CAPITOLO

4

Funzioni continue

Una funzione continua non salta: per andare da un valore a un altro passa per tutti quelli che stanno in mezzo. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la continuità di una funzione in un punto e in un intervallo e riconoscere le funzioni continue.
2. Classificare i punti di discontinuità, prolungare per continuità e scegliere i parametri di una funzione a tratti perché sia continua.
3. Enunciare i teoremi di Weierstrass, di esistenza degli zeri e dei valori intermedi, e mostrare con controesempi che ogni ipotesi è necessaria.
4. Dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione e approssimarla con la bisezione, prevedendo il numero dei passi.
5. Determinare gli asintoti obliqui e tracciare il grafico probabile di una funzione.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 La continuità 2
4.2 I punti di discontinuità 5
4.3 I teoremi sulle funzioni continue 7
4.4 Il metodo di bisezione 13
4.5 Asintoti obliqui e grafico probabile 15

Matematica 5 · Parte I · Limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 4: Funzioni continue · pagine 105–128 del volume completo · estratto per lo studio

Se alle 8 del mattino il termometro segna 12 °C e a mezzogiorno segna 20 °C, siamo certi che in qualche istante della mattina ha segnato esattamente 15 °C. Non l'abbiamo visto, ma sappiamo che la temperatura non salta: per andare da un valore all'altro passa per tutti i valori intermedi. Lo stesso ragionamento sosteneva i metodi di *Matematica 4*: per localizzare la soluzione di $\cos x = x$ (cap. 3) o di $x^3 - 2x - 5 = 0$ (cap. 9) cercavamo un cambiamento di segno, certi che il grafico, non avendo salti, dovesse attraversare l'asse x. Era una certezza «intuitiva»: mancavano una definizione precisa di «non avere salti» e un teorema.

Con il concetto di limite la definizione è a portata di mano: una funzione è continua in un punto quando il suo limite in quel punto coincide con il valore che assume. In questo capitolo studiamo le funzioni continue, classifichiamo i modi in cui la continuità può mancare e dimostriamo i grandi teoremi sulle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato: il teorema di Weierstrass, il teorema di esistenza degli zeri e quello dei valori intermedi. Trasformeremo poi la bisezione in un algoritmo con un errore garantito in anticipo e chiuderemo con gli asintoti obliqui e il grafico probabile di una funzione, la prima metà dello studio di funzione.

4.1 La continuità

4.1.1 Continuità in un punto

Confrontiamo tre funzioni vicino a $x_0 = 1$. La funzione $f(x) = x^2$ è definita in 1 e $\lim_{x\to 1} x^2 = 1 = f(1)$: quando x si avvicina a 1, i valori $f(x)$ si avvicinano proprio al valore $f(1)$. La funzione $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ha limite 2 per $x \to 1$ (capitolo 2), ma in 1 non è definita: il suo grafico è la retta $y = x + 1$ privata del punto $(1; 2)$. La funzione h che vale x^2 per $x < 1$ e $3 - x$ per $x \geq 1$ ha in 1 limite sinistro 1 e limite destro 2, quindi non ha limite. Solo il grafico della prima si traccia, vicino a 1, «senza staccare la matita dal foglio». È questa la proprietà che vogliamo definire.

IN SINTESI

Definizione. Sia f una funzione di dominio D e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione di D. La funzione f è **continua in un punto** x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La definizione contiene tre richieste: f è definita in x_0; il limite di f per $x \to x_0$ esiste ed è finito; il limite è uguale al valore $f(x_0)$. Con la definizione di limite si scrive: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$ con $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nella definizione di limite il valore di f in x_0 non conta; qui conta, ed è proprio il numero a cui i valori vicini devono avvicinarsi. Nella forma con ε e δ si può anche lasciare che x valga x_0, perché $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ è sempre vero. Nei punti isolati del dominio (capitolo 1) la condizione con ε e δ è soddisfatta automaticamente: basta prendere δ così piccolo che l'intorno non contenga altri punti del dominio. Per questo una funzione si considera continua nei punti isolati del suo dominio. Nel seguito i domini saranno intervalli o unioni di intervalli, e la questione non si porrà.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Verifica con la definizione che $f(x) = 3x - 1$ è continua in ogni punto x_0 e che $g(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 3$.

Soluzione. Per f: $|f(x) - f(x_0)| = |3x - 1 - 3x_0 + 1| = 3|x - x_0|$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta = \varepsilon/3$: se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon$.

Per g: $|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3|$. Il secondo fattore non è costante, ma possiamo controllarlo restringendo l'intorno. Se $|x - 3| < 1$, allora $2 < x < 4$ e $|x + 3| < 7$, quindi $|x^2 - 9| < 7|x - 3|$. Scegliamo $\delta = \min(1; \varepsilon/7)$: se $|x - 3| < \delta$, valgono insieme $|x + 3| < 7$ e $|x - 3| < \varepsilon/7$, e dunque $|x^2 - 9| < \varepsilon$.

Osservazione. In entrambi i casi δ dipende da ε (e, per g, dal punto $x_0 = 3$), ma mai da x: è un raggio fissato prima di guardare i singoli punti dell'intorno.

4.1.2 Continuità a destra e a sinistra; continuità in un intervallo

Se nella definizione si usa il limite destro, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, si dice che f è **continua a destra** in x_0; con il limite sinistro, che è **continua a sinistra**. Una funzione è continua in x_0 se e solo se è continua sia a destra sia a sinistra. La funzione h di prima è continua a destra in 1, perché $\lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2 = h(1)$, ma non a sinistra. La funzione $\sqrt{x}$, definita per $x \geq 0$, è continua in 0 perché $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$: a sinistra di 0 non ci sono punti del dominio, e la continuità in 0 coincide con la continuità a destra.

Una funzione è **continua in un intervallo** I se è continua in ogni punto di I; in un estremo che appartiene all'intervallo si chiede soltanto la continuità da destra (nell'estremo sinistro) o da sinistra (nell'estremo destro). Così $\sqrt{x}$ è continua in $[0; +\infty[$. Una funzione continua in ogni punto del suo dominio si dice semplicemente **funzione continua**.

4.1.3 Le funzioni elementari sono continue

Verificare la continuità punto per punto con la definizione sarebbe faticoso. Per fortuna le funzioni che usiamo di solito sono tutte continue.

IN SINTESI

Teorema. Le funzioni elementari sono continue in ogni punto del loro dominio: le funzioni polinomiali e razionali fratte; le funzioni irrazionali come $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$; le funzioni esponenziali a^x e logaritmiche $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); le funzioni goniometriche sen x, cos x, tg x, cotg x e le loro inverse arcsen x, arccos x, arctg x.

Non lo dimostriamo per tutte; vediamo da dove viene in alcuni casi. La funzione costante e la funzione x sono continue in ogni punto. Ogni polinomio si ottiene da esse con somme e prodotti, e per l'algebra dei limiti (capitolo 3) il limite di una somma o di un prodotto è la somma o il prodotto dei limiti; quindi $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$ per ogni polinomio p, e lo stesso vale per un quoziente di polinomi nei punti in cui il denominatore non si annulla.

Per il seno usiamo una formula di prostaferesi (*Matematica 4*) e la disuguaglianza $|\text{sen } t| \leq |t|$, valida per ogni t reale (capitolo 3):

$$|\text{sen } x - \text{sen } x_0| = 2\,|\cos\frac{x+x_0}{2}| \cdot |\text{sen}\,\frac{x-x_0}{2}| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|.$$

Dato $\varepsilon > 0$ basta allora prendere $\delta = \varepsilon$: se $|x - x_0| < \delta$, anche $|\text{sen } x - \text{sen } x_0| < \varepsilon$. Il coseno si tratta allo stesso modo, e tg x e cotg x sono quozienti di funzioni continue. La continuità delle funzioni esponenziali è legata alla definizione stessa di a^x con esponente reale (*Matematica 3*) e la accettiamo; quella dei logaritmi, delle radici e delle inverse goniometriche la ricaveremo più avanti in questo capitolo dal teorema sulla funzione inversa.

