CAPITOLO

7

Massimi, minimi, flessi e studio di funzione

Il segno della derivata prima dice dove si sale; quello della derivata seconda, come ci si piega.

OBIETTIVI

1. Trovare massimi e minimi relativi e assoluti con il segno della derivata prima, anche nei punti di non derivabilità.
2. Studiare la concavità con la derivata seconda e trovare i punti di flesso, classificandoli secondo la tangente.
3. Svolgere lo studio completo di funzioni polinomiali, razionali, irrazionali, esponenziali, logaritmiche, goniometriche e con valore assoluto.
4. Passare dal grafico di una funzione a quello della sua derivata, e viceversa.
5. Determinare i parametri di una funzione da condizioni assegnate e studiare una famiglia di curve.
6. Discutere graficamente il numero delle soluzioni di un'equazione con un parametro.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Massimi e minimi 2
7.2 Concavità e flessi 5
7.3 Lo studio di una funzione 9
7.4 Dal grafico di f a quello di f′ 14
7.5 Funzioni con parametri 17
7.6 Discussione grafica di equazioni parametriche 19

Matematica 5 · Parte II · Calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 7: Massimi, minimi, flessi e studio di funzione · pagine 189–216 del volume completo · estratto per lo studio

Un grafico ben disegnato è un riassunto: in un colpo d'occhio dice dove una grandezza cresce, dove raggiunge il valore più alto e come cambia il suo modo di crescere. Nel capitolo 4 abbiamo costruito il *grafico probabile* di una funzione con i soli strumenti dei limiti: dominio, simmetrie, segno, asintoti. Mancava la parte più fine del disegno: dove la funzione sale e dove scende, fin dove arriva, in che verso si piega. Ora abbiamo la derivata (capitolo 5) e i teoremi che la governano (capitolo 6), e in questo capitolo li mettiamo al lavoro.

La derivata prima, con il suo segno, decide la crescenza e la decrescenza e localizza massimi e minimi; la derivata seconda decide la concavità e localizza i flessi. Messe insieme alle informazioni del grafico probabile, permettono lo *studio completo* di una funzione, che è anche il cuore della seconda prova dell'esame di Stato: quasi ogni problema comincia con una funzione che dipende da parametri, chiede di determinarli, di studiare la funzione che si ottiene, di leggerne il grafico o quello della sua derivata e di discutere quante soluzioni ha un'equazione. Le ultime tre sezioni del capitolo sono dedicate proprio a queste richieste.

7.1 Massimi e minimi

7.1.1 Estremi assoluti e relativi

Ricordiamo le definizioni dei capitoli 4 e 6. Sia f una funzione di dominio D e sia $x_0 \in D$. Come nel capitolo 4, $M = f(x_0)$ è il massimo assoluto di f, e che x_0 è un punto di massimo assoluto, se $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Analogamente $m = f(x_0)$ è il minimo assoluto di f se $f(x) \ge f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il massimo e il minimo, quando esistono, sono unici come valori, ma possono essere assunti in più punti: la funzione $\cos x$ ha massimo 1, assunto in tutti i punti $x = 2k\pi$. Non sempre esistono: $\dfrac{1}{x}$ su $]0; +\infty[$ non ha né massimo né minimo, e $\operatorname{arctg} x$ è limitata ma non assume né il suo estremo superiore $\dfrac{\pi}{2}$ né quello inferiore.

Il capitolo 6 ha introdotto il confronto con i soli punti vicini: x_0 è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap D$; il valore $f(x_0)$ si chiama allora massimo relativo. Nello stesso modo, con la disuguaglianza rovesciata, si definiscono il punto di minimo relativo e il minimo relativo. Massimi e minimi relativi si chiamano insieme estremi relativi; se la disuguaglianza è stretta per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno, l'estremo si dice *stretto* (o proprio). Un estremo assoluto è anche relativo, ma non vale il viceversa: una funzione può avere un massimo relativo più basso di un suo minimo relativo, come vedremo nella Figura 7.4. Il punto $(x_0; f(x_0))$ del grafico si chiama a sua volta punto di massimo o di minimo del grafico.

7.1.2 Il criterio della derivata prima

Ricordiamo due risultati del capitolo 6. Il **teorema di Fermat**: se f ha un estremo relativo in un punto x_0 *interno* al dominio ed è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$. I punti in cui la derivata si annulla sono i *punti stazionari*: in essi la tangente al grafico è orizzontale. Il teorema dà una condizione necessaria, non sufficiente: $f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ma è crescente in tutto $\mathbb{R}$, e in 0 non ha alcun estremo. Il **criterio di monotonia**, conseguenza del teorema di Lagrange: se $f'(x) > 0$ in ogni punto interno di un intervallo, f è strettamente crescente in quell'intervallo; se $f'(x) < 0$, è strettamente decrescente. Mettendo insieme i due risultati si ottiene lo strumento principale di questa sezione.

IN SINTESI

Teorema (criterio della derivata prima). Ipotesi: f è continua in x_0 e derivabile in un intorno $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ privato del punto x_0; $f'(x) > 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. **Tesi:** x_0 è un punto di massimo relativo stretto.

Se invece f' è negativa a sinistra e positiva a destra di x_0, x_0 è un punto di minimo relativo stretto. Se f' ha lo stesso segno a sinistra e a destra, x_0 non è un punto di estremo.

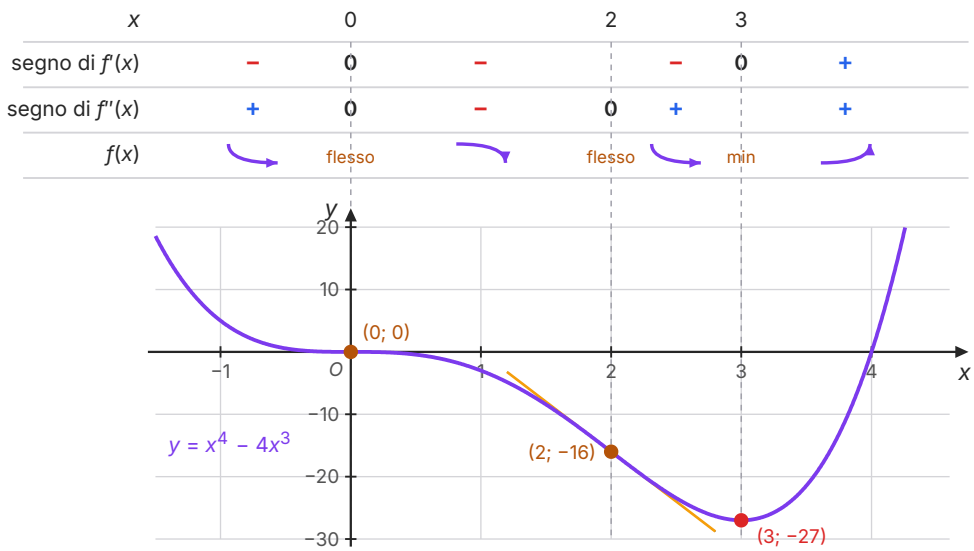

Figura 7.1 La tabella dei segni di $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ e di $f''(x) = 12x(x - 2)$ per $f(x) = x^4 - 4x^3$, allineata con il grafico. Nell'ultima riga le frecce indicano insieme il verso della monotonia e quello della concavità. In $x = 0$ la derivata prima si annulla senza cambiare segno (flesso a tangente orizzontale); in $x = 2$ cambia segno la derivata seconda (flesso a tangente obliqua, in arancione la tangente $y = -16x + 16$); in $x = 3$ c'è il minimo assoluto -27. Grafico calcolato dall'equazione; le unità sui due assi sono diverse.

Dimostrazione. Sia $x_0 - \delta < x < x_0$. La funzione è continua in $[x; x_0]$ (in x_0 per ipotesi, altrove perché derivabile) e derivabile in $]x; x_0[$: per il teorema di Lagrange esiste $c \in]x; x_0[$ tale che $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)$. Il secondo membro è positivo, perché $f'(c) > 0$ e $x_0 - x > 0$: dunque $f(x) < f(x_0)$. Se invece $x_0 < x < x_0 + \delta$, nello stesso modo $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ con $f'(c) < 0$, e di nuovo $f(x) < f(x_0)$. Gli altri due casi si dimostrano allo stesso modo. c.v.d.

Due osservazioni. La continuità in x_0 non si può togliere: una funzione con un salto in x_0 può essere crescente a sinistra e decrescente a destra senza avere lì un massimo. Il criterio, invece, *non* richiede che f sia derivabile in x_0: vale anche nei punti angolosi e nelle cuspidi, e lo useremo proprio lì.

In pratica si calcola f', la si scompone in fattori e se ne studia il segno; i risultati si raccolgono in una **tabella dei segni**, nella quale si leggono gli intervalli in cui f cresce o decresce e, nei punti in cui il segno cambia, i massimi e i minimi.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina gli intervalli in cui $f(x) = x^4 - 4x^3$ è crescente o decrescente e i suoi estremi relativi e assoluti.

Soluzione. Il dominio è $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$. Il fattore $4x^2$ è positivo per $x \neq 0$ e si annulla in 0; perciò, fuori da 0, f' ha il segno di $x - 3$: è negativa per $x < 0$ e per $0 < x < 3$, positiva per $x > 3$. I punti stazionari sono $x = 0$ e $x = 3$.

La funzione decresce in $]-\infty; 0]$ e in $[0; 3]$, quindi in tutto $]-\infty; 3]$: i due intervalli hanno in comune il punto 0, e una funzione strettamente decrescente su due intervalli che si toccano è strettamente decrescente sulla loro unione. Poi cresce in $[3; +\infty[$. In $x = 3$ la derivata passa da negativa a positiva: è un minimo relativo, $f(3) = 81 - 108 = -27$. Poiché f decresce fino a 3 e cresce dopo, il minimo è anche assoluto. In $x = 0$ la derivata si annulla ma non cambia segno: 0 è un punto stazionario che non è un estremo. Vedremo nella prossima sezione che lì il grafico ha un flesso. Non c'è massimo assoluto, perché $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Le prime righe della Figura 7.1 riassumono lo studio.

7.1.3 Estremi nei punti di non derivabilità

Il teorema di Fermat riguarda i punti in cui f è derivabile; ma una funzione può avere un estremo anche in un punto in cui non lo è. Consideriamo $f(x) = |x^2 - 2x|$. Per $x \leq 0$ e per $x \geq 2$ vale $f(x) = x^2 - 2x$, con $f'(x) = 2x - 2$; per $0 \leq x \leq 2$ vale $f(x) = 2x - x^2$, con $f'(x) = 2 - 2x$. In 0 la derivata sinistra è -2 e la destra è 2: è un punto angoloso (capitolo 5), e lo stesso accade in 2. Il segno di f' è negativo per $x < 0$, positivo per $0 < x < 1$, negativo per $1 < x < 2$, positivo per $x > 2$. Per il criterio della derivata prima, 0 e 2 sono punti di minimo, con $f(0) = f(2) = 0$, e sono minimi assoluti perché $f \geq 0$; in $x = 1$ c'è un massimo relativo, $f(1) = 1$, che non è assoluto perché f non è limitata.

Anche nelle cuspidi può esserci un estremo: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ha derivata $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$, e non è derivabile in 0, dove $f'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^-$ e $f'(x) \to +\infty$ per

$x \to 0^+$ (una cuspide, capitolo 5); in 0 ha il minimo assoluto 0. Conclusione: **i punti interni del dominio in cui cercare gli estremi sono i punti stazionari e i punti in cui *f* non è derivabile**.

7.1.4 Massimo e minimo assoluti in un intervallo chiuso

Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, il teorema di Weierstrass (capitolo 4) garantisce che ha massimo e minimo assoluti. Dove si trovano? Se un estremo assoluto cade in un punto interno, lì c'è anche un estremo relativo, quindi un punto stazionario o un punto di non derivabilità; altrimenti cade in uno degli estremi a, b. Il metodo è dunque semplice e non richiede lo studio del segno: si elencano i punti stazionari interni, i punti interni di non derivabilità e i due estremi dell'intervallo, si calcola f in ciascuno, e il valore più grande è il massimo, il più piccolo il minimo.

