CAPITOLO

6

I teoremi del calcolo differenziale

La derivata dice che cosa accade in un punto; i teoremi di questo capitolo dicono che cosa ne segue su un intervallo intero. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere massimi e minimi relativi e assoluti, e dimostrare il teorema di Fermat.
2. Enunciare e dimostrare i teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy, e mostrare con controesempi che ogni ipotesi è necessaria.
3. Dedurre dal teorema di Lagrange il criterio di monotonia e la caratterizzazione delle funzioni con derivata nulla su un intervallo.
4. Usare i teoremi per contare le soluzioni di un'equazione e per dimostrare disuguaglianze.
5. Calcolare limiti con il teorema di de l'Hôpital e dimostrare la gerarchia degli infiniti.
6. Riconoscere quando il teorema di de l'Hôpital non si può applicare o non serve.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Massimi e minimi relativi e teorema di Fermat 2
6.2 Il teorema di Rolle 4
6.3 Il teorema di Lagrange 8
6.4 Il teorema di Cauchy 13
6.5 Il teorema di de l'Hôpital 15

Matematica 5 · Parte II · Calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 6: I teoremi del calcolo differenziale · pagine 161–188 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 5 la derivata è nata come limite: la velocità in un istante, la pendenza della tangente in un punto. È un'informazione *locale*: $f'(x_0)$ dice come si comporta la funzione vicino a x_0, e nient'altro. Nella pratica, però, servono spesso informazioni *globali*. Se il tachimetro di un'auto non ha mai superato i 100 km/h, possiamo affermare che in due ore l'auto ha percorso al massimo 200 km? Se la derivata di una funzione è positiva in ogni punto, la funzione è crescente? Se due funzioni hanno la stessa derivata, sono uguali?

Le risposte sembrano ovvie, e infatti sono «sì», con una precisazione importante per l'ultima. Ma per dimostrarle serve un ponte fra il locale e il globale, e quel ponte è una catena di teoremi che si appoggiano l'uno sull'altro: il teorema di Fermat sui punti di estremo, il teorema di Rolle, il teorema di Lagrange e il teorema di Cauchy. In fondo alla catena troveremo uno strumento di calcolo molto efficace, il teorema di de l'Hôpital, che risolve molte forme indeterminate e ci permetterà finalmente di dimostrare la gerarchia degli infiniti osservata con le tabelle nel capitolo 3.

Questi teoremi sono il cuore delle dimostrazioni dell'analisi, e la seconda prova dell'esame di Stato li chiede spesso: verificare che una funzione soddisfi le ipotesi di Rolle o di Lagrange, trovare il punto che i teoremi garantiscono, contare le soluzioni di un'equazione, dimostrare una disuguaglianza. Ogni ipotesi, come vedremo, ha un ruolo preciso: basta toglierne una perché la tesi possa crollare.

6.1 Massimi e minimi relativi e teorema di Fermat

6.1.1 Estremi relativi e assoluti

Sia f una funzione di dominio D e sia $x_0 \in D$. Diciamo che x_0 è un **punto di massimo relativo** (o locale) per f se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) \le f(x_0) \text{ per ogni } x \in I \cap D;$$

il valore $f(x_0)$ si chiama allora **massimo relativo**. Analogamente x_0 è un **punto di minimo relativo** se $f(x) \ge f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap D$. Massimi e minimi relativi si chiamano insieme **estremi relativi**; se le disuguaglianze sono strette per $x \neq x_0$, l'estremo si dice *stretto* (o proprio).

Se la disuguaglianza vale per tutti gli x del dominio, e non solo vicino a x_0, il massimo (o il minimo) si dice **assoluto**: è il massimo dell'insieme immagine di f, quello che il teorema di Weierstrass (capitolo 4) garantisce per una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Un massimo assoluto è anche relativo, ma non viceversa. Una funzione può avere più massimi relativi con valori diversi, e un minimo relativo può perfino superare un massimo relativo: «relativo» significa che il confronto si fa soltanto con i punti vicini, come una cima di una catena montuosa è la più alta dei dintorni ma non per forza di tutta la catena.

Nel capitolo 7 impareremo a trovare e a classificare tutti gli estremi di una funzione. Qui ci serve una sola proprietà, quella che lega gli estremi alla derivata.

6.1.2 Il teorema di Fermat

Osserviamo il grafico di $y = x^3 - 3x$ nella Figura 6.1a. Nel punto $M(-1; 2)$ la funzione ha un massimo relativo, nel punto $N(1; -2)$ un minimo relativo, e in entrambi la tangente è orizzontale. Non è un caso: se in un punto di massimo la tangente fosse inclinata, da una delle due parti il grafico salirebbe sopra il valore massimo. Il **teorema di Fermat** trasforma questa osservazione in un enunciato.

IN SINTESI

Teorema di Fermat.

Ipotesi: f è definita in un intervallo I; x_0 è un punto *interno* di I ed è un punto di massimo o di minimo relativo per f; f è derivabile in x_0.

Tesi: $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo; per il minimo basta rovesciare le disuguaglianze. Poiché x_0 è interno a I ed è di massimo relativo, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni h con $0 < |h| < \delta$, il punto $x_0 + h$ sta in I e $f(x_0 + h) - f(x_0) \le 0$. Il rapporto incrementale ha quindi segno opposto a quello di h:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le 0 \text{ per } 0 < h < \delta, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \text{ per } -\delta < h < 0.$$

Poiché f è derivabile in x_0, il rapporto incrementale tende a $f'(x_0)$ sia per $h \to 0^+$ sia per $h \to 0^-$. Per il teorema della permanenza del segno (capitolo 2, nella forma: se una funzione è ≤ 0 in un intorno e ha limite, il limite è ≤ 0) il primo limite dà $f'(x_0) \le 0$ e il secondo $f'(x_0) \ge 0$. Dunque $f'(x_0) = 0$. c.v.d.

Un punto in cui la derivata si annulla si chiama **punto stazionario**. Il teorema di Fermat dice quindi che *un punto di estremo relativo interno, in cui f è derivabile, è stazionario*. Ciascuna ipotesi conta, e il viceversa è falso:

- **x_0 interno.** La funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0; 1]$ ha il massimo assoluto in $x = 1$, ma $f'(1) = 1$. In un estremo dell'intervallo il rapporto incrementale esiste da una parte sola e la dimostrazione non funziona.
- **f derivabile in x_0.** La funzione $f(x) = |x|$ ha il minimo assoluto in $x = 0$, che è un punto angoloso: lì la derivata non esiste (capitolo 5).
- **Il viceversa è falso.** La funzione $f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$, ma è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$: l'origine non è né un massimo né un minimo (Figura 6.1b). Un punto stazionario può non essere un estremo.

In pratica, dunque, gli estremi relativi di una funzione vanno cercati fra tre tipi di punti: i **punti stazionari**, i **punti in cui *f* non è derivabile** e gli **estremi del dominio**. Il teorema di Fermat restringe la ricerca a pochi candidati, ma non la conclude: ogni candidato va poi esaminato.

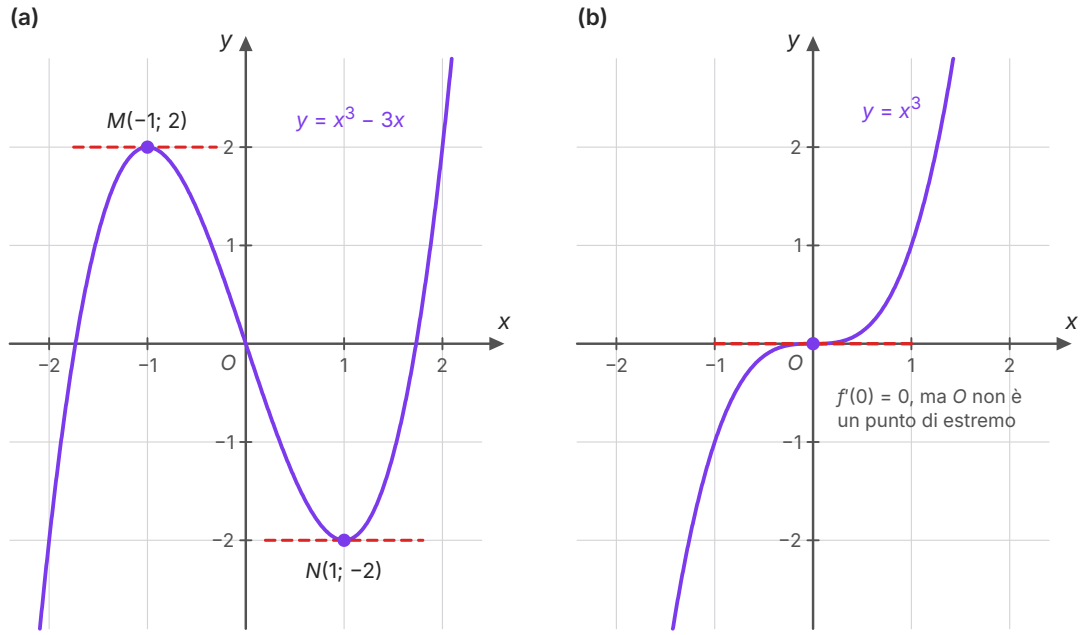


Figura 6.1 (a) Il grafico di $y = x^3 - 3x$ (viola, scala uguale sui due assi): nel massimo relativo $M(-1; 2)$ e nel minimo relativo $N(1; -2)$ la tangente (rossa, tratteggiata) è orizzontale. (b) Il grafico di $y = x^3$: in O la tangente è orizzontale, ma l'origine non è un punto di estremo.

6.2 Il teorema di Rolle

Pensiamo a un sasso lanciato verso l'alto e ripreso alla stessa altezza da cui è partito. La sua quota prima è salita, poi è scesa; nel punto più alto, per un istante, la velocità verticale è stata zero. Il **teorema di Rolle**, che prende il nome dal matematico francese Michel Rolle, dà a questa intuizione una forma precisa: se una funzione «regolare» assume lo stesso valore agli estremi di un intervallo, da qualche parte all'interno la sua tangente è orizzontale.

IN SINTESI

Teorema di Rolle.

Ipotesi: f è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$; f è derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$; $f(a) = f(b)$.

