CAPITOLO

5

La derivata

Un tachimetro non dice quanta strada si è fatta, ma quanto in fretta la si sta facendo adesso: la derivata è la matematica di quell'adesso. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la derivata come limite del rapporto incrementale e interpretarla come velocità istantanea e come pendenza della retta tangente.
2. Riconoscere i punti di non derivabilità e dimostrare che una funzione derivabile è continua.
3. Dimostrare le derivate delle funzioni fondamentali a partire dai limiti notevoli.
4. Applicare le regole di derivazione di somma, prodotto, quoziente, funzione composta e funzione inversa.
5. Usare il differenziale per approssimare una funzione con la sua retta tangente.
6. Descrivere con la derivata velocità, accelerazione, intensità di corrente, tassi di crescita e costi marginali.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Due problemi, un limite 2
5.2 La derivata di una funzione 5
5.3 Le derivate fondamentali 9
5.4 Le regole di derivazione 13
5.5 Derivate successive e differenziale 19
5.6 La derivata come velocità di variazione 21

Matematica 5 · Parte II · Calcolo differenziale · versione 1.0
Capitolo 5: La derivata · pagine 133–160 del volume completo · estratto per lo studio

Il tachimetro di un'auto segna 50 km/h. Che cosa significa, esattamente? Non che l'auto percorrerà 50 chilometri nella prossima ora: fra un minuto potrebbe essere ferma a un semaforo. Il tachimetro misura una velocità *in quell'istante*, ma un istante non ha durata, e in un tempo nullo non si percorre alcuno spazio: la definizione «spazio diviso tempo» darebbe $\frac{0}{0}$. Per secoli questo è sembrato un paradosso. La soluzione è il concetto di limite dei capitoli precedenti: la velocità in un istante è il limite delle velocità medie su intervalli di tempo sempre più brevi.

Lo stesso limite risolve un problema geometrico: che cosa sia la retta tangente a una curva qualsiasi, e non solo a una conica. In questo capitolo i due problemi diventano un solo concetto, la **derivata**: impareremo a calcolarla per tutte le funzioni note, dimostrando le regole una per una, e la useremo per descrivere velocità, correnti elettriche, crescite e costi. Nei capitoli 6–8 diventerà lo strumento per studiare le funzioni e risolvere problemi di ottimizzazione.

5.1 Due problemi, un limite

5.1.1 La velocità istantanea

Un sasso viene lasciato cadere da un ponte. Trascurando la resistenza dell'aria e arrotondando l'accelerazione di gravità a $g = 10\ \text{m/s}^2$, lo spazio percorso dopo t secondi è, in metri,

$$s(t) = 5t^2.$$

Quanto è veloce il sasso all'istante $t = 2$ s? In *Matematica 3* (cap. 3) abbiamo definito il **tasso medio di variazione** di una funzione su un intervallo: qui è la **velocità media** fra l'istante 2 e l'istante $2 + h$, cioè lo spazio percorso diviso per il tempo impiegato:

$$v_m = \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{5(4 + 4h + h^2) - 20}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = 20 + 5h \qquad (h \neq 0).$$

La Tabella 5.1 riporta qualche valore. Con h positivo l'intervallo è $[2;\ 2+h]$, con h negativo è $[2+h;\ 2]$; in entrambi i casi, più l'intervallo è breve, più la velocità media si avvicina a 20 m/s.

Tabella 5.1 Velocità media del sasso, $s(t) = 5t^2$, fra gli istanti 2 s e $2 + h$ (in secondi): $v_m = 20 + 5h$.

h (s)	1	0,1	0,01	0,001	−0,01	−0,1
v_m (m/s)	25	20,5	20,05	20,005	19,95	19,5

Non possiamo porre $h = 0$ nella frazione di partenza: otterremmo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ del capitolo 3. Possiamo però semplificare per h, che è diverso da zero, e poi calcolare il limite

per $h \to 0$: $\lim_{h\to 0}(20 + 5h) = 20$. Il sasso, all'istante 2 s, ha una velocità di 20 m/s. In generale, se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove lungo una retta, la sua **velocità istantanea** all'istante t_0 è il limite delle velocità medie:

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

In *Matematica 4* (cap. 5) avevamo fatto qualcosa di simile per la funzione seno, osservando su una tabella che le pendenze delle secanti si avvicinavano a un valore. Ora quel «si avvicinano» ha un nome preciso: è un limite, e i teoremi dei capitoli 1–3 permettono di calcolarlo esattamente.

5.1.2 La retta tangente a una curva

In *Matematica 3* la retta tangente a una conica era la retta che la incontra in un solo punto «contato due volte», e la si trovava imponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente. Per le altre curve questo metodo non funziona, perché l'idea di «un solo punto in comune» è sbagliata. Basta guardare la cubica $y = x^3$:

- nell'origine la tangente è l'asse x, eppure la curva la *attraversa*: sta sotto per $x < 0$ e sopra per $x > 0$;
- l'asse y incontra la cubica in un solo punto, l'origine, ma non è affatto tangente;
- nel punto $(1; 1)$ la tangente, come vedremo, è $y = 3x - 2$, che incontra di nuovo la cubica nel punto $(-2; -8)$: infatti $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

Serve dunque una definizione nuova, che valga per ogni curva. Fissiamo sul grafico di f un punto $P(x_0; f(x_0))$ e un secondo punto $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$. La retta PQ è una **secante**, e la sua pendenza è

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quando Q scorre sulla curva verso P, cioè quando $h \to 0$, la secante ruota intorno a P. Se la sua pendenza tende a un numero m, la retta per P con pendenza m si chiama **retta tangente** al grafico in P: è la *posizione limite* delle secanti. Nella Figura 5.1 la curva è la parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ e P è il punto $(1; \frac{1}{2})$. La pendenza della secante è

$$\frac{\frac{1}{2}(1 + h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2h + h^2}{2h} = 1 + \frac{h}{2},$$

che vale 2 per $h = 2$, 1,5 per $h = 1$, 1,25 per $h = 0{,}5$ e tende a 1 per $h \to 0$. La tangente in P è quindi la retta $y - \frac{1}{2} = 1 \cdot (x - 1)$, cioè $y = x - \frac{1}{2}$. Per una parabola lo stesso risultato si ottiene anche

con $\Delta = 0$; ma il nuovo metodo funziona per qualsiasi curva, purché il limite esista.

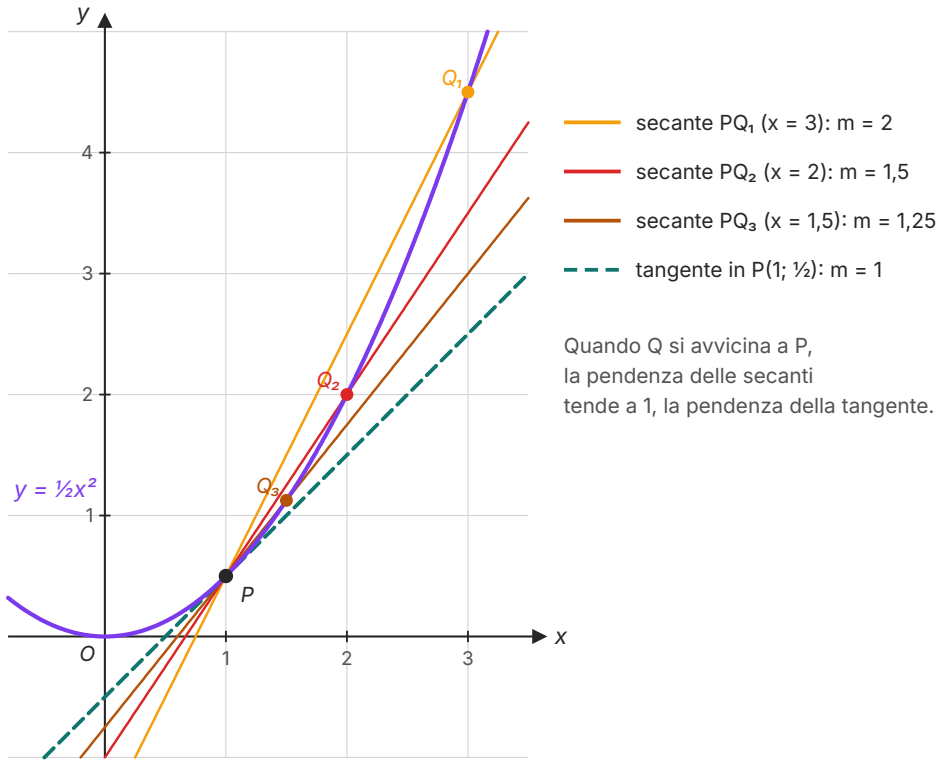


Figura 5.1 Le secanti PQ_1, PQ_2, PQ_3 della parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ (viola) passano per $P(1; \frac{1}{2})$ e per punti sempre più vicini a P; le loro pendenze 2; 1,5; 1,25 tendono a 1, la pendenza della retta tangente $y = x - \frac{1}{2}$ (verde, tratteggiata). Stessa scala sui due assi.

5.1.3 Una sola idea

In un grafico spazio-tempo i due problemi coincidono: **la velocità media è la pendenza della secante, la velocità istantanea è la pendenza della tangente**. In entrambi i casi conta il limite di un rapporto fra due variazioni, quando la variazione della variabile indipendente tende a zero. La Figura 5.2 lo mostra per un'auto che parte da ferma con legge $s(t) = 1{,}5t^2$ (metri e secondi): fra 2 s e 4 s percorre $24 - 6 = 18$ m, con velocità media 9 m/s; all'istante 4 s la sua velocità è 12 m/s (lo calcoleremo alla fine del capitolo).