4.1.4 Operazioni e funzioni composte

IN SINTESI

Teorema. Se f e g sono continue in x_0, sono continue in x_0 anche $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e, se $g(x_0) \neq 0$, f/g. Se g è continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$, la **funzione composta** $f(g(x))$ è continua in x_0.

Le prime affermazioni sono l'algebra dei limiti applicata a limiti che coincidono con i valori. Per la composta: quando $x \to x_0$, $g(x) \to g(x_0)$ perché g è continua; quando l'argomento di f si avvicina a $g(x_0)$, i valori di f si avvicinano a $f(g(x_0))$ perché f è continua in quel punto. Così $e^{\text{sen } x}$, $\sqrt{x^2+1}$ e $\ln(2 + \cos x)$ sono continue in tutto $\mathbb{R}$.

Ne segue la regola pratica che nel capitolo 3 abbiamo usato per i limiti delle funzioni composte: se $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ e f è continua in l, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(l).$$

Il limite «entra» nella funzione continua. Per esempio

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \ln 1 = 0, \quad \lim_{x\to 0} e^{(1-\cos x)/x^2} = e^{1/2} = \sqrt{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{x} = \operatorname{arctg} 2.$$

Qui x_0 può essere anche $\pm\infty$, e non è necessario che la funzione interna sia definita in x_0: $\operatorname{sen} x / x$ non è definita in 0. Conta che la funzione esterna sia continua nel valore limite l.

4.2 I punti di discontinuità

4.2.1 Una convenzione e tre specie

Quando una funzione non è continua in un punto, conviene capire *come* non lo è. Prima, però, dobbiamo stabilire quali punti prendere in esame: non ha senso chiedersi che cosa accade a $\sqrt{x}$ in $x = -5$, lontano dal suo dominio.

DA RICORDARE

In questo libro chiamiamo **punto di discontinuità** di una funzione f ogni punto di accumulazione del dominio di f nel quale f non è continua oppure non è definita.

Con questa convenzione $x = 0$ è un punto di discontinuità di $f(x) = 1/x$, anche se f è continua in ogni punto del suo dominio: le due affermazioni non si contraddicono, perché 0 non appartiene al dominio. Invece $x = -5$ non è un punto di discontinuità di $\sqrt{x}$, perché non è un punto di accumulazione di $[0; +\infty[$.

IN SINTESI

Classificazione. Sia x_0 un punto di discontinuità di f.

- x_0 è di **prima specie** se i limiti destro e sinistro di f in x_0 esistono finiti e sono diversi; il valore assoluto della loro differenza si chiama **salto** di f in x_0.
- x_0 è di **seconda specie** se almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, è infinito oppure non esiste.
- x_0 è di **terza specie**, o **discontinuità eliminabile**, se esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, ma f non è definita in x_0 oppure $f(x_0) \neq l$.

4.2.2 Le discontinuità più frequenti

Prima specie. La funzione **segno**, che vale $\operatorname{sgn} x = 1$ per $x > 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$ e $\operatorname{sgn} x = -1$ per $x < 0$, ha in 0 limite destro 1 e limite sinistro -1: è una discontinuità di prima specie con salto 2. La parte intera $[x]$ (capitolo 2), cioè il più grande numero intero minore o uguale a x, è un altro esempio;

ricordiamo che [2,7] = 2 e [−2,7] = −3. In ogni intero k il limite sinistro di $[x]$ è $k - 1$ e quello destro è $k = [k]$: la parte intera ha in ogni intero una discontinuità di prima specie con salto 1 ed è continua a destra. La funzione h del paragrafo precedente ha in 1 un salto 1 (Figura 4.1a).

Seconda specie. La funzione $1/(x - 1)$ ha in 1 limite destro $+\infty$ e limite sinistro $-\infty$ (Figura 4.1b). Basta anche un solo limite infinito: $e^{1/x}$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to 0^-$. E basta un limite che non esiste: sen(1/x), che in ogni intorno di 0 oscilla infinite volte tra −1 e 1 (capitolo 2), non ha limite né da destra né da sinistra.

Terza specie. La funzione $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ha in 1 limite 2 ma non è definita (Figura 4.1c); la funzione sen x / x ha in 0 limite 1 e non è definita. Una discontinuità di terza specie c'è anche quando la funzione è definita nel punto ma con un valore «fuori posto»: la funzione che vale x^2 per $x \neq 0$ e 5 per $x = 0$ ha in 0 limite 0, diverso dal valore.

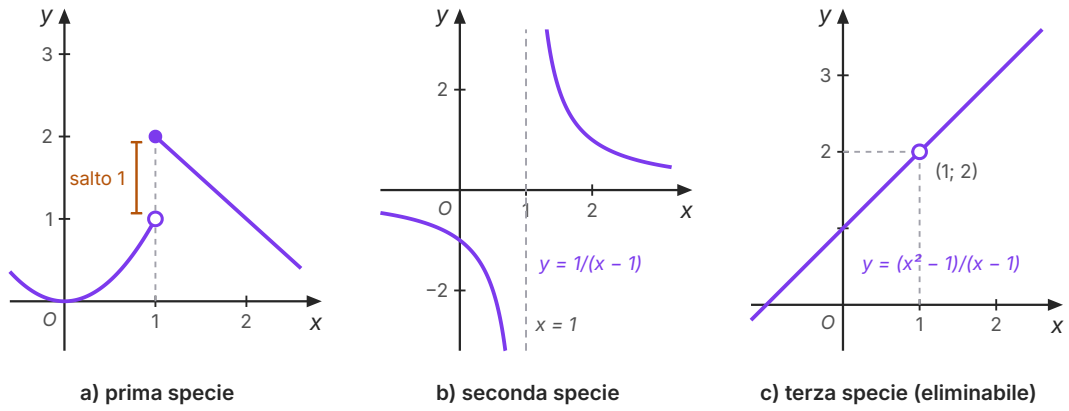


Figura 4.1 Le tre specie di discontinuità. **a)** La funzione che vale x^2 per $x < 1$ e $3 - x$ per $x \geq 1$: in 1 i limiti laterali sono 1 e 2, il salto è 1; il pallino pieno indica il valore $f(1) = 2$, quello vuoto il punto escluso. **b)** $y = 1/(x - 1)$: i limiti laterali in 1 sono infiniti; la retta tratteggiata $x = 1$ è un asintoto verticale. **c)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$: il limite in 1 esiste ed è 2, ma la funzione non è definita in 1. Grafici calcolati dalle equazioni.

4.2.3 Il prolungamento per continuità

Una discontinuità di terza specie si può eliminare: basta definire (o ridefinire) la funzione in x_0 assegnandole il valore del limite. La funzione F uguale a f fuori da x_0 e con $F(x_0) = l$ è continua in x_0 e si chiama **prolungamento per continuità** di f. Per esempio, il prolungamento di sen x / x è la funzione che vale sen x / x per $x \neq 0$ e 1 per $x = 0$; il prolungamento di $(x^2 - 1)/(x - 1)$ è $x + 1$. Nelle discontinuità di prima e di seconda specie nessun valore rende f continua: i limiti laterali sono diversi, oppure non sono finiti o non esistono.

4.2.4 Funzioni a tratti con un parametro

Un quesito frequente all'esame chiede di scegliere uno o più parametri in modo che una funzione definita a tratti sia continua. All'interno di ciascun tratto la funzione è elementare, quindi continua; restano da controllare i punti di raccordo, dove si impone che limite sinistro, limite destro e valore coincidano.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina i numeri reali a e b per cui è continua in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \text{ per } x < 0, \quad f(0) = a, \quad f(x) = b\,e^{x} + 1 \text{ per } x > 0.$$

Soluzione. Per $x < 0$ e per $x > 0$ la funzione è continua, perché quoziente e somma di funzioni continue (il denominatore x non si annulla). Nel punto 0 calcoliamo i limiti laterali. Da sinistra, con il limite notevole del capitolo 3,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3;$$

da destra, per la continuità di e^x, $\lim_{x\to 0^+} (b\,e^{x} + 1) = b + 1$. La funzione è continua in 0 se e solo se $3 = b + 1 = a$, cioè $a = 3$ e $b = 2$.