Tesi: esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass assume in $[a; b]$ un massimo assoluto M e un minimo assoluto m. Distinguiamo due casi.

Primo caso: $M = m$. Allora $m \le f(x) \le M = m$ per ogni x: la funzione è costante e la sua derivata è nulla in ogni punto di $]a; b[$. Qualunque c va bene.

Secondo caso: $M > m$. I due valori non possono essere entrambi uguali al valore comune $f(a) = f(b)$: almeno uno dei due, diciamo M, ne è diverso. Allora M è assunto in un punto c che non è né a né b, cioè in un punto interno. In c la funzione ha un massimo (assoluto, e quindi anche relativo) ed è derivabile, perché $c \in]a; b[$: per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$. Se invece è m a essere diverso da $f(a)$, si ragiona allo stesso modo con il minimo. c.v.d.

La dimostrazione mostra bene come i teoremi si incatenano: Weierstrass garantisce l'esistenza dell'estremo, l'ipotesi $f(a) = f(b)$ lo spinge all'interno, Fermat lo rende stazionario. Il significato geometrico è nella Figura 6.2: se la corda che unisce $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$ è orizzontale, c'è almeno un punto del grafico, con ascissa fra a e b, in cui la tangente è orizzontale, cioè parallela alla corda. Il teorema non dice *dove* si trova c, né quanti siano i punti con questa proprietà: ne garantisce soltanto l'esistenza.

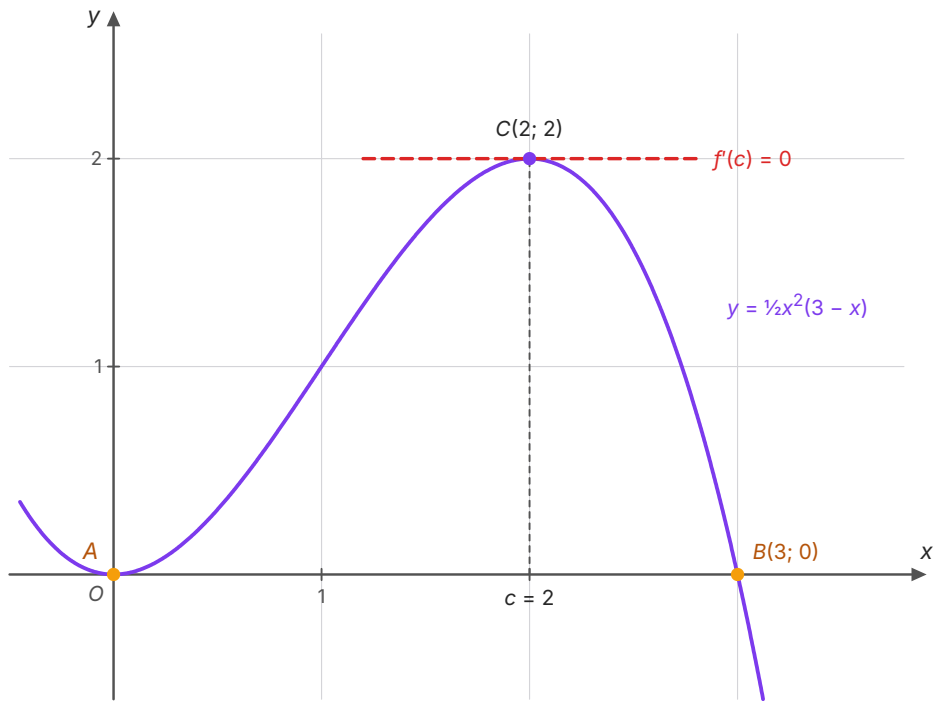


Figura 6.2 Il teorema di Rolle per $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - x)$ sull'intervallo $[0; 3]$ (scala uguale sui due assi). Poiché $f(0) = f(3) = 0$, esiste un punto interno con tangente orizzontale: è $c = 2$, dove $f(2) = 2$.

6.2.1 Le ipotesi sono necessarie

Ognuna delle tre ipotesi è indispensabile: togliendone una sola, la tesi può essere falsa. Lo mostrano tre controesempi; i primi due sono nella Figura 6.3.

- **Manca la derivabilità.** $f(x) = |x|$ in $[-1; 1]$ è continua e $f(-1) = f(1) = 1$, ma non è derivabile in 0. La derivata vale -1 per $x < 0$ e 1 per $x > 0$: non si annulla mai.
- **Manca la continuità.** La funzione che vale x per $0 \le x < 1$ e vale 0 per $x = 1$ è derivabile in $]0; 1[$, con $f'(x) = 1$, e $f(0) = f(1) = 0$; ma è discontinua in 1, e la derivata non si annulla.
- ***f(a) ≠ f(b).*** $f(x) = x$ in $[0; 1]$ è continua e derivabile, ma $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, e $f'(x) = 1$ ovunque.

Notiamo invece che la derivabilità negli estremi a e b *non* è richiesta. Per esempio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ su $[-1; 1]$, la semicirconferenza, soddisfa le ipotesi pur non essendo derivabile in ± 1, dove la tangente è verticale; e infatti $f'(0) = 0$.

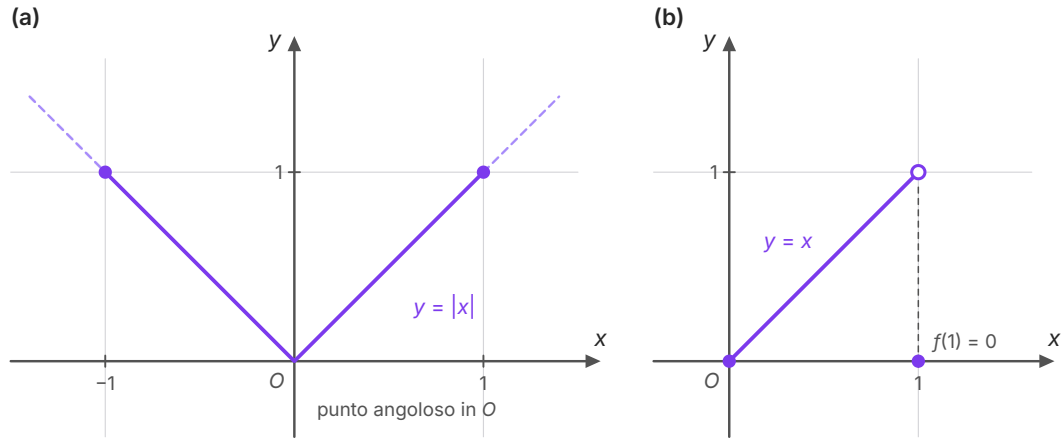


Figura 6.3 Due controesempi al teorema di Rolle (scala uguale sui due assi). (a) $y = |x|$ su $[-1; 1]$: $f(-1) = f(1)$, ma nel punto angoloso O la derivata non esiste e nessuna tangente è orizzontale. (b) La funzione uguale a x su $[0; 1[$ e a 0 in $x = 1$: $f(0) = f(1)$, ma la funzione è discontinua in 1 e la sua derivata vale sempre 1.

ESEMPIO SVOLTO

Verifica che $f(x) = x^3 - 4x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-2; 2]$ e trova i punti c garantiti dal teorema.

Ipotesi. f è un polinomio, quindi è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$: in particolare è continua in $[-2; 2]$ e derivabile in $]-2; 2[$. Inoltre $f(-2) = -8 + 8 = 0$ e $f(2) = 8 - 8 = 0$. Le ipotesi sono soddisfatte.

Punti stazionari. $f'(x) = 3x^2 - 4 = 0$ per $x^2 = \frac{4}{3}$, cioè $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1{,}155$. Entrambi i valori appartengono a $]-2; 2[$: in questo caso i punti c sono *due*.

Osservazione. In $c_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ la funzione ha un massimo relativo, che vale $f(c_1) = c_1(c_1^2 - 4) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}079$; in $c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ha un minimo relativo, $f(c_2) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$, perché la funzione è dispari. Il teorema garantiva «almeno un» punto; qui ce ne sono due.

6.2.2 Rolle e le soluzioni di un'equazione

Il teorema di Rolle ha una conseguenza molto utile per contare le soluzioni di un'equazione. Se f è derivabile e $f(x_1) = f(x_2) = 0$ con $x_1 < x_2$, fra x_1 e x_2 c'è uno zero di f': **fra due zeri di una funzione derivabile cade almeno uno zero della derivata**. Ne segue che, se f' non si annulla mai in un intervallo, f vi ha al più uno zero. Il teorema di esistenza degli zeri (capitolo 4) dice quando uno zero *c'è*; il teorema di Rolle dice quando ce n'è *al più uno*. Insieme dimostrano che la soluzione è unica.

ESEMPIO SVOLTO

Dimostra che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ ha una e una sola soluzione reale, e che questa appartiene all'intervallo $]0; 1[$.

Sia $f(x) = x^3 + x - 1$, continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

Esistenza. $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$: per il teorema di esistenza degli zeri, applicato in $[0; 1]$, esiste almeno un $\alpha \in]0; 1[$ con $f(\alpha) = 0$.

Unicità. Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni $x_1 < x_2$. Allora $f(x_1) = f(x_2) = 0$ e, per il teorema di Rolle applicato in $[x_1; x_2]$, esisterebbe $c \in]x_1; x_2[$ con $f'(c) = 0$. Ma $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ per ogni x: assurdo. La soluzione è quindi unica.

Il metodo di bisezione del capitolo 4 dà $\alpha \approx 0{,}6823$. Lo stesso schema (esistenza con gli zeri, unicità con Rolle o con la monotonia) è quello richiesto dai quesiti d'esame del tipo «dimostra che l'equazione ha esattamente una soluzione».

6.3 Il teorema di Lagrange

6.3.1 Enunciato e dimostrazione

Che cosa succede se dal teorema di Rolle togliamo la condizione $f(a) = f(b)$? La corda AB non è più orizzontale, ma l'intuizione suggerisce che esista ancora un punto in cui la tangente è parallela alla corda (Figura 6.4). La pendenza della corda è il tasso medio di variazione di f su $[a; b]$; la pendenza della tangente è la derivata. Il **teorema di Lagrange**, detto anche **teorema del valor medio**, afferma che in qualche punto il tasso istantaneo uguaglia il tasso medio. Porta il nome di Joseph-Louis Lagrange, matematico nato a Torino che lavorò poi a Berlino e a Parigi.