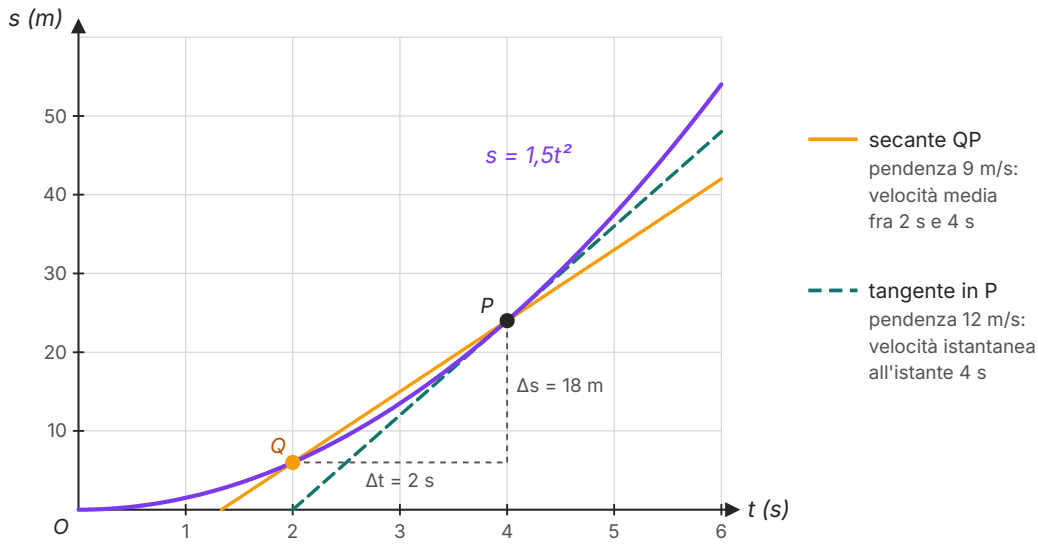


Figura 5.2 Grafico spazio-tempo di un'auto con $s(t) = 1{,}5t^2$. La secante QP (arancio) ha pendenza $\frac{18\text{ m}}{2\text{ s}} = 9$ m/s, la velocità media fra 2 s e 4 s; la tangente in P (verde, tratteggiata) ha pendenza 12 m/s, la velocità istantanea all'istante 4 s. Nella versione interattiva si possono trascinare P e Q: quando Q si avvicina a P, la secante si avvicina alla tangente.

5.2 La derivata di una funzione

5.2.1 Rapporto incrementale e derivata

Sia f una funzione definita in un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, e sia $h \neq 0$ un numero tale che $x_0 + h$ appartenga ancora all'intorno. Il numero h si chiama **incremento** della variabile e si indica anche con Δx; la differenza $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ è l'incremento corrispondente della funzione. Il loro rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si chiama **rapporto incrementale** di f relativo al punto x_0 e all'incremento h. Geometricamente è la pendenza della secante per i punti del grafico di ascisse x_0 e $x_0 + h$; fisicamente, se f è una posizione e x il tempo, è una velocità media.

IN SINTESI

Definizione. Una funzione f, definita in un intorno di x_0, è **derivabile** in x_0 se esiste ed è **finito** il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$. Questo limite si chiama **derivata** di f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ponendo $x = x_0 + h$ si ottiene la forma equivalente $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Altre notazioni: $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$.

Se il limite del rapporto incrementale è $+\infty$ o $-\infty$, la funzione **non** è derivabile in x_0, ma le secanti tendono a diventare verticali: diremo che il grafico ha in quel punto una tangente verticale, di equazione $x = x_0$. Se il limite non esiste, il grafico non ha in quel punto una retta tangente nel senso della definizione; i casi in cui esistono almeno i limiti da destra e da sinistra sono classificati più avanti, fra i punti di non derivabilità.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola con la definizione la derivata di $f(x) = x^2 - 3x$ nel punto $x_0 = 1$ e scrivi le equazioni della retta tangente e della retta normale al grafico nel punto di ascissa 1.

Rapporto incrementale. $f(1) = 1 - 3 = -2$ e $f(1 + h) = (1 + h)^2 - 3(1 + h) = h^2 - h - 2$. Quindi

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - h - 2 + 2}{h} = \frac{h(h - 1)}{h} = h - 1.$$

Limite. $f'(1) = \lim_{h\to 0} (h - 1) = -1$.

Tangente. Passa per $(1; -2)$ con pendenza -1: $y + 2 = -(x - 1)$, cioè $y = -x - 1$.

Normale. È perpendicolare alla tangente, quindi ha pendenza $-\frac{1}{-1} = 1$: $y + 2 = x - 1$, cioè $y = x - 3$.

5.2.2 Retta tangente e retta normale

L'esempio contiene un metodo generale. Se f è derivabile in x_0, la **retta tangente** al grafico nel punto $(x_0; f(x_0))$ è la retta per quel punto con pendenza $f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La **retta normale** al grafico in quel punto è la retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza. Poiché due rette perpendicolari (non parallele agli assi) hanno pendenze con prodot-

to -1, se $f'(x_0) \neq 0$ la normale è $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$; se $f'(x_0) = 0$ la tangente è orizzontale e la normale è la retta verticale $x = x_0$.

5.2.3 La funzione derivata

Se f è derivabile in ogni punto di un intervallo I, a ogni x di I corrisponde il numero $f'(x)$: resta definita una nuova funzione, la **funzione derivata** f'. Per calcolarla si usa la definizione con x generico. Per esempio, per $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $x \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)} \quad \to \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Allo stesso modo, per $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ il rapporto incrementale è $x + \dfrac{h}{2}$ e la derivata è $f'(x) = x$: in $x = 1$ ritroviamo la pendenza 1 della Figura 5.1. Per $f(x) = \dfrac{1}{x}$ la derivata è sempre negativa: la funzione decresce su ciascuno dei due intervalli del dominio, e il segno della derivata lo «vede». Questo legame fra il segno di f' e la monotonia di f sarà dimostrato nel capitolo 6.

5.2.4 Derivata destra e derivata sinistra

Come per i limiti, si possono considerare solo incrementi positivi o solo negativi. La **derivata destra** e la **derivata sinistra** di f in x_0 sono

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Poiché un limite esiste se e solo se esistono e sono uguali i due limiti unilaterali (capitolo 2), una funzione è derivabile in un punto interno x_0 se e solo se le derivate destra e sinistra esistono, sono finite e sono uguali. Negli estremi di un intervallo chiuso $[a; b]$ si può parlare solo di una delle due: si dice che f è derivabile in $[a; b]$ se è derivabile in ogni punto di $]a; b[$ e se esistono finite $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.

L'esempio tipico è $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$. Il rapporto incrementale è $\dfrac{|h|}{h}$, che vale 1 per $h > 0$ e -1 per $h < 0$: dunque $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Le derivate unilaterali esistono ma sono diverse, e $|x|$ **non è derivabile** nell'origine, pur essendo continua.

5.2.5 Derivabilità e continuità

La funzione $|x|$ mostra che una funzione continua può non essere derivabile. Vale invece l'implicazione opposta.

IN SINTESI

Teorema (derivabilità e continuità).

Ipotesi: f è derivabile in x_0.

Tesi: f è continua in x_0.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, cioè che $f(x_0+h) - f(x_0) \to 0$. Per $h \neq 0$ possiamo scrivere

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Per $h \to 0$ il primo fattore tende a $f'(x_0)$, che è un numero finito per ipotesi, e il secondo tende a 0. Per il teorema sul limite del prodotto il secondo membro tende a $f'(x_0)\cdot 0 = 0$. c.v.d.

La dimostrazione usa in modo essenziale che $f'(x_0)$ sia **finito**: un prodotto «infinito per zero» sarebbe una forma indeterminata. Il teorema si usa spesso nella forma contronominale: **se f non è continua in x_0, allora non è derivabile in x_0.** Per esempio la funzione parte intera non è derivabile nei numeri interi, dove ha un salto.

5.2.6 Punti di non derivabilità

Sia f continua in x_0 ma non derivabile. Si chiama **punto di non derivabilità**, e a seconda di come si comportano le derivate unilaterali si distinguono tre casi principali (Figura 5.3).

- **Punto angoloso:** le derivate destra e sinistra esistono, sono diverse e almeno una delle due è finita. Il grafico ha due semitangenti distinte che formano un angolo, come $y = |x|$ nell'origine.
- **Flesso a tangente verticale:** le derivate destra e sinistra sono entrambe $+\infty$ o entrambe $-\infty$. Il grafico ha una tangente verticale e la attraversa, come $y = \sqrt[3]{x}$ nell'origine: il rapporto incrementale è $\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$, positivo per ogni $h \neq 0$, e tende a $+\infty$ da entrambi i lati.
- **Cuspide:** le derivate destra e sinistra sono infinite e di segno opposto. Il grafico ha nel punto una tangente verticale, ma i due rami stanno entrambi sopra (o entrambi sotto) il punto e formano una punta, come $y = \sqrt{|x|}$ nell'origine: per $h > 0$ il rapporto è $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$, per $h < 0$ è $\frac{\sqrt{-h}}{h} = -\frac{1}{\sqrt{-h}} \to -\infty$.

I nomi descrivono la forma del grafico: un **punto angoloso**, una **cuspide** come la punta di una freccia, un **flesso a tangente verticale** dove la curva cambia il verso in cui si piega. Il concetto generale di flesso sarà definito nel capitolo 7.

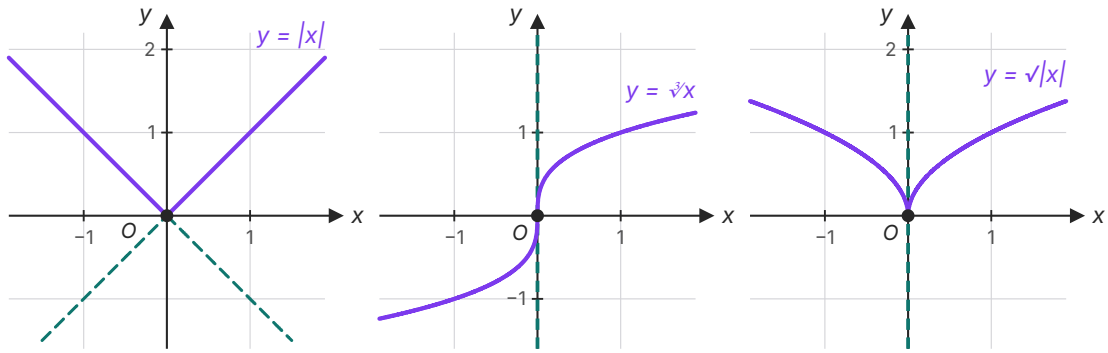


Figura 5.3 Tre funzioni continue ma non derivabili nell'origine: un punto angoloso ($y = |x|$: le due semitangenti stanno sulle rette $y = x$ e $y = -x$, qui prolungate e tratteggiate), un flesso a tangente verticale ($y = \sqrt[3]{x}$) e una cuspide ($y = \sqrt{|x|}$); negli ultimi due casi la tangente verticale è l'asse y. Stessa scala sui due assi.