Per esempio, $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ in $[0; 3]$ ha $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$. I candidati sono 0, 1, 2, 3, con $g(0) = 0$, $g(1) = 5$, $g(2) = 4$, $g(3) = 9$: il massimo assoluto è 9, in $x = 3$, il minimo assoluto è 0, in $x = 0$. Il massimo relativo $g(1) = 5$ non è il massimo assoluto: chi dimentica gli estremi dell'intervallo risponde 5 e sbaglia.

7.2 Concavità e flessi

7.2.1 La concavità

Per $x > 0$ le funzioni $\sqrt{x}$ e x^2 sono entrambe crescenti, ma in modo diverso: la prima cresce sempre più lentamente, la seconda sempre più in fretta. La differenza si vede nel grafico, che nel primo caso si piega verso il basso e nel secondo verso l'alto, e si descrive con le rette tangenti.

Sia f derivabile in un intervallo I. Si dice che il grafico di f ha la **concavità rivolta verso l'alto** in I se, per ogni $x_0 \in I$, il grafico sta sopra la retta tangente nel punto di ascissa x_0, cioè

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per ogni } x \in I,$$

e che ha la **concavità rivolta verso il basso** se sta sotto ciascuna delle sue tangenti (disuguaglianza rovesciata). Molti testi chiamano **funzione convessa** una funzione con la concavità verso l'alto e **funzione concava** una funzione con la concavità verso il basso; per non confondersi, in questo libro diremo sempre «concavità verso l'alto» e «concavità verso il basso». La Figura 7.2 mostra le due situazioni sul grafico di $y = x^3 - 3x$, la funzione di cui nel capitolo 6 abbiamo trovato il massimo relativo $(-1; 2)$ e il minimo relativo $(1; -2)$.

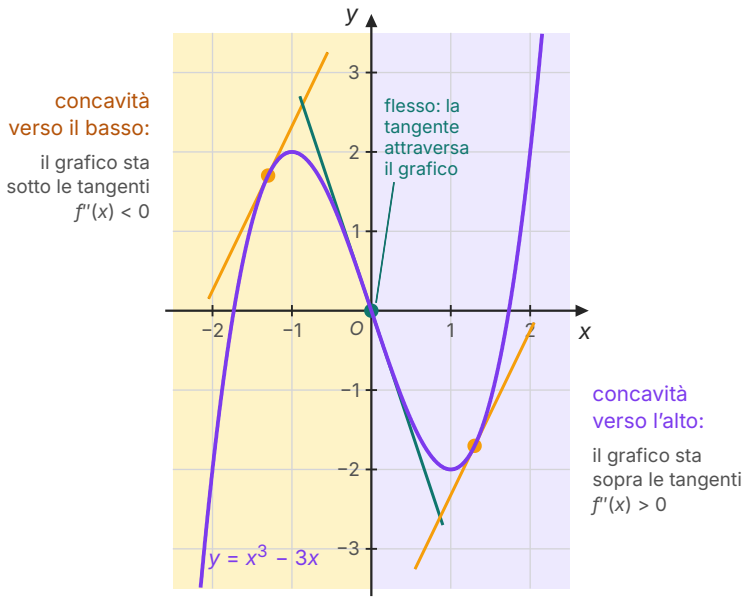

Figura 7.2 Concavità e rette tangenti per $y = x^3 - 3x$, in scala uguale sui due assi. Per $x < 0$ (fondo giallo) la concavità è rivolta verso il basso e il grafico sta sotto le tangenti, come quella nel punto di ascissa −1,3; per $x > 0$ (fondo viola) è rivolta verso l'alto e il grafico sta sopra le tangenti, come quella nel punto di ascissa 1,3. Nell'origine la concavità cambia verso e la tangente $y = -3x$ (in verde) attraversa il grafico: è un punto di flesso.

Che cosa dice la derivata? Se il grafico ha la concavità verso l'alto, muovendosi verso destra la tangente ruota in senso antiorario e la sua pendenza $f'(x)$ aumenta. Vale anche il viceversa, e poiché f' è crescente dove la sua derivata f'' è positiva, si ottiene il criterio seguente.

IN SINTESI

Teorema (concavità e derivata seconda). Ipotesi: f è derivabile due volte in un intervallo I. **Tesi:** se $f''(x) > 0$ in ogni punto interno di I, il grafico di f ha in I la concavità rivolta verso l'alto; se $f''(x) < 0$, la concavità è rivolta verso il basso.

Teorema (criterio della derivata seconda). Ipotesi: f è derivabile in un intorno di x_0, $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$. **Tesi:** se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo relativo stretto; se $f''(x_0) < 0$, è un punto di massimo relativo stretto. Se $f''(x_0) = 0$ il criterio non decide.

Dimostrazione del primo teorema (caso $f'' > 0$). Per il criterio di monotonia applicato a f', la derivata prima è strettamente crescente in I. Fissiamo $x_0 \in I$ e prendiamo $x \in I$, $x > x_0$. Per il teorema di Lagrange $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ con $x_0 < c < x$, e $f'(c) > f'(x_0)$: moltiplicando per $x - x_0 > 0$ si ottiene $f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$. Se $x < x_0$, il punto c sta fra x e x_0, quindi $f'(c) < f'(x_0)$, e moltipli-

cando per $x - x_0 < 0$ la disuguaglianza si rovescia: di nuovo $f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$. Il grafico sta dunque sopra la tangente in ogni suo punto. c.v.d.

Per $f(x) = x^3 - 3x$ si ha $f''(x) = 6x$: la concavità è rivolta verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x > 0$, come nella Figura 7.2.

7.2.2 Punti di flesso

Sia f continua in x_0 e supponiamo che il grafico abbia una retta tangente nel punto $(x_0; f(x_0))$, eventualmente verticale. Se in un intorno sinistro di x_0 la concavità è rivolta in un verso e in un intorno destro nel verso opposto, il punto $(x_0; f(x_0))$ si chiama **punto di flesso**, e la tangente in esso **tangente inflessionale**: in un flesso, a differenza di quanto accade negli altri punti, la tangente attraversa il grafico. Secondo la tangente, si parla di **flesso a tangente orizzontale** se $f'(x_0) = 0$, di **flesso a tangente obliqua** se $f'(x_0)$ è un numero diverso da 0 e di flesso a tangente verticale se $f'(x) \to +\infty$, oppure $f'(x) \to -\infty$, sia a sinistra sia a destra di x_0 (capitolo 5). La Figura 7.3 mostra un esempio di ciascun tipo. In un punto angoloso non c'è flesso, neppure se la concavità cambia verso, perché lì il grafico non ha tangente.

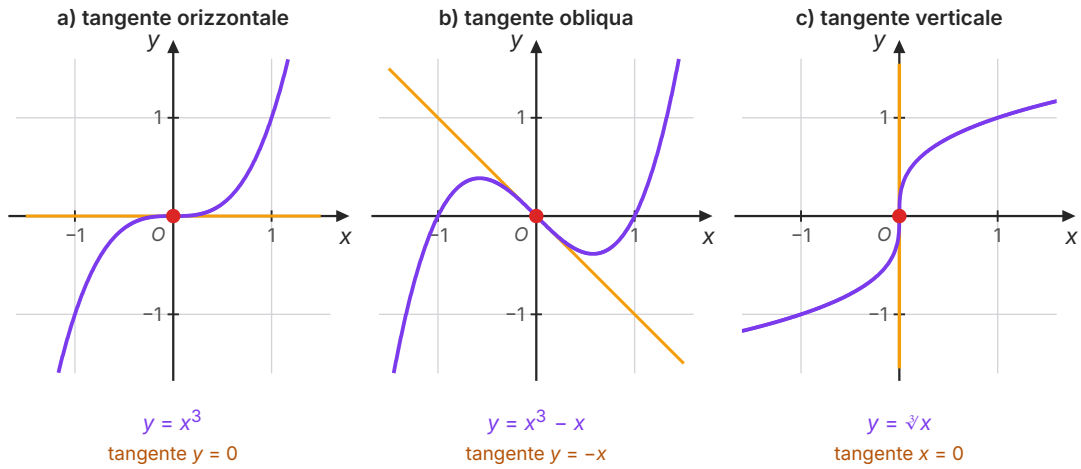

Figura 7.3 I tre tipi di flesso, nell'origine, in scala uguale sui due assi. a) $y = x^3$: la tangente è l'asse x. b) $y = x^3 - x$: la tangente $y = -x$ è obliqua. c) $y = \sqrt[3]{x}$: la tangente è l'asse y. In ogni caso la tangente attraversa il grafico, che cambia il verso della concavità.

Se f è derivabile due volte e $(x_0; f(x_0))$ è un flesso, allora $f''(x_0) = 0$ (lo enunciamo senza dimostrazione). Anche questa condizione è necessaria ma non sufficiente: per $f(x) = x^4$ si ha $f''(x) = 12x^2$, nulla in 0, ma sempre maggiore o uguale a zero; la concavità è sempre rivolta verso l'alto e in 0 c'è un minimo, non un flesso. I flessi si cercano quindi fra gli zeri di f'' e i punti del dominio in cui f'' non esiste, studiando il *segno* di f'': c'è un flesso dove il segno cambia e il grafico ha una tangente.

Torniamo a $f(x) = x^4 - 4x^3$. Si ha $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$, positiva per $x < 0$, negativa per $0 < x < 2$, positiva per $x > 2$ (seconda riga della Figura 7.1). I flessi sono i punti $(0; 0)$ e $(2; -16)$. Nel primo $f'(0) = 0$: è un flesso a tangente orizzontale, e questo spiega perché il punto stazionario 0 non era un estremo. Nel secondo $f'(2) = 32 - 48 = -16$: è un flesso a tangente obliqua, con tangente inflessionale $y + 16 = -16(x-2)$, cioè $y = -16x + 16$.

7.2.3 Il criterio della derivata seconda

Quando è facile calcolare f'', il suo segno in un punto stazionario dice di che estremo si tratta, senza studiare il segno di f'. È il secondo teorema del riquadro precedente.

Dimostrazione (caso $f''(x_0) > 0$). Per definizione di derivata, e poiché $f'(x_0) = 0$,

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno (capitolo 2) esiste un intorno di x_0 in cui, per $x \neq x_0$, il quoziente $\dfrac{f'(x)}{x - x_0}$ è positivo: dunque $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$. Inoltre f è continua in x_0, perché vi è derivabile. Per il criterio della derivata prima, x_0 è un punto di minimo relativo stretto. c.v.d.

Per $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, di cui abbiamo trovato i punti stazionari 1 e 2, si ha $g''(x) = 12x - 18$: $g''(1) = -6 < 0$, massimo relativo; $g''(2) = 6 > 0$, minimo relativo. Se invece $f''(x_0) = 0$ il criterio tace, e per buone ragioni: x^3, x^4 e $-x^4$ hanno tutte derivata prima e seconda nulle in 0, ma la prima ha un flesso, la seconda un minimo, la terza un massimo. In questi casi si può tornare al segno di f', oppure guardare le derivate successive (cenno): se la prima derivata non nulla in x_0 ha ordine n pari, in x_0 c'è un estremo (un minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$, un massimo se è negativa); se n è dispari, c'è un flesso a tangente orizzontale. Per x^4 la prima derivata non nulla in 0 è $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, di ordine pari: minimo; per x^3 è $f'''(0) = 6$, di ordine dispari: flesso.

COLLEGAMENTI

Fisica. Se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove su una retta, $v(t) = s'(t)$ è la sua velocità e $a(t) = s''(t)$ la sua accelerazione. La concavità del grafico spazio–tempo è dunque il segno dell'accelerazione, e un flesso di $s(t)$ è un istante in cui l'accelerazione cambia segno: per un'auto che prima accelera e poi frena, il flesso del grafico spazio–tempo è l'istante in cui la velocità è massima.

Economia. In molti modelli il costo totale $C(q)$ di una produzione di q unità cresce prima sempre più lentamente e poi sempre più in fretta: il suo flesso è il livello di produzione in cui il costo marginale $C'(q)$ è minimo. **Biologia.** Nella crescita logistica di una popolazione (capitolo 12) il flesso della curva è il momento in cui la popolazione cresce più rapidamente.