IN SINTESI

Teorema di Lagrange.

Ipotesi: f è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$.

Tesi: esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Dimostrazione. L'idea è ricondursi al teorema di Rolle «togliendo» la corda dalla funzione. La retta per $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$ ha equazione $y = f(a) + m(x - a)$, con $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Consideriamo la **funzione ausiliaria**

$$g(x) = f(x) - f(a) - m(x - a),$$

che misura, con il segno, la distanza verticale fra il grafico e la corda. g è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, perché è la differenza fra f e un polinomio di primo grado; inoltre $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ e $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$. Per il teorema di Rolle esiste $c \in]a; b[$ con $g'(c) = 0$. Ma $g'(x) = f'(x) - m$, quindi $f'(c) = m$. c.v.d.

Il teorema di Rolle è il caso particolare $f(a) = f(b)$, cioè $m = 0$. Come Rolle, anche Lagrange garantisce l'esistenza di c, non la sua unicità: per $f(x) = x^3$ su $[-1; 1]$ la corda ha pendenza 1 e i punti con $3c^2 = 1$ sono due, $c = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Spesso la tesi si scrive nella forma

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

che esprime l'incremento di f su un intervallo attraverso la derivata in un punto opportuno. È questa la forma che useremo nelle dimostrazioni.

Un esempio. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $[0; 4]$ e derivabile in $]0; 4[$, con $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Non è derivabile in 0, dove la tangente è verticale, ma il teorema non lo chiede: la

derivabilità serve soltanto nei punti interni. La corda da $A(0; 0)$ a $B(4; 2)$ ha pendenza $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; l'equazione $\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{2}$ dà $\sqrt{c} = 1$, cioè $c = 1$, che sta in $]0; 4[$. Nel punto $C(1; 1)$ la tangente, di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, è parallela alla corda (Figura 6.4).

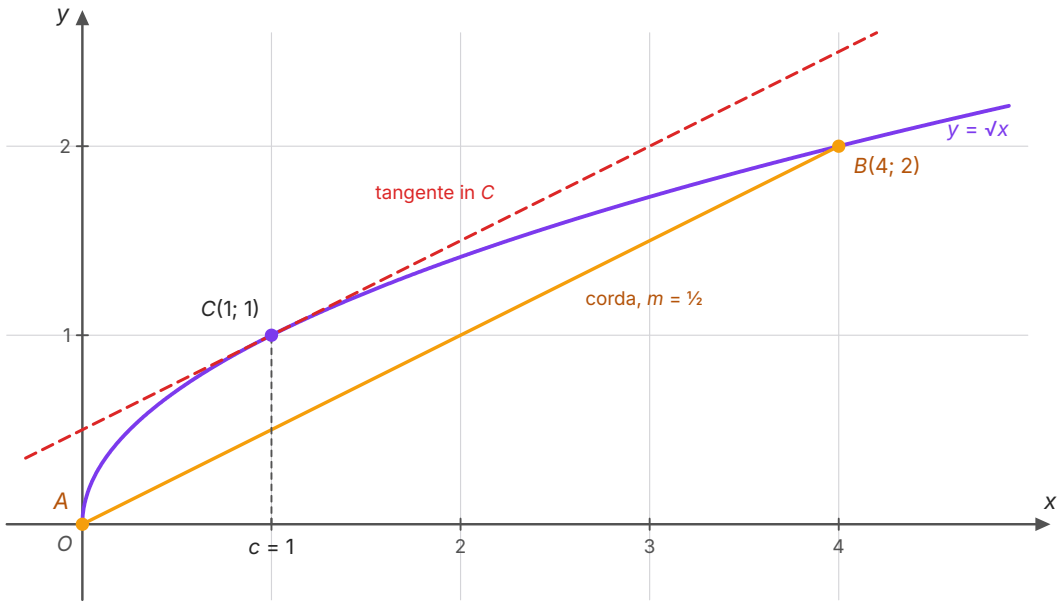


Figura 6.4 Il teorema di Lagrange per $f(x) = \sqrt{x}$ su $[0; 4]$ (scala uguale sui due assi): la corda AB (arancio) ha pendenza $\frac{1}{2}$, e nel punto $C(1; 1)$ la tangente (rossa, tratteggiata) ha la stessa pendenza.

6.3.2 Il significato fisico

Se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove lungo una retta, il rapporto $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ è la velocità media nell'intervallo di tempo $[t_1; t_2]$ e $s'(t)$ è la velocità istantanea (capitolo 5). Il teorema di Lagrange dice allora che **in un moto descritto da una funzione derivabile, la velocità media su un intervallo di tempo è stata la velocità istantanea in almeno un istante**. Chi ha percorso 150 km in due ore, alla media di 75 km/h, in qualche istante ha avuto il tachimetro esattamente su 75 km/h, anche se si è fermato in un'area di servizio e poi è andato più veloce.

Nella forma $s(t_2) - s(t_1) = s'(c)(t_2 - t_1)$ il teorema risponde anche alla prima domanda dell'introduzione. Se la velocità non ha mai superato 100 km/h, cioè $s'(t) \le 100$ per ogni t, in due ore lo spazio percorso è $s(2) - s(0) = s'(c) \cdot 2 \le 200$ km. Più in generale, **una limitazione sulla derivata**

diventa una limitazione sugli incrementi: se $|f'(x)| \le K$ su un intervallo, allora $|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|$ per ogni coppia di punti dell'intervallo.

COLLEGAMENTI

Il controllo della velocità media in autostrada. Alcuni sistemi di controllo non misurano la velocità istantanea: registrano l'ora in cui un veicolo passa sotto due portali posti a distanza nota e calcolano la velocità media sul tratto. Se la media supera il limite, per il teorema di Lagrange c'è stato almeno un istante in cui la velocità istantanea era uguale alla media, quindi superiore al limite. Con numeri di esempio: chi percorre 10 km in 4 minuti e mezzo ha una media di $10 : \frac{4{,}5}{60} \approx 133$ km/h, e in almeno un istante ha viaggiato a quella velocità, oltre i 130 km/h del limite generale sulle autostrade italiane, anche se nessuno lo ha visto farlo.

Il ragionamento presuppone che la posizione sia una funzione derivabile del tempo: un'ipotesi ragionevole per un'automobile, che non salta da un punto all'altro e non cambia velocità di colpo. È un esempio di *modello matematico*: un teorema dimostrato per le funzioni diventa un'affermazione sul mondo, a patto che il fenomeno rispetti le ipotesi.

6.3.3 Funzioni con derivata nulla

La derivata di una funzione costante è zero. Vale il viceversa? Il teorema di Lagrange risponde di sì, purché il dominio sia un intervallo.

IN SINTESI

Teorema (funzioni con derivata nulla).

Ipotesi: f è continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I, con $f'(x) = 0$ per ogni x interno a I.

Tesi: f è costante in I.

Dimostrazione. Siano $x_1 < x_2$ due punti qualsiasi di I. Poiché I è un intervallo, contiene tutto $[x_1; x_2]$, e in $[x_1; x_2]$ la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Esiste quindi $c \in]x_1; x_2[$ con $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$. Dunque $f(x_1) = f(x_2)$: la funzione assume lo stesso valore in due punti qualsiasi, cioè è costante. c.v.d.

L'ipotesi che I sia un intervallo non si può togliere. Consideriamo $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$. Con la regola della funzione composta,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Eppure f non è costante: $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, mentre $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Il dominio $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ è l'unione di due intervalli, e il teorema si applica a ciascuno separatamente: f vale $\frac{\pi}{2}$ per $x > 0$ e $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$ (Figura 6.5). È l'identità incontrata in *Matematica 4*, cap. 1, ora dimostrata con le derivate.

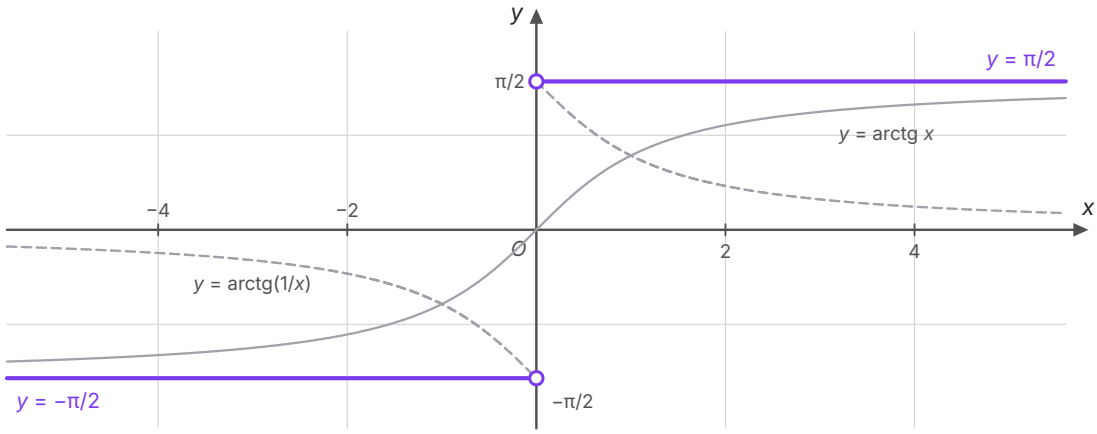


Figura 6.5 Il grafico di $y = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x}$ (viola): la derivata è nulla in tutto il dominio, ma la funzione vale $\frac{\pi}{2}$ per $x > 0$ e $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$. In grigio i grafici di $y = \text{arctg}\, x$ (linea continua) e di $y = \text{arctg}\, \frac{1}{x}$ (tratteggiata).

Dal teorema segue un corollario che sarà fondamentale nel calcolo integrale (capitolo 9): **se $f'(x) = g'(x)$ per ogni x di un intervallo I, allora $f(x) = g(x) + k$ per una costante k.** Basta applicare il teorema alla differenza $f - g$, che ha derivata nulla in I. Due funzioni con la stessa derivata su un intervallo differiscono quindi per una costante. Per esempio, una funzione definita su $\mathbb{R}$ con derivata $2x$ è necessariamente $x^2 + k$; se il suo grafico passa inoltre per $(1; 5)$, allora $k = 4$ e la funzione è $x^2 + 4$.

