli, quella che rende massima o minima una grandezza.

Profitto
Differenza $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ fra ricavo e costo; è massimo dove il ricavo marginale è uguale al costo marginale.

Residuo
Differenza fra un dato osservato e il valore previsto da un modello.

Separazione delle radici
Ricerca di intervalli di separazione per le soluzioni di un'equazione, con il teorema degli zeri e lo studio della monotonia.

Velocità di variazione correlate
Velocità di variazione di grandezze legate da una relazione: si ottengono derivando la relazione rispetto al tempo.

Vincolo
Condizione imposta dal problema (un volume fissato, una figura inscritta...) che lega fra loro le grandezze in gioco.

Soluzioni

1. B. La funzione obiettivo è la grandezza da ottimizzare; i vincoli sono le condizioni che legano le grandezze.

2. C. Per Weierstrass il massimo esiste; se è interno, lì $f' = 0$ (Fermat); altrimenti è in un estremo.

3. A. Con lati x e $10 - x$, $A = x(10 - x)$, $A' = 10 - 2x = 0$ per $x = 5$: il quadrato di lato 5 cm, area 25 cm^2.

4. D. $x_1 = 1 - \dfrac{1-2}{2} = 1{,}5$.

5. A. $2xx' + 2yy' = 0$, quindi $y' = -\dfrac{x}{y}x' = -\dfrac{4}{3}$ m/s.

6. B. Se $f'(x_0) = 0$ la tangente è orizzontale e la formula divide per zero.

7. a) Falso: $f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ma 0 non è né di massimo né di minimo. b) Vero (box «Un solo punto stazionario»). c) Falso: l'altezza è uguale al *diametro*, $h = 2r$. d) Falso: la bisezione è sicura ma lenta (un bit di precisione per passo); il metodo di Newton, quando converge, raddoppia circa le cifre esatte a ogni passo.

8. Tangente; x_n; $x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; positivo; Fourier.

9. Con $x + y = 12$, $P = (12 - y)y^2 = 12y^2 - y^3$, $0 < y < 12$. $P' = 24y - 3y^2 = 3y(8 - y) = 0$ per $y = 8$, massimo (crescente prima, decrescente dopo). I numeri sono 4 e 8, con $P = 4 \cdot 64 = 256$.

10. Con lati x e $36/x$: $p(x) = 2x + \dfrac{72}{x}$, $p'(x) = 2 - \dfrac{72}{x^2} = 0$ per $x = 6$, minimo. È il quadrato di lato 6 cm, perimetro 24 cm.

11. $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ si annulla in $x = 1$. $f(0) = 0$, $f(1) = 1/e \approx 0{,}368$, $f(3) = 3e^{-3} \approx 0{,}149$. Massimo assoluto $1/e$ in $x = 1$, minimo assoluto 0 in $x = 0$.

12. $P(x; \sqrt{x})$, $AP^2 = (x - 3)^2 + x = x^2 - 5x + 9$, $x \geq 0$; minimo per $x = 5/2$. Il punto è $P(\dfrac{5}{2}; \dfrac{\sqrt{10}}{2}) \approx (2{,}5;\ 1{,}581)$ e la distanza minima è $\sqrt{9 - \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}658$.

13. $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$, $0 < x < 5$. $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x^2 - 26x + 40)$, nulla per $x = 2$ e $x = \dfrac{20}{3}$ (fuori dall'intervallo). $V' > 0$ per $x < 2$, $V' < 0$ per $2 < x < 5$: massimo per $x = 2$ cm, $V = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$ cm^3.

14. Raggio x, altezza y del cilindro; per similitudine $y = 12(1 - \dfrac{x}{6}) = 12 - 2x$, $0 < x < 6$. $V = \pi x^2(12 - 2x)$, $V' = \pi(24x - 6x^2) = 6\pi x(4 - x)$: massimo per $x = 4$ cm, $y = 4$ cm, $V = 64\pi \approx 201{,}1$ cm^3. Il cono ha volume $\dfrac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 12 = 144\pi$: il rapporto è $\dfrac{64}{144} = \dfrac{4}{9}$.