7.3 Lo studio di una funzione

7.3.1 Lo schema

Fare lo **studio di una funzione** significa raccogliere tutte le informazioni necessarie a tracciarne un grafico fedele. L'ordine dei passi non è sacro, ma seguire sempre lo stesso schema aiuta a non dimenticare nulla. I primi quattro passi sono quelli del grafico probabile del capitolo 4; gli altri sono il contributo di questo capitolo.

IN SINTESI

Schema per lo studio di una funzione $y = f(x)$.

1. **Dominio**, e quindi i punti in cui calcolare i limiti.
2. **Simmetrie e periodicità**: se f è pari o dispari basta studiarla per $x \geq 0$; se è periodica, basta un periodo.
3. **Intersezioni con gli assi** e **segno** di f.
4. **Limiti** agli estremi del dominio, **asintoti** verticali, orizzontali e obliqui, eventuali punti di discontinuità.
5. **Derivata prima**: punti di non derivabilità e loro tipo, segno di f', intervalli di monotonia, massimi e minimi.
6. **Derivata seconda**: segno di f'', concavità, flessi e tangenti inflessionali.
7. **Grafico**: si riportano asintoti e punti trovati, con le tangenti nei punti notevoli, e si traccia una curva coerente con tutte le informazioni. Se due informazioni si contraddicono, c'è un errore di calcolo.

7.3.2 Un esempio completo: una funzione razionale

Applichiamo lo schema alla funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, una funzione razionale fratta con asintoto obliquo e con un massimo relativo minore del minimo relativo.

Dominio, simmetrie, segno. La funzione è definita per $x \neq \pm 1$. Poiché $f(-x) = -f(x)$, è dispari e il grafico è simmetrico rispetto all'origine. L'unica intersezione con gli assi è $O(0; 0)$. Il numeratore ha il segno di x, il denominatore è positivo per $|x| > 1$: $f(x) > 0$ per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < -1$ e per $0 < x < 1$.

Limiti e asintoti. Per $x \to 1^+$ il denominatore tende a 0^+ e il numeratore a 1, quindi $f(x) \to +\infty$; per $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$. Per simmetria $f(x) \to -\infty$ per $x \to -1^-$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to -1^+$. Le rette $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticali. Il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, quindi cerchiamo un asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1, \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

L'asintoto obliquo è $y = x$. Poiché $f(x) - x = \dfrac{x}{x^2-1}$, per $x > 1$ il grafico sta sopra l'asintoto e per $x < -1$ sotto; lo incontra nell'origine.

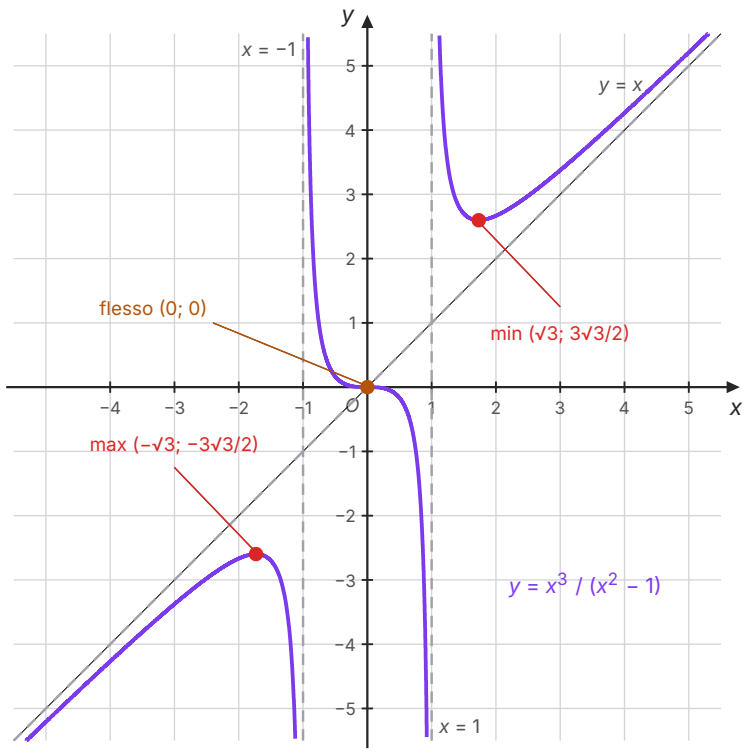

Figura 7.4 Il grafico di $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, in scala uguale sui due assi, con gli asintoti $x = -1$, $x = 1$ e $y = x$ (tratteggiati), il massimo relativo in $x = -\sqrt{3}$, il minimo relativo in $x = \sqrt{3}$ e il flesso a tangente orizzontale nell'origine. Grafico calcolato dall'equazione.

Derivata prima. Con la regola del quoziente

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Il denominatore e x^2 sono positivi (fuori da 0): il segno di f' è quello di $x^2 - 3$. Quindi f cresce in $]-\infty; -\sqrt{3}]$, decresce in $[-\sqrt{3}; -1[$, in $]-1; 1[$ e in $]1; \sqrt{3}]$, cresce in $[\sqrt{3}; +\infty[$. In $-\sqrt{3}$ c'è un massimo relativo, $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}60$; in $\sqrt{3}$ un minimo relativo, $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$. Il massimo relativo

è minore del minimo relativo: stanno su rami diversi del grafico, separati dagli asintoti verticali. In 0 la derivata si annulla senza cambiare segno.

Derivata seconda. Derivando $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$ e semplificando il fattore $x^2 - 1$, si ottiene

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Poiché $x^2 + 3 > 0$, il segno di f'' è quello di $x(x^2 - 1)$: la concavità è rivolta verso l'alto per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$, verso il basso per $x < -1$ e per $0 < x < 1$. Il verso cambia in 0, che appartiene al dominio: l'origine è un flesso a tangente orizzontale. Il verso cambia anche in ± 1, ma lì la funzione non è definita, e non ci sono flessi.

Grafico. È nella Figura 7.4. Si noti che il grafico attraversa l'asintoto obliquo nell'origine: un asintoto descrive il comportamento all'infinito, non vieta di essere attraversato altrove.

7.3.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Studiamo $f(x) = xe^{-x}$, che useremo ancora nell'ultima sezione. Il dominio è $\mathbb{R}$, non ci sono simmetrie, l'unico zero è $x = 0$ e il segno di f è quello di x. Per $x \to -\infty$ il prodotto tende a $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$, e non c'è asintoto obliquo, perché $\dfrac{f(x)}{x} = e^{-x} \to +\infty$. Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{x}{e^x} \to 0$ per la gerarchia degli infiniti (capitoli 3 e 6): la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a destra, e il grafico le si avvicina da sopra. Poi $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$: f cresce per $x \le 1$ e decresce per $x \ge 1$, con massimo assoluto $f(1) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$. Infine $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$: la concavità è verso il basso per $x < 2$ e verso l'alto per $x > 2$, con un flesso in $\left(2; \dfrac{2}{e^2}\right)$, $\dfrac{2}{e^2} \approx 0{,}271$.

La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è pari e positiva, vale 1 in 0 e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Da $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ segue che ha il massimo assoluto in 0; da $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ segue che ha due flessi, in $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}707$, dove vale $e^{-1/2} \approx 0{,}607$. È la curva «a campana» che, opportunamente adattata, descriverà la distribuzione normale nel capitolo 16.

La funzione $f(x) = x \ln x$ ha dominio $]0; +\infty[$; per $x \to 0^+$ tende a 0 (forma $0 \cdot \infty$, capitolo 6): non c'è asintoto verticale, e la funzione si prolunga per continuità ponendo $f(0) = 0$. Da $f'(x) = \ln x + 1$ segue che f decresce in $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ e cresce dopo, con minimo assoluto $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}368$; da $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ segue che la concavità è sempre rivolta verso l'alto. Poiché $f'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$, il grafico parte dall'origine con una tangente che tende a diventare verticale.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Studia $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ e deduci quale dei due numeri e^{π} e π^{e} è il maggiore.

Soluzione. Il dominio è $]0; +\infty[$; non ci sono simmetrie. L'unico zero è $x = 1$, e $f(x) > 0$ per $x > 1$. Per $x \to 0^{+}$, $\ln x \to -\infty$ e $\dfrac{1}{x} \to +\infty$: il prodotto tende a $-\infty$, e la retta $x = 0$ è asintoto verticale. Per $x \to +\infty$ la forma è $\dfrac{\infty}{\infty}$; con il teorema di de l'Hôpital $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$, e $y = 0$ è asintoto orizzontale.

La derivata prima è $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$: positiva per $x < e$, negativa per $x > e$. In $x = e$ c'è il massimo assoluto, $f(e) = \dfrac{1}{e}$. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

che si annulla per $\ln x = \dfrac{3}{2}$, cioè $x = e^{3/2} \approx 4{,}48$, ed è negativa prima e positiva dopo: c'è un flesso nel punto $(e^{3/2}; \dfrac{3}{2}e^{-3/2})$, con $\dfrac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0{,}335$. Il grafico è nella Figura 7.8, a.

Confronto. Poiché $\pi > e$ e f è strettamente decrescente in $[e; +\infty[$, si ha $f(\pi) < f(e)$, cioè $\dfrac{\ln \pi}{\pi} < \dfrac{1}{e}$. Moltiplicando per $e\pi > 0$ si ottiene $e \ln \pi < \pi$, cioè $\ln \pi^{e} < \ln e^{\pi}$, e quindi $\pi^{e} < e^{\pi}$. La calcolatrice conferma: $\pi^{e} \approx 22{,}46$, $e^{\pi} \approx 23{,}14$.

7.3.4 Funzioni irrazionali e con valore assoluto

Studiamo $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$, dove la radice è la radice cubica reale, definita per ogni numero reale. Gli zeri sono 0 e 5; poiché $\sqrt[3]{x^2} \geq 0$, il segno di f è quello di $x - 5$. Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$, e non ci sono asintoti obliqui, perché $\dfrac{f(x)}{x}$ tende a $+\infty$. Scrivendo $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ si ottiene, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10(x+1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

Il segno di f' è positivo per $x < 0$, negativo per $0 < x < 2$, positivo per $x > 2$. In 0 la funzione è continua ma non derivabile: $f'(x) \to +\infty$ da sinistra e $f'(x) \to -\infty$ da destra, è una cuspide, e poiché la derivata passa da positiva a negativa è un punto di massimo relativo, con $f(0) = 0$. In 2 c'è il minimo relativo $f(2) = -3\sqrt[3]{4} \approx -4{,}76$. Il denominatore di f'', $x\sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x})^4$, è positivo per $x \neq 0$, quindi f'' ha il segno di $x + 1$: c'è un flesso in $(-1; -6)$, con tangente di coefficiente angolare $f'(-1) = 5$. La cuspide non è un flesso: a sinistra e a destra di 0 la concavità è rivolta verso l'alto.

Con il valore assoluto, come per $|x^2 - 2x|$, conviene scrivere la funzione per casi e studiare ciascun tratto; i punti in cui l'argomento del valore assoluto si annulla e cambia segno sono candidati a essere punti angolosi, e vanno controllati con le derivate destra e sinistra. Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene da quello di f ribaltando rispetto all'asse x le parti sotto l'asse (vedi *Matematica 3*, capitolo 3).

APPROFONDIMENTO · MARIA GAETANA AGNESI E LA «VERSIERA»

Maria Gaetana Agnesi (Milano, 1718–1799) pubblicò nel 1748 le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, due volumi che espongono con ordine l'algebra, il calcolo differenziale e il calcolo integrale. È uno dei primi trattati completi di analisi pensati per l'insegnamento, ed è scritto in italiano anziché in latino, la lingua in cui allora si scriveva di matematica.

Fra le molte curve studiate nell'opera c'è quella che, in un opportuno riferimento, ha equazione $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$, già considerata da altri matematici e chiamata da Agnesi «versiera». In inglese la curva è nota come *witch of Agnesi*, la «strega di Agnesi», per un errore di traduzione: «versiera» fu letto come «avversiera», una parola che significa diavolessa, strega. Con $a = 1$ è il grafico di $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, che studierai negli esercizi: una campana con il massimo in $(0; 1)$ e due flessi.