6.3.4 Il criterio di monotonia

Una funzione con derivata positiva ha tutte le tangenti «in salita». Che il grafico salga davvero, cioè che la funzione sia crescente, è di nuovo una conseguenza del teorema di Lagrange, ed è lo strumento con cui, da qui in avanti, studieremo la monotonia delle funzioni.

IN SINTESI

Teorema (criterio di monotonia).

Ipotesi: f è continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I.

Tesi: se $f'(x) > 0$ per ogni x interno a I, f è strettamente crescente in I; se $f'(x) < 0$, f è strettamente decrescente in I. Se $f'(x) \geq 0$ (oppure ≤ 0), f è crescente (decrescente) in senso lato.

Dimostrazione (primo caso). Siano $x_1 < x_2$ in I. Per il teorema di Lagrange in $[x_1; x_2]$ esiste $c \in]x_1; x_2[$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Entrambi i fattori a destra sono positivi, quindi $f(x_2) > f(x_1)$. Gli altri casi si dimostrano allo stesso modo. c.v.d.

Il viceversa vale solo in forma debole. Se f è crescente in I ed è derivabile in un punto interno x_0, i rapporti incrementali $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ sono tutti ≥ 0, perché numeratore e denominatore hanno lo stesso segno; per la permanenza del segno anche il loro limite è $f'(x_0) \geq 0$. Ma una funzione strettamente crescente può avere derivata nulla in qualche punto: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$. La condizione $f' > 0$ è sufficiente per la stretta crescenza, non necessaria.

Il criterio permette di classificare i punti stazionari. Riprendiamo $f(x) = x^3 - 3x$ della Figura 6.1: $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ è positiva per $x < -1$ e per $x > 1$, negativa per $-1 < x < 1$. Dunque f è crescente in $]-\infty; -1]$, decrescente in $[-1; 1]$ e di nuovo crescente in $[1; +\infty[$: in $x = -1$ smette di crescere e comincia a decrescere, quindi ha un massimo relativo; in $x = 1$, per la ragione opposta, ha un minimo relativo. Nel capitolo 7 organizzeremo questo ragionamento in uno schema, la tabella dei segni della derivata.

ERRORE FREQUENTE

Monotonia su un dominio che non è un intervallo. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ha $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ in tutto il dominio, ma *non* è decrescente sul dominio: $-1 < 1$ e $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. È decrescente in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$ separatamente. Il criterio di monotonia, come il teorema sulle funzioni con derivata nulla, si applica un intervallo alla volta.

Scambiare la condizione sufficiente con quella necessaria. «$f'(x_0) = 0$, quindi x_0 è un estremo» è falso (x^3 in 0); «f è strettamente crescente, quindi $f' > 0$» è falso per lo stesso esempio.

6.3.5 Disuguaglianze dimostrate con le derivate

Il criterio di monotonia e il teorema di Lagrange servono anche a dimostrare disuguaglianze. Le strategie tipiche sono due: studiare con la derivata il segno della differenza fra i due membri, oppure scrivere un incremento con il teorema di Lagrange e stimare la derivata.

ESEMPIO SVOLTO

Dimostra che $e^x \geq 1 + x$ per ogni x reale, con l'uguaglianza solo per $x = 0$.

Sia $g(x) = e^x - 1 - x$, la differenza fra i due membri: è derivabile su $\mathbb{R}$ con $g'(x) = e^x - 1$. Poiché e^x è crescente e $e^0 = 1$, si ha $g'(x) < 0$ per $x < 0$ e $g'(x) > 0$ per $x > 0$.

Per il criterio di monotonia g è strettamente decrescente in $]-\infty; 0]$ e strettamente crescente in $[0; +\infty[$: il suo minimo assoluto è in 0, dove $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$. Per ogni $x \neq 0$ vale quindi $g(x) > g(0) = 0$, cioè $e^x > 1 + x$.

Interpretazione. $y = 1 + x$ è la tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto $(0; 1)$: la disuguaglianza dice che il grafico dell'esponenziale sta tutto sopra questa tangente, e la tocca solo lì.

Con il teorema di Lagrange si ottengono stime numeriche. Se $0 < a < b$, applicandolo alla funzione $\ln x$ in $[a; b]$ si trova $\ln b - \ln a = \dfrac{1}{c}(b - a)$ per un $c \in]a; b[$; poiché $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$,

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Per esempio, con $a = 1$ e $b = 1{,}1$ si ottiene $0{,}0909\ldots < \ln 1{,}1 < 0{,}1$; in effetti $\ln 1{,}1 = 0{,}0953\ldots$. Un teorema di esistenza, che non dice dove si trovi c, basta a dare una stima concreta.

6.4 Il teorema di Cauchy

Il teorema di Lagrange confronta l'incremento di una funzione con l'incremento della variabile. Il **teorema di Cauchy** confronta fra loro gli incrementi di *due* funzioni sullo stesso intervallo, ed è il passo che ci porterà al teorema di de l'Hôpital.

IN SINTESI

Teorema di Cauchy.

Ipotesi: f e g sono continue in $[a; b]$ e derivabili in $]a; b[$; $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a; b[$.

Tesi: $g(b) \neq g(a)$ ed esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Dimostrazione. Prima di tutto $g(b) \neq g(a)$: se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto di $]a; b[$ in cui g' si annulla, contro l'ipotesi. Il quoziente a primo membro ha quindi senso. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x).$$

h è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$. Calcoliamo i valori agli estremi:

$$h(a) = g(b)f(a) - g(a)f(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a),$$

$$h(b) = g(b)f(b) - g(a)f(b) - f(b)g(b) + f(a)g(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a).$$

Sono uguali, e per il teorema di Rolle esiste $c \in]a; b[$ con $h'(c) = 0$, cioè $[g(b) - g(a)]\, f'(c) = [f(b) - f(a)]\, g'(c)$. Dividendo per $g'(c)[g(b) - g(a)]$, che è diverso da zero, si ottiene la tesi. c.v.d.

Con $g(x) = x$ si ritrova il teorema di Lagrange. Ma perché non basta applicare Lagrange separatamente a f e a g e dividere? Perché si otterrebbero due punti c_1 e c_2, in generale diversi: $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$. Il teorema di Cauchy garantisce invece un *unico* punto c che va bene per entrambe le funzioni, ed è proprio questo che servirà nel prossimo paragrafo.

Un esempio. Per $f(t) = t^2$ e $g(t) = t^3$ sull'intervallo [1; 2] le ipotesi sono soddisfatte ($g'(t) = 3t^2 \neq 0$ in]1; 2[). Il primo membro vale $\frac{4 - 1}{8 - 1} = \frac{3}{7}$, il secondo $\frac{2c}{3c^2} = \frac{2}{3c}$; da $\frac{2}{3c} = \frac{3}{7}$ si ricava $c = \frac{14}{9} \approx 1{,}556$, che appartiene a]1; 2[. Lagrange applicato separatamente darebbe invece $2c_1 = 3$, cioè $c_1 = 1{,}5$, e $3c_2^{\,2} = 7$, cioè $c_2 = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}528$: due punti diversi fra loro e diversi da c.

Anche il teorema di Cauchy ha un significato geometrico. Le equazioni $x = g(t)$, $y = f(t)$, con $t \in [a; b]$, descrivono una curva nel piano, percorsa da un punto che si muove al variare del «tempo» t. Il primo membro della tesi è la pendenza della corda che unisce gli estremi della curva; il quoziente $\frac{f'(c)}{g'(c)}$, rapporto fra la velocità verticale e la velocità orizzontale del punto mobile, è la pendenza della tangente nel punto corrispondente a $t = c$. La tesi dice che c'è un punto della curva in cui la tangente è parallela alla corda: è il teorema di Lagrange «per le curve» (Figura 6.6).

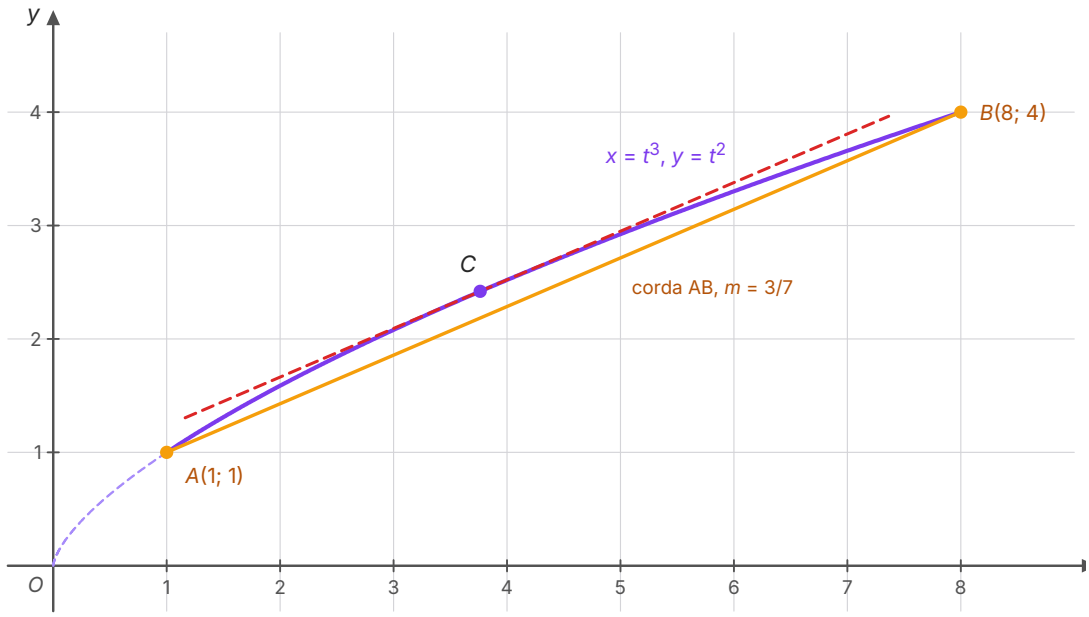


Figura 6.6 Il significato geometrico del teorema di Cauchy (scala uguale sui due assi). Per $t \in [1; 2]$ il punto $(t^3; t^2)$ descrive un arco di curva (viola) da $A(1; 1)$ a $B(8; 4)$; la corda AB ha pendenza $\frac{3}{7}$ e la tangente nel punto C che corrisponde a $t = \frac{14}{9}$ (rossa, tratteggiata) le è parallela. Tratteggiato in viola chiaro il resto della curva per $0 \le t \le 1$.