Osservazione. Con $b = 2$ e $a \neq 3$ in 0 c'è una discontinuità di terza specie; con $b \neq 2$ i limiti laterali 3 e $b + 1$ sono diversi, e la discontinuità è di prima specie con salto $|b + 1 - 3| = |b - 2|$, qualunque sia a.

4.3 I teoremi sulle funzioni continue

Finora abbiamo guardato la continuità in un punto. Le proprietà più importanti, però, riguardano le funzioni continue in un intero intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. Sono teoremi di esistenza: garantiscono che qualcosa c'è (un massimo, una soluzione) senza dire dove si trovi. Per ciascuno vedremo che nessuna ipotesi si può togliere.

4.3.1 Massimo e minimo: il teorema di Weierstrass

Sia f definita in un insieme I. Un numero M è il **massimo assoluto** di f in I se esiste $x_M \in I$ con $f(x_M) = M$ e $f(x) \le M$ per ogni $x \in I$; il punto x_M si dice **punto di massimo**. Allo stesso modo si definiscono il **minimo assoluto** m e i punti di minimo. Massimo e minimo di f sono il massimo e il minimo dell'insieme dei valori $f(I)$: se questo insieme è limitato superiormente ha un estremo superiore (capitolo 1), ma non è detto che l'estremo superiore sia un massimo.

IN SINTESI

Teorema di Weierstrass. Ipotesi: f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. **Tesi:** f ha in $[a; b]$ un massimo assoluto e un minimo assoluto.

Non dimostriamo il teorema: la dimostrazione usa una forma della completezza di $\mathbb{R}$ che va oltre il programma. Vediamo invece perché nessuna ipotesi è superflua (Figura 4.2).

- **Intervallo non chiuso.** La funzione x^2 è continua in $]0; 1[$ ma non ha né massimo né minimo: i suoi valori riempiono $]0; 1[$, e l'estremo superiore 1 e l'estremo inferiore 0 non sono raggiunti. Anche $1/x$ è continua in $]0; 1]$ e non ha massimo, perché non è limitata superiormente.
- **Intervallo non limitato.** La funzione arctg x è continua in $\mathbb{R}$ ma non ha né massimo né minimo: l'estremo superiore $\pi/2$ e l'estremo inferiore $-\pi/2$ non sono raggiunti.
- **Funzione non continua.** La funzione che vale x^2 in $[0; 1[$ e 0 in $x = 1$ è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[0; 1]$, ma non ha massimo: i suoi valori si avvicinano a 1 senza raggiungerlo.

Le ipotesi sono sufficienti, non necessarie: una funzione può avere massimo e minimo anche senza soddisfarle. La funzione sgn x in $[-1; 1]$ non è continua, eppure ha massimo 1 e minimo -1; cos x ha massimo 1 e minimo -1 in tutto $\mathbb{R}$.

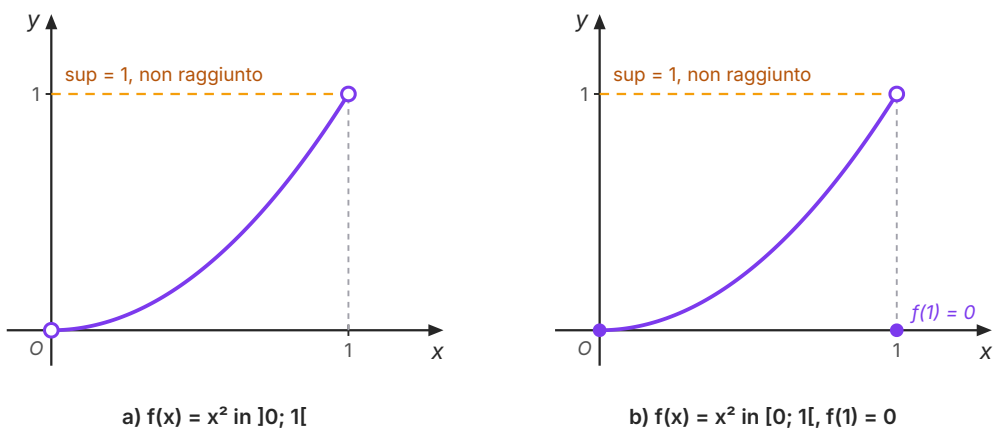


Figura 4.2 Due funzioni senza massimo. **a)** $f(x) = x^2$ è continua nell'intervallo aperto $]0; 1[$: l'estremo superiore 1 (tratteggiato) non è raggiunto, e nemmeno l'estremo inferiore 0. **b)** La stessa curva sull'intervallo chiuso $[0; 1]$, ma con $f(1) = 0$: la funzione non è continua in 1 e non ha massimo, mentre ha minimo 0, raggiunto in 0 e in 1. Grafici calcolati dalle equazioni.

4.3.2 Il teorema di esistenza degli zeri

È il teorema che giustifica la ricerca dei cambiamenti di segno.

IN SINTESI

Teorema di esistenza degli zeri (o di Bolzano). **Ipotesi:** f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. **Tesi:** esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$; nel caso opposto si applica il ragionamento a $-f$. Costruiamo una successione di intervalli dimezzando ogni volta il precedente. Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Al passo n calcoliamo f nel punto medio $m_n = (a_n + b_n)/2$. Se $f(m_n) = 0$ lo zero è trovato e la dimostrazione è finita. Se $f(m_n) > 0$ poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = m_n$; se $f(m_n) < 0$ poniamo $a_{n+1} = m_n$ e $b_{n+1} = b_n$. In ogni caso il nuovo intervallo è metà del precedente e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ per ogni n; inoltre $b_n - a_n = (b - a)/2^n$.

Se il procedimento non si ferma, la successione (a_n) è crescente in senso lato (ogni termine è maggiore o uguale al precedente), la successione (b_n) è decrescente in senso lato, ed entrambe sono limitate perché i loro termini stanno in $[a; b]$. Per il teorema sulle successioni monotone (capitolo 1), che è una forma della completezza di $\mathbb{R}$, entrambe convergono, e i limiti coincidono perché $b_n - a_n = (b - a)/2^n \to 0$. Chiamiamo c il limite comune: è un punto di $[a; b]$. (In termini di *Matematica 3*, gli insiemi dei numeri a_n e b_n sono due classi contigue e c è il loro elemento separatore.)

Ora interviene la continuità. Poiché $a_n \to c$ e f è continua in c, si ha $f(a_n) \to f(c)$ (capitolo 2: il limite di una funzione si trasmette alle successioni). Se fosse $f(c) > 0$, per la permanenza del segno (capitolo 1) da un certo indice in poi sarebbe $f(a_n) > 0$, contro $f(a_n) < 0$; quindi $f(c) \le 0$. Allo stesso modo, da $f(b_n) > 0$ e $f(b_n) \to f(c)$ segue $f(c) \ge 0$. Dunque $f(c) = 0$. Infine c non è né a né b, perché $f(a)$ e $f(b)$ non sono nulli: $c \in]a; b[$. c.v.d.

La dimostrazione mette in luce i due ingredienti del teorema. La *completezza* di $\mathbb{R}$ garantisce che il punto c esista; la *continuità* di f garantisce che lì f valga 0. Nei numeri razionali, che non sono completi, il teorema è falso: la funzione $x^2 - 2$, considerata solo sui razionali di $[1; 2]$, vale -1 in 1 e 2 in 2, ma non si annulla in alcun numero razionale, perché $\sqrt{2}$ è irrazionale.