7.3.5 Funzioni goniometriche

Una funzione periodica si studia su un periodo. Per $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$ in $[0; 2\pi]$ si ha $f'(x) = \cos x - \text{sen}\, x$, nulla per $\text{tg}\, x = 1$, cioè $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{5\pi}{4}$. La derivata è positiva in $[0; \dfrac{\pi}{4}[$ e in $]\dfrac{5\pi}{4}; 2\pi]$, negativa fra i due punti: massimo $f(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e minimo $f(\dfrac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. Inoltre $f''(x) = -\text{sen}\, x - \cos x = -f(x)$: la concavità è rivolta verso il basso dove $f > 0$ e verso l'alto dove $f < 0$, con flessi negli zeri $\dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$. Il risultato era prevedibile: con il metodo dell'angolo aggiunto (*Matematica 4*) $f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}(x + \dfrac{\pi}{4})$, una sinusoide.

Più interessante è un'oscillazione smorzata, come $f(x) = e^{-x/5}\,\text{sen}\, x$ per $x \geq 0$ (Figura 7.5). Poiché $|\text{sen}\, x| \leq 1$, il grafico è compreso fra le curve $y = e^{-x/5}$ e $y = -e^{-x/5}$, e le tocca dove $\text{sen}\, x = \pm 1$; gli zeri sono i punti $k\pi$. La derivata è $f'(x) = e^{-x/5}(\cos x - \dfrac{1}{5}\,\text{sen}\, x)$, e si annulla dove $\text{tg}\, x = 5$, cioè in $x = \text{arctg}\, 5 + k\pi$, con $\text{arctg}\, 5 \approx 1{,}373$. Poiché $\text{arctg}\, 5 < \dfrac{\pi}{2}$, i massimi vengono *prima* dei punti di contatto con la curva $y = e^{-x/5}$: i massimi non stanno su di essa. Il rapporto fra due massimi consecutivi è sempre lo stesso, $e^{-2\pi/5} \approx 0{,}285$: ogni oscillazione raggiunge poco meno del 30% dell'ampiezza della precedente. È il comportamento di una molla con attrito, che ritroveremo nel capitolo 12.

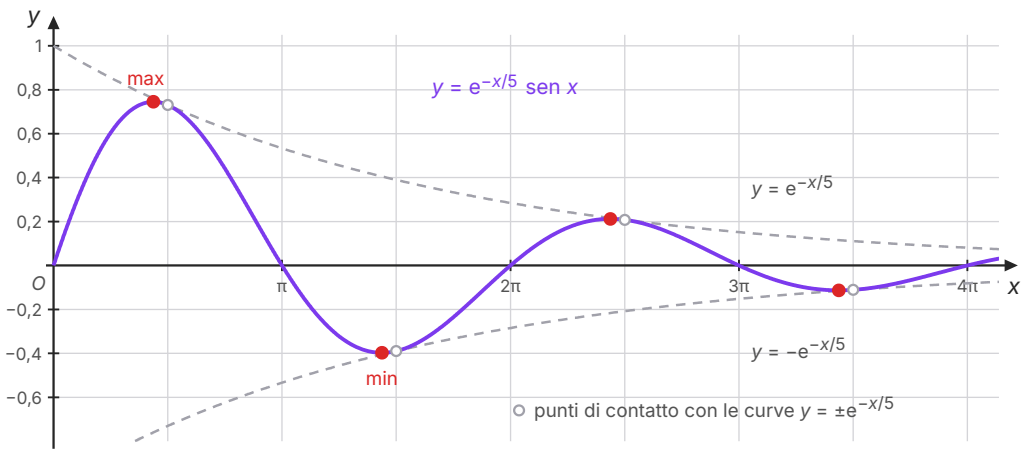

Figura 7.5 L'oscillazione smorzata $y = e^{-x/5}\,\text{sen}\,x$ per $0 \le x \le 13$, compresa fra le curve $y = \pm e^{-x/5}$ (tratteggiate). I massimi e i minimi, in $x = \text{arctg}\,5 + k\pi$, precedono di circa 0,2 i punti di contatto con le due curve, in $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Grafico calcolato dall'equazione; le unità sui due assi sono diverse.

7.3.6 Con il computer: *f*, *f'* e *f''* insieme

Uno studio fatto a mano si controlla bene con un software di geometria dinamica o con un sistema di calcolo simbolico: si definisce f, si fanno tracciare f' e f'' (molti programmi hanno un comando che calcola la derivata) e si confrontano i tre grafici. Ogni zero di f' in cui f' cambia segno deve corrispondere a un estremo di f, ogni zero di f'' con cambio di segno a un flesso, e nei flessi f' deve avere un massimo o un minimo. Il computer, però, mostra solo una finestra del piano: un asintoto, un estremo fuori dalla finestra, una zona quasi piatta (come xe^{-x} per x grande, che sullo schermo sembra coincidere con l'asse x) possono ingannare. Per vedere il flesso di $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ nell'origine, per esempio, bisogna ingrandire molto. Il computer controlla; il ragionamento dimostra.

7.4 Dal grafico di *f* a quello di *f'*

Nella seconda prova capita spesso che di una funzione sia dato il grafico e non l'espressione analitica, e che si chieda di dedurne il grafico della derivata, o al contrario che sia dato il grafico di f' e si debba ricostruire l'andamento di f. Il dizionario per tradurre da un grafico all'altro è tutto nelle sezioni precedenti; la Tabella 7.1 lo riassume.

Tabella 7.1 Come si leggono nel grafico di f' le proprietà del grafico di f (in un intervallo, o in un punto x_0).

Nel grafico di f	Nel grafico di f'
f crescente	$f' \geq 0$: grafico sopra l'asse x (o su di esso in punti isolati)
f decrescente	$f' \leq 0$: grafico sotto l'asse x
punto stazionario	zero di f'
massimo (minimo) relativo in un punto di derivabilità	zero in cui f' passa da positiva a negativa (da negativa a positiva)
flesso a tangente orizzontale	zero in cui f' non cambia segno: il grafico tocca l'asse x
concavità verso l'alto (verso il basso)	f' crescente (decrescente)
flesso	massimo o minimo relativo di f'
punto angoloso	salto: limiti destro e sinistro di f' diversi
tangente verticale (flesso o cuspide)	$f'(x) \to \pm\infty$: asintoto verticale di f'
asintoto $y = mx + q$ per $x \to +\infty$	se f' ha limite per $x \to +\infty$, il limite è m

L'ultima riga va letta con attenzione: una funzione può avvicinarsi a un asintoto oscillando sempre più fitta, e allora la sua derivata non ha limite. Per esempio $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ tende a 0 per $x \to +\infty$, ma $f'(x) = 2\cos(x^2) - \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$ continua a oscillare fra valori vicini a -2 e a 2.

La Figura 7.6 mostra, uno sotto l'altro e con le stesse ascisse, i grafici di $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$, della sua derivata $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ e della derivata seconda $f''(x) = 2x - 2$. Leggendo in verticale: gli zeri di f', in -1 e 3, sono il massimo $\left(-1; \dfrac{17}{3}\right)$ e il minimo $(3; -5)$ di f; il minimo di f', in $x = 1$, è il flesso $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$ di f; lo zero di f'' è nello stesso punto, e il segno di f'' dice dove f' cresce, cioè dove f ha la concavità verso l'alto.

Il passaggio inverso, da f' a f, ha un limite preciso: due funzioni con la stessa derivata in un intervallo differiscono per una costante (capitolo 6). Il grafico di f' determina quindi il grafico di f a meno di una traslazione verticale: se ne leggono monotonia, estremi, concavità e flessi, ma non l'altezza, per la quale serve conoscere un punto. Quanto vale l'incremento $f(b) - f(a)$ si saprà leggere sul grafico di f' solo nel capitolo 10, come un'area.

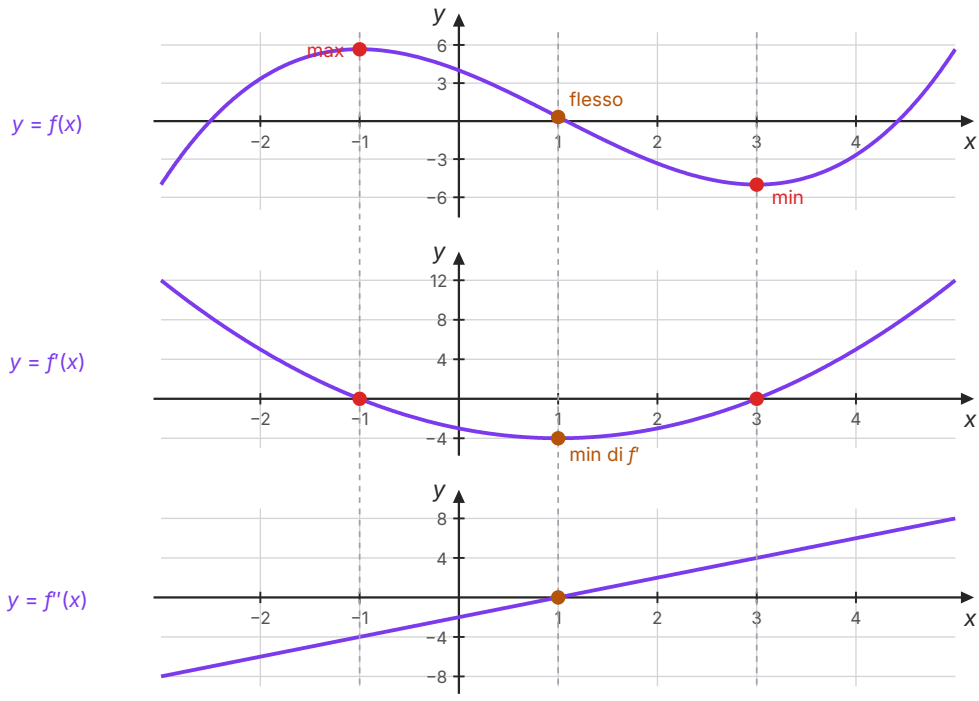

Figura 7.6 Dall'alto: i grafici di $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$, di $f'(x) = (x + 1)(x - 3)$ e di $f''(x) = 2(x - 1)$, con le stesse ascisse. Le linee tratteggiate verticali collegano il massimo e il minimo di f agli zeri di f', e il flesso di f al minimo di f' e allo zero di f''. Grafici calcolati dalle equazioni; le scale verticali sono diverse nei tre riquadri.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Il grafico centrale della Figura 7.6 è il grafico della derivata f' di una funzione f derivabile in $\mathbb{R}$, di cui si sa che $f(0) = 4$. Senza usare l'espressione di f: a) trova gli intervalli di monotonia e i punti di estremo di f; b) trova la concavità di f e i suoi flessi; c) scrivi l'equazione della tangente al grafico di f nel punto di ascissa 0; d) stabilisci se $f(3)$ è maggiore o minore di $f(-1)$.

Soluzione. a) Il grafico di f' sta sopra l'asse x per $x < -1$ e per $x > 3$, sotto per $-1 < x < 3$: f cresce in $]-\infty; -1]$ e in $[3; +\infty[$, decresce in $[-1; 3]$. In $x = -1$ la derivata passa da positiva a negativa: massimo relativo. In $x = 3$ passa da negativa a positiva: minimo relativo.

b) Il grafico di f' scende fino a $x = 1$ e poi sale: f' è decrescente per $x < 1$ e crescente per $x > 1$, quindi la concavità di f è rivolta verso il basso per $x < 1$ e verso l'alto per $x > 1$. Il punto di ascissa 1 è un flesso, a tangente obliqua perché $f'(1) = -4 \neq 0$.

c) Dal grafico si legge $f'(0) = -3$. La tangente passa per $(0; 4)$ e ha pendenza -3: $y = -3x + 4$.

d) Poiché f è decrescente in $[-1; 3]$, $f(3) < f(-1)$. Il grafico di f' non dice invece di quanto $f(3)$ è minore di $f(-1)$: per saperlo servirà l'integrale.