6.5 Il teorema di de l'Hôpital

Nel capitolo 3 abbiamo risolto le forme indeterminate con strumenti diversi caso per caso: scomposizioni, razionalizzazioni, limiti notevoli, infinitesimi equivalenti. Il **teorema di de l'Hôpital** offre un metodo generale per le forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$: sotto opportune ipotesi, il limite di un quoziente di funzioni è uguale al limite del quoziente delle loro derivate.

IN SINTESI

Teorema di de l'Hôpital.

Ipotesi: x_0 è un numero reale oppure $+\infty$ o $-\infty$; f e g sono derivabili in un intorno I di x_0, escluso al più x_0 stesso, e $g'(x) \neq 0$ in I (escluso x_0); $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, oppure entrambi i limiti sono infiniti (forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$); esiste, finito o infinito, $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Tesi: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Il teorema vale anche per i limiti destro e sinistro.

La dimostrazione nel caso $\frac{0}{0}$ con x_0 finito è nel riquadro che segue: è una conseguenza diretta del teorema di Cauchy. I casi $\frac{\infty}{\infty}$ e $x_0 = \pm\infty$ richiedono qualche passaggio tecnico in più, e li accettiamo senza dimostrazione.

APPROFONDIMENTO · LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO 0/0

Consideriamo il limite destro, $x \to x_0^+$; il sinistro è analogo. Se f e g non sono definite in x_0, o non vi valgono 0, ridefiniamole ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$: il limite non cambia, perché non dipende dal valore in x_0, e ora f e g sono continue anche in x_0.

Fissato $x > x_0$ in I, le funzioni f e g sono continue in $[x_0; x]$, derivabili in $]x_0; x[$, e g' non vi si annulla. Per il teorema di Cauchy esiste $c_x \in]x_0; x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Quando $x \to x_0^+$, anche $c_x \to x_0^+$, perché $x_0 < c_x < x$ (teorema del confronto). Poiché $\frac{f'}{g'}$ tende a L, il secondo membro tende a L, e quindi anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a L. c.v.d.

6.5.1 Le forme 0/0 e ∞/∞

ESEMPIO SVOLTO

Calcola: a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Forma $\frac{0}{0}$. Il quoziente delle derivate è $\frac{e^x - 1}{2x}$, di nuovo $\frac{0}{0}$; derivando ancora numeratore e denominatore si ottiene $\frac{e^x}{2} \to \frac{1}{2}$. Poiché esiste il limite dell'ultimo quoziente, il teorema garantisce a ritroso l'esistenza dei precedenti, e il limite cercato è $\frac{1}{2}$.

b) Forma $\frac{0}{0}$. Il quoziente delle derivate è $\frac{1 - \cos x}{3x^2}$, che tende a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ per il limite notevole $\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ del capitolo 3. Quindi il limite è $\frac{1}{6}$. (Si poteva anche applicare la regola altre due volte: $\frac{\operatorname{sen} x}{6x} \to \frac{1}{6}$.)

c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Il quoziente delle derivate è $\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$. Il limite è 0.

Quando la regola si applica più volte di seguito, a ogni passo bisogna controllare che la forma sia ancora indeterminata. Conviene inoltre semplificare il quoziente delle derivate prima di proseguire, e usare un limite notevole appena è possibile: le derivate successive diventano presto più complicate della funzione di partenza.

6.5.2 La gerarchia degli infiniti

Nel capitolo 3 abbiamo osservato con tabelle numeriche che, per $x \to +\infty$, il logaritmo cresce più lentamente di qualsiasi potenza e ogni potenza più lentamente dell'esponenziale. Ora possiamo dimostrarlo: è la gerarchia degli infiniti.

Potenza ed esponenziale. Per n naturale, $n \geq 1$, il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$ è una forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Applicando la regola n volte, l'esponente della potenza diminuisce di uno a ogni passo, mentre e^x resta uguale a se stesso:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Ogni passo è lecito perché il passo successivo ha limite: il ragionamento si legge dall'ultimo quoziente al primo. Se l'esponente $\alpha > 0$ non è intero, si sceglie un intero $n \geq \alpha$: per $x \geq 1$ vale 0

$< \frac{x^\alpha}{e^x} \le \frac{x^n}{e^x}$, e il teorema del confronto dà ancora 0. Lo stesso vale per a^x con $a > 1$ al posto di e^x, perché $(a^x)' = a^x \ln a$: le derivate fanno comparire soltanto la costante positiva $(\ln a)^n$.

Logaritmo e potenza. Per $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha\, x^\alpha} = 0.$$

DA RICORDARE

Per $x \to +\infty$, per ogni $\alpha > 0$ e ogni $a > 1$: $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ e $\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0$. In breve, $\ln x \ll x^\alpha \ll a^x$. Infine $a^x \ll x^x$, come abbiamo dimostrato nel capitolo 3.

La Figura 6.7 mostra che cosa significa, in concreto, crescere «più lentamente». Per valori non troppo grandi di x la potenza può anche superare l'esponenziale: $x^3 > e^x$ per x fra circa 1,857 e circa 4,536. Ma oltre il secondo incrocio l'esponenziale prende il sopravvento per sempre, e il rapporto $\frac{x^3}{e^x}$ tende a 0. Per x^{10} l'ultimo sorpasso avviene molto più lontano, intorno a $x \approx 35{,}77$, ma avviene comunque: la gerarchia riguarda il comportamento definitivo, non i valori su un intervallo limitato.

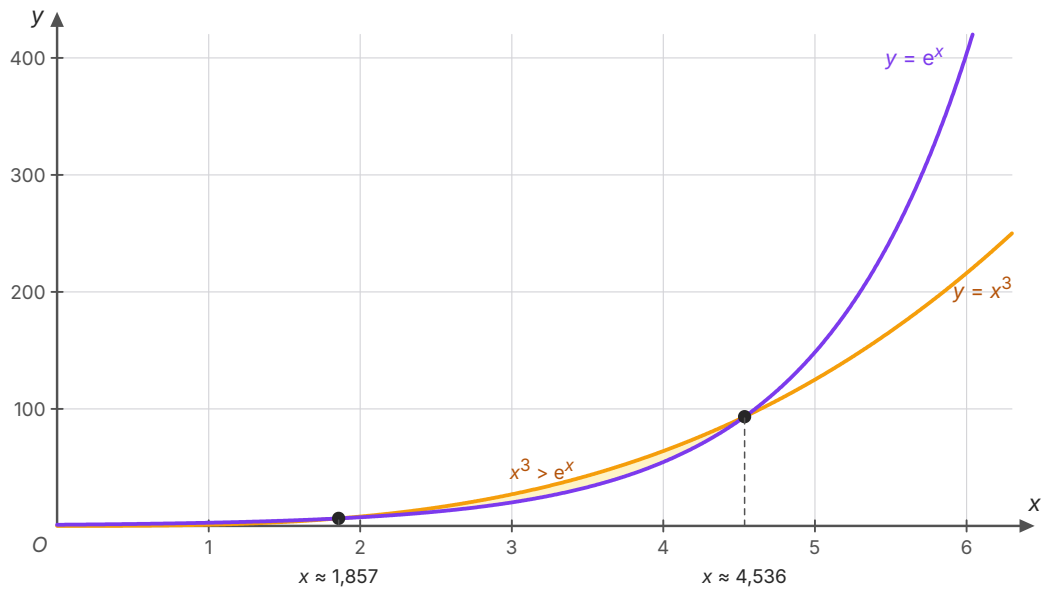


Figura 6.7 I grafici di $y = x^3$ (arancio) e $y = e^x$ (viola) per $0 \le x \le 6{,}3$, con scale diverse sui due assi. Le curve si incontrano per $x \approx 1{,}857$ e $x \approx 4{,}536$; fra i due incroci (in giallo chiaro) la potenza supera l'esponenziale, ma per $x > 4{,}536$ vale $e^x > x^3$ e $\frac{x^3}{e^x} \to 0$.

6.5.3 Le altre forme indeterminate

Il teorema si applica direttamente solo a $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, ma le altre forme indeterminate si riconducono a queste con qualche trasformazione algebrica (Tabella 6.1).

Tabella 6.1 Come ricondurre le forme indeterminate a $\frac{0}{0}$ o a $\frac{\infty}{\infty}$.

Forma	Trasformazione	Esempio
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ oppure $\frac{g}{1/f}$	$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$
$+\infty - \infty$	denominatore comune, oppure raccoglimento	$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 0$
1^∞, 0^0, ∞^0	$f^g = e^{g \ln f}$, poi il limite di $g \ln f$ (forma $0 \cdot \infty$)	$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

Forma $0 \cdot \infty$. Per calcolare $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ scriviamo il prodotto come quoziente: $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$, forma $\frac{\infty}{\infty}$. Il quoziente delle derivate è $\frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$; quindi $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Conviene mandare al denominatore il fattore il cui reciproco si deriva facilmente: scrivendo $\frac{x}{1/\ln x}$ si arriverebbe a calcoli peggiori.

Forma $+\infty - \infty$. Si scrive la differenza come un'unica frazione: $\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$, forma $\frac{0}{0}$ per $x \to 0$. Derivando: $\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x}$, ancora $\frac{0}{0}$; derivando di nuovo: $\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} \to \frac{0}{2} = 0$. Il limite è 0.

Forme esponenziali 1^∞, 0^0, ∞^0. Se $f(x) > 0$, si scrive $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$; poiché l'esponenziale è continua, basta calcolare il limite dell'esponente. Per $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (forma 0^0) l'esponente $x \ln x$ tende a 0, quindi $x^x \to e^0 = 1$. Per $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ (forma ∞^0) l'esponente $\frac{\ln x}{x}$ tende a 0, e il limite è ancora 1. Per $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ (forma 1^∞) l'esponente è $\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$, forma $\frac{0}{0}$; il quoziente delle derivate è $\frac{-\operatorname{sen} x/\cos x}{2x} = -\frac{\operatorname{tg} x}{2x} \to -\frac{1}{2}$, quindi il limite è $e^{-1/2} \approx 0{,}607$.