ERRORE FREQUENTE

Guardare un solo lato in un punto angoloso. Per $f(x) = |x^2 - 1|$ in $x_0 = 1$ qualcuno scrive: «vicino a 1 è $f(x) = x^2 - 1$, quindi $f'(1) = 2$». Ma questo vale solo a destra di 1: per x di poco minore di 1 si ha $f(x) = 1 - x^2$, e la derivata sinistra è -2. Il punto è angoloso. Con le funzioni a tratti o con un valore assoluto, la derivata nei punti di raccordo si calcola **sempre** da destra e da sinistra.

Confondere continuità e derivabilità. «È continua, quindi è derivabile» è falso ($|x|$ in 0); «non è derivabile, quindi non è continua» è falso per lo stesso motivo. Vero è solo: derivabile $\Rightarrow$ continua.

5.3 Le derivate fondamentali

Calcoliamo ora, una volta per tutte, le derivate delle funzioni elementari. Ogni dimostrazione è l'applicazione della definizione e di un limite già noto; alla fine i risultati sono raccolti nella Tabella 5.2.

5.3.1 Costanti e potenze

Funzione costante. Se $f(x) = k$, il rapporto incrementale è $\dfrac{k-k}{h} = 0$ per ogni h, quindi $(k)' = 0$: il grafico è una retta orizzontale, la cui tangente è la retta stessa.

Funzione identità. Se $f(x) = x$, il rapporto incrementale è $\dfrac{(x+h)-x}{h} = 1$, quindi $(x)' = 1$.

Potenza con esponente naturale. Sia $f(x) = x^n$ con $n \geq 2$ naturale. Per la formula del binomio di Newton (*Matematica 4*, cap. 13)

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n,$$

quindi il rapporto incrementale è $nx^{n-1} + h\left[\frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2} + \ldots + h^{n-2}\right]$. La parentesi quadra è un polinomio in h, che tende a un numero finito per $h \to 0$; moltiplicata per h tende a 0. Dunque $(x^n)' = nx^{n-1}$. Per esempio $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^{10})' = 10x^9$.

Radice quadrata. Sia $f(x) = \sqrt{x}$, con $x > 0$. Razionalizzando il numeratore come nel capitolo 3:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad \to \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

In $x = 0$ la radice è definita solo a destra e il rapporto incrementale $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ tende a $+\infty$: la funzione $\sqrt{x}$ non è derivabile in 0, dove il grafico ha tangente verticale. Più in generale vale, per ogni esponente reale α e per $x > 0$, la regola $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, che dimostreremo con la regola della funzione composta; per $\alpha = \frac{1}{2}$ ritroviamo la derivata della radice.

5.3.2 Seno e coseno

Funzione seno. Per la formula di addizione $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$, quindi

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Dal capitolo 3 sappiamo che $\frac{\operatorname{sen} h}{h} \to 1$ e che $\frac{1 - \cos h}{h^2} \to \frac{1}{2}$, quindi $\frac{\cos h - 1}{h} = -h \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Il rapporto incrementale tende a $\operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Funzione coseno. Con $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$ lo stesso ragionamento dà $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ (è un esercizio di «Dimostrare e argomentare»).

La Figura 5.4 permette di «vedere» la prima formula: dove il grafico del seno sale più ripido, in 0 e in 2π, la pendenza è 1 e il coseno vale 1; nei massimi e nei minimi la tangente è orizzontale e il coseno si annulla; in π il seno scende con pendenza -1 e il coseno vale -1. Entrambe le formule valgono solo con x in **radianti**: si basano sul limite $\frac{\operatorname{sen} h}{h} \to 1$, che in gradi vale $\frac{\pi}{180}$ (capitolo 3), e in gradi si avrebbe $(\operatorname{sen} x)' = \frac{\pi}{180}\cos x$.

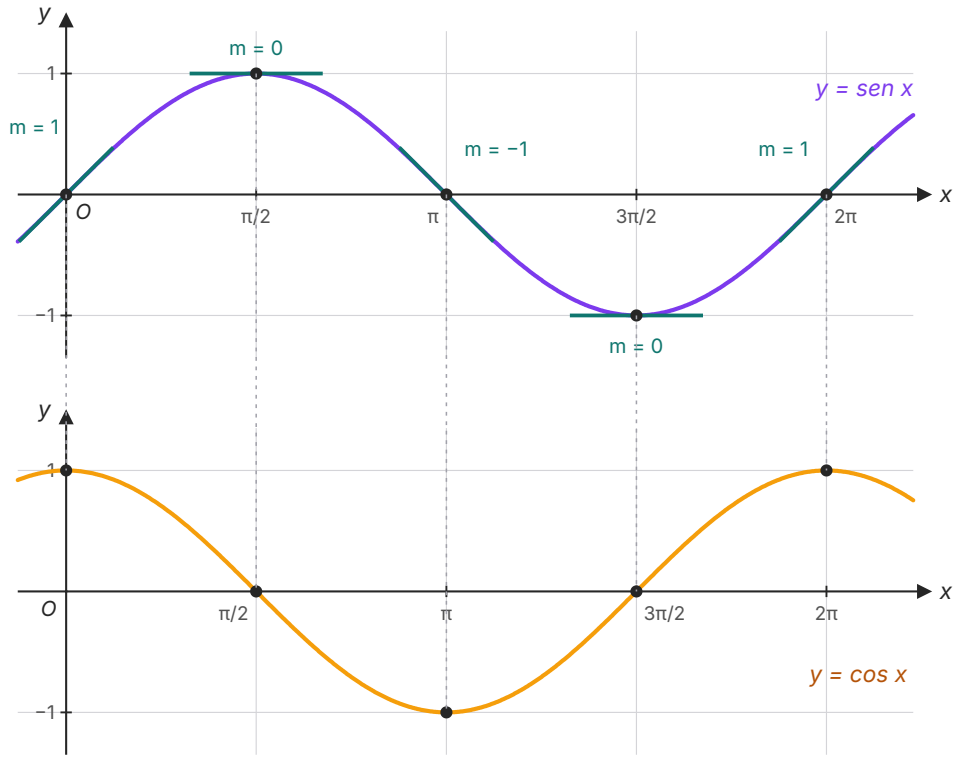


Figura 5.4 In alto il grafico di $y = \text{sen } x$ con le tangenti nei punti di ascissa 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π e le loro pendenze; in basso il grafico di $y = \cos x$: in ciascuno di quei punti il valore del coseno è uguale alla pendenza del seno. Stessa scala sui due assi.

5.3.3 Esponenziali e logaritmi

Funzione esponenziale di base e. Per le proprietà delle potenze $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$, quindi

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \cdot 1 \quad \to \quad (e^x)' = e^x,$$

grazie al limite notevole $\frac{e^h - 1}{h} \to 1$. La funzione e^x coincide con la propria derivata: in ogni punto la pendenza del grafico è uguale all'ordinata del punto, e in particolare la tangente nel punto (0; 1) ha pendenza 1. Ecco perché in analisi si preferisce la base e a ogni altra.

Esponenziale di base a ($a > 0$). Allo stesso modo $\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$, e il limite notevole $\frac{a^h - 1}{h} \to \ln a$ dà $(a^x)' = a^x \ln a$. Per $a = e$ si ritrova la formula precedente, perché

$\ln e = 1$.

Logaritmo naturale. Per $x > 0$, usando le proprietà dei logaritmi,

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

Posto $t = \frac{h}{x}$, si ha $t \to 0$ quando $h \to 0$, e $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$: dunque $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Logaritmo in base a ($a > 0$, $a \neq 1$). Per la formula del cambiamento di base $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, che è il prodotto di $\ln x$ per la costante $\frac{1}{\ln a}$; quindi $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ (la derivata di una costante per una funzione è la costante per la derivata, come vedremo subito).

Tabella 5.2 Derivate delle funzioni fondamentali, con i valori di x in cui valgono.

$f(x)$	$f'(x)$	dove
k (costante)	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n (n naturale)	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
x^α (α reale)	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$

ESEMPIO SVOLTO

Trova la retta tangente al grafico di $y = \ln x$ che passa per l'origine.

Impostazione. Non conosciamo il punto di tangenza: chiamiamo $x_0 > 0$ la sua ascissa. La tangente in $(x_0; \ln x_0)$ ha pendenza $\frac{1}{x_0}$ ed equazione

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

Condizione. La retta passa per $O(0; 0)$ se $0 = \ln x_0 - 1$, cioè $x_0 = e$.

Risposta. Il punto di tangenza è $(e; 1)$ e la tangente è $y = \frac{x}{e}$. Il metodo, «chiamare x_0 il punto di tangenza incognito e imporre la condizione», funziona per qualsiasi curva e per qualsiasi punto esterno: è uno dei passi tipici dei problemi della seconda prova.

5.4 Le regole di derivazione

Con le derivate fondamentali e poche regole si può derivare ogni funzione che si ottiene da esse con somme, prodotti, quozienti e composizioni. Supponiamo in tutto il paragrafo che f e g siano derivabili nel punto x considerato.

5.4.1 Somma e prodotto per una costante

Il rapporto incrementale di $f + g$ è la somma dei rapporti incrementali di f e di g, e quello di kf è k volte quello di f. Per i teoremi sul limite della somma e del prodotto (capitolo 3):

$$(f + g)' = f' + g', \qquad (kf)' = kf'.$$

Insieme, le due regole dicono che la derivazione è **lineare**: $(af + bg)' = af' + bg'$ per ogni coppia di costanti a, b. Così si deriva ogni polinomio termine per termine: $(4x^3 - 5x^2 + 7x - 2)' = 12x^2 - 10x + 7$.

5.4.2 Il prodotto

IN SINTESI

Teorema (derivata del prodotto).

Ipotesi: f e g sono derivabili in x.