4.3.3 Il teorema dei valori intermedi

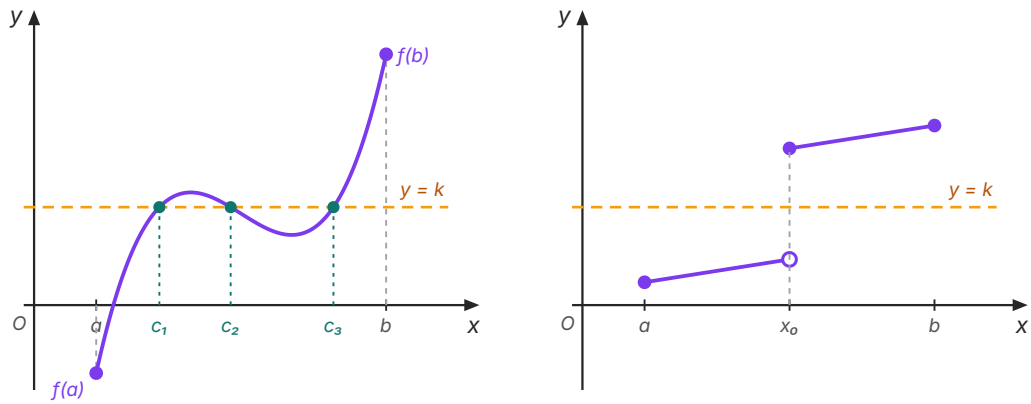
IN SINTESI

Teorema dei valori intermedi. Ipotesi: f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$. **Tesi:** f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, cioè per ogni k compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ esiste $c \in [a; b]$ con $f(c) = k$.

Dimostrazione. Se $k = f(a)$ o $k = f(b)$ basta prendere $c = a$ o $c = b$. Altrimenti k è strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, e la funzione $g(x) = f(x) - k$, continua in $[a; b]$, ha $g(a) = f(a) - k$ e $g(b) = f(b) - k$ di segni opposti. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $c \in]a; b[$ con $g(c) = 0$, cioè $f(c) = k$. c.v.d.

Geometricamente, ogni retta orizzontale $y = k$ compresa tra le ordinate degli estremi del grafico lo taglia almeno una volta, e può tagliarlo anche più volte (Figura 4.3a). Se la funzione ha un salto, un valore può essere «scavalcato» (Figura 4.3b): la funzione segno, in $[-1; 1]$, passa da -1 a 1 senza mai valere $1/2$.

Unendo questo teorema a quello di Weierstrass si ottiene di più. Se f è continua in $[a; b]$, con minimo m e massimo M, applicando il teorema dei valori intermedi all'intervallo di estremi un punto di minimo e un punto di massimo si vede che f assume tutti i valori tra m e M. L'insieme dei valori di f è quindi l'intervallo $[m; M]$: *una funzione continua trasforma un intervallo chiuso e limitato in un intervallo chiuso e limitato*.



a) f continua in [a; b] **b) un salto in x_0: il valore k è saltato**

Figura 4.3 Il teorema dei valori intermedi. **a)** La funzione $f(x) = 1{,}4(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 0{,}4x + 0{,}6$ è continua in $[a; b] = [0{,}6; 3{,}4]$; la retta $y = k$, con $k = 1{,}5$ compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, taglia il grafico in tre punti c_1, c_2, c_3: il teorema ne garantisce almeno uno. **b)** Una funzione con un salto in x_0 passa da sotto a sopra la retta $y = k$ senza mai assumere il valore k. Grafici calcolati dalle equazioni.

ERRORE FREQUENTE

- «f non è definita in x_0, quindi x_0 è un punto di discontinuità.» Solo se x_0 è un punto di accumulazione del dominio: -5 non è un punto di discontinuità di $\sqrt{x}$. E dire che $1/x$ è continua (nel suo dominio) e che ha in 0 una discontinuità di seconda specie non è contraddittorio.
- Applicare il teorema di Weierstrass in un intervallo aperto o illimitato: x^2 in $]0;\,1[$ non ha massimo, $\arctg x$ in $\mathbb{R}$ nemmeno.
- Applicare il teorema degli zeri a una funzione non continua: $\tg(\pi/4) = 1$ e $\tg(3\pi/4) = -1$, ma $\tg x$ non si annulla in $]\pi/4;\,3\pi/4[$. Il cambiamento di segno avviene «attraverso» l'asintoto $x = \pi/2$, dove la funzione non è definita.
- Concludere dal teorema degli zeri che lo zero è unico: il teorema ne garantisce almeno uno.

4.3.4 Esistenza e unicità di una soluzione

Il teorema degli zeri dice che uno zero esiste, non che è unico: in Figura 4.3a la funzione $f(x) - k$ ne ha tre. Per l'unicità serve un'informazione in più, e la più semplice è la monotonia.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: f è continua e strettamente monotòna in $[a;\,b]$, e $f(a) \cdot f(b) < 0$. **Tesi:** f ha in $]a;\,b[$ uno e un solo zero.

L'esistenza viene dal teorema degli zeri. Se gli zeri fossero due, $c_1 < c_2$, avremmo $f(c_1) = f(c_2) = 0$, mentre una funzione strettamente monotòna assume valori diversi in punti diversi.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che l'equazione $\cos x = x$ ha una e una sola soluzione reale e che essa è compresa tra 0 e 1.

Soluzione. Poniamo $g(x) = \cos x - x$, continua in $\mathbb{R}$ come differenza di funzioni continue. *Esistenza:* $g(0) = 1 > 0$ e $g(1) = \cos 1 - 1 \approx -0{,}460 < 0$ (in radianti), quindi per il teorema degli zeri esiste $c \in\,]0;\,1[$ con $g(c) = 0$.

Unicità in $[0;\,1]$: in questo intervallo $\cos x$ è strettamente decrescente (lo è in tutto $[0;\,\pi]$) e anche $-x$ lo è; la loro somma g è strettamente decrescente, quindi lo zero in $[0;\,1]$ è uno solo.

Nessuna soluzione fuori da $[0;\,1]$: se $x > 1$, allora $x > 1 \geq \cos x$ e $g(x) < 0$. Se $-1 \leq x < 0$, $\cos x > 0$ e $-x > 0$, quindi $g(x) > 0$. Se $x < -1$, $-x > 1 \geq -\cos x$, cioè $g(x) > 0$.

L'equazione ha dunque una sola soluzione, $c \in\,]0;\,1[$; con la bisezione si trova $c \approx 0{,}7391$. Ciò che in *Matematica 4* avevamo osservato sui grafici è ora dimostrato.

Allo stesso modo si dimostra un fatto che in *Matematica 4* (cap. 9) era solo intuito: *ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ha almeno uno zero reale*. Se il coefficiente direttivo è positivo, $p(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ e $p(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ (capitolo 3). Per la definizione di limite esiste allora un numero a con $p(a) < 0$ e un numero $b > a$ con $p(b) > 0$, e il teorema degli zeri si applica in $[a; b]$. Se il coefficiente direttivo è negativo, si ragiona su $-p$, che ha gli stessi zeri.

4.3.5 Continuità e funzione inversa

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: f è continua e strettamente monotòna in un intervallo I. **Tesi:** l'insieme dei valori $f(I)$ è un intervallo e la funzione inversa f^{-1}, definita su $f(I)$, è continua e strettamente monotòna nello stesso verso di f.

Non lo dimostriamo. Il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice $y = x$, e un grafico senza salti resta senza salti. Il teorema completa la continuità delle funzioni elementari: $\ln x$ è continua perché inversa di e^x, continua e strettamente crescente in $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ perché inversa di x^2 ristretta a $[0; +\infty[$; $\arcsen x$ perché inversa di $\sen x$ ristretta a $[-\pi/2; \pi/2]$ (*Matematica 4*); e così $\arccos x$ e $\arctg x$.