6.5.4 Quando la regola non serve

Il teorema di de l'Hôpital dà una condizione *sufficiente*: se il limite di $\frac{f'}{g'}$ esiste, il limite di $\frac{f}{g}$ esiste ed è lo stesso. Se il limite di $\frac{f'}{g'}$ non esiste, non si può concludere nulla, e il limite di $\frac{f}{g}$

può esistere ugualmente. Consideriamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$, forma $\frac{\infty}{\infty}$. Il quoziente delle derivate è $\frac{1+\cos x}{1}$, che oscilla fra 0 e 2 e non ha limite. Eppure, dividendo per x, $\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$, perché sen x è limitata e $\frac{1}{x} \to 0$.

Altre volte la regola gira a vuoto. Per $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ il quoziente delle derivate è $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, e applicando di nuovo la regola si ritorna a $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Raccogliendo x^2 sotto la radice, invece, si trova subito $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to 1$. De l'Hôpital è uno strumento fra gli altri, non un automatismo.

ERRORE FREQUENTE

Applicare la regola a una forma che non è indeterminata. $\lim_{x\to0} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2}$, per sostituzione. Derivando numeratore e denominatore si otterrebbe $\frac{1}{1} = 1$, che è sbagliato. Prima di derivare, controlla sempre che la forma sia $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, e ripeti il controllo a ogni nuova applicazione.

Derivare il quoziente. Il teorema usa il quoziente delle derivate $\frac{f'}{g'}$, non la derivata del quoziente $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Concludere che il limite non esiste perché $\frac{f'}{g'}$ non ha limite: $\frac{x+\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ anche se $1+\cos x$ oscilla.

APPROFONDIMENTO · LA PARABOLA CHE APPROSSIMA MEGLIO

Nel capitolo 5 abbiamo approssimato una funzione vicino a x_0 con la retta tangente: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$. Con una parabola si può fare di meglio. Il polinomio di secondo grado

$$P(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$

ha in $h = 0$ lo stesso valore, la stessa derivata prima e la stessa derivata seconda di $f(x_0 + h)$; si chiama **polinomio di Taylor** di grado 2 di f in x_0. Applicando due volte il teorema di de l'Hôpital si verifica che, se f'' è continua, $\frac{f(x_0 + h) - P(h)}{h^2} \to 0$ per $h \to 0$: l'errore è trascurabile perfino rispetto a h^2.

Per $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$ si ha $\cos 0 = 1$, $-\text{sen } 0 = 0$, $-\cos 0 = -1$, quindi $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. La tabella confronta i valori, arrotondati a sei cifre decimali.

x	$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	errore della parabola	errore della tangente $y = 1$
0,1	0,995004	0,995000	0,000004	0,004996
0,5	0,877583	0,875000	0,002583	0,122417
1	0,540302	0,500000	0,040302	0,459698

La teoria generale dei polinomi di Taylor, di grado qualsiasi, va oltre il programma del liceo.

APPROFONDIMENTO · IL MARCHESE E IL PROFESSORE

Nel 1696 il marchese Guillaume de l'Hôpital pubblicò a Parigi l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, il primo manuale di calcolo differenziale. Vi compare la regola che porta il suo nome. L'idea, però, non era sua: de l'Hôpital aveva preso lezioni di calcolo da Johann Bernoulli e, con un accordo privato, gli versava un compenso in cambio delle sue scoperte. Dopo la morte del marchese, nel 1704, Bernoulli rivendicò la paternità di vari risultati del libro, compresa la regola; le lettere fra i due, rese note molto tempo dopo, gli hanno dato ragione.

Il libro resta comunque un'opera importante: per decenni fu il testo su cui si imparò il nuovo calcolo di Leibniz, e nella prefazione l'autore riconosceva il proprio debito verso Leibniz e verso i fratelli Bernoulli.

SINTESI

- x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo se $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) in un intorno di x_0; l'estremo è assoluto se la disuguaglianza vale in tutto il dominio.
- **Fermat:** se x_0 è un punto di estremo relativo interno e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$. Il viceversa è falso (x^3 in 0). Gli estremi si cercano fra punti stazionari, punti di non derivabilità ed estremi del dominio.
- **Rolle:** f continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$, $f(a) = f(b) \Rightarrow$ esiste $c \in]a; b[$ con $f'(c) = 0$. Ogni ipotesi è necessaria.
- Fra due zeri di una funzione derivabile c'è uno zero della derivata: se $f' \neq 0$ su un intervallo, f vi ha al più uno zero (unicità), mentre il teorema degli zeri ne dà l'esistenza.
- **Lagrange:** f continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[\Rightarrow$ esiste $c \in]a; b[$ con $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: la tangente in c è parallela alla corda; la velocità media è assunta in almeno un istante.
- Se $f' = 0$ in un intervallo, f è costante; due funzioni con la stessa derivata su un intervallo differiscono per una costante. Su un dominio che non è un intervallo è falso $\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$.
- **Criterio di monotonia:** su un intervallo, $f' > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente, $f' < 0 \Rightarrow$ strettamente decrescente. Viceversa, f crescente e derivabile $\Rightarrow f' \ge 0$ (non > 0).
- Con la derivata della differenza fra i membri, o con Lagrange, si dimostrano disuguaglianze come $e^x \ge 1 + x$.
- **Cauchy:** f, g continue in $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$, $g' \neq 0 \Rightarrow$ esiste c con $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, con lo stesso c per le due funzioni.
- **de l'Hôpital:** per le forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, se esiste $\lim \frac{f'}{g'} = L$ allora $\lim \frac{f}{g} = L$. Le forme $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 si riconducono a queste ($f^g = e^{g \ln f}$).
- Gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$: $\ln x \ll x^\alpha \ll a^x \ll x^x$ ($\alpha > 0$, $a > 1$).
- Se $\frac{f'}{g'}$ non ha limite, la regola non dice nulla: il limite di $\frac{f}{g}$ può esistere ugualmente. La regola non si applica a forme non indeterminate.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se f è derivabile in x_0, punto interno del dominio, e x_0 è un punto di massimo relativo, allora necessariamente:
   A. $f'(x_0) > 0$
   B. $f'(x_0) = 0$
   C. $f''(x_0) < 0$
   D. $f(x_0) = 0$

2. ● La funzione $f(x) = |x - 1|$ sull'intervallo $[0; 2]$:
   A. soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, con $c = 1$
   B. non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle perché $f(0) \neq f(2)$
   C. non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle perché non è derivabile in $x = 1$
   D. non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle perché non è continua in $[0; 2]$

3. ● Il punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[1; 3]$ è:
   A. $c = 2$
   B. $c = 1{,}5$
   C. $c = \sqrt{5}$
   D. $c = 2{,}5$

4. ● Quale delle seguenti funzioni ha derivata nulla in tutto il suo dominio *senza* essere costante?
   A. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
   B. $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$
   C. $f(x) = \ln(e^x) - x$
   D. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

5. ●● Applicando il teorema di de l'Hôpital, $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\operatorname{sen} x}$ vale:
   A. 1
   B. 2
   C. 0
   D. $+\infty$

6. ●● Per $x \to +\infty$, quale delle seguenti funzioni tende a 0?

   A. $\frac{e^x}{x^{100}}$

   B. $\frac{x}{\ln x}$

   C. $\frac{2^x}{x^2}$

   D. $\frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di estremo relativo. b) Se f è derivabile in $]a; b[$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]a; b[$, allora f è strettamente crescente in $]a; b[$. c) Se $f'(x) = 0$ per ogni x del dominio, allora f è costante. d) Se f è strettamente crescente e derivabile in un intervallo, allora $f'(x) > 0$ in ogni punto. e) Il teorema di de l'Hôpital si applica a $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x+2}$.

8. ● Completa. Teorema di Rolle: se f è _____ in $[a; b]$, _____ in $]a; b[$ e $f(a)$ _____ $f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in$ _____ tale che _____ .

9. ●● Vero o falso? Giustifica. a) Il punto c del teorema di Lagrange è unico. b) Il teorema di Rolle è un caso particolare del teorema di Lagrange. c) Il teorema di Cauchy si ottiene applicando il teorema di Lagrange a f e a g e dividendo membro a membro. d) Se f è continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e $f'(x) \le 3$ per ogni $x \in]a; b[$, allora $f(b) - f(a) \le 3(b - a)$.

Calcolare

10. ● Trova i punti stazionari delle funzioni: a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $f(x) = x\,e^{-x}$; c) $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

11. ● Verifica che ciascuna funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato e trova i punti c: a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ in $[1; 3]$; b) $f(x) = \text{sen}\,2x$ in $[0; \frac{\pi}{2}]$; c) $f(x) = x^3 - x$ in $[-1; 1]$.

12. ●● Stabilisci se il teorema di Rolle si applica nell'intervallo indicato. Se sì, trova c; se no, indica quale ipotesi manca e se la tesi vale ugualmente. a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ in $[-1; 1]$; b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ in $[-1; 1]$; c) $f(x) = \text{tg}\,x$ in $[0; \pi]$.

13. ●● Trova il punto c del teorema di Lagrange: a) $f(x) = x^3$ in $[0; 3]$; b) $f(x) = \ln x$ in $[1; e]$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1; 4]$.

14. ●● Determina gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e i suoi estremi relativi: a) $f(x) = x^3 - 3x^2$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; c) $f(x) = \ln x - x$.

15. ● Calcola con il teorema di de l'Hôpital: a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$; c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$; d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

16. ●● Calcola (forma $\frac{\infty}{\infty}$): a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{3x}}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$; d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x}$.

17. ●● Calcola (forme $0\cdot\infty$ e $\infty - \infty$): a) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$; b) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x} - 1)$; c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; d) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

18. ●● Calcola (forme esponenziali): a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$; b) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$; c) $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)^{1/x}$.

19. ●●● Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$ e controlla il risultato con i limiti notevoli.