Lo stesso ragionamento, salendo di un gradino, lega f' a f'': la derivata seconda è la pendenza del grafico di f', e i suoi zeri con cambio di segno corrispondono agli estremi di f', cioè ai flessi di f.

7.5 Funzioni con parametri

7.5.1 Determinare i parametri

Molti problemi cominciano così: «Determina i valori di a, b, c per i quali il grafico di f …». Ogni condizione geometrica si traduce in un'equazione nei parametri:

- il grafico passa per il punto $(x_0; y_0)$: $f(x_0) = y_0$;
- in x_0 c'è un punto stazionario, in particolare un estremo di una funzione derivabile: $f'(x_0) = 0$;
- la tangente nel punto di ascissa x_0 ha coefficiente angolare m, per esempio perché è parallela a una retta data: $f'(x_0) = m$;
- in x_0 c'è un flesso di una funzione derivabile due volte: $f''(x_0) = 0$;
- il grafico ha un asintoto assegnato: una condizione sui limiti (per esempio sul grado o sugli zeri del denominatore).

Di solito servono tante condizioni indipendenti quanti sono i parametri. Ma attenzione: le condizioni $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ sono necessarie, non sufficienti, e dopo aver risolto il sistema bisogna **verificare** che la funzione trovata abbia davvero la proprietà richiesta. Se si chiede che $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$ abbia un punto stazionario in $x = 1$, da $f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2}$ e $f'(1) = 2 - k = 0$ si ottiene $k = 2$; poi $f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3}$ e $f''(1) = 6 > 0$: è un minimo relativo, $f(1) = 3$. Se il problema avesse chiesto un *massimo* in $x = 1$, la risposta corretta sarebbe stata: nessun valore di k.

ESEMPIO SVOLTO · VERSO L'ESAME

Problema. Si consideri la funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a, b, c, d numeri reali.

a) Determina i coefficienti in modo che il grafico di f passi per l'origine e abbia un flesso nel punto $F(1; -2)$ con tangente inflessionale di coefficiente angolare -3.

b) Verificato che si ottiene $f(x) = x^3 - 3x^2$, studia la funzione e tracciane il grafico.

c) Trova i punti del grafico di $f(x) = x^3 - 3x^2$ in cui la tangente è parallela alla retta $y = 9x$, e scrivi le equazioni delle tangenti.

d) Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 = k$ nell'intervallo $[-1; 3]$.

Soluzione. a) Le derivate sono $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$. Le quattro condizioni sono $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f''(1) = 0$, $f'(1) = -3$:

$$d = 0, \quad a + b + c = -2, \quad 6a + 2b = 0, \quad 3a + 2b + c = -3.$$

Dalla terza $b = -3a$; dalla seconda $c = -2 - a - b = -2 + 2a$; sostituendo nella quarta, $3a - 6a - 2 + 2a = -3$, cioè $a = 1$. Quindi $b = -3$, $c = 0$, $d = 0$ e $f(x) = x^3 - 3x^2$. Si verifica che $f''(x) = 6x - 6$ cambia segno in 1: F è davvero un flesso.

b) Il dominio è $\mathbb{R}$; $f(x) = x^2(x - 3)$ si annulla in 0 (radice doppia: il grafico è tangente all'asse x) e in 3, ed è negativa per $x < 3$, $x \neq 0$, positiva per $x > 3$. I limiti per $x \to \pm\infty$ sono $\pm\infty$, senza asintoti. Poi $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$: f cresce in $]-\infty; 0]$, decresce in $[0; 2]$, cresce in $[2; +\infty[$; massimo relativo $(0; 0)$, minimo relativo $(2; -4)$. Infine $f''(x) = 6(x - 1)$: concavità verso il basso per $x < 1$, verso l'alto per $x > 1$, flesso $F(1; -2)$, con tangente $y = -3x + 1$.

c) Le tangenti parallele a $y = 9x$ hanno pendenza 9: $3x^2 - 6x = 9$, cioè $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = -1$ oppure $x = 3$. I punti sono $(-1; -4)$ e $(3; 0)$; le tangenti sono $y + 4 = 9(x + 1)$, cioè $y = 9x + 5$, e $y = 9(x - 3)$, cioè $y = 9x - 27$.

d) Le soluzioni sono le ascisse dei punti comuni all'arco del grafico con $-1 \le x \le 3$ e alla retta $y = k$. Sull'intervallo, f cresce da $f(-1) = -4$ a $f(0) = 0$, decresce fino a $f(2) = -4$ e cresce fino a $f(3) = 0$. Quindi: per $k < -4$ o $k > 0$ nessuna soluzione; per $k = -4$ due soluzioni, $x = -1$ e $x = 2$ (infatti $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$); per $-4 < k < 0$ tre soluzioni, una in ciascuno degli intervalli $]-1; 0[$, $]0; 2[$, $]2; 3[$; per $k = 0$ due soluzioni, $x = 0$ e $x = 3$.

7.5.2 Famiglie di curve

Una funzione che contiene un parametro k descrive una **famiglia di curve**: una curva per ogni valore di k. Consideriamo $f_k(x) = x^3 + kx$. Tutte le curve passano per l'origine e lì hanno un flesso, perché $f_k''(x) = 6x$ cambia segno in 0, con tangente di coefficiente angolare $f_k'(0) = k$. La derivata $f_k'(x) = 3x^2 + k$ distingue tre casi. Se $k > 0$, $f_k' > 0$: la funzione è strettamente crescente, senza estremi. Se $k = 0$ si ritrova x^3, con il flesso a tangente orizzontale. Se $k < 0$, f_k' si annulla in $x = \pm\sqrt{-k/3}$, con un massimo relativo nel punto di ascissa negativa e un minimo in quello di

ascissa positiva. Il valore $k = 0$ separa due comportamenti diversi: è lì che le due «gobbe» nascono.

I punti comuni a tutte le curve della famiglia si trovano uguagliando due curve qualsiasi: da $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$, con $k_1 \neq k_2$, segue $(k_1 - k_2)x = 0$, cioè $x = 0$. L'unico punto comune è l'origine. In generale, se la famiglia si scrive $y = A(x) + \mathrm{k}B(x)$, i punti comuni hanno ascissa che annulla $B(x)$.

Con il computer. In un software di geometria dinamica si definisce un cursore k fra -3 e 3 e la funzione $f(x) = x^3 + kx$. Muovendo il cursore si vede l'origine restare ferma mentre le due gobbe, per $k < 0$, si avvicinano all'origine e si appiattiscono quando $k \to 0^-$, fino a sparire. Attivando la traccia dei punti di massimo e di minimo si vede che percorrono una curva: dal punto stazionario x_0 si ricava $k = -3x_0^2$ e quindi $y = x_0^3 - 3x_0^3 = -2x_0^3$. Gli estremi di tutte le curve della famiglia stanno sulla curva $y = -2x^3$.

7.6 Discussione grafica di equazioni parametriche

7.6.1 Il metodo

Data un'equazione che contiene un parametro k, ci si chiede spesso quante soluzioni reali abbia al variare di k. Se l'equazione si può scrivere nella forma $f(x) = k$, con f che non dipende da k, le soluzioni sono le ascisse dei punti comuni al grafico di $y = f(x)$ e alla retta orizzontale $y = k$. Basta allora immaginare la retta che scorre dall'alto verso il basso e contare le intersezioni: è la **discussione grafica** dell'equazione. Il numero delle soluzioni può cambiare solo quando la retta passa per un estremo relativo, per un estremo dell'intervallo considerato o raggiunge un valore limite: sono questi i valori critici di k, e lo studio di funzione li fornisce tutti.

In *Matematica 4* abbiamo discusso l'equazione $x^3 - 3x = k$ disegnando il grafico per punti; ora possiamo giustificare ogni passaggio. Nel capitolo 6 (figura sul teorema di Fermat) abbiamo visto che $f(x) = x^3 - 3x$, con $f'(x) = 3x^2 - 3$, ha massimo relativo $f(-1) = 2$ e minimo relativo $f(1) = -2$, e tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dalla Figura 7.7: per $|k| > 2$ c'è una sola soluzione; per $k = \pm 2$ due soluzioni distinte, una delle quali doppia (la retta è tangente al grafico nell'estremo); per $|k| < 2$ tre soluzioni. Si può dire anche dove stanno: poiché $f(-2) = -2$ e $f(2) = 2$, per $|k| < 2$ c'è una soluzione in ciascuno degli intervalli $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ e $]1; 2[$, e una sola, per il teorema degli zeri e la stretta monotonia in ciascun tratto.

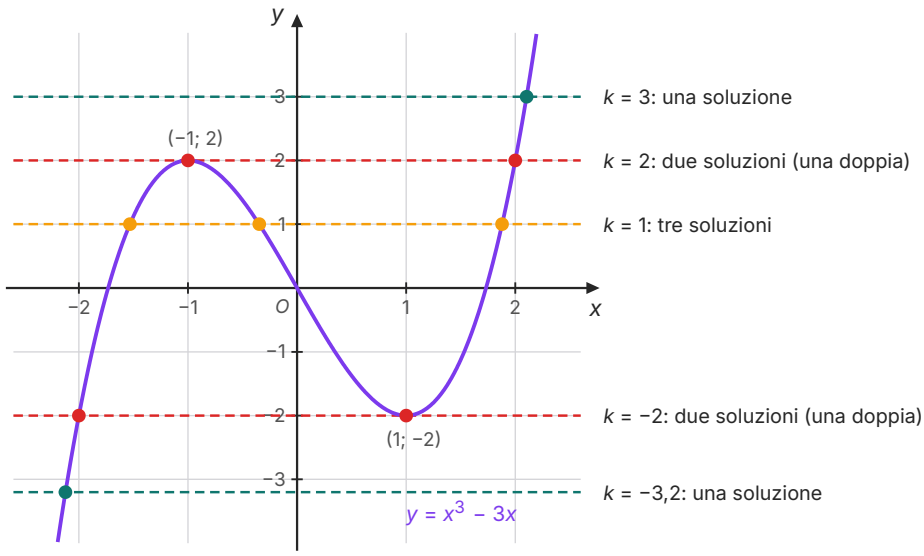

Figura 7.7 Discussione grafica dell'equazione $x^3 - 3x = k$: le soluzioni sono le ascisse dei punti comuni al grafico di $y = x^3 - 3x$ e alla retta $y = k$. I valori critici $k = 2$ e $k = -2$ sono il massimo e il minimo relativi. Grafico calcolato dall'equazione; le unità sui due assi sono diverse.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Quante soluzioni reali ha l'equazione $xe^{-x} = k$ al variare di k?

Soluzione. Usiamo lo studio di $f(x) = xe^{-x}$ della sezione precedente. In $]-\infty; 1]$ la funzione cresce, assumendo tutti i valori da $-\infty$ (limite per $x \to -\infty$) fino a $\frac{1}{e}$; in $[1; +\infty[$ decresce da $\frac{1}{e}$ verso 0, senza raggiungerlo, perché $f(x) > 0$ per $x > 0$. Facendo scorrere la retta $y = k$:

- per $k > \frac{1}{e}$ nessuna soluzione;
- per $k = \frac{1}{e}$ una soluzione, $x = 1$, in cui la retta è tangente al grafico;
- per $0 < k < \frac{1}{e}$ due soluzioni, una in $]0; 1[$ e una in $]1; +\infty[$;
- per $k \le 0$ una soluzione: $x = 0$ se $k = 0$, una soluzione negativa se $k < 0$.

Ogni affermazione poggia su un teorema: l'esistenza sul teorema dei valori intermedi (capitolo 4), il numero esatto sulla stretta monotonia in ciascun tratto (capitolo 6).

Se le soluzioni si cercano in un intervallo, si considera soltanto l'arco di grafico corrispondente. Per l'equazione $x^3 - 3x = k$ con $0 \le x \le 2$, l'arco scende da (0; 0) a (1; −2) e risale a (2; 2): per $k < -2$

nessuna soluzione, per $k = -2$ una ($x = 1$), per $-2 < k \le 0$ due, per $0 < k \le 2$ una, per $k > 2$ nessuna. Si noti $k = 0$: le soluzioni sono $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$, entrambe nell'intervallo.