15. $f(x) = x^3 + x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strettamente crescente, al più una soluzione; $f(0) = -1$, $f(1) = 1$: esattamente una, in $[0; 1]$. $f''(x) = 6x \geq 0$ e $f(1) \cdot f''(1) > 0$: l'estremo di Fourier è 1. $x_1 = 1 - \dfrac{1}{4} = 0{,}75$; $x_2 = 0{,}75 - \dfrac{0{,}171875}{2{,}6875} \approx 0{,}686047$; $x_3 \approx 0{,}682340$ (la soluzione è $\alpha \approx 0{,}682328$).

16. $f(x) = e^x + x - 3$ è continua, $f'(x) = e^x + 1 > 0$: strettamente crescente; $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$: una e una sola soluzione, in $]0; 1[$. Newton: $x_1 = 1 - \dfrac{e-2}{e+1} \approx 0{,}806824$, $x_2 \approx 0{,}792135$ (la soluzione è $\alpha \approx 0{,}792060$).

17. $A = \pi r^2$, $A' = 2\pi r\, r' = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 40\pi \approx 125{,}7$ cm^2/s.

18. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V' = 4\pi r^2 r'$, quindi $r' = \dfrac{100}{4\pi \cdot 100} = \dfrac{1}{4\pi} \approx 0{,}0796$ cm/s, cioè circa 0,8 mm al secondo.

19. $f'(x) = 3x^2$, quindi $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n{}^3 - 10}{3x_n{}^2} = \dfrac{2x_n{}^3 + 10}{3x_n{}^2} = \dfrac{1}{3}(2x_n + \dfrac{10}{x_n{}^2})$. $x_1 = \dfrac{13}{6} \approx 2{,}166667$, $x_2 \approx 2{,}154504$, $x_3 \approx 2{,}154435$;

$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544347\ldots$: x_3 ha già sei cifre decimali esatte.

20. Lati x e $p - x$, $0 < x < p$: $A = x(p - x)$, $A' = p - 2x = 0$ per $x = p/2$, massimo (unico punto stazionario, $A'' = -2 < 0$): il quadrato. Con area A: $2p(x) = 2(x + \frac{A}{x})$, $x > 0$, derivata $2(1 - \frac{A}{x^2})$, nulla per $x = \sqrt{A}$, negativa prima e positiva dopo: minimo per il quadrato di lato $\sqrt{A}$.

21. $f'(x) = 2x$,

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Su $[\sqrt{a}; x_0]$ si ha $f' > 0$, $f'' = 2 > 0$ e $f(x_0) > 0$: x_0 è l'estremo di Fourier, e per la condizione sufficiente la successione decresce e converge a $\sqrt{a}$. (Direttamente: $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0$ e $x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} < 0$.)

22. Per $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, quindi

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$. Allora $|x_n| = 2^n|x_0| \to +\infty$: la successione oscilla di segno e diverge. Le ipotesi mancano: f non è derivabile in 0 ($f'(x) \to +\infty$), e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ cambia segno in 0, quindi non ha segno costante su nessun intervallo che contenga la soluzione.

23. Per assurdo esista $x_1 \in I$, per esempio $x_1 > x_0$, con $f(x_1) > f(x_0)$. Poiché x_0 è di massimo relativo, $f(x) \leq f(x_0)$ in un intorno destro di x_0; non può essere $f(x) = f(x_0)$ in tutto un intorno destro, altrimenti f' si annullerebbe in infiniti punti; quindi esiste $x_2 \in]x_0; x_1[$ con $f(x_2) < f(x_0)$. Per il teorema di Weierstrass f ha un minimo m su $[x_0; x_1]$, e $m \leq f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$: il minimo è assunto in un punto c interno a $[x_0; x_1]$. Per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$, con $c \neq x_0$: contraddizione. Il caso $x_1 < x_0$ è analogo; il caso del minimo si ottiene applicando il risultato a $-f$. c.v.d.

24. Il vertice nel primo quadrante è $(x; \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})$, $0 \leq x \leq a$; l'area è $A(x) = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$. Come per la semicirconferenza, $A^2 \propto x^2(a^2 - x^2)$ è massima per $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e allora $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. I lati sono $2x = a\sqrt{2}$ e $2y = b\sqrt{2}$, l'area è $2ab$.