Tesi: fg è derivabile in x e $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

Dimostrazione. Nel numeratore del rapporto incrementale sottraiamo e aggiungiamo $f(x)\,g(x+h)$:

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Per $h\to 0$ i due rapporti incrementali tendono a $f'(x)$ e $g'(x)$. Inoltre $g(x+h)\to g(x)$ perché g, essendo derivabile, è continua in x (teorema su derivabilità e continuità). Per i teoremi sui limiti di somme e prodotti il secondo membro tende a $f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$. c.v.d.

Per esempio $(x^2\operatorname{sen}x)'=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x$ e $(xe^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$. Si noti che la derivata del prodotto **non** è il prodotto delle derivate: basta pensare a $x^2=x\cdot x$, la cui derivata è $2x$ e non $1\cdot 1$.

5.4.3 Il quoziente

Cominciamo dal reciproco di una funzione. Se $g(x)\neq 0$, allora g è diversa da zero anche in un intorno di x (permanenza del segno, perché g è continua), e

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}=-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\to-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Scrivendo $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$ e applicando la regola del prodotto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'}{g}-f\cdot\frac{g'}{g^2}=\frac{f'\,g-fg'}{g^2}.$$

Per esempio, per $x\neq 1$,

$$\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Con la regola del quoziente si ottengono le derivate della tangente e della cotangente. Per $\cos x\neq 0$:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\operatorname{sen}x\cdot(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x,$$

e analogamente $(\operatorname{cotg}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ per $\operatorname{sen}x\neq 0$.

5.4.4 La funzione composta

Come si deriva $\operatorname{sen}(3x^2)$, o e^{-x^2}? Sono funzioni composte $f(g(x))$: prima si calcola $u=g(x)$, poi $y=f(u)$.

IN SINTESI

Teorema (derivata della funzione composta, o *regola della catena*).

Ipotesi: g è derivabile in x e f è derivabile in $g(x)$.

Tesi: $f \circ g$ è derivabile in x e $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Nella notazione di Leibniz, con $u = g(x)$ e $y = f(u)$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Giustificazione. Diamo a x l'incremento h; la variabile intermedia $u = g(x)$ subisce l'incremento $\Delta u = g(x + h) - g(x)$, e la funzione composta l'incremento $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$. Se $\Delta u \neq 0$ possiamo scrivere

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{h}.$$

Quando $h \to 0$, anche $\Delta u \to 0$, perché g è continua in x; quindi il primo fattore tende a $f'(u) = f'(g(x))$ e il secondo a $g'(x)$. Il ragionamento richiede che Δu sia diverso da zero per h abbastanza piccolo: quando non è così, serve una dimostrazione più attenta, che non svolgiamo, ma il teorema resta vero. In pratica la regola si legge così: **si deriva la funzione «esterna» lasciando invariato il suo argomento, e si moltiplica per la derivata dell'argomento**.

- $(\operatorname{sen}(3x^2))' = \cos(3x^2) \cdot 6x = 6x\cos(3x^2)$;
- $(e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$;
- $(\ln(x^2 + 1))' = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$;
- $(\sqrt{1 - x^2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, per $-1 < x < 1$;
- $(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x) = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$: qui la funzione esterna è il cubo.

La regola permette anche di dimostrare la formula delle potenze con esponente reale. Per $x > 0$ si ha $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, quindi

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

ESEMPIO SVOLTO

Data $f(x) = xe^{-2x}$: a) calcola $f'(x)$; b) scrivi la retta tangente al grafico nell'origine; c) trova il punto in cui la tangente è orizzontale.

a) È il prodotto di x per e^{-2x}, e il secondo fattore è una funzione composta, con derivata $e^{-2x} \cdot (-2)$:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot (-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1 - 2x).$$

b) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$: la tangente è $y = x$.

c) La tangente è orizzontale dove $f'(x) = 0$. Poiché $e^{-2x} > 0$ per ogni x, deve essere $1 - 2x = 0$, cioè $x = \frac{1}{2}$. Il punto è $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2e})$. Nel capitolo 7 scopriremo che è il punto di massimo della funzione.

5.4.5 Potenze con base ed esponente variabili

Per derivare una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) > 0$, la si scrive come esponenziale di base e: $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, e si applica la regola della catena. Per esempio, per $x > 0$,

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).$$

Si osservi che il risultato è la somma di $x^x \ln x$, che si otterrebbe trattando x^x come un esponenziale con base costante, e di $x \cdot x^{x-1} = x^x$, che si otterrebbe trattandolo come una potenza con esponente costante: nessuna delle due regole, da sola, è corretta.

5.4.6 La funzione inversa

Sia f continua e strettamente monotòna in un intervallo, così che sia invertibile, e sia $y = f(x)$, cioè $x = f^{-1}(y)$. I grafici di f e di f^{-1}, disegnati con la stessa scala, sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, e la simmetria scambia fra loro gli incrementi Δx e Δy: una secante di pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diventa una secante di pendenza $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, il reciproco. Passando al limite, anche le pendenze delle tangenti nei punti corrispondenti sono reciproche (Figura 5.5).

IN SINTESI

Teorema (derivata della funzione inversa).

Ipotesi: f è continua e strettamente monotòna in un intervallo, derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$.

Tesi: f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Se invece $f'(x_0) = 0$, la tangente al grafico di f è orizzontale e quella al grafico dell'inversa, sua simmetrica, è verticale: è ciò che accade a $y = x^3$ e alla sua inversa $y = \sqrt[3]{x}$ nell'origine (Figura 5.3). Controlliamo la formula su un caso noto: il logaritmo è l'inversa dell'esponenziale; se $y = e^x$, allora $(\ln y)' = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$, in accordo con la Tabella 5.2.

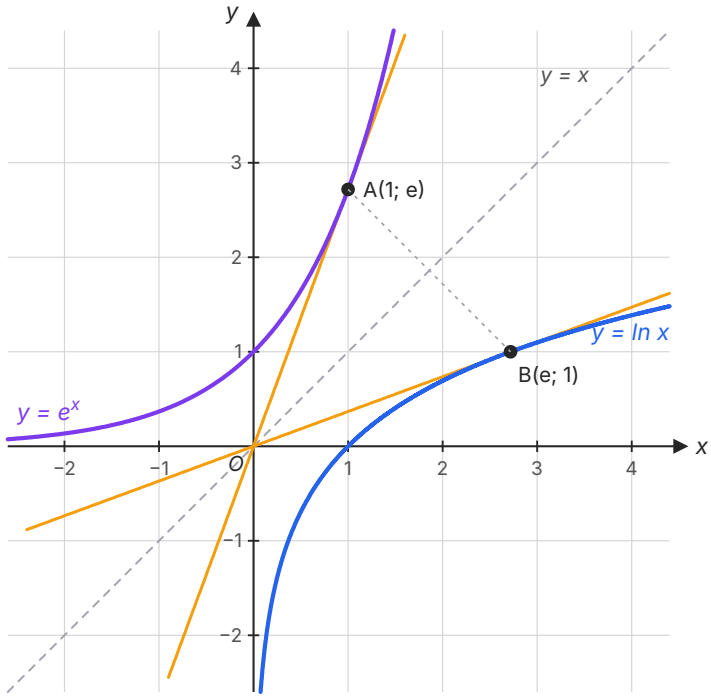


Figura 5.5 I grafici di $y = e^x$ (viola) e di $y = \ln x$ (blu) sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. Nei punti corrispondenti $A(1; e)$ e $B(e; 1)$ le tangenti (arancio) hanno pendenze e e $\dfrac{1}{e}$, una reciproca dell'altra; entrambe passano per l'origine (esempio svolto sulla tangente a $y = \ln x$). Stessa scala sui due assi.

Con questo teorema otteniamo le derivate delle funzioni goniometriche inverse di *Matematica 4*.

- **Arcoseno.** Se $y = \arcsen x$ con $-1 < x < 1$, allora $x = \operatorname{sen} y$ con $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$. In questo intervallo $\cos y > 0$, quindi $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ e $(\arcsen x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- **Arcocoseno.** Se $y = \arccos x$, allora $x = \cos y$ con $0 < y < \pi$, $\dfrac{dx}{dy} = -\operatorname{sen} y = -\sqrt{1 - x^2}$ e $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- **Arcotangente.** Se $y = \text{arctg}\, x$, allora $x = \text{tg}\, y$ con $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $\frac{dx}{dy} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$ e $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, per ogni x reale.

In $x = \pm 1$ l'arcoseno e l'arcocoseno non sono derivabili: i loro grafici hanno tangente verticale. Si noti anche che arcsen x e arccos x hanno derivate opposte, quindi la loro somma ha derivata nulla: in effetti arcsen x + arccos $x = \frac{\pi}{2}$ (*Matematica 4*, cap. 1). Nel capitolo 6 dimostreremo che una funzione con derivata nulla su un intervallo è costante.

IN SINTESI

Regole di derivazione (f, g derivabili, a, b costanti) e derivate da aggiungere alla Tabella 5.2:

- linearità: $(af + bg)' = af' + bg'$; prodotto: $(fg)' = f'g + fg'$;
- quoziente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, in particolare $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$, dove $g \neq 0$;
- $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$; $(\text{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$;
- $(\text{arcsen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\text{arccos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, per $-1 < x < 1$;
- $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
- funzione composta: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$;
- funzione inversa: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, con $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$.

ERRORE FREQUENTE

$(fg)' = f'\,g'$. Falso: con $f(x) = g(x) = x$ darebbe $(x^2)' = 1$. La regola giusta ha due addendi: $(fg)' = f'g + fg'$. Lo stesso vale per il quoziente, la cui derivata non è $\frac{f'}{g'}$.

Dimenticare la derivata interna. $(\text{sen}\, 2x)' = 2\cos 2x$, non $\cos 2x$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$, non e^{-x}; $(\text{sen}^2 x)' = 2\text{sen}\, x \cos x$, non $2\text{sen}\, x$.

$(e^x)' = xe^{x-1}$. La regola $(x^n)' = nx^{n-1}$ vale per le potenze con base variabile ed esponente costante; nell'esponenziale è l'esponente a variare, e $(e^x)' = e^x$.