7.6.2 Quando il parametro non è isolato

A volte il parametro va prima isolato. Consideriamo $\ln x = kx$, con $x > 0$. Dividendo per x, che è positivo e quindi non cambia l'insieme delle soluzioni, si ottiene $\dfrac{\ln x}{x} = k$, e si usa il grafico studiato nella sezione precedente (Figura 7.8, a): per $k > \dfrac{1}{e}$ nessuna soluzione; per $k = \dfrac{1}{e}$ una, $x = e$; per $0 < k < \dfrac{1}{e}$ due, una in $]1; e[$ e una in $]e; +\infty[$; per $k \le 0$ una, in $]0; 1]$.

La stessa discussione si può fare senza dividere, intersecando il grafico di $y = \ln x$ con le rette $y = kx$, che ruotano attorno all'origine (Figura 7.8, b). Il caso limite è la retta $y = \dfrac{x}{e}$, tangente a $y = \ln x$ nel punto $(e; 1)$: le rette meno inclinate di essa la tagliano due volte, quelle più inclinate mai. I due metodi danno lo stesso risultato, ma il primo è di solito più comodo, perché a muoversi è una retta orizzontale. Nel dividere bisogna però fare attenzione: dividere per un'espressione che può annullarsi fa perdere soluzioni. Per esempio $xe^{-x} = kx$ ha sempre la soluzione $x = 0$, oltre a quelle di $e^{-x} = k$.

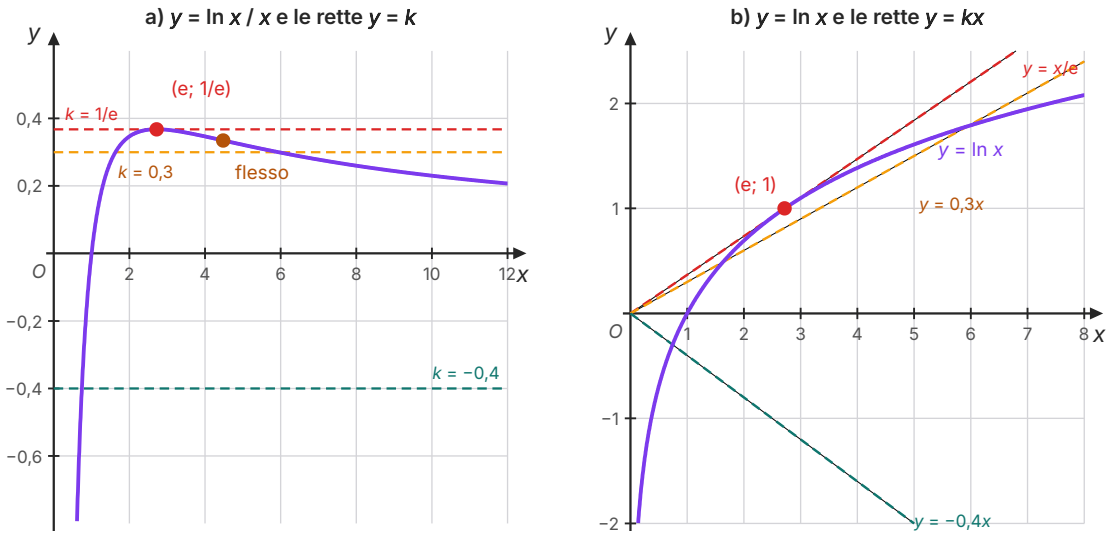

Figura 7.8 Due modi di discutere l'equazione $\ln x = kx$. a) Il grafico di $y = \dfrac{\ln x}{x}$, con il massimo $\left(e; \dfrac{1}{e}\right)$, il flesso in $x = e^{3/2}$ e alcune rette $y = k$. b) Il grafico di $y = \ln x$ e alcune rette $y = kx$; la retta $y = \dfrac{x}{e}$ è tangente nel punto $(e; 1)$. Grafici calcolati dalle equazioni; le unità sui due assi sono diverse.

ERRORE FREQUENTE

«$f'(x_0) = 0$, quindi in x_0 c'è un estremo». No: x^3 ha derivata nulla in 0 e nessun estremo. Bisogna controllare il cambio di segno di f', o il segno di $f''(x_0)$.

«$f''(x_0) = 0$, quindi in x_0 c'è un flesso». No: x^4 ha $f''(0) = 0$ e in 0 ha un minimo. Bisogna controllare che f'' cambi segno.

Dimenticare i punti in cui f' non esiste. $|x^2 - 2x|$ ha i suoi minimi in punti angolosi, $\sqrt[3]{x^2}(x - 5)$ il suo massimo relativo in una cuspide; e negli estremi assoluti su $[a; b]$ non vanno dimenticati a e b.

«Il grafico non può attraversare un asintoto». Falso: $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ attraversa il suo asintoto obliquo nell'origine, $e^{-x/5}\operatorname{sen} x$ attraversa infinite volte l'asintoto $y = 0$. Un asintoto descrive il comportamento all'infinito o vicino a un punto, e non dice nulla altrove.

Flessi fuori dal dominio. La concavità di $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ cambia verso anche in $x = \pm 1$, ma lì la funzione non è definita: non sono flessi.

SINTESI

- $M = f(x_0)$ è il massimo assoluto se $f(x) \le f(x_0)$ in tutto il dominio, un massimo relativo se la disuguaglianza vale in un intorno di x_0; analogamente per i minimi. Un estremo assoluto è anche relativo, non viceversa.
- Criterio della derivata prima: se f è continua in x_0 e f' passa da positiva a negativa (da negativa a positiva), x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo. Il criterio vale anche nei punti angolosi e nelle cuspidi.
- Gli estremi relativi interni si cercano fra i punti stazionari ($f' = 0$) e i punti di non derivabilità; gli estremi assoluti in $[a; b]$ anche in a e b.
- Il grafico ha la concavità verso l'alto (verso il basso) dove sta sopra (sotto) le sue tangenti; se $f'' > 0$ la concavità è verso l'alto, se $f'' < 0$ verso il basso.
- Un flesso è un punto in cui il grafico ha una tangente e la concavità cambia verso; secondo la tangente è a tangente orizzontale, obliqua o verticale. Nei flessi di una funzione derivabile due volte $f'' = 0$, ma $f''(x_0) = 0$ non basta: serve il cambio di segno.
- Criterio della derivata seconda: se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ c'è un minimo relativo, se $f''(x_0) < 0$ un massimo; se $f''(x_0) = 0$ il criterio non decide.
- Lo studio di una funzione segue uno schema: dominio, simmetrie, intersezioni e segno, limiti e asintoti, derivata prima, derivata seconda, grafico. Le informazioni devono essere tutte coerenti.
- Un grafico può attraversare i propri asintoti orizzontali e obliqui.
- Dal grafico di f' si leggono monotonia, estremi, concavità e flessi di f, ma non la sua altezza: f è determinata a meno di una costante.
- I parametri di una funzione si determinano traducendo ogni condizione in un'equazione; poiché $f' = 0$ e $f'' = 0$ sono condizioni solo necessarie, la funzione trovata va verificata.
- Le soluzioni di $f(x) = k$ sono le ascisse dei punti comuni al grafico di f e alla retta $y = k$; il loro numero cambia solo nei valori di k che corrispondono a estremi relativi, a estremi dell'intervallo o a limiti di f.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Sia f derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(2) = 0$. Quale affermazione è sicuramente vera?

   A. $x = 2$ è un punto di massimo o di minimo relativo.

   B. Nel punto di ascissa 2 il grafico ha un flesso.

   C. La tangente al grafico nel punto di ascissa 2 è parallela all'asse x.

   D. $f''(2) = 0$.

2. ● Di una funzione f derivabile in $\mathbb{R}$ si sa che $f'(1) = f'(4) = 0$, che $f'(x) < 0$ per $x < 1$ e che $f'(x) > 0$ per $1 < x < 4$ e per $x > 4$. Allora:

   A. f ha un minimo relativo in 1 e un massimo relativo in 4.

   B. f ha un minimo relativo in 1 e nessun estremo in 4.

   C. f ha un massimo relativo in 1.

   D. f ha due minimi relativi, in 1 e in 4.

3. ● La funzione f è derivabile due volte in $\mathbb{R}$ e $f''(x) = (x-1)^2(x+2)$. I punti di flesso del grafico di f hanno ascissa:

   A. 1 e −2.

   B. soltanto 1.

   C. nessuna: non ci sono flessi.

   D. soltanto −2.

4. ●● Per $f(x) = x^4$, nel punto $x = 0$:

   A. $f'(0) = f''(0) = 0$ e 0 è il punto di minimo assoluto.

   B. il grafico ha un flesso a tangente orizzontale.

   C. f ha un massimo relativo.

   D. il punto non è stazionario.

5. ●● Quale affermazione sulla funzione $f(x) = xe^x$ è vera?

   A. Ha un massimo relativo in $x = -1$.

   B. Ha un flesso in $x = -1$.

   C. Ha la concavità rivolta verso il basso in tutto $\mathbb{R}$.

   D. Ha il minimo assoluto $-\frac{1}{e}$, in $x = -1$.

6. ●● La funzione $f(x) = |x^2 - 9|$, nel punto $x = 3$, ha:

   A. un punto stazionario.

   B. un punto angoloso, in cui assume il minimo assoluto.

   C. un flesso.

   D. un massimo relativo.

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Se f è continua in $[a; b]$, il suo massimo assoluto è assunto in un punto stazionario oppure in a o in b.

   b) Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, lì il grafico di f sta sopra ciascuna delle sue rette tangenti.

   c) Il grafico di una funzione non può intersecare un suo asintoto orizzontale.

   d) Se f ha un massimo relativo in un punto x_0 interno al dominio ed è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

   e) In un punto angoloso il grafico può avere un flesso.

8. ● Completa.
   a) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di _____ relativo.
   b) Se f è continua in x_0 e $f'(x) \to +\infty$ sia per $x \to x_0^-$ sia per $x \to x_0^+$, nel punto $(x_0; f(x_0))$ il grafico ha un _____ a tangente _____ .
   c) Ai flessi a tangente obliqua del grafico di f corrispondono i punti di _____ o di _____ relativo di f'.
   d) Le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ sono le ascisse dei punti comuni al grafico di f e alla retta _____ .

Calcolare

9. ● Trova gli intervalli di monotonia e gli estremi relativi delle funzioni: a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$; b) $f(x) = x^4 - 2x^2$; c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ (di c) e d) hai tracciato il grafico probabile nel capitolo 4).

10. ● Studia la concavità e trova i flessi delle funzioni: a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$; b) $f(x) = x^4 - 6x^2$; c) $f(x) = e^{-x^2/2}$.

11. ●● Trova il massimo e il minimo assoluti: a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ in $[-1; 4]$; b) $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ in $[0; \pi]$; c) $f(x) = |x^2 - 4|$ in $[-1; 3]$.

12. ●● Studia la funzione $f(x) = x(x - 3)^2$ e tracciane il grafico; scrivi l'equazione della tangente inflessionale.

13. ●● Studia la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ e tracciane il grafico. Verifica che il grafico è simmetrico rispetto al punto $(1; 2)$.

14. ●● Studia la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ e tracciane il grafico.

15. ●● Studia la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ e tracciane il grafico.

16. ●● Studia la versiera $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e scrivi le equazioni delle sue tangenti inflessionali.

17. ●●● Studia la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$: dominio, asintoti obliqui (diversi a $+\infty$ e a $-\infty$), monotonia, comportamento della derivata negli estremi del dominio, concavità. Verifica che il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x = 2$.

18. ●● Studia $f(x) = x + 2 \cos x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$: monotonia, estremi relativi e assoluti, flessi.

19. ●●● Scrivi per casi la funzione $f(x) = x|x - 2|$, tracciane il grafico e trova gli estremi relativi. La concavità cambia verso in $x = 2$: il punto $(2; 0)$ è un flesso?

Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra che, se f è derivabile in un intorno di x_0, $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

21. ●●● Dimostra che il grafico di una funzione polinomiale di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ha uno e un solo flesso $F(x_0; f(x_0))$, e che è simmetrico rispetto a F. (Suggerimento: sviluppa $f(x_0 + h)$ e mostra che $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0)$.)