25. a) $T(x) = \frac{\sqrt{900 + x^2}}{5} + \frac{\sqrt{400 + (50 - x)^2}}{1}$, $0 \leq x \leq 50$. b) $T'(x) = \frac{x}{5\sqrt{900 + x^2}} - \frac{50 - x}{\sqrt{400 + (50 - x)^2}}$, e i due quozienti sono $\frac{\text{sen}\,\theta_1}{5}$ e $\text{sen}\,\theta_2$. c) $x \approx 46{,}59$ m, $T \approx 31{,}37$ s ($\text{sen}\,\theta_1 \approx 0{,}841$, $\text{sen}\,\theta_2 \approx 0{,}168$, rapporto 5). La corsa rettilinea verso B ($x = 30$ m) richiede circa 36,77 s; entrare in acqua proprio di fronte a B ($x = 50$) richiede circa 31,66 s.

26. Per $R = r = 1{,}5\ \Omega$: $P_{\max} = \frac{E^2}{4r} = \frac{81}{6} = 13{,}5$ W. La corrente è $I = 9/3 = 3$ A, la potenza totale è $EI = 27$ W: al carico ne arriva la metà (rendimento 50%).

27. a) $C_m(q) = \frac{800}{q} + 4 + 0{,}02q$,

$C_m' = -\frac{800}{q^2} + 0{,}02 = 0$ per $q^2 = 40\,000$, $q = 200$;

$C_m(200) = 4 + 4 + 4 = 12$ euro. b)

$\Pi(q) = 16q - C(q) = -0{,}02q^2 + 12q - 800$,

$\Pi' = 12 - 0{,}04q = 0$ per $q = 300$;

$\Pi(300) = 3600 - 1800 - 800 = 1000$ euro. c)

$C'(300) = 4 + 0{,}04 \cdot 300 = 16$ euro, uguale al prezzo.

28. Sia x la distanza della persona dal lampione e s la lunghezza dell'ombra. Per similitudine $\frac{s}{1{,}8} = \frac{x + s}{6}$, cioè $4{,}2s = 1{,}8x$, $s = \frac{3}{7}x$. Quindi $s' = \frac{3}{7} \cdot 1{,}5 \approx 0{,}643$ m/s, costante; l'estremità dell'ombra, a distanza $x + s$ dal lampione, si muove a $1{,}5 + 0{,}643 \approx 2{,}14$ m/s (esattamente $\frac{15}{7}$ m/s).

29. a) $L(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{25 + (8 - x)^2}$;

$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} - \frac{8 - x}{\sqrt{25 + (8 - x)^2}}$. L' è crescente ($L'' > 0$), $L'(0) < 0$, $L'(8) > 0$: un solo zero. Da $L' = 0$, elevando al quadrato:

$x^2(25 + (8 - x)^2) = (8 - x)^2(9 + x^2)$, cioè $25x^2 = 9(8 - x)^2$, $5x = 3(8 - x)$, $x = 3$. $P(3; 0)$. b) $\text{sen}\,\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\,\theta_2 = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: angoli uguali (45°). c)

$L(3) = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$; $A'(0; -3)$ e $B(8; 5)$ distano $\sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$.

30. $x_1 \approx 0{,}750364$, $x_2 \approx 0{,}739113$, $x_3 \approx 0{,}7390851334$, $x_4 \approx 0{,}7390851332$. Dal quarto passo le prime dieci cifre decimali non cambiano più: $\alpha \approx 0{,}7390851332$.

31. $V(r) = \frac{1}{2}(400r - 2\pi r^3) = 200r - \pi r^3$: $V(1) \approx 196{,}86$; $V(2) \approx 374{,}87$; $V(3) \approx 515{,}18$; $V(4) \approx 598{,}94$; $V(5) \approx 607{,}30$; $V(6) \approx 521{,}42$; $V(7) \approx 322{,}43$; $V(8) \approx -8{,}50$ (valore privo di senso: con $r > \sqrt{200/\pi} \approx 7{,}98$ la lamiera non basta neppure per le basi). La tabella cresce fino a 5 e poi decresce, quindi il massimo sta fra 4 e 6 (la tabella non dice da che parte di 5); con la derivata: $r = \sqrt{400/(6\pi)} \approx 4{,}607$ cm, $h = 2r \approx 9{,}213$ cm, $V \approx 614{,}2$ cm^3: il massimo sta fra 4 e 5.

32. Altezza h, raggio r, $r^2 = 36 - h^2$, $0 < h < 6$. $V = \frac{\pi}{3}(36 - h^2)h$, $V' = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0$ per $h = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm, massimo. $r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$ cm, $V = \frac{\pi}{3} \cdot 24 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\pi \approx 87{,}06$ cm^3.