5.5 Derivate successive e differenziale

5.5.1 Derivata seconda e derivate successive

La derivata f' è a sua volta una funzione, e può essere derivabile. La sua derivata si chiama **derivata seconda** di f e si indica con f'', y'' o $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$; derivando ancora si ottengono la derivata terza f''' e, in generale, le **derivate successive** $f^{(n)}$. Per esempio, per $f(x) = x^4 - 2x^3$:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \qquad f''(x) = 12x^2 - 12x, \qquad f'''(x) = 24x - 12, \qquad f^{(4)}(x) = 24,$$

e le derivate successive sono tutte nulle, come per ogni polinomio oltre il suo grado. Le derivate del seno si ripetono con periodo 4 (sen x, cos x, $-$sen x, $-$cos x, sen x, ...), quelle di e^x sono tutte uguali a e^x. Il segno della derivata seconda descriverà la concavità di un grafico (capitolo 7); in fisica la derivata seconda della posizione è l'accelerazione.

5.5.2 Il differenziale

Sia f derivabile in x_0. Il prodotto della derivata per l'incremento h si chiama **differenziale** di f in x_0 e si indica con $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot h.$$

Per la funzione identità $y = x$ la derivata è 1, quindi $\mathrm{d}x = h$: il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Si può allora scrivere $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, e la derivata diventa davvero un quoziente, $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$: è il significato originario della notazione di Leibniz.

Il significato geometrico è semplice. Passando da x_0 a $x_0 + h$, l'incremento Δy si misura lungo la curva, il differenziale $\mathrm{d}y$ lungo la retta tangente. La differenza fra i due è un infinitesimo di ordine superiore a h (capitolo 3), perché

$$\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0 \qquad \text{per} \qquad h \to 0.$$

In altre parole, **vicino al punto di tangenza la retta tangente approssima la curva meglio di qualsiasi altra retta**, e con un errore che diventa trascurabile rispetto a h.

5.5.3 L'approssimazione lineare

Da $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ si ricava la formula dell'**approssimazione lineare**, che sostituisce la funzione con la sua tangente vicino a un punto in cui tutto è noto:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Stimiamo $\sqrt{4{,}1}$. Con $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ e $h = 0{,}1$ si ha $f(4) = 2$ e $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$, quindi $\sqrt{4{,}1} \approx 2 + \dfrac{0{,}1}{4} = 2{,}025$. Il valore vero è 2,02485...: l'errore è di circa $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ (Figura 5.6). Con $h = 0{,}01$ l'errore scende a circa $1{,}6 \cdot 10^{-6}$, con $h = 0{,}001$ a circa $1{,}6 \cdot 10^{-8}$: quando h diventa dieci volte più piccolo, l'errore diventa circa cento volte più piccolo, come h^2.

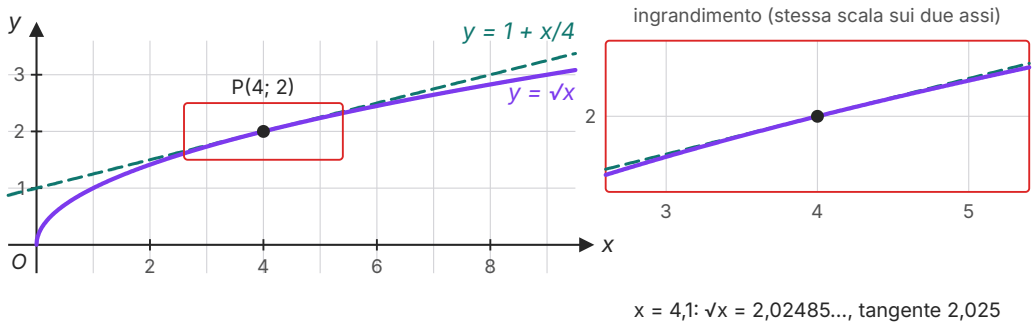


Figura 5.6 A sinistra il grafico di $y = \sqrt{x}$ e la sua tangente $y = 1 + \dfrac{x}{4}$ nel punto $P(4; 2)$; a destra l'ingrandimento del riquadro rosso: vicino a P curva e tangente quasi non si distinguono. In $x = 4{,}1$ la tangente dà 2,025 e la radice 2,02485...: la differenza è di circa 0,00015. Stessa scala sui due assi in entrambi i riquadri.

Per $f(x) = \text{sen } x$ e $x_0 = 0$ si ottiene $\text{sen } h \approx h$, l'approssimazione dei piccoli angoli che si usa in fisica per il pendolo (sen 0,1 = 0,09983...); per $(1 + x)^k$ si ottiene $(1 + h)^k \approx 1 + kh$, per esempio $1{,}02^{10} \approx 1{,}2$ contro il valore vero 1,21899....

ESEMPIO SVOLTO

Il lato di un quadrato misura 10 cm e aumenta di 0,2 cm. Calcola l'aumento esatto dell'area e confrontalo con il differenziale.

Aumento esatto. $A(l) = l^2$, quindi $\Delta A = 10{,}2^2 - 10^2 = 104{,}04 - 100 = 4{,}04$ cm².

Differenziale. $A'(l) = 2l$, quindi $\mathrm{d}A = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = 4$ cm².

Interpretazione. L'aumento dell'area è formato da due strisce di 10 cm per 0,2 cm, di area totale $2lh = 4$ cm², più un quadratino d'angolo di lato 0,2 cm e area $h^2 = 0{,}04$ cm². Il differenziale conta le due strisce e trascura il quadratino: l'errore è proprio h^2, un infinitesimo di ordine superiore a h.

5.6 La derivata come velocità di variazione

In ogni scienza la derivata di una grandezza rispetto a un'altra misura la **velocità di variazione** della prima rispetto alla seconda. La sua unità di misura è il quoziente delle due unità: metri al secondo, coulomb al secondo, euro al pezzo.

5.6.1 Velocità e accelerazione

Se $s(t)$ è la posizione di un corpo che si muove lungo una retta, la velocità istantanea definita all'inizio del capitolo è la derivata $v(t) = s'(t)$, e l'**accelerazione istantanea** è la derivata della velocità, cioè la derivata seconda della posizione: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Per il sasso del primo paragrafo, $s(t) = 5t^2$ dà $v(t) = 10t$ (all'istante 2 s, 20 m/s) e $a(t) = 10$ m/s^2, proprio il valore di g del modello; per l'auto della Figura 5.2, $s(t) = 1{,}5t^2$ dà $v(t) = 3t$ e $v(4) = 12$ m/s. In generale, derivando la legge del moto uniformemente accelerato $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ si ritrovano le leggi della fisica: $v(t) = v_0 + at$ e accelerazione costante a.

ESEMPIO SVOLTO

Un punto si muove lungo una retta con legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (s in metri, t in secondi, $t \geq 0$). Trova la velocità e l'accelerazione, gli istanti in cui il punto è fermo e descrivi il moto.

Velocità e accelerazione. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$ e $a(t) = 6t - 12$.

Istanti di arresto. $v(t) = 0$ per $t = 1$ s e $t = 3$ s.

Il moto. Per $0 < t < 1$ la velocità è positiva: il punto avanza fino a $s(1) = 4$ m. Per $1 < t < 3$ la velocità è negativa: il punto torna indietro, fino a $s(3) = 0$, cioè al punto di partenza. Per $t > 3$ avanza di nuovo, sempre più veloce. L'accelerazione si annulla a $t = 2$ s, quando la velocità ha il valore minimo, $v(2) = -3$ m/s: il punto sta tornando indietro con la massima rapidità.

5.6.2 Il moto armonico

In *Matematica 4* (cap. 5) abbiamo descritto con la legge $x(t) = A\cos(\omega t)$ il moto di un corpo appeso a una molla, con ampiezza A e pulsazione ω, e ne avevamo ricavato la velocità solo in modo approssimato, dalle velocità medie su intervalli brevi. Ora la calcoliamo esattamente con la regola della catena:

$$v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \qquad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t).$$

La velocità è massima in valore assoluto, $A\omega$, quando $\mathrm{sen}(\omega t) = \pm 1$, cioè quando $x = 0$: il corpo passa più veloce per la posizione di equilibrio; è nulla agli estremi dell'oscillazione. L'accelerazione è proporzionale allo spostamento e di verso opposto: è la proprietà che caratterizza il

moto armonico. L'uguaglianza $x'' = -\omega^2 x$ è un'**equazione differenziale**, che studieremo nel capitolo 12 come caso dell'equazione della dinamica di Newton.

5.6.3 Altri tassi di variazione

- **Intensità di corrente.** Se $q(t)$ è la carica che ha attraversato la sezione di un conduttore fino all'istante t, l'**intensità di corrente** è $i(t) = q'(t) = \dfrac{dq}{dt}$, in ampere (coulomb al secondo).
- **Potenza.** Se $W(t)$ è il lavoro compiuto fino all'istante t, la potenza istantanea è $P(t) = \dfrac{dW}{dt}$, in watt.
- **Crescita di una popolazione.** Se $N(t)$ è il numero di individui, $N'(t)$ è il **tasso di crescita**, in individui per unità di tempo. Per esempio, con il modello $N(t) = 500\, e^{0{,}02t}$ (t in giorni, dati inventati) si ha $N'(t) = 10e^{0{,}02t} = 0{,}02\, N(t)$: la popolazione cresce con una velocità proporzionale a se stessa, che è la caratteristica dei modelli esponenziali (capitolo 12).
- **Costo marginale.** Se $C(q)$ è il costo totale per produrre q unità di un bene, la derivata $C'(q)$ si chiama **costo marginale**: approssima il costo di un'unità in più. Con $C(q) = 2000 + 15q + 0{,}01q^2$ euro (dati inventati) si ha $C'(q) = 15 + 0{,}02q$ e $C'(100) = 17$ €, mentre il costo effettivo della centunesima unità è $C(101) - C(100) = 17{,}01$ €.

COLLEGAMENTI

Fisica. Velocità, accelerazione, intensità di corrente e potenza sono derivate rispetto al tempo; nella legge di Faraday-Neumann la forza elettromotrice indotta è la derivata del flusso magnetico, cambiata di segno. **Chimica.** La velocità di una reazione è la derivata della concentrazione di un reagente o di un prodotto rispetto al tempo. **Economia.** Costo, ricavo e utilità marginali sono derivate; nel capitolo 8 li useremo per trovare il costo medio minimo e il profitto massimo.

5.6.4 Problemi di tangenza

Molti problemi chiedono una retta tangente con una proprietà assegnata. Si chiama x_0 l'ascissa del punto di tangenza, che è incognita, e si traduce la proprietà in un'equazione.