22. ●● Trova l'errore. «Per $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$ si ha $f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$, che si annulla per $x = 1$; quindi il grafico ha un flesso nel punto (1; 3).» Che cosa si può dire, invece, degli estremi di f?

23. ●● Sia f derivabile in $\mathbb{R}$, con $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$. Dimostra che $f(x_0)$ è il minimo assoluto di f.

24. ●●● Sia f derivabile due volte in $\mathbb{R}$, con $f''(x) > 0$ per ogni x. Dimostra che il grafico di f ha al massimo due punti in comune con qualunque retta non verticale. (Suggerimento: considera $g(x) = f(x) - mx - q$ e usa il teorema di Rolle.)

Problemi

25. ●● Un punto materiale si muove su una retta con legge oraria $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (s in metri, t in secondi), per $0 \leq t \leq 6$. a) In quali istanti è fermo, e in quali intervalli di tempo avanza o arretra? b) Qual è la massima distanza dal punto di partenza nell'intervallo considerato? c) In quale istante l'accelerazione è nulla, e quanto vale allora la velocità? Che cosa accade lì al grafico di $s(t)$? d) Quanta strada percorre in tutto?

26. ●● (Dati inventati.) Dopo la somministrazione di un farmaco, la sua concentrazione nel sangue è descritta dal modello $c(t) = 20te^{-t/2}$ (c in mg/L, t in ore, $t \geq 0$). a) Quando la concentrazione è massima, e quanto vale? b) In quale istante la concentrazione diminuisce più rapidamente, e con quale velocità? c) Calcola $\lim_{t \to +\infty} c(t)$ e interpretalo.

27. ●● (Dati inventati.) Il costo totale di produzione di un'azienda è $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 50$, con q in centinaia di pezzi ($0 \leq q \leq 10$) e C in centinaia di euro. a) Dimostra che C è crescente. b) Per quale q il costo marginale $C'(q)$ è minimo, e quanto vale? c) Descrivi la concavità del grafico di C e interpretala.

28. ●●● Discuti, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $e^x = kx$. Interpreta geometricamente il valore critico positivo di k come pendenza di una retta per l'origine tangente al grafico di $y = e^x$.

Con il computer

29. ● In un software di geometria dinamica definisci un cursore k e la famiglia $f_k(x) = x^3 + kx^2$. a) Verifica, e poi dimostra, che per $k \neq 0$ i punti stazionari hanno ascisse 0 e $-\frac{2k}{3}$ e che il flesso ha ascissa $-\frac{k}{3}$. b) Verifica che il flesso è il punto medio del segmento che congiunge i due punti stazionari del grafico. c) Attiva la traccia del flesso e muovi il cursore: trova l'equazione della curva su cui si muove.

Verso l'esame

30. ●● Determina a e b in modo che la funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ abbia un flesso nel punto di ascissa 1 e un punto stazionario in $x = 3$. Stabilisci poi la natura dei punti stazionari di f.

31. ●● Una moneta truccata dà testa con probabilità x, con $0 \le x \le 1$. Lanciandola 10 volte, la probabilità di ottenere esattamente 3 teste è $p(x) = C_{10,3}\, x^3(1 - x)^7$ (prove ripetute di Bernoulli, *Matematica 4*). Per quale valore di x questa probabilità è massima? Quanto vale il massimo?

32. ●●● Dimostra che $e^x \ge 1 + x$ per ogni x reale, con l'uguaglianza solo per $x = 0$, e interpreta geometricamente il risultato.

33. ●● Data la funzione $f(x) = x^2 e^{-kx}$, con $k > 0$, determina k in modo che f abbia un massimo relativo nel punto di ascissa 4, e calcola il massimo.

34. ●●● **Problema.** Si consideri la famiglia di funzioni $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + b}$, con a e b numeri reali e $b > 0$.

    a) Determina a e b in modo che il grafico di f abbia un massimo relativo nel punto $M(1; 1)$.

    b) Verificato che si ottiene $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, studia questa funzione e tracciane il grafico, indicando estremi, flessi e asintoti.

    c) Scrivi l'equazione della tangente al grafico di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ nell'origine e stabilisci se, per $x > 0$, il grafico sta sopra o sotto di essa.

    d) Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $2x = k(x^2 + 1)$, e confronta il risultato con il segno del discriminante.

PER APPROFONDIRE

- POL — il metodo per affrontare un problema: capire la richiesta, fare un piano, controllare il risultato; utile per i problemi con parametri e per le discussioni grafiche.
- SPI — i capitoli sul significato della derivata e sui grafici, con molti esempi di funzioni con concavità e flessi.
- APO — la convessità e il legame fra il segno della derivata seconda e la posizione delle tangenti, trattati con rigore.
- BOY — Maria Gaetana Agnesi e le *Instituzioni analitiche* nel quadro della matematica del Settecento.
- QDR — i nuclei tematici e gli obiettivi della seconda prova: lo studio di funzione e la discussione di equazioni con parametri sono fra le richieste più frequenti.

Glossario del capitolo

Concavità verso il basso
Proprietà di un grafico che, in un intervallo, sta sotto ciascuna delle sue rette tangenti; vale se $f'' < 0$.

Concavità verso l'alto
Proprietà di un grafico che, in un intervallo, sta sopra ciascuna delle sue rette tangenti; vale se $f'' > 0$.

Criterio della derivata prima
Se f è continua in x_0 e f' cambia segno in x_0, lì c'è un estremo relativo: un massimo se f' passa da positiva a negativa, un minimo nel caso opposto.

Criterio della derivata seconda
Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente $f''(x_0) < 0$), x_0 è un punto di minimo (rispettivamente massimo) relativo; se $f''(x_0) = 0$ il criterio non decide.

Discussione grafica
Metodo per contare le soluzioni di un'equazione $f(x) = k$ al variare di k, intersecando il grafico di f con le rette $y = k$.

Famiglia di curve
L'insieme dei grafici di una funzione che dipende da un parametro, uno per ogni valore del parametro.

Flesso a tangente obliqua
Flesso in cui $f'(x_0)$ è un numero diverso da 0: la tangente inflessionale è obliqua.

Flesso a tangente orizzontale
Flesso in cui $f'(x_0) = 0$: la tangente inflessionale è orizzontale e il punto stazionario non è un estremo.

Funzione convessa (concava)
Nel linguaggio di molti testi, una funzione il cui grafico ha la concavità verso l'alto (verso il basso).

Punto di flesso
Punto del grafico in cui esiste la tangente e la concavità cambia verso; la tangente vi attraversa il grafico.

Studio di una funzione
L'insieme delle analisi (dominio, simmetrie, segno, limiti, asintoti, derivate prima e seconda) che permettono di tracciare un grafico fedele.

Tabella dei segni
Schema che riassume il segno di f' (e di f'') negli intervalli del dominio, da cui si leggono monotonia, estremi, concavità e flessi.

Tangente inflessionale
La retta tangente al grafico in un punto di flesso.

Soluzioni

1. C. $f'(2) = 0$ dice solo che la tangente è orizzontale; il punto può essere un estremo o un flesso a tangente orizzontale (come per x^3 in 0), e $f''(2)$ può essere diversa da 0 (come per $x^2 - 4x$ in 2).

2. B. In 1 la derivata passa da negativa a positiva: minimo relativo. In 4 si annulla senza cambiare segno: nessun estremo (flesso a tangente orizzontale).

3. D. $(x-1)^2 \geq 0$, quindi f'' ha il segno di $x + 2$ (fuori da 1): cambia segno solo in -2. In 1 si annulla senza cambiare segno.

4. A. $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$ si annullano in 0; f' passa da negativa a positiva, e $x^4 \geq 0 = f(0)$: minimo assoluto.

5. D. $f'(x) = (x+1)e^x$: f decresce per $x \leq -1$ e cresce dopo; poiché $f(x) \to 0^-$ per $x \to -\infty$, $f(-1) = -\frac{1}{e}$ è il minimo assoluto. Il flesso è in $x = -2$, dove $f''(x) = (x+2)e^x$ cambia segno.

6. B. A sinistra di 3 (per $|x| < 3$) $f(x) = 9 - x^2$ e $f' \to -6$; a destra $f(x) = x^2 - 9$ e $f' \to 6$: punto angoloso. $f(3) = 0$ e $f \geq 0$: minimo assoluto.

7. a) Falso: il massimo può essere assunto anche in un punto in cui f non è derivabile; per esempio $-|x|$ in $[-1; 1]$ ha il massimo in 0, un punto angoloso. b) Vero. c) Falso: per esempio $e^{-x/5}$ sen x attraversa infinite volte l'asintoto $y = 0$. d) Vero (teorema di Fermat). e) Falso: in un punto angoloso il grafico non ha tangente, quindi non c'è flesso.

8. a) massimo; b) flesso, verticale; c) massimo, minimo; d) $y = k$.

9. a) $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$: cresce in $]-\infty; -2]$ e in $[2; +\infty[$, decresce in $[-2; 2]$; massimo relativo $f(-2) = 17$, minimo relativo $f(2) = -15$. b) $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$: decresce in $]-\infty; -1]$ e in $[0; 1]$, cresce in $[-1; 0]$ e in $[1; +\infty[$; minimi (assoluti) $f(\pm 1) = -1$, massimo relativo $f(0) = 0$. c) $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$: cresce in $]-\infty; 1]$ e in $[3; +\infty[$, decresce in $[1; 2[$ e in $]2; 3]$; massimo relativo $f(1) = 2$, minimo relativo $f(3) = 6$, né l'uno né l'altro assoluti (la funzione tende a $\pm\infty$ accanto all'asintoto $x = 2$). d) $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$: cresce in $]-\infty; 0]$ e in $[2; +\infty[$, decresce in $[0; 1[$ e in $]1; 2]$; massimo relativo $f(0) = 0$, minimo relativo $f(2) = 4$.

10. a) $f''(x) = 6(x-2)$: concavità verso il basso per $x < 2$, verso l'alto per $x > 2$; flesso $(2; -11)$, con tangente di pendenza $f'(2) = -12$. b) $f''(x) = 12(x^2 - 1)$: verso l'alto per $|x| > 1$, verso il basso per $|x| < 1$; flessi $(\pm 1; -5)$. c) $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$: verso l'alto per $|x| > 1$, verso il basso per $|x| < 1$; flessi $(\pm 1; e^{-1/2})$, $e^{-1/2} \approx 0{,}607$.

11. a) $f'(x) = 3x(x-2)$; candidati -1, 0, 2, 4 con valori -4, 0, -4, 16: massimo 16 in $x = 4$, minimo -4 in $x = -1$ e in $x = 2$. b) $f'(x) = 1 - 2\cos x$, nulla in $[0; \pi]$ solo per $x = \frac{\pi}{3}$; $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}685$, $f(\pi) = \pi$: massimo π in $x = \pi$, minimo $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ in $x = \frac{\pi}{3}$. c) Candidati: $x = 0$ (stazionario, perché per $|x| < 2$ $f(x) = 4 - x^2$), $x = 2$ (punto angoloso), -1 e 3; valori 3, 4, 0, 5: massimo 5 in $x = 3$, minimo 0 in $x = 2$.

12. Dominio $\mathbb{R}$; zeri 0 e 3 (doppio: il grafico è tangente all'asse x in $(3; 0)$); $f > 0$ per $x > 0$, $x \neq 3$; $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$: massimo relativo $(1; 4)$, minimo relativo $(3; 0)$. $f''(x) = 6(x-2)$: flesso $(2; 2)$, con $f'(2) = -3$; tangente inflessionale $y = -3x + 8$.

13. Dominio $x \neq 1$; nessuno zero; $f(0) = -3$; $f > 0$ per $x > 1$. $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to 1^{\pm}$: asintoto verticale $x = 1$. Da $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$: asintoto obliquo $y = x + 1$, con il grafico sopra per $x > 1$ e sotto per $x < 1$. $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$: massimo relativo $(-1; -2)$, minimo relativo $(3; 6)$. $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$: concavità

verso il basso per $x < 1$, verso l'alto per $x > 1$, nessun flesso. Simmetria: $f(1+h) + f(1-h) = (2 + h + \frac{4}{h}) + (2 - h - \frac{4}{h}) = 4 = 2 \cdot 2$.