33. $f(x) = x^5 + x - 1$, $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$: strettamente crescente, al più una soluzione; $f(0) = -1$, $f(1) = 1$: una e una sola, in $]0; 1[$. Su $[0; 1]$ $f'' = 20x^3 \geq 0$ (nulla solo in 0) e $f(1) \cdot f''(1) > 0$: si parte da $x_0 = 1$. $x_1 = 1 - \frac{1}{6} \approx 0{,}833333$, $x_2 \approx 0{,}764382$, $x_3 \approx 0{,}755025$ (soluzione $\alpha \approx 0{,}754878$).

34. Sia h l'altezza, ℓ lo spigolo di base, $d = \ell/\sqrt{2}$ la metà della diagonale di base. Nella sezione che contiene una diagonale di base, come per il cono inscritto, $d^2 = h(2R - h)$, $0 \leq h \leq 2R$. $V = \frac{1}{3}\ell^2 h = \frac{2}{3}d^2 h = \frac{2}{3}(2Rh^2 - h^3)$; $V' = \frac{2}{3}h(4R - 3h)$: massimo per $h = \frac{4}{3}R$. Allora $d^2 = \frac{8}{9}R^2$, $\ell^2 = 2d^2 = \frac{16}{9}R^2$, $\ell = \frac{4}{3}R = h$. Il volume massimo è $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{9}R^2 \cdot \frac{4}{3}R = \frac{64}{81}R^3$.

35. Raggio x del semicerchio, altezza y del rettangolo (base $2x$). Perimetro: $2x + 2y + \pi x = 6$, quindi $y = \frac{6 - (2 + \pi)x}{2}$, con $0 < x < \frac{6}{2 + \pi}$. Area: $A = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2 = 6x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$, $A' = 6 - (4 + \pi)x = 0$ per $x = \frac{6}{4 + \pi} \approx 0{,}840$ m (massimo, $A'' < 0$). Allora $y = \frac{6 - (2 + \pi)x}{2} = \frac{6(4 + \pi) - 6(2 + \pi)}{2(4 + \pi)} = \frac{6}{4 + \pi} = x$. Larghezza $\frac{12}{4 + \pi} \approx 1{,}680$ m, altezza del rettangolo $\approx 0{,}840$ m, area massima $\frac{18}{4 + \pi} \approx 2{,}520$ m^2.

36. a) $c'(t) = ae^{-bt}(1 - bt)$ si annulla per $t = 1/b$ (massimo: c' positiva prima, negativa dopo). $1/b = 2$ dà $b = \frac{1}{2}$; $c(2) = 2ae^{-1} = 8$ dà $a = 4e \approx 10{,}87$. b) $c'(t) = 4e \cdot e^{-t/2}(1 - \frac{t}{2})$, $c''(t) = 4e \cdot e^{-t/2}(\frac{t}{4} - 1)$: il grafico volge la concavità verso il basso per $0 \leq t < 4$ e verso l'alto per $t > 4$; flesso in $t = 4$, con $c(4) = 16/e \approx 5{,}89$ mg/L. Per $t > 2$ la funzione decresce, e c' ha il minimo dove $c'' = 0$: la diminuzione è più rapida in $t = 4$ h, con $c'(4) = -4e^{-1} \approx -1{,}47$ mg/(L·h). c) $c(t) = 4$ equivale a $g(t) = te^{1 - t/2} - 1 = 0$. c cresce su $[0; 2]$ da 0 a 8 e decresce su $[2; +\infty[$ da 8 verso 0: per il teorema degli zeri e la monotonia c'è una soluzione in ciascun tratto. Newton su g, con $g'(t) = e^{1 - t/2}(1 - \frac{t}{2})$: da 0 si ottiene 0,3679; 0,4589; 0,4639; quindi $t_1 \approx 0{,}464$ h; da 6: 5,3055; 5,3564; 5,3567; quindi $t_2 \approx 5{,}357$ h. Il farmaco è efficace per circa $5{,}357 - 0{,}464 \approx 4{,}89$ ore. d) $c'(6) = 4e \cdot e^{-3}(1 - 3) = -8e^{-2} \approx -1{,}08$ mg/(L·h): la concentrazione (che vale $c(6) = 24e^{-2} \approx 3{,}25$ mg/L) sta diminuendo, perché l'organismo elimina il farmaco più rapidamente di quanto lo assorba.