COLLEGAMENTI · GEOGRAFIA E FISICA: DUE PUNTI OPPOSTI ALLA STESSA TEMPERATURA

In un dato istante, sull'equatore terrestre esistono due punti diametralmente opposti che hanno la stessa temperatura. Non serve misurare nulla: basta un'ipotesi di modello, che la temperatura dell'aria vari con continuità lungo l'equatore.

Indichiamo con $T(\theta)$ la temperatura nel punto dell'equatore di longitudine θ, misurata in radianti da 0 a 2π, e supponiamo T continua, con $T(2\pi) = T(0)$ perché è lo stesso punto. Il punto opposto a θ ha longitudine $\theta + \pi$. La funzione $D(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$ è continua in $[0; \pi]$ e

$$D(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0) = -D(0).$$

Se $D(0) = 0$ i due punti cercati sono 0 e π. Altrimenti $D(0)$ e $D(\pi)$ hanno segni opposti, e per il teorema degli zeri esiste θ con $D(\theta) = 0$, cioè $T(\theta) = T(\theta + \pi)$. Lo stesso vale per la pressione o per qualunque grandezza che vari con continuità lungo un cerchio.

APPROFONDIMENTO · BOLZANO, CAUCHY E LA FUNZIONE DI DIRICHLET

Nel 1817 Bernard Bolzano, sacerdote e professore a Praga, pubblicò una «dimostrazione puramente analitica» del teorema secondo cui, se due valori sostituiti in un'equazione danno risultati di segno opposto, tra di essi c'è almeno una radice reale. Il fatto era sempre sembrato evidente guardando una curva; Bolzano volle dimostrarlo senza ricorrere all'intuizione geometrica e, per farlo, diede una definizione di funzione continua molto vicina alla nostra. Il suo lavoro rimase a lungo poco conosciuto. Nel 1821 Augustin-Louis Cauchy, nel *Cours d'analyse*, definì la continuità con gli infinitesimi e dimostrò anch'egli il teorema dei valori intermedi.

La chiarezza delle definizioni fece emergere funzioni che l'intuizione non aveva previsto. La **funzione di Dirichlet**, dal nome del matematico tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet, vale 1 nei numeri razionali e 0 negli irrazionali. Poiché in ogni intorno di un numero cadono sia numeri razionali sia irrazionali (*Matematica 3*), vicino a qualunque x_0 la funzione assume sia il valore 0 sia il valore 1 e non ha limite: è discontinua in ogni punto, e il suo «grafico» non si può disegnare.

4.4 Il metodo di bisezione

La dimostrazione del teorema degli zeri è costruttiva: descrive un procedimento che, ripetuto, racchiude lo zero in intervalli sempre più piccoli. È il **metodo di bisezione**, che in *Matematica 4* abbiamo usato per $\cos x = x$ e per $x^3 - 2x - 5 = 0$. Ora possiamo presentarlo come un **algoritmo**, cioè una successione finita di istruzioni precise che produce il risultato con l'errore richiesto, e possiamo dire in anticipo quanti passi servono.

IN SINTESI

Algoritmo di bisezione per un'equazione $f(x) = 0$, con precisione $\varepsilon > 0$.

1. **Separazione della radice.** Si trova un intervallo $[a; b]$ in cui f è continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$; se si vuole che la radice sia unica, si controlla che f sia strettamente monotòna in $[a; b]$.
2. Si calcolano il punto medio $m = (a + b)/2$ e $f(m)$. Se $f(m) = 0$, m è la soluzione.
3. Se $f(a) \cdot f(m) < 0$ si sostituisce b con m; altrimenti si sostituisce a con m.
4. Si ripete dal punto 2 finché l'ampiezza dell'intervallo è minore di ε.

Dopo n passi l'intervallo ha ampiezza $(b - a)/2^n$ e contiene lo zero c. Ogni suo punto approssima c con un errore minore dell'ampiezza, e il punto medio con un errore minore della metà dell'ampiezza. Perché l'ampiezza sia minore di ε occorrono n passi con

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Il numero dei passi si conosce prima di cominciare, e cresce lentamente con la precisione: per guadagnare una cifra decimale, cioè per dividere ε per 10, servono poco più di tre passi in più, perché $\log_2 10 \approx 3{,}32$. È un metodo lento ma sicuro: funziona per ogni funzione continua che cambia segno agli estremi. Nel capitolo 8 incontreremo il metodo delle tangenti, molto più rapido, ma che richiede ipotesi più forti.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dimostra che l'equazione $e^x = 3 - x$ ha una sola soluzione reale e calcolala con un errore minore di 10^{-3}.

Separazione. L'equazione equivale a $g(x) = 0$ con $g(x) = e^x + x - 3$, continua in $\mathbb{R}$ e strettamente crescente perché somma di due funzioni strettamente crescenti: ha quindi al più uno zero. Poiché $g(0) = -2 < 0$ e $g(1) = e - 2 \approx 0{,}718 > 0$, lo zero esiste ed è in $]0;\,1[$.

Numero dei passi. Con $b - a = 1$ e $\varepsilon = 10^{-3}$ serve $n > \log_2 1000 \approx 9{,}97$: bastano 10 passi, perché $2^{10} = 1024 > 1000$.

Iterazioni. La Tabella 4.1 riporta i passi da 0 a 9; a ogni passo si tiene la metà dell'intervallo ai cui estremi g ha segni opposti. Dopo il decimo dimezzamento l'intervallo è $[0{,}7919921875;\,0{,}79296875]$, di ampiezza $1/1024 \approx 0{,}00098 < 10^{-3}$.

Risultato. La soluzione è $x \approx 0{,}792$; il punto medio dell'ultimo intervallo, 0,79248..., la approssima con un errore minore di 0,0005. Continuando si trova $x \approx 0{,}79206$.

Tabella 4.1 Bisezione per $g(x) = e^x + x - 3$ in $[0;\,1]$: a_n e b_n sono gli estremi dell'intervallo al passo n, m_n il punto medio. Se $g(m_n) < 0$ il nuovo intervallo è $[m_n;\,b_n]$, altrimenti $[a_n;\,m_n]$.

n	a_n	b_n	m_n	$g(m_n)$
0	0	1	0,5	−0,8513
1	0,5	1	0,75	−0,1330
2	0,75	1	0,875	0,2739
3	0,75	0,875	0,8125	0,0660
4	0,75	0,8125	0,78125	−0,0345
5	0,78125	0,8125	0,796875	0,0155
6	0,78125	0,796875	0,7890625	−0,0096
7	0,7890625	0,796875	0,79296875	0,0029
8	0,7890625	0,79296875	0,791015625	−0,0033
9	0,791015625	0,79296875	0,7919921875	−0,0002