20. ●● Verifica che $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy nell'intervallo $[0; \frac{\pi}{2}]$ e trova il punto c.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che l'equazione $x^5 + 3x - 1 = 0$ ha esattamente una soluzione reale e che questa appartiene all'intervallo $]0; 1[$.

22. ●● Dimostra con il teorema di Lagrange che $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \le |a - b|$ per ogni a, b reali.

23. ●● Dimostra che $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in [-1; 1]$.

24. ●● Dimostra in due modi che $\ln(1+x) < x$ per ogni $x > 0$: a) studiando il segno della derivata di $g(x) = x - \ln(1+x)$; b) con il teorema di Lagrange applicato a $\ln(1+t)$ in $[0; x]$.

25. ●●● Sia f derivabile su $\mathbb{R}$, e supponi che l'equazione $f'(x) = 0$ abbia esattamente due soluzioni. Dimostra che l'equazione $f(x) = 0$ ha al più tre soluzioni. Mostra con un esempio che può averne esattamente tre.

26. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ è $\frac{0}{0}$; per de l'Hôpital è uguale a $\lim_{x\to 1} \frac{2x+2}{2x}$; applicando ancora la regola ottengo $\lim_{x\to 1} \frac{2}{2} = 1$». Dov'è l'errore e qual è il limite corretto?

27. ●●● Dimostra che, se f è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'(x) = f(x)$ per ogni x, allora esiste una costante k tale che $f(x) = ke^x$. *Suggerimento:* studia $g(x) = f(x)e^{-x}$.

Problemi

28. ●● Un'auto entra in un tratto autostradale controllato lungo 12,5 km alle 10:00:00 e ne esce alle 10:05:30 (dati inventati). a) Calcola la velocità media sul tratto in km/h. b) Spiega perché il teorema di Lagrange garantisce che in almeno un istante il tachimetro ha indicato proprio quel valore, e quale ipotesi sul moto serve. c) Il limite è 130 km/h: si può affermare che l'auto lo ha superato?

29. ●● Un sasso cade da fermo e la sua posizione è $s(t) = 4{,}9t^2$ (in metri, con t in secondi). a) Calcola la velocità media nell'intervallo $[0; 3]$. b) Trova l'istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media. c) Dimostra che per ogni moto $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, con $\alpha \neq 0$, il punto c del teorema di Lagrange su $[t_1; t_2]$ è il punto medio $\dfrac{t_1 + t_2}{2}$.

30. ●● Un serbatoio contiene 50 litri d'acqua. Si sa che il volume $V(t)$, in litri, è una funzione derivabile del tempo t (in minuti) e che non cresce mai più rapidamente di 2 litri al minuto, cioè $V'(t) \le 2$. a) Dimostra che dopo 30 minuti il serbatoio contiene al massimo 110 litri. b) Se inoltre $V'(t) \ge -0{,}5$, qual è il volume minimo possibile dopo 30 minuti?

31. ●● Un capitale $C_0 = 1000$ € è investito al tasso annuo del 5%, con gli interessi capitalizzati x volte all'anno: dopo un anno il montante è $M(x) = 1000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{x}\right)^x$. a) Calcola $\lim_{x \to +\infty} M(x)$ riconducendo la forma 1^∞ alla forma $\dfrac{0}{0}$ e usando il teorema di de l'Hôpital. b) Confronta il risultato con la capitalizzazione annuale ($x = 1$) e mensile ($x = 12$). c) Interpreta il risultato.

Verso l'esame

32. ●● Determina i valori dei parametri a, b, c per i quali la funzione $f(x) = x^2 + ax$ per $0 \le x \le 2$, $f(x) = bx + c$ per $2 < x \le 4$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 4]$, e trova il punto la cui esistenza è garantita dal teorema.

33. ●● Determina il valore del parametro reale k per cui $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1 - 3x}{x^2}$ è finito, e calcola il limite per quel valore.

34. ●● Sono dati la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e i suoi punti $A(0; 0)$ e $B(3; 3)$. a) Verifica che la funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $[0; 3]$ e trova il punto P dell'arco AB in cui la tangente è parallela alla corda AB. b) Calcola l'area del triangolo ABP. c) Spiega perché, fra i punti dell'arco AB, P è quello più lontano dalla retta AB.

35. ●●● Dimostra che per ogni $x > 0$ vale $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$. Usa poi la disuguaglianza per stimare $\ln 1{,}2$ e confronta con il valore della calcolatrice.

PER APPROFONDIRE

- [SPI] Spivak, *Calculus*: i capitoli sul significato della derivata e sui teoremi del valor medio, con dimostrazioni rigorose ed esercizi impegnativi.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: i teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy, e le loro applicazioni alle disuguaglianze e alle forme indeterminate.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il teorema del valor medio e il suo significato geometrico, in un'esposizione discorsiva.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la nascita del calcolo differenziale, i Bernoulli e il manuale del marchese de l'Hôpital.

Glossario del capitolo

Criterio di monotonia
Conseguenza del teorema di Lagrange: se $f' > 0$ ($f' < 0$) nei punti interni di un intervallo, f vi è strettamente crescente (decrescente).

Estremo assoluto
Massimo o minimo di f su tutto il suo dominio, cioè massimo o minimo dell'insieme immagine.

Estremo relativo
Punto di massimo o di minimo relativo, o il valore corrispondente della funzione.

Funzione ausiliaria
Funzione costruita apposta per ricondurre una dimostrazione a un teorema già noto: per esempio la differenza fra f e la corda nella dimostrazione del teorema di Lagrange.

Polinomio di Taylor di grado 2
Il polinomio $f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$, che approssima $f(x_0 + h)$ con un errore trascurabile rispetto a h^2.

Punto di massimo relativo
Punto x_0 del dominio tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per tutti gli x del dominio in un intorno di x_0.

Punto di minimo relativo
Punto x_0 del dominio tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per tutti gli x del dominio in un intorno di x_0.

Punto stazionario
Punto in cui la derivata di una funzione si annulla: la tangente al grafico vi è orizzontale.

Teorema di Cauchy
Se f e g sono continue in $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e $g' \neq 0$, esiste $c \in]a; b[$ con $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema di de l'Hôpital
Per le forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, se esiste il limite di $\frac{f'}{g'}$, esiste ed è uguale il limite di $\frac{f}{g}$.

Teorema di Fermat
Se x_0 è un punto di estremo relativo interno e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Lagrange
Detto anche del valor medio: se f è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, esiste $c \in]a; b[$ con $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Teorema di Rolle
Se f è continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e $f(a) = f(b)$, esiste $c \in]a; b[$ con $f'(c) = 0$.

Velocità media
Rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo impiegato; per il teorema di Lagrange è uguale alla velocità istantanea in almeno un istante.

Soluzioni

1. B. È il teorema di Fermat. La C non è necessaria: $f(x) = -x^4$ ha un massimo in 0 con $f''(0) = 0$.

2. C. $f(0) = f(2) = 1$ e f è continua, ma in $x = 1$ ha un punto angoloso; infatti $f'(x) = \pm 1$ non si annulla mai.

3. A. $\frac{9-1}{3-1} = 4 = 2c$, quindi $c = 2$ (per una parabola c è sempre il punto medio dell'intervallo).

4. D. Le prime tre sono costanti (valgono 1, $\frac{\pi}{2}$, 0) sul loro dominio, che è un intervallo. La quarta ha derivata nulla ma vale $\frac{\pi}{2}$ per $x > 0$ e $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$: il dominio non è un intervallo.

5. B. Forma $\frac{0}{0}$; $\frac{2e^{2x}}{\cos x} \to 2$.

6. D. Le prime tre tendono a $+\infty$ (gerarchia degli infiniti). Per la D, con $t = \ln x$: $\frac{t^3}{e^{t/2}} \to 0$; oppure con tre applicazioni della regola.

7. a) F: $f(x) = x^3$ ha $f'(0) = 0$ ma 0 non è un estremo. b) V (criterio di monotonia; $]a; b[$ è un intervallo). c) F: vero solo se il dominio è un intervallo; controesempio $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. d) F: si ha solo $f'(x) \geq 0$; x^3 ha $f'(0) = 0$. e) F: la forma non è indeterminata; il limite è $\frac{1}{2}$.

8. continua; derivabile; =; $]a; b[$; $f'(c) = 0$.

9. a) F: per $f(x) = x^3$ su $[-1; 1]$ si ha $3c^2 = 1$, con le due soluzioni $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. b) V: è il caso $f(a) = f(b)$. c) F: si otterrebbero due punti c_1, c_2 in generale diversi; Cauchy garantisce un unico c (lo si dimostra con la funzione ausiliaria h). d) V: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leq 3(b - a)$, perché $b - a > 0$.

10. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$: $x = 1$, $x = 3$. b) $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$: $x = 1$. c) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0$ per $x = \pm 2$ (entrambi nel dominio $x \neq 0$).

11. a) Polinomio; $f(1) = f(3) = 0$; $f'(x) = 2x - 4 = 0$: $c = 2$. b) Continua e derivabile ovunque; $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} \pi = 0$; $f'(x) = 2\cos 2x = 0$ per $2x = \frac{\pi}{2}$: $c = \frac{\pi}{4}$. c) Polinomio; $f(-1) = f(1) = 0$; $3c^2 - 1 = 0$: $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0{,}577$, entrambi in $]-1; 1[$.

12. a) $f(-1) = f(1) = 1$ e f è continua, ma $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ non esiste in 0 (cuspide): il teorema non si applica, e infatti f' non si annulla mai. b) Il denominatore non si annulla in $[-1; 1]$: f è continua e derivabile; $f(-1) = f(1) = 0$. $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0$ per $x = 2 \pm \sqrt{3}$; solo $c = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$ appartiene a $]-1; 1[$. c) $\operatorname{tg} x$ non è definita in $\frac{\pi}{2}$, quindi non è continua in $[0; \pi]$: il teorema non si applica, e infatti $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \geq 1$ non si annulla mai, pur essendo $f(0) = f(\pi) = 0$.

13. a) $\frac{27-0}{3} = 9 = 3c^2$: $c = \sqrt{3} \approx 1{,}732$. b) $\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{c}$: $c = e - 1 \approx 1{,}718$. c) $\frac{1/4 - 1}{3} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{c^2}$: $c = 2$.