14. Dominio $\mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$, nulla solo in 0. $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$, senza asintoto obliquo ($\frac{f(x)}{x} \to -\infty$); $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$: asintoto $y = 0$ a destra. $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$: minimo assoluto (0; 0), massimo relativo $(2; \frac{4}{e^2})$, $\frac{4}{e^2} \approx 0{,}541$. $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$: flessi in $x = 2 \pm \sqrt{2}$, cioè circa (0,586; 0,191) e (3,414; 0,384); concavità verso il basso fra i due, verso l'alto fuori.

15. Dominio $\mathbb{R}$; pari; $f(x) \geq 0$, nulla solo in 0. $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, ma $\frac{f(x)}{x} \to 0$: nessun asintoto. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$: minimo assoluto (0; 0). $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$: concavità verso l'alto per $|x| < 1$, verso il basso per $|x| > 1$; flessi $(\pm 1; \ln 2)$, $\ln 2 \approx 0{,}693$.

16. Dominio $\mathbb{R}$; pari; $0 < f(x) \leq 1$; asintoto orizzontale $y = 0$. $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$: massimo assoluto (0; 1). $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$: flessi in $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, con $f = \frac{3}{4}$. In $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ la pendenza è $f' = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$: tangente $y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$; per simmetria, nell'altro flesso $y = \frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$.

17. Dominio $]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$; $f \geq 0$, zeri 0 e 4. $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$: negativa per $x < 0$, positiva per $x > 4$; f decresce in $]-\infty; 0]$ e cresce in $[4; +\infty[$; minimo assoluto 0 in $x = 0$ e in $x = 4$. $f'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^-$ e $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 4^+$: tangenti verticali negli estremi. Asintoti: $y = x - 2$ per $x \to +\infty$ ($m = 1$, $q = \lim(\sqrt{x^2-4x} - x) = -2$) e $y = -x + 2$ per $x \to -\infty$. $f''(x) = -\frac{4}{(x^2-4x)\sqrt{x^2-4x}} < 0$: concavità verso il basso su entrambi i rami. Simmetria: $(4-x)^2 - 4(4-x) = x^2 - 4x$, quindi $f(4-x) = f(x)$.

18. $f'(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$: positiva in $[0; \frac{\pi}{6}[$ e in $]\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$, negativa fra i due. Massimo relativo $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2{,}256$, minimo relativo $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 0{,}886$; agli estremi $f(0) = 2$ (minimo relativo) e $f(2\pi) = 2\pi + 2 \approx 8{,}283$ (massimo assoluto). Il minimo assoluto è $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

$f''(x) = -2\cos x$: flessi $(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, entrambi sulla retta $y = x$.

19. $f(x) = 2x - x^2$ per $x < 2$, $f(x) = x^2 - 2x$ per $x \geq 2$. $f'(x) = 2 - 2x$ per $x < 2$, $2x - 2$ per $x > 2$; in 2 derivata sinistra -2 e destra 2: punto angoloso. f cresce in $]-\infty; 1]$, decresce in $[1; 2]$, cresce in $[2; +\infty[$: massimo relativo (1; 1), minimo relativo (2; 0). $f'' = -2$ per $x < 2$ e $f'' = 2$ per $x > 2$: la concavità cambia verso, ma in (2; 0) il grafico non ha tangente, quindi non è un flesso.

20. Traccia. Per definizione e poiché $f'(x_0) = 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$. Per la permanenza del segno, in un intorno di x_0 il quoziente è negativo: $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$. Poiché f è continua in x_0, il criterio della derivata prima dà un massimo relativo.

21. $f''(x) = 6ax + 2b$ ha l'unico zero $x_0 = -\frac{b}{3a}$ e cambia segno (è di primo grado): un solo flesso. Sviluppando, $f(x_0 + h) = f(x_0) + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)h + (3ax_0 + b)h^2 + ah^3 = f(x_0) + f'(x_0)h + ah^3$, perché $3ax_0 + b = 0$. Cambiando h in $-h$ e sommando, $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0)$: i punti del grafico di ascisse $x_0 \pm h$ sono simmetrici rispetto a F.

22. $f''(x) = 12(x-1)^2 \geq 0$ si annulla in 1 ma non cambia segno: la concavità è sempre verso l'alto e non ci sono flessi ($f(1) = 3$ è corretto, la conclusione no). Poiché $f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 3)$ e il trinomio ha discriminante negativo, l'unico punto stazionario è 0, dove f' passa da negativa a positiva: minimo assoluto $f(0) = 0$.

23. Per $x < x_0$, per il teorema di Lagrange $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)$ con $x < c < x_0$, quindi $f'(c) < 0$

e $f(x) > f(x_0)$. Per $x > x_0$, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ con $f'(c) > 0$, e di nuovo $f(x) > f(x_0)$. Dunque $f(x_0)$ è il minimo assoluto (stretto).

24. La retta $y = mx + q$ e il grafico si incontrano negli zeri di $g(x) = f(x) - mx - q$. Poiché $g'' = f'' > 0$, g' è strettamente crescente e ha al massimo uno zero. Se g avesse tre zeri $x_1 < x_2 < x_3$, per il teorema di Rolle g' si annullerebbe in un punto di $]x_1; x_2[$ e in uno di $]x_2; x_3[$, cioè in due punti distinti: assurdo.

25. a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$: fermo per $t = 2$ s e $t = 4$ s; avanza per $0 \le t < 2$ e $4 < t \le 6$, arretra per $2 < t < 4$. b) $s(0) = 0$, $s(2) = 20$, $s(4) = 16$, $s(6) = 36$: poiché $s \ge 0$ nell'intervallo, la massima distanza è 36 m, per $t = 6$ s (il massimo relativo $s(2) = 20$ non è assoluto). c) $a(t) = 6t - 18 = 0$ per $t = 3$ s; $v(3) = -3$ m/s: è il valore minimo della velocità, cioè l'istante in cui arretra più in fretta, e (3; 18) è il flesso del grafico di $s(t)$. d)
$20 + (20 - 16) + (36 - 16) = 44$ m.

26. a) $c'(t) = 10(2 - t)e^{-t/2}$: massimo per $t = 2$ h, $c(2) = \dfrac{40}{e} \approx 14{,}7$ mg/L. b) $c''(t) = 5(t - 4)e^{-t/2}$: c' ha il minimo per $t = 4$ h, dove $c'(4) = -20e^{-2} \approx -2{,}71$ mg/L all'ora (allora $c(4) = 80e^{-2} \approx 10{,}8$ mg/L); è il flesso del grafico. c) Il limite è 0: col tempo il farmaco viene eliminato.

27. a) $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60 = 3(q^2 - 8q + 20)$, con discriminante $64 - 80 < 0$: $C' > 0$ e C è crescente. b) $C''(q) = 6q - 24$: il costo marginale è minimo per $q = 4$ (400 pezzi) e vale $C'(4) = 12$, cioè 12 centinaia di euro per centinaio di pezzi, 12 euro al pezzo. c) Concavità verso il basso per $q < 4$ (il costo cresce sempre più lentamente), verso l'alto per $q > 4$ (sempre più rapidamente); flesso in (4; 162).

28. $x = 0$ non è soluzione; per $x \ne 0$ l'equazione equivale a $g(x) = \dfrac{e^x}{x} = k$. $g'(x) = \dfrac{(x - 1)e^x}{x^2}$. Per $x < 0$, g decresce da 0^- (limite per $x \to -\infty$) a $-\infty$ (per $x \to 0^-$); per $x > 0$, decresce da $+\infty$ al minimo $g(1) = e$ e poi cresce verso $+\infty$. Quindi: $k < 0$ una soluzione (negativa); $0 \le k < e$ nessuna; $k = e$ una, $x = 1$; $k > e$ due, positive. La retta $y = ex$ passa per l'origine ed è tangente a $y = e^x$ in $(1; e)$: le rette per l'origine più inclinate la tagliano due volte.

29. a) $f_k'(x) = 3x^2 + 2kx = x(3x + 2k)$, nulla in 0 e in $-\dfrac{2k}{3}$; $f_k''(x) = 6x + 2k$, che cambia segno in $-\dfrac{k}{3}$. b) I punti stazionari del grafico sono (0; 0) e $\left(-\dfrac{2k}{3}; \dfrac{4k^3}{27}\right)$; il flesso è $\left(-\dfrac{k}{3}; \dfrac{2k^3}{27}\right)$, che è il loro punto medio. c) Da $x = -\dfrac{k}{3}$ si ha $k = -3x$ e $y = \dfrac{2k^3}{27} = -2x^3$: il flesso si muove sulla curva $y = -2x^3$.

30. $f''(x) = 6x + 2a$, $f''(1) = 0$ dà $a = -3$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$, $f'(3) = 0$ dà $b = -9$. Ora $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$ e f'' cambia segno in 1: massimo relativo $f(-1) = 5$, minimo relativo $f(3) = -27$.

31. $p(x) = 120x^3(1 - x)^7$; $p'(x) = 120x^2(1 - x)^6(3 - 10x)$, positiva per $0 < x < \dfrac{3}{10}$ e negativa per $\dfrac{3}{10} < x < 1$. Poiché $p(0) = p(1) = 0$, il massimo è per $x = 0{,}3$: $p(0{,}3) = 120 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 \approx 0{,}267$. Il valore più «plausibile» di x è la frequenza osservata $\dfrac{3}{10}$.

32. Sia $g(x) = e^x - 1 - x$. $g'(x) = e^x - 1$ è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$: g ha il minimo assoluto in 0, e $g(0) = 0$. Quindi $g(x) \ge 0$, con l'uguaglianza solo in 0. Geometricamente: $y = 1 + x$ è la tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto (0; 1), e poiché la concavità è sempre verso l'alto il grafico sta sopra questa tangente e la tocca solo in quel punto.

33. $f'(x) = xe^{-kx}(2 - kx)$: si annulla in 0 e in $\dfrac{2}{k}$; per $0 < x < \dfrac{2}{k}$ è positiva, per $x > \dfrac{2}{k}$ negativa: massimo relativo in $\dfrac{2}{k}$. Da $\dfrac{2}{k} = 4$ segue $k = \dfrac{1}{2}$; il massimo è $f(4) = 16e^{-2} \approx 2{,}165$.

34. a) $f'(x) = \dfrac{a(b - x^2)}{(x^2 + b)^2}$. Da $f'(1) = 0$ segue $b = 1$ (con $a \ne 0$); da $f(1) = \dfrac{a}{2} = 1$ segue $a = 2$. Verifica: $f'(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ è positiva per $|x| < 1$ e negativa per $|x| > 1$: in 1 c'è davvero un massimo. b) Dominio $\mathbb{R}$; dispari; zero in 0, segno di x; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$: asintoto $y = 0$. Massimo (1; 1) e minimo (−1; −1), assoluti perché $|2x| \le x^2 + 1$. $f''(x) = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$: flessi

in $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; concavità verso il basso in $]-\infty; -\sqrt{3}[$ e in $]0; \sqrt{3}[$, verso l'alto in $]-\sqrt{3}; 0[$ e in $]\sqrt{3}; +\infty[$. c) $f'(0) = 2$: tangente $y = 2x$. Poiché $\frac{2x}{x^2+1} - 2x = -\frac{2x^3}{x^2+1} < 0$ per $x > 0$, il grafico sta sotto la tangente. d) Poiché $x^2 + 1 > 0$, l'equazione equivale a $\frac{2x}{x^2+1} = k$: per $|k| > 1$ nessuna soluzione; per $k = \pm 1$ una ($x = \pm 1$); per $0 < |k| < 1$ due; per $k = 0$ una ($x = 0$). Con il discriminante: per $k = 0$ l'equazione è $2x = 0$; per $k \neq 0$ è $kx^2 - 2x + k = 0$, con $\frac{\Delta}{4} = 1 - k^2$, positivo per $|k| < 1$, nullo per $|k| = 1$, negativo per $|k| > 1$: stesso risultato.