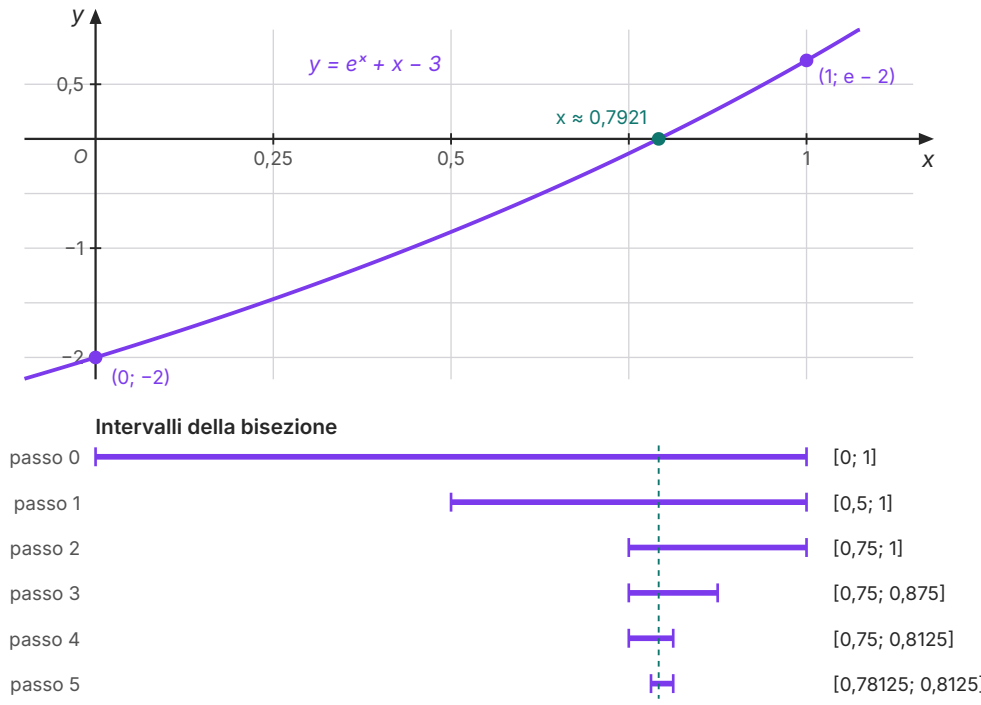


Figura 4.4 In alto, il grafico di $y = e^x + x - 3$, che in $[0; 1]$ passa da -2 a $e - 2$ e taglia l'asse x in un solo punto, $x \approx 0{,}7921$. In basso, gli intervalli dei passi da 0 a 5 della bisezione: ciascuno è la metà del precedente e contiene sempre la soluzione (linea tratteggiata). Grafico calcolato dall'equazione.

4.5 Asintoti obliqui e grafico probabile

4.5.1 Gli asintoti obliqui

Nel capitolo 2 abbiamo definito gli asintoti verticali ($x = x_0$ è un asintoto verticale se almeno uno dei limiti di f per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$ è infinito) e quelli orizzontali ($y = l$ è un asintoto orizzontale se $f(x) \to l$ per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$). Una funzione può però tendere a infinito avvicinandosi a una retta obliqua. Dividendo il numeratore per il denominatore si trova

$$\frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2},$$

e il termine $1/(x - 2)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$: la distanza, misurata in verticale, tra il grafico e la retta $y = x + 2$ tende a 0, e per $|x|$ grande le due linee si confondono (Figura 4.6).

IN SINTESI

Definizione. La retta $y = mx + q$, con $m \neq 0$, è un **asintoto obliquo** di f per $x \to +\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$; allo stesso modo per $x \to -\infty$.

Teorema. La funzione f ha l'asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$ se e solo se esistono finiti, con $m \neq 0$, i limiti

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx].$$

Dimostrazione. Se $y = mx + q$ è un asintoto, $f(x) - mx - q \to 0$; dividendo per x, che tende a $+\infty$, anche $f(x)/x - m - q/x \to 0$, e poiché $q/x \to 0$ si ottiene $f(x)/x \to m$. Inoltre $f(x) - mx = [f(x) - mx - q] + q \to q$. Viceversa, se i due limiti esistono finiti, $f(x) - (mx + q) = [f(x) - mx] - q \to q - q = 0$. c.v.d.

Se f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, non ne ha uno obliquo dallo stesso lato, perché $f(x)/x \to 0$; i due casi si escludono. Una funzione razionale fratta ha un asintoto obliquo quando il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore: l'asintoto è il quoziente della divisione, ed è lo stesso per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Per altre funzioni gli asintoti ai due lati possono essere diversi.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina gli asintoti di $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Soluzione. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$, quindi non ha asintoti verticali; è pari e $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, quindi non ha asintoti orizzontali. Per $x > 0$ si ha $\sqrt{x^2} = x$, quindi

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \to 1, \quad f(x) - x = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \to 0$$

per $x \to +\infty$ (abbiamo razionalizzato, come nel capitolo 3): l'asintoto è $y = x$. Per $x < 0$, invece, $\sqrt{x^2} = -x$, quindi $f(x)/x = -\sqrt{1 + 1/x^2} \to -1$ e $f(x) + x = 1/(\sqrt{x^2 + 1} - x) \to 0$ per $x \to -\infty$: l'asintoto è $y = -x$ (Figura 4.5).

Osservazione. Il grafico di $y = \sqrt{x^2 + 1}$ è il ramo superiore dell'iperbole equilatera $y^2 - x^2 = 1$ (*Matematica 3*), che ha proprio le rette $y = \pm x$ come asintoti.

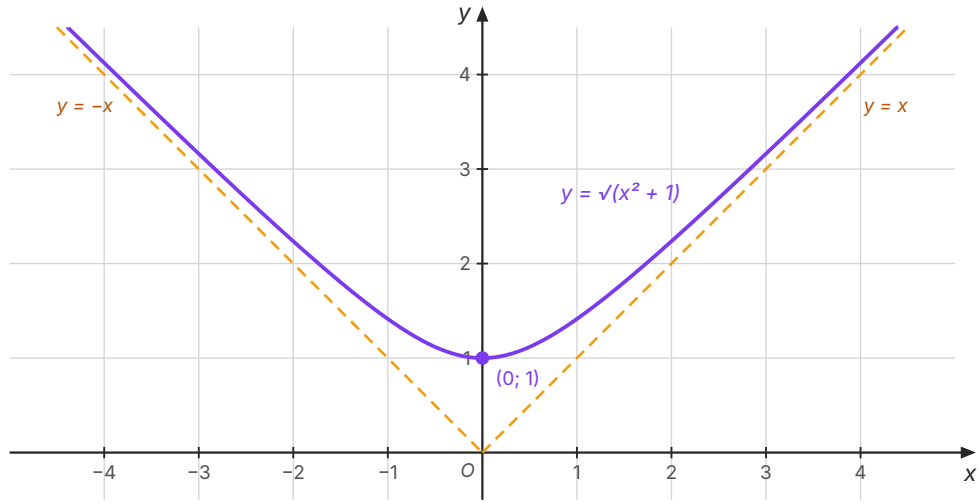


Figura 4.5 Il grafico di $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ha asintoti obliqui diversi ai due lati: $y = x$ per $x \to +\infty$ e $y = -x$ per $x \to -\infty$ (tratteggiati). Il punto più basso è (0; 1). Grafico calcolato dall'equazione, con unità uguali sui due assi.

4.5.2 Il grafico probabile di una funzione

Con i limiti e la continuità possiamo già ricavare molte informazioni sul grafico di una funzione. È la prima metà dello **studio di funzione**, che completeremo con le derivate nel capitolo 7. Il disegno che si ottiene si chiama **grafico probabile**: è corretto in ciò che afferma (dove il grafico sta, dove taglia gli assi, come si comporta agli estremi del dominio), ma non sa ancora dove la funzione cresce e dove decresce, né dove sono i massimi e i minimi.

IN SINTESI

Schema per il grafico probabile.

1. Dominio.
2. Simmetrie (funzione pari o dispari) ed eventuale periodicità.
3. Intersezioni con gli assi.
4. Segno della funzione: si escludono le regioni del piano in cui il grafico non può stare.
5. Limiti agli estremi del dominio (punti esclusi e $\pm\infty$) e asintoti verticali, orizzontali e obliqui.
6. Punti di discontinuità e loro specie.
7. Grafico: si raccordano le informazioni con una linea continua in ogni intervallo in cui la funzione è continua.