Tangente parallela a una retta data. Le tangenti al grafico di $y = x^3 - 3x$ parallele alla retta $y = 9x + 1$ hanno pendenza 9: da $3x_0^2 - 3 = 9$ si ottiene $x_0 = \pm 2$. I punti di tangenza sono $(2; 2)$ e $(-2; -2)$, e le tangenti sono $y = 9x - 16$ e $y = 9x + 16$.

Curve tangenti. Due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ si dicono **curve tangenti** in un loro punto comune di ascissa x_0 se in quel punto hanno la stessa retta tangente, cioè se $f(x_0) = g(x_0)$ e $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Angolo fra due curve. L'**angolo fra due curve** in un loro punto comune è l'angolo acuto (o retto) formato dalle loro tangenti in quel punto. Se le pendenze sono m_1 e m_2 e $m_1 m_2 \neq -1$, la sua

tangente goniometrica è $\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ (*Matematica 4*, cap. 2); se $m_1 m_2 = -1$ le curve sono perpendicolari. Per esempio $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ si incontrano in (1; 1) con pendenze 2 e $\frac{1}{2}$: la tangente dell'angolo è $\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ e l'angolo misura circa 36,87°.

ESEMPIO SVOLTO

Determina il valore di $a > 0$ per cui la parabola $y = ax^2$ è tangente alla curva $y = \ln x$, e trova il punto di tangenza.

Condizioni. Nel punto di tangenza, di ascissa $x_0 > 0$, le due funzioni devono avere lo stesso valore e la stessa derivata:

$$ax_0^2 = \ln x_0, \qquad 2ax_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Soluzione. Dalla seconda equazione $ax_0^2 = \frac{1}{2}$; sostituendo nella prima, $\ln x_0 = \frac{1}{2}$, cioè $x_0 = \sqrt{e}$. Allora $a = \frac{1}{2x_0^2} = \frac{1}{2e}$.

Risposta. Per $a = \frac{1}{2e}$ le curve sono tangenti nel punto $(\sqrt{e}; \frac{1}{2})$, dove la tangente comune ha pendenza $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

APPROFONDIMENTO · NEWTON, LEIBNIZ E LE NOTAZIONI

Il calcolo differenziale nacque nella seconda metà del Seicento, indipendentemente, in Inghilterra e in Germania. Isaac Newton sviluppò il «metodo delle flussioni» pensando a grandezze che scorrono nel tempo: la *flussione* era la velocità di variazione di una grandezza, indicata con un punto sopra la lettera, $\dot{y}$, come fanno ancora i fisici per le derivate rispetto al tempo. Newton, però, pubblicò i suoi risultati molto tempo dopo averli trovati.

Gottfried Wilhelm Leibniz pubblicò per primo un'esposizione del nuovo calcolo, nel 1684, negli *Acta Eruditorum* di Lipsia. Pensava a differenze infinitamente piccole $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ e scriveva la pendenza della tangente come il loro rapporto $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$: una notazione così felice che la regola della catena sembra una semplificazione di frazioni. Seguì un'aspra disputa sulla priorità, con accuse di plagio; oggi si riconosce che le due scoperte furono indipendenti. La notazione $f'(x)$ si deve a Lagrange; il rigore arrivò nell'Ottocento, con Cauchy e Weierstrass e il concetto di limite (capitolo 1).

SINTESI

- La velocità istantanea è il limite delle velocità medie; la retta tangente a una curva è la posizione limite delle secanti. Entrambe sono il limite di un rapporto incrementale.
- Il rapporto incrementale di f in x_0 è $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$; se il suo limite per $h \to 0$ esiste finito, f è derivabile in x_0 e il limite è la derivata $f'(x_0)$.
- La retta tangente al grafico in $(x_0; f(x_0))$ è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; la normale è la perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza.
- Una funzione è derivabile in un punto interno se e solo se le derivate destra e sinistra esistono, sono finite e sono uguali.
- Ogni funzione derivabile è continua, ma non viceversa: punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale sono punti di continuità e di non derivabilità.
- Derivate fondamentali: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; gli angoli sono in radianti.
- Regole: linearità, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$, $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.
- Le potenze con base ed esponente variabili si derivano scrivendole come $e^{g(x)\ln f(x)}$.
- Le derivate successive si ottengono derivando più volte; la derivata seconda della posizione è l'accelerazione.
- Il differenziale è $dy = f'(x)\,dx$; vicino a x_0 vale l'approssimazione lineare $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$, con un errore di ordine superiore a h.
- La derivata misura la velocità di variazione di una grandezza: velocità, accelerazione, intensità di corrente, potenza, tasso di crescita, costo marginale.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La derivata di f nel punto x_0, se esiste finita, è:

   A. il valore $f(x_0)$

   B. il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$

   C. il limite di $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ per $h \to 0$

   D. il rapporto $\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

2. ● La funzione $f(x) = |x - 2|$ nel punto $x = 2$ è:

   A. derivabile ma non continua

   B. continua ma non derivabile

   C. continua e derivabile

   D. né continua né derivabile

3. ● La derivata di $f(x) = e^{3x}$ è:

   A. e^{3x}

   B. $3xe^{3x-1}$

   C. $\frac{e^{3x}}{3}$

   D. $3e^{3x}$

4. ● Quale affermazione è vera per ogni funzione f e ogni punto x_0 interno al dominio?

   A. se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0

   B. se f è continua in x_0, allora f è derivabile in x_0

   C. se f non è derivabile in x_0, allora f non è continua in x_0

   D. se $f'(x_0) = 0$, allora $f(x_0) = 0$

5. ●● La retta tangente al grafico di $y = x^2$ nel suo punto di ascissa 3 ha equazione:

   A. $y = 6x$

   B. $y = 6x - 9$

   C. $y = 3x$

   D. $y = 2x + 3$

6. ●● La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ nel punto $x = 1$ presenta:

   A. un punto angoloso

   B. una cuspide

   C. una discontinuità

   D. un flesso a tangente verticale

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Il rapporto incrementale di f relativo a x_0 e h è la pendenza della retta secante per i punti di ascisse x_0 e $x_0 + h$. b) Se $f'(x_0) = 0$, la retta tangente al grafico nel punto di ascissa x_0 è verticale. c) La funzione $y = \sqrt{x}$ è derivabile in $x = 0$. d) La formula $(\text{sen } x)' = \cos x$ vale se x è misurato in radianti. e) La derivata di una funzione costante è uguale alla costante stessa. f) Se f e g sono derivabili, $(fg)' = f'\,g'$.

8. ● Completa. Se f è continua in x_0 e le derivate destra e sinistra in x_0 sono diverse e almeno una è finita, x_0 si chiama _____ ; se sono infinite e di segno opposto, il punto è una _____ ; se sono entrambe $+\infty$ o entrambe $-\infty$, il punto è un _____ . La retta perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza si chiama _____ . Il prodotto $f'(x_0) \cdot h$ si chiama _____ di f in x_0.

9. ● Associa a ogni grandezza la derivata che la definisce. a) velocità istantanea; b) accelerazione istantanea; c) intensità di corrente; d) costo marginale. 1) la derivata della carica rispetto al tempo; 2) la derivata del costo totale rispetto alla quantità prodotta; 3) la derivata della posizione rispetto al tempo; 4) la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

Calcolare

10. ● Calcola con la definizione la derivata delle seguenti funzioni nel punto indicato. a) $f(x) = 3x^2 - x$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

11. ● Calcola la derivata delle funzioni. a) $y = x^5 - 3x^2 + 7$; b) $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}$; c) $y = \sqrt[3]{x^2}$; d) $y = 2e^x - 3\ln x$; e) $y = 5\text{sen}\, x + \cos x$; f) $y = 3^x + \log_2 x$.

12. ●● Calcola la derivata delle funzioni con le regole del prodotto e del quoziente. a) $y = x^3\, e^x$; b) $y = x \ln x$; c) $y = e^x \text{ sen } x$; d) $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$; e) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; f) $y = \text{tg}\, x \cdot \cos x$ (controlla il risultato semplificando prima la funzione).

13. ●● Calcola la derivata delle funzioni composte. a) $y = (3x^2 - 1)^4$; b) $y = \text{sen}(2x + 1)$; c) $y = e^{x^2 - x}$; d) $y = \ln(1 + \cos x)$; e) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; f) $y = \cos^2(3x)$; g) $y = \text{arctg}(2x)$; h) $y = \text{arcsen}\, \frac{x}{2}$.

14. ●● Scrivi le equazioni della retta tangente e della retta normale al grafico di ciascuna funzione nel punto di ascissa indicata. a) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; b) $y = \frac{x}{x + 1}$, $x_0 = 0$; c) $y = e^{2x}$, $x_0 = 0$; d) $y = \text{sen}\, x$, $x_0 = \pi$.

15. ●● Calcola le derivate destra e sinistra nel punto indicato e classifica il punto. a) $f(x) = |x^2 - 4|$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $x_0 = 1$; c) $f(x) = \sqrt{|x - 3|}$, $x_0 = 3$; d) $f(x) = |\text{sen}\, x|$, $x_0 = 0$.

16. ●● a) Data $f(x) = xe^x$, calcola f', f'' e f''', e scrivi una formula per $f^{(n)}(x)$. b) Calcola la derivata quarta di $y = \text{sen}\, 2x$. c) Calcola le derivate quarta e quinta di $y = x^4 - 2x^3$.

17. ●● Usa l'approssimazione lineare per stimare i numeri seguenti; poi confronta con il valore della calcolatrice. a) $\sqrt[3]{8{,}3}$; b) $\ln 1{,}05$; c) $e^{0{,}1}$; d) $\cos 0{,}2$. Perché nel caso d) l'approssimazione è meno buona?

18. ●●● Calcola la derivata delle funzioni, per $x > 0$. a) $y = x^{\text{sen}\, x}$; b) $y = (1 + \frac{1}{x})^x$.

19. ●● Considera $f(x) = x^3 + x + 1$. a) Spiega perché f è invertibile su $\mathbb{R}$. b) Calcola $(f^{-1})'(3)$ e $(f^{-1})'(1)$. c) Scrivi la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(3; 1)$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra con la definizione che $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$, indicando la formula goniometrica e i limiti notevoli che usi.