14. a) $f'(x) = 3x(x - 2)$: crescente in $]-\infty; 0]$ e in $[2; +\infty[$, decrescente in $[0; 2]$; massimo relativo $f(0) = 0$, minimo relativo $f(2) = -4$. b) $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$: decrescente in $]-\infty; -1]$ e in $[1; +\infty[$, crescente in $[-1; 1]$; minimo $f(-1) = -\frac{1}{2}$, massimo $f(1) = \frac{1}{2}$ (anche assoluti). c) Dominio $x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$: crescente in $]0; 1]$, decrescente in $[1; +\infty[$; massimo (assoluto) $f(1) = -1$.

15. a) $\frac{1/x}{1} \to 1$. b) $\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{1} \to 1$. c) $\frac{3x^2}{2x} \to \frac{12}{4} = 3$ (oppure scomponendo: $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \to 3$). d) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - 1}{3x^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3x^2} \to \frac{1}{3}$.

16. a) $\dfrac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} \to 0$. b) $\dfrac{2x}{3e^{3x}}$, poi $\dfrac{2}{9e^{3x}} \to 0$. c) $\dfrac{2x/(x^2+1)}{1/x} = \dfrac{2x^2}{x^2+1} \to 2$. d) $\dfrac{\cos x/\operatorname{sen} x}{1/x} = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \to 1$.

17. a) $\dfrac{\ln x}{x^{-2}}$: $\dfrac{1/x}{-2x^{-3}} = -\dfrac{x^2}{2} \to 0$. b) $\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}$, forma $\dfrac{0}{0}$: $\dfrac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = e^{1/x} \to 1$. c) $\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$: derivando $\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$, ancora $\dfrac{0}{0}$; derivando di nuovo $\dfrac{e^x}{2e^x+xe^x} \to \dfrac{1}{2}$. d) $\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$: derivando $\dfrac{1-1/x}{\ln x+1-1/x} = \dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}$, ancora $\dfrac{0}{0}$; derivando $\dfrac{1}{\ln x+2} \to \dfrac{1}{2}$.

18. a) Esponente $\operatorname{sen} x \cdot \ln x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot x \ln x \to 1 \cdot 0 = 0$: il limite è $e^0 = 1$. b) Esponente $\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$, forma $\dfrac{0}{0}$: $\dfrac{-2\operatorname{sen} 2x/\cos 2x}{2x} = -\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x} \to -2$; il limite è $e^{-2} \approx 0{,}135$. c) Esponente $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$: $\dfrac{2x/(x^2+1)}{1} \to 0$; il limite è 1.

19. Forma $\dfrac{0}{0}$. Derivando: $\dfrac{1-\cos x}{1-(1+\operatorname{tg}^2 x)} = -\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = -\dfrac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{(1-\cos x)\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = -\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x} \to -\dfrac{1}{2}$. Controllo: $x - \operatorname{sen} x$ è equivalente a $\dfrac{x^3}{6}$ (esempio svolto del paragrafo) e $x - \operatorname{tg} x$ a $-\dfrac{x^3}{3}$ (esercizio sui limiti con de l'Hôpital): il rapporto tende a $\dfrac{1/6}{-1/3} = -\dfrac{1}{2}$.

20. Sono continue e derivabili ovunque; $g'(x) = -\operatorname{sen} x \neq 0$ in $]0; \dfrac{\pi}{2}[$. Primo membro: $\dfrac{1-0}{0-1} = -1$; secondo membro: $\dfrac{\cos c}{-\operatorname{sen} c} = -\operatorname{cotg} c$. Da $\operatorname{cotg} c = 1$: $c = \dfrac{\pi}{4}$.

21. $f(x) = x^5 + 3x - 1$ è continua; $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3 > 0$: per il teorema degli zeri esiste una soluzione in $]0; 1[$. $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$ per ogni x: f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (criterio di monotonia), quindi ha al più uno zero (oppure: due zeri darebbero, per Rolle, uno zero di f'). La soluzione è unica; numericamente $\alpha \approx 0{,}332$.

22. Se $a = b$ è ovvio. Se $a < b$ (l'altro caso è simmetrico), $\operatorname{sen} x$ è continua e derivabile in $[a; b]$: esiste c con $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a = \cos c \cdot (b-a)$. Poiché $|\cos c| \leq 1$, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| = |\cos c| \cdot |b-a| \leq |b-a|$. c.v.d.

23. $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ è continua in $[-1; 1]$ e derivabile in $]-1; 1[$ con $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Poiché $[-1; 1]$ è un intervallo, f è costante; il suo valore è $f(0) = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. c.v.d.

24. a) $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ per $x > 0$; g è continua in $[0; +\infty[$, quindi strettamente crescente, e $g(x) > g(0) = 0$ per $x > 0$. b) Esiste $c \in]0; x[$ con $\ln(1+x) - \ln 1 = \dfrac{1}{1+c} \cdot x$; poiché $1 + c > 1$, $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c} < x$. c.v.d.

25. Se f avesse quattro zeri $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, il teorema di Rolle applicato in $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$, $[x_3; x_4]$ darebbe tre zeri distinti di f' (stanno in intervalli aperti disgiunti): assurdo. Esempio: $f(x) = x^3 - 3x$ ha $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, con i due zeri ± 1, e f si annulla in 0 e $\pm\sqrt{3}$.

26. Dopo la prima applicazione il quoziente $\dfrac{2x+2}{2x}$ non è più indeterminato in $x = 1$: vale $\dfrac{4}{2} = 2$. La seconda applicazione è illegittima. Il limite è 2 (controllo: $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+3}{x+1} \to 2$).

27. $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = (f'(x) - f(x))e^{-x} = 0$ per ogni x. Poiché $\mathbb{R}$ è un intervallo, g è costante: $g(x) = k$, cioè $f(x) = ke^x$. (È la prima equazione differenziale che incontreremo nel capitolo 12.)

28. a) Il tempo è 5,5 min $= \dfrac{5{,}5}{60}$ h; la velocità media è $12{,}5 : \dfrac{5{,}5}{60} = \dfrac{1500}{11} \approx 136{,}4$ km/h. b) Se $s(t)$ è continua in $[t_1; t_2]$ e derivabile all'interno, esiste c con $s'(c) = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$; serve che la posizione vari in modo derivabile (moto senza «salti»). c) Sì: in alme-

no un istante la velocità è stata circa 136,4 km/h > 130 km/h.

29. a) $\frac{4{,}9 \cdot 9 - 0}{3} = 14{,}7$ m/s. b) $s'(t) = 9{,}8t = 14{,}7$: $t = 1{,}5$ s. c) $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\alpha({t_2}^2 - {t_1}^2) + \beta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \alpha(t_1 + t_2) + \beta$; $s'(c) = 2\alpha c + \beta$; uguagliando, $c = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

30. a) Per Lagrange in [0; 30]: $V(30) - V(0) = V'(c) \cdot 30 \le 2 \cdot 30 = 60$, quindi $V(30) \le 110$ L. b) $V(30) - 50 = V'(c) \cdot 30 \ge -15$: $V(30) \ge 35$ L.

31. a) $M(x) = 1000\, e^{x \ln(1 + 0{,}05/x)}$; con $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ l'esponente è $\frac{\ln(1 + 0{,}05t)}{t}$, e derivando $\frac{0{,}05/(1 + 0{,}05t)}{1} \to 0{,}05$. Il limite è $1000\, e^{0{,}05} \approx 1051{,}27$ €. b) $M(1) = 1050{,}00$ €; $M(12) \approx 1051{,}16$ €. c) Capitalizzando sempre più spesso il montante cresce, ma resta limitato: la «capitalizzazione continua» dà al massimo 1051,27 €.

32. Continuità in 2: $4 + 2a = 2b + c$. Derivabilità in 2: derivata sinistra $4 + a$, destra b, quindi $b = 4 + a$. $f(0) = f(4)$: $0 = 4b + c$. Da $c = -4b = -16 - 4a$ e dalla continuità, $4 + 2a = 8 + 2a - 16 - 4a$, quindi $a = -3$, $b = 1$, $c = -4$. Ora $f(x) = x^2 - 3x$ in [0; 2], $f(x) = x - 4$ in]2; 4]: $f'(x) = 2x - 3 = 0$ per $x = \frac{3}{2} \in]0; 2[$, mentre nel secondo tratto $f' = 1$. Il punto è $\frac{3}{2}$, con $f(\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$.

33. Forma $\frac{0}{0}$ per ogni k. Derivando: $\frac{ke^{kx} - 3}{2x}$. Se $k \ne 3$ il numeratore tende a $k - 3 \ne 0$ e il limite è infinito (di segni opposti da destra e da sinistra). Se $k = 3$ il quoziente è $\frac{3e^{3x} - 3}{2x}$, forma $\frac{0}{0}$; derivando $\frac{9e^{3x}}{2} \to \frac{9}{2}$. Quindi $k = 3$ e il limite è $\frac{9}{2}$.

34. a) Polinomio, quindi continua e derivabile; $m_{AB} = 1$; $f'(x) = -2x + 4 = 1$ per $x = \frac{3}{2}$: $P(\frac{3}{2}; \frac{15}{4})$. b) Retta AB: $y = x$; distanza di P: $\frac{|3/2 - 15/4|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$; $AB = 3\sqrt{2}$; area $= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{8}$. c) La distanza di $(x; f(x))$ dalla retta è $\frac{f(x) - x}{\sqrt{2}} = \frac{-x^2 + 3x}{\sqrt{2}}$ per $0 \le x \le 3$; la sua derivata $\frac{-2x + 3}{\sqrt{2}}$ si annulla in $x = \frac{3}{2}$, che è il massimo (la derivata passa da positiva a negativa). È il punto in cui $f'(x) = m_{AB}$.

35. Per Lagrange su $[0; x]$ applicato a $\ln(1 + t)$: $\ln(1 + x) = \frac{x}{1 + c}$ con $0 < c < x$. Poiché $1 < 1 + c < 1 + x$, si ha $\frac{x}{1 + x} < \frac{x}{1 + c} < x$. Con $x = 0{,}2$: $0{,}1666\ldots < \ln 1{,}2 < 0{,}2$; la calcolatrice dà $\ln 1{,}2 = 0{,}1823\ldots$.