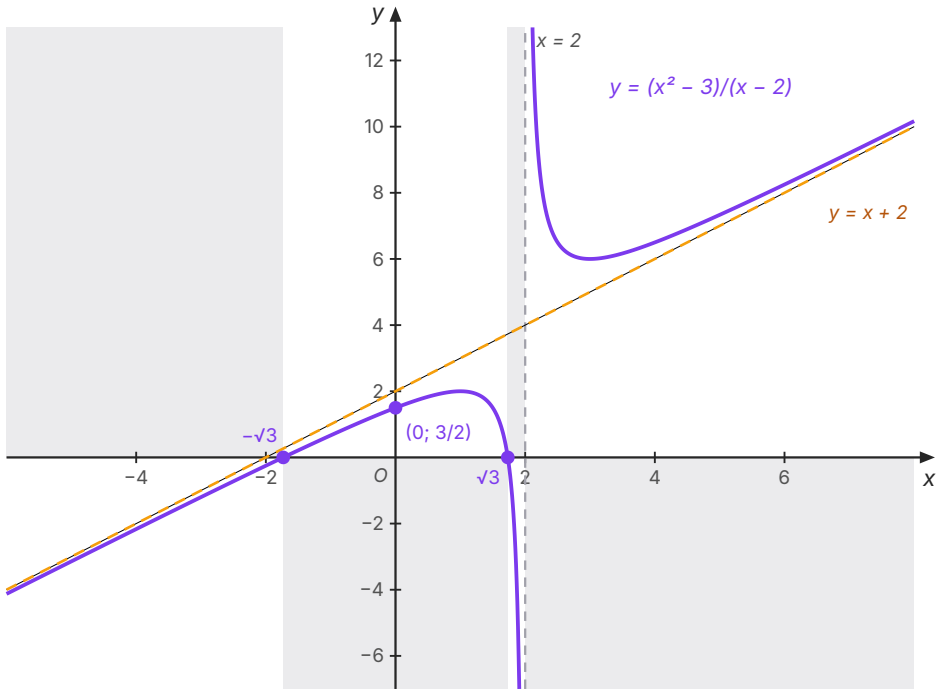


Figura 4.6 Il grafico probabile di $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$. In grigio le regioni escluse dallo studio del segno; tratteggiati l'asintoto verticale $x = 2$ e l'asintoto obliquo $y = x + 2$; i punti sono le intersezioni con gli assi. La curva è calcolata dall'equazione.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Traccia il grafico probabile di $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Dominio. $x \neq 2$, cioè $D =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. **Simmetrie.** $f(-x) = (x^2 - 3)/(-x - 2)$ non è né $f(x)$ né $-f(x)$: nessuna simmetria.

Intersezioni. Con l'asse y: $f(0) = 3/2$, punto $(0; 3/2)$. Con l'asse x: $x^2 - 3 = 0$, punti $(-\sqrt{3}; 0)$ e $(\sqrt{3}; 0)$, con $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Segno. Il numeratore è positivo per $x < -\sqrt{3}$ e per $x > \sqrt{3}$, il denominatore per $x > 2$. Quindi $f(x) > 0$ in $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ e in $]2; +\infty[$, $f(x) < 0$ in $]-\infty; -\sqrt{3}[$ e in $]\sqrt{3}; 2[$. In Figura 4.6 le regioni escluse sono in grigio.

Limiti e asintoti. In 2 il numeratore tende a 1: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, quindi $x = 2$ è un asintoto verticale (e un punto di discontinuità di seconda specie). Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$: niente asintoti orizzontali; la divisione vista sopra dà l'asintoto obliquo $y = x + 2$ da entrambi i lati. Poiché $f(x) - (x + 2) = 1/(x - 2)$ non si annulla mai, il grafico non taglia l'asintoto: per $x > 2$ sta sopra, per $x < 2$ sotto.

Grafico. Per $x < 2$ la curva sale dalla zona dell'asintoto obliquo, attraversa l'asse in $-\sqrt{3}$, passa per $(0; 3/2)$, ridiscende fino a $(\sqrt{3}; 0)$ e precipita verso $-\infty$ accanto a $x = 2$: tra $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ deve quindi avere almeno un massimo relativo. Per $x > 2$ scende da $+\infty$ e poi risale lungo l'asintoto: deve avere un minimo. Il capitolo 7 mostrerà che sono il massimo $(1; 2)$ e il minimo $(3; 6)$.

Un grafico può anche attraversare un asintoto orizzontale o obliquo: $x/(x^2 + 1)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$ e vale 0 in $x = 0$. Un asintoto descrive il comportamento «all'infinito», non vieta alla curva di incontrare la retta a distanza finita.

SINTESI

- Una funzione f è continua in un punto x_0 del dominio, di accumulazione per il dominio, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: f è definita in x_0, il limite esiste finito e coincide con il valore. Si definiscono allo stesso modo la continuità a destra e a sinistra.
- Le funzioni elementari sono continue nel loro dominio; somme, prodotti, quozienti (con denominatore non nullo) e composte di funzioni continue sono continue. Se $g(x) \to l$ e f è continua in l, allora $f(g(x)) \to f(l)$.
- Punti di discontinuità: punti di accumulazione del dominio in cui f non è continua o non è definita. Prima specie: limiti laterali finiti e diversi (salto). Seconda specie: almeno un limite laterale infinito o inesistente. Terza specie (eliminabile): limite finito l, ma $f(x_0) \neq l$ o f non definita.
- Una discontinuità eliminabile si toglie con il prolungamento per continuità, ponendo $F(x_0) = l$. Nelle funzioni a tratti la continuità si controlla nei punti di raccordo.
- Teorema di Weierstrass: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo assoluti. Senza la chiusura, la limitatezza o la continuità il teorema può fallire.
- Teorema di esistenza degli zeri: se f è continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, esiste $c \in]a; b[$ con $f(c) = 0$. Si dimostra con la bisezione e la completezza di $\mathbb{R}$.
- Teorema dei valori intermedi: una funzione continua in $[a; b]$ assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$; con Weierstrass, l'immagine di $[a; b]$ è $[m; M]$.
- Se f è anche strettamente monotòna, lo zero è unico. Una funzione continua e strettamente monotòna in un intervallo ha l'inversa continua.
- Bisezione: dopo n passi l'intervallo è ampio $(b - a)/2^n$; per un'ampiezza minore di ε servono $n > \log_2((b - a)/\varepsilon)$ passi.
- Asintoto obliquo $y = mx + q$: $m = \lim f(x)/x$ (finito e non nullo) e $q = \lim [f(x) - mx]$, per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$; nelle funzioni razionali con grado del numeratore superiore di 1 è il quoziente della divisione.
- Grafico probabile: dominio, simmetrie, intersezioni, segno, limiti e asintoti, discontinuità. Un grafico può attraversare un asintoto orizzontale od obliquo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Una funzione f è continua in un punto x_0 del suo dominio (di accumulazione per il dominio) se

   A. f è definita in x_0

   B. esiste finito il limite di f per $x \to x_0$

   C. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

   D. i limiti destro e sinistro in x_0 sono infiniti dello stesso segno

2. ● La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ha in $x = 1$

A. una discontinuità di prima specie
B. una discontinuità di terza specie
C. una discontinuità di seconda specie
D. nessuna discontinuità, perché è continua nel suo dominio

3. ● La funzione $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ha in $x = 0$

A. una discontinuità di prima specie con salto 2
B. una discontinuità di prima specie con salto 1
C. una discontinuità di seconda specie
D. una discontinuità eliminabile

4. ●● A quale funzione si può applicare il teorema di Weierstrass nell'intervallo indicato?

A. $f(x) = 1/x$ in $[-1; 1]$
B. $f(x) = x^2$ in $]0; 2[$
C. $f(x) = \text{tg}\, x$ in $[0; \pi/2]$
D. $f(x) = e^{-x}$ in $[0; 5]$

5. ●● Nell'intervallo $[0; 1]$ l'equazione $x^5 + x - 1 = 0$ ha

A. nessuna soluzione
B. esattamente una soluzione
C. esattamente due soluzioni
D. un numero di soluzioni che non si può stabilire senza risolverla

6. ●● L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x + 1}$ è

A. $y = 2x + 3$
B. $y = 2x$
C. $y = x + 1$
D. $y = 2x + 1$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se f è continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha esattamente uno zero in $]a; b[$. b) Una funzione continua in $]0; 1[$ ha sempre un massimo. c) Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g(f(x))$ è continua in x_0. d) La funzione $1/x$ è continua nel suo dominio.