21. ●● a) Dimostra con la definizione che, se g è derivabile in x e $g(x) \neq 0$, allora $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.
b) Ricava la regola di derivazione del quoziente dalla regola del prodotto e dal punto a).

22. ●● Dimostra che la derivata di una funzione pari derivabile è una funzione dispari e che la derivata di una funzione dispari derivabile è una funzione pari. Verifica la proprietà con $y = \cos x$ e con $y = x^3$.

23. ●● Trova l'errore in ciascun ragionamento. a) «$(\text{sen}^2 x)' = 2\text{sen}\, x$». b) «Per $f(x) = |x|$ e $h > 0$ il rapporto incrementale in 0 vale 1, quindi $f'(0) = 1$». c) «Per la regola delle potenze, $(x^x)' = x \cdot x^{x-1} = x^x$».

24. ●●● Dimostra per induzione, usando la regola del prodotto, che $(x^n)' = nx^{n-1}$ per ogni naturale $n \geq 1$.

Problemi

25. ●● Una palla è lanciata verso l'alto da un'altezza di 1,5 m con velocità iniziale 14 m/s. Trascurando l'attrito dell'aria, la sua altezza è $h(t) = 1{,}5 + 14t - 4{,}9t^2$ (h in metri, t in secondi). a) Calcola la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$. b) Calcola $v(1)$ e $v(2)$ e interpreta i segni. c) In quale istante la palla raggiunge la quota massima? Quanto vale la quota massima? d) In quale istante tocca terra, e con quale velocità?

26. ●● Un corpo appeso a una molla oscilla secondo la legge $x(t) = 0{,}05\cos(4\pi t)$ (x in metri, t in secondi). a) Indica l'ampiezza e il periodo dell'oscillazione. b) Calcola $v(t)$ e $a(t)$ e verifica che $a(t) = -16\pi^2 x(t)$. c) Calcola posizione, velocità e accelerazione all'istante $t = \frac{1}{12}$ s. d) Qual è la velocità massima, e in quale posizione si raggiunge? Qual è l'accelerazione massima in valore assoluto?

27. ●● In un circuito la carica che ha attraversato una sezione del conduttore fino all'istante t è $q(t) = 0{,}002(1 - e^{-5t})$ (q in coulomb, t in secondi, dati inventati). a) Calcola l'intensità di corrente $i(t)$. b) Quanto vale la corrente all'istante iniziale? c) Dopo quanto tempo la corrente si riduce a 1 mA, e quanta carica è passata fino a quel momento? d) Che cosa accade a $i(t)$ e a $q(t)$ quando t diventa molto grande?

28. ●● Il costo totale, in euro, per produrre q pezzi di un articolo è $C(q) = 0{,}002q^3 - 0{,}6q^2 + 80q + 5000$ (dati inventati). a) Calcola il costo marginale $C'(q)$. b) Calcola $C'(100)$ e confrontalo con il costo effettivo del centunesimo pezzo. c) Calcola $C'(50)$ e $C'(200)$; per quale valore di q il costo marginale è minimo? d) Calcola il costo medio per pezzo quando se ne producono 100.

Con il computer

29. ● In un foglio di calcolo stima la derivata di $f(x) = \text{sen}\, x$ nel punto $x = 1$ con il rapporto incrementale «in avanti» $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ e con il rapporto «centrato» $\frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$, per $h = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$. Confronta i risultati con $\cos 1$: quale dei due rapporti si avvicina più in fretta al valore esatto?

30. ●● Con un software di geometria dinamica disegna $y = x^3$, il punto $P(1; 1)$ e il punto $Q(1 + h; (1 + h)^3)$, con h comandato da uno slider. a) Traccia la retta PQ e mostra la sua pendenza; verifica che vale $3 + 3h + h^2$. b) Compila una tabella per $h = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$. c) Traccia la tangente in P e trova il suo secondo punto di intersezione con la cubica.

Verso l'esame

31. ●● Determina i valori dei parametri a e b per cui la funzione $f(x) = ax^2 + bx$ per $x \le 1$, $f(x) = \ln x + 2$ per $x > 1$, è derivabile in $x = 1$.

32. ●● Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (*Matematica 3*). a) Verifica che il punto $P(\sqrt{3};\ \frac{1}{2})$ appartiene all'ellisse. b) Scrivi la retta tangente all'ellisse in P derivando la funzione $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, che descrive la semiellisse superiore. c) Controlla il risultato con la formula di sdoppiamento $\frac{xx_0}{4} + yy_0 = 1$.

33. ●● Dimostra che la funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile in ogni punto, con $f'(x) = 2|x|$. La funzione f' è derivabile in $x = 0$?

34. ●● Un palloncino sferico viene gonfiato. a) Calcola la derivata del volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ rispetto al raggio, e riconosci nel risultato una formula nota della geometria solida (*Matematica 4*). b) Quando il raggio è 10 cm, stima con il differenziale di quanto aumenta il volume se il raggio aumenta di 0,1 cm, e confronta con l'aumento esatto.

35. ●●● a) Trova le rette tangenti al grafico di $y = x^3 - x$ che passano per il punto $A(0; 2)$. b) Determina k in modo che la retta $y = kx$ sia tangente al grafico di $y = e^x$, e trova il punto di tangenza.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la derivata come pendenza e come velocità, con le notazioni di Newton e di Leibniz.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: la definizione di derivata, le regole di derivazione e le loro dimostrazioni complete, compresa la regola della catena.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Newton, Leibniz e la nascita del calcolo differenziale.

Glossario del capitolo

Accelerazione istantanea
La derivata della velocità rispetto al tempo, cioè la derivata seconda della posizione: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Angolo fra due curve
In un punto comune a due curve, l'angolo formato dalle loro rette tangenti in quel punto.

Approssimazione lineare
La stima $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$, che sostituisce la funzione con la sua retta tangente vicino a x_0.

Costo marginale
La derivata $C'(q)$ del costo totale rispetto alla quantità prodotta; approssima il costo di un'unità in più.

Curve tangenti
Due curve che in un punto comune hanno la stessa retta tangente: $f(x_0) = g(x_0)$ e $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Cuspide
Punto di continuità in cui le derivate destra e sinistra sono infinite e di segno opposto.

Derivata
Il limite finito del rapporto incrementale per $h \to 0$:
$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Derivata destra (sinistra)
Il limite del rapporto incrementale per $h \to 0^+$ (per $h \to 0^-$).

Derivata seconda
La derivata della funzione derivata: $f'' = (f')'$.

Differenziale
Il prodotto della derivata per l'incremento della variabile: $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$; è l'incremento misurato lungo la retta tangente.

Flesso a tangente verticale
Punto di continuità in cui le derivate destra e sinistra sono entrambe $+\infty$ o entrambe $-\infty$; il grafico attraversa la tangente verticale.

Funzione derivabile
Funzione che ha derivata (finita) in un punto; derivabile in un intervallo se lo è in ogni suo punto.

Funzione derivata
La funzione $x \mapsto f'(x)$ che associa a ogni punto in cui f è derivabile la derivata in quel punto.

Punto angoloso
Punto di continuità in cui le derivate destra e sinistra sono diverse e almeno una è finita.

Rapporto incrementale
Il quoziente $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$: la pendenza della secante per i punti del grafico di ascisse x_0 e $x_0 + h$.

Regola della catena
La regola di derivazione della funzione composta: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Retta normale
La retta perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza.

Retta tangente
La posizione limite delle rette secanti per un punto del grafico; se f è derivabile in x_0:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Velocità istantanea
Il limite delle velocità medie su intervalli di tempo che tendono a zero: la derivata della posizione rispetto al tempo.

Soluzioni

1. C. È la definizione di derivata.

2. B. È continua (composta di funzioni continue) ma in 2 ha un punto angoloso: $f'_-(2) = -1, f'_+(2) = 1$.

3. D. Regola della catena: $e^{3x} \cdot 3$.

4. A. Derivabile ⇒ continua (teorema su derivabilità e continuità); B e C sono falsi per $|x|$ in 0; D è falso per $x^2 + 1$ in 0.

5. B. $f'(3) = 6, f(3) = 9$: $y - 9 = 6(x - 3)$, cioè $y = 6x - 9$.

6. D. Il rapporto incrementale è $\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} \to +\infty$ da entrambi i lati.

7. a) Vero. b) Falso: la tangente è orizzontale. c) Falso: la derivata destra in 0 è $+\infty$; $\sqrt{x}$ ha in 0 tangente verticale e non è derivabile. d) Vero. e) Falso: la derivata di una costante è 0. f) Falso: $(fg)' = f'g + fg'$.

8. Punto angoloso; cuspide; flesso a tangente verticale; retta normale; differenziale.

9. a–3; b–4; c–1; d–2.

10. a) $\frac{3(2+h)^2 - (2+h) - 10}{h} = \frac{11h + 3h^2}{h} = 11 + 3h \to 11$.

b) $\frac{\frac{1}{-1+h} + 1}{h} = \frac{1}{h-1} \to -1$. c) $\frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3} \to \frac{1}{6}$.

11. a) $5x^4 - 6x$; b) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$; c) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x \neq 0)$; d) $2e^x - \frac{3}{x}$; e) $5\cos x - \operatorname{sen} x$; f) $3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 2}$.

12. a) $3x^2e^x + x^3e^x = x^2(x+3)e^x$; b) $\ln x + 1$; c) $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$; d) $\frac{2(x+3) - (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$; e) $\frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$; f) $\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$; infatti $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$ (dove $\cos x \neq 0$).

13. a) $4(3x^2 - 1)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 - 1)^3$; b) $2\cos(2x + 1)$; c) $(2x - 1)e^{x^2 - x}$; d) $-\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$; e) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$; f) $2\cos 3x \cdot (-\operatorname{sen} 3x) \cdot 3 = -6\operatorname{sen} 3x \cos 3x = -3\operatorname{sen} 6x$; g) $\frac{2}{1 + 4x^2}$; h) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$, per $|x| < 2$.

14. a) $y' = \frac{1}{x}$, $y'(1) = 1$: tangente $y = x - 1$, normale $y = -x + 1$. b) $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y'(0) = 1$: tangente $y = x$, normale $y = -x$. c) $y' = 2e^{2x}$, $y'(0) = 2$: tangente $y = 2x + 1$, normale $y = -\frac{1}{2}x + 1$. d) $y'(\pi) = \cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$: tangente $y = -x + \pi$, normale $y = x - \pi$.

15. a) Vicino a 2: per $x > 2$, $f(x) = x^2 - 4$; per $x < 2$, $f(x) = 4 - x^2$. $f'_{\pm}(2) = 4, f'_-(2) = -4$: punto angoloso. b) Rapporto $\frac{\sqrt[3]{h}}{h} \to +\infty$ da entrambi i lati: flesso a tangente verticale. c) $f'_+(3) = +\infty, f'_-(3) = -\infty$: cuspide. d) Rapporto $\frac{|\operatorname{sen} h|}{h}$: $f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$: punto angoloso.

16. a) $f' = (x+1)e^x, f'' = (x+2)e^x, f''' = (x+3)e^x$; $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ (si dimostra per induzione: derivando $(x+n)e^x$ si ottiene $(x+n+1)e^x$). b) $y' = 2\cos 2x$, $y'' = -4\operatorname{sen} 2x, y''' = -8\cos 2x, y^{(4)} = 16\operatorname{sen} 2x$. c) $y^{(4)} = 24, y^{(5)} = 0$.

17. a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8, f'(8) = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$: $\sqrt[3]{8{,}3} \approx 2 + \frac{0{,}3}{12} = 2{,}025$ (valore vero 2,02469...). b) $\ln(1 + 0{,}05) \approx 0{,}05$ (vero 0,04879...). c) $e^{0{,}1} \approx 1 + 0{,}1 = 1{,}1$ (vero 1,10517...). d) $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ vale 0 in 0, quindi $\cos 0{,}2 \approx 1$ (vero 0,98007...). La tangente in 0 è orizzontale e l'approssimazione lineare è la costante 1: l'errore, circa $\frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}02$, è dovuto alla curvatura del grafico.

18. a) $x^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x \ln x}$: $y' = x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x})$.

b) $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1+1/x)}$:

$y' = (1 + \frac{1}{x})^x [\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}]$, perché

$(x \ln(1 + \frac{1}{x}))' = \ln(1 + \frac{1}{x}) + x \cdot \frac{-1/x^2}{1 + 1/x}$.

19. a) x^3 e $x + 1$ sono strettamente crescenti, quindi anche la loro somma: f è iniettiva e, essendo continua con limiti $\pm\infty$ agli estremi, assume tutti i valori reali. b) $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f(1) = 3$, quindi

$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$; $f(0) = 1$, quindi

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$. c) $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 3)$, cioè

$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

20. $\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$

$\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$ (formula di addizione del coseno). Poiché $\frac{\operatorname{sen} h}{h} \to 1$ e

$\frac{\cos h - 1}{h} = -h \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} \to 0$, il rapporto tende a $-\operatorname{sen} x$.

21. a) $\frac{1}{h}[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}] =$

$-\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)\,g(x)}$; g è continua in x, quindi $g(x+h) \to g(x) \neq 0$ e il limite è $-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$. b)

$(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

22. Se f è pari, $f(-x) = f(x)$ per ogni x. Derivando i due membri, con la regola della catena a sinistra: $-f'(-x) = f'(x)$, cioè $f'(-x) = -f'(x)$: f' è dispari. Se f è dispari, $f(-x) = -f(x)$ dà $-f'(-x) = -f'(x)$, cioè $f'(-x) = f'(x)$: f' è pari. Verifica: $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ è dispari; $(x^3)' = 3x^2$ è pari.

23. a) Manca la derivata della funzione interna: $(\operatorname{sen}^2 x)' = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. b) Bisogna considerare anche $h < 0$: la derivata sinistra è -1, diversa dalla destra, e f non è derivabile in 0. c) La regola $(x^n)' = nx^{n-1}$ vale solo con esponente costante; scrivendo $x^x = e^{x \ln x}$ si ottiene $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

24. *Passo base* ($n = 1$): $(x)' = 1 = 1 \cdot x^0$. *Passo induttivo*: supponiamo $(x^n)' = nx^{n-1}$. Allora $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$, che è la formula per $n + 1$. Per il principio di induzione la formula vale per ogni $n \geq 1$.

25. a) $v(t) = 14 - 9{,}8t$ m/s, $a(t) = -9{,}8$ m/s^2. b) $v(1) = 4{,}2$ m/s (positiva: la palla sale); $v(2) = -5{,}6$ m/s (negativa: la palla scende). c) $v(t) = 0$ per

$t = \frac{14}{9{,}8} = \frac{10}{7} \approx 1{,}43$ s;

$h(\frac{10}{7}) = 1{,}5 + \frac{14^2}{4 \cdot 4{,}9} = 1{,}5 + 10 = 11{,}5$ m. d) $h(t) = 0$:

$4{,}9t^2 - 14t - 1{,}5 = 0$, la radice positiva è

$t = \frac{10 + \sqrt{115}}{7} \approx 2{,}96$ s; $v \approx 14 - 9{,}8 \cdot 2{,}9605 \approx -15{,}0$ m/s: la palla tocca terra a circa 15,0 m/s, verso il basso.

26. a) Ampiezza 0,05 m; $\omega = 4\pi$ rad/s, periodo

$T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$ s. b) $v(t) = -0{,}2\pi \operatorname{sen}(4\pi t)$ m/s,

$a(t) = -0{,}8\pi^2 \cos(4\pi t)$ m/s^2

$= -16\pi^2 \cdot 0{,}05\cos(4\pi t) = -16\pi^2\, x(t)$. c) $4\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{3}$:

$x = 0{,}05 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}025$ m; $v = -0{,}2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}544$ m/s;

$a = -16\pi^2 \cdot 0{,}025 \approx -3{,}95$ m/s^2. d) $|v|$ massima $= 0{,}2\pi \approx 0{,}628$ m/s, nella posizione di equilibrio $x = 0$; $|a|$ massima $= 0{,}8\pi^2 \approx 7{,}90$ m/s^2, agli estremi $x = \pm 0{,}05$ m.

27. a) $i(t) = q'(t) = 0{,}002 \cdot 5e^{-5t} = 0{,}01e^{-5t}$ A. b) $i(0) = 0{,}01$ A $= 10$ mA. c) $0{,}01e^{-5t} = 0{,}001$ dà $e^{-5t} = 0{,}1$,

$t = \frac{\ln 10}{5} \approx 0{,}46$ s; in quell'istante

$q = 0{,}002(1 - 0{,}1) = 0{,}0018$ C. d) $i(t) \to 0$ e $q(t) \to 0{,}002$ C: la corrente si spegne e la carica tende a un valore limite.

28. a) $C'(q) = 0{,}006q^2 - 1{,}2q + 80$. b) $C'(100) = 60 - 120 + 80 = 20$ €; $C(101) - C(100) = 20{,}002$ €: il costo marginale è un'ottima stima. c) $C'(50) = 35$ €, $C'(200) = 80$ €; C' è una parabola con concavità verso l'alto, con vertice in $q = \frac{1{,}2}{2 \cdot 0{,}006} = 100$: il costo marginale è minimo per $q = 100$ (20 €). d) $C(100) = 2000 - 6000 + 8000 + 5000 = 9000$ €: costo medio 90 € a pezzo.

29. Valore esatto $\cos 1 \approx 0{,}540302$. In avanti: 0,497364; 0,536086; 0,539881. Centrato: 0,539402; 0,540293; 0,5403022. L'errore del rapporto in avanti si riduce di circa 10 volte quando h si riduce di 10 volte; quello del rapporto centrato di circa 100 volte: il rapporto centrato converge molto più in fretta.

30. a) $\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \dfrac{3h+3h^2+h^3}{h} = 3+3h+h^2$. b) $h = 0{,}5$: 4,75; $h = 0{,}1$: 3,31; $h = 0{,}01$: 3,0301; le pendenze tendono a 3. c) La tangente è $y = 3x - 2$; da $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$ il secondo punto comune è $(-2; -8)$.

31. Continuità in 1: $a + b = \ln 1 + 2 = 2$. Derivabilità: la derivata sinistra è $2a + b$, la destra è $\dfrac{1}{1} = 1$, quindi $2a + b = 1$. Risolvendo: $a = -1$, $b = 3$. Con questi valori $f(x) = -x^2 + 3x$ per $x \le 1$, $f(1) = 2$ e $f'(1) = 1$.

32. a) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$. b) $y' = \dfrac{-\frac{x}{2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\dfrac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$; in $x = \sqrt{3}$ la radice vale $\dfrac{1}{2}$ e $y'(\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tangente: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3})$, cioè $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2$. c) $\dfrac{\sqrt{3}x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1$ dà la stessa retta.

33. Per $x > 0$, $f(x) = x^2$ e $f'(x) = 2x = 2|x|$; per $x < 0$, $f(x) = -x^2$ e $f'(x) = -2x = 2|x|$. In 0 il rapporto incrementale è $\dfrac{h|h|}{h} = |h| \to 0$: $f'(0) = 0 = 2|0|$. Quindi $f'(x) = 2|x|$ per ogni x. La funzione $f'(x) = 2|x|$ ha in 0 un punto angoloso (derivate unilaterali ±2): f è derivabile una volta, ma non due volte, nell'origine.

34. a) $V'(r) = 4\pi r^2$: è l'area della superficie sferica. b) $\mathrm{d}V = 4\pi \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 = 40\pi \approx 125{,}7\ \mathrm{cm}^3$; aumento esatto $\dfrac{4}{3}\pi(10{,}1^3 - 10^3) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 30{,}301 \approx 126{,}9\ \mathrm{cm}^3$. Il differenziale «aggiunge uno strato» di area $4\pi r^2$ e spessore 0,1 cm.

35. a) Tangente nel punto di ascissa t: $y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t$. Passa per $A(0; 2)$ se $2 = -t(3t^2 - 1) + t^3 - t = -2t^3$, cioè $t = -1$. C'è una sola tangente, nel punto $(-1; 0)$: $y = 2x + 2$. b) Nel punto di tangenza $e^{x_0} = kx_0$ e $e^{x_0} = k$; dividendo, $x_0 = 1$ e $k = e$. Il punto di tangenza è $(1; e)$ (si veda la Figura 5.5).