8. ● Completa. a) f è continua a destra in x_0 se _____ . b) x_0 è un punto di discontinuità di prima specie se _____ . c) Una discontinuità di terza specie si elimina ponendo $F(x_0)$ uguale a _____ .

9. ●● Stabilisci di che specie è la discontinuità in $x = 0$ delle funzioni: a) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$; b) $f(x) = e^{1/x}$; c) $f(x) = \text{arctg } \frac{1}{x}$; d) $f(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

Calcolare

10. ● Verifica che la funzione definita da $f(x) = x^2 - 1$ per $x \leq 2$ e $f(x) = 2x - 1$ per $x > 2$ è continua in $x = 2$.

11. ● Calcola i limiti, usando la continuità delle funzioni elementari: a) $\lim_{x\to\pi} \cos \frac{x}{3}$; b) $\lim_{x\to 0} \ln(1 + \frac{\text{sen } x}{x})$; c) $\lim_{x\to+\infty} e^{(1-x)/(2x)}$; d) $\lim_{x\to 0} \text{arctg } \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

12. ●● Determina e classifica i punti di discontinuità delle funzioni: a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$; b) $f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$; c) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$.

13. ●● Determina il valore del parametro reale k per cui è continua in $\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = kx + 3$ per $x < 2$ e $f(x) = x^2 - k$ per $x \geq 2$.

14. ●● Determina a e b in modo che sia continua in $\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ per $x < 0$, $f(0) = a$, $f(x) = \frac{bx + \text{sen } x}{x}$ per $x > 0$.

15. ●● Le funzioni seguenti hanno una discontinuità eliminabile: scrivi il loro prolungamento per continuità. a) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$; b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{\text{sen } 2x}{3x}$.

16. ●● Determina gli asintoti delle funzioni: a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$; b) $f(x) = \frac{3x^3 - x}{x^2 + 1}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.

17. ●● Dimostra che ciascuna equazione ha una e una sola soluzione nell'intervallo indicato: a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ in $[0; 1]$; b) $\ln x = 2 - x$ in $[1; 2]$; c) $e^{-x} = x$ in $[0; 1]$.

18. ●● Applica tre passi del metodo di bisezione all'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ a partire da $[0; 1]$. Quanti passi servono perché l'intervallo abbia ampiezza minore di 10^{-4}?

19. ●●● Traccia il grafico probabile della funzione $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$: dominio, intersezioni, segno, limiti, asintoti e discontinuità.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra con la definizione che $f(x) = |x|$ è continua in ogni punto x_0. (Usa la disuguaglianza $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$.)

21. ●● Dimostra che ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ha almeno uno zero reale. Spiega perché il ragionamento non vale per i polinomi di grado pari, con un esempio.

22. ●●● (Teorema del punto fisso) Sia f: $[0; 1] \to [0; 1]$ una funzione continua. Dimostra che esiste $c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = c$. Interpreta il risultato sul grafico.

23. ●● Trova l'errore: «La funzione $f(x) = 1/x$ vale -1 in $x = -1$ e 1 in $x = 1$; per il teorema di esistenza degli zeri, f si annulla in un punto di $]-1; 1[$».

24. ●● Costruisci due controesempi: a) una funzione definita in $[0; 2]$ con $f(0) < 0 < f(2)$ che non si annulla mai; b) una funzione continua in un intervallo limitato che non ha né massimo né minimo. Quale ipotesi del teorema corrispondente manca in ciascun caso?

25. ●●● Dimostra che, se f è continua in $[a; b]$, l'insieme dei valori di f è un intervallo chiuso $[m; M]$. Quali teoremi usi?

26. ●●● Un escursionista parte alle 7 di sabato dal rifugio a valle e arriva alle 17 al rifugio in quota; la domenica parte alle 7 dal rifugio in quota e, per lo stesso sentiero, arriva alle 17 a valle, con un passo diverso e qualche sosta. Dimostra che c'è un punto del sentiero in cui l'escursionista si trova alla stessa ora nei due giorni. Quali ipotesi di continuità usi?

Problemi

27. ●● Un parcheggio fa pagare 2 € per ogni ora o frazione di ora. a) Scrivi il costo $C(t)$ per una sosta di t ore, con $0 < t \le 4$, e disegnane il grafico. b) Classifica le discontinuità di C. c) In $t = 1$, C è continua a destra o a sinistra?

28. ●● All'interno di un pianeta sferico omogeneo di raggio R e massa M l'intensità del campo gravitazionale a distanza r dal centro è proporzionale a r; all'esterno vale GM/r^2. Il campo è quindi descritto da $g(r) = kr$ per $0 \le r \le R$ e $g(r) = GM/r^2$ per $r > R$. a) Determina k in modo che g sia continua. b) Esprimi $g(R/2)$ e $g(2R)$ in funzione di $g(R)$. c) Il teorema di Weierstrass garantisce che g ha un massimo in $[0; 3R]$: qual è?

29. ●●● Una sfera di legno di raggio 1 dm e densità relativa 0,6 galleggia sull'acqua. La profondità h (in dm) della parte immersa soddisfa l'equazione $h^2(3 - h) = 2{,}4$, che esprime l'uguaglianza tra il peso della sfera e la spinta di Archimede (il volume di una calotta sferica di altezza h è $\pi h^2(3R - h)/3$, *Matematica 4*). a) Dimostra che l'equazione ha una sola soluzione in $[0; 2]$. b) Quanti passi di bisezione servono, partendo da $[0; 2]$, per un intervallo di ampiezza minore di 0,01? c) Esegui i passi e determina h.

30. ●● Tra i rettangoli di area 16 cm^2, il perimetro in funzione della base x (in cm) è $p(x) = 2x + \dfrac{32}{x}$, con $x > 0$. a) Determina gli asintoti di p e interpretali. b) Perché il teorema di Weierstrass garantisce che p ha un minimo nell'intervallo $[1; 8]$? c) Puoi applicare lo stesso teorema in $]0; +\infty[$?

Con il computer

31. ● In un foglio di calcolo imposta la bisezione per $e^x = 3 - x$ in $[0; 1]$: colonne n, a, b, $m = (a + b)/2$, $g(m)$, con $g(x) = e^x + x - 3$; nella riga successiva i nuovi estremi si scelgono con una funzione SE sul segno di $g(a) \cdot g(m)$. a) Riproduci la Tabella 4.1. b) Quanti passi servono per un'ampiezza minore di 10^{-6}? Verificalo nel foglio.

Verso l'esame

32. ●● Determina a e b in modo che la funzione definita da $f(x) = a\,e^x + b$ per $x \le 0$ e $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ per $x > 0$ sia continua in $\mathbb{R}$ e abbia la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

33. ●● Dimostra che l'equazione $x^5 + x^3 + 1 = 0$ ha una e una sola soluzione reale e che essa è compresa tra -1 e 0.

34. ●●● Sia f continua in $[0; 2]$ con $f(0) = f(2)$. Dimostra che esiste $c \in [0; 1]$ tale che $f(c) = f(c + 1)$.

35. ●● Determina a e b in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = 2x + 3$. Verifica poi che $x = 1$ è un asintoto verticale.

36. ●● Determina il valore di $k > 0$ per cui è continua in $\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{1 - \cos kx}{x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 8$.

PER APPROFONDIRE

- SPI — i capitoli sulle funzioni continue e sui tre teoremi «difficili»: dimostrazioni complete, compreso il teorema di Weierstrass.
- APO — la continuità, il teorema di Bolzano e la continuità della funzione inversa, con molti esercizi.
- CR — una presentazione intuitiva e rigorosa insieme della continuità e dei suoi teoremi, con applicazioni geometriche del teorema degli zeri.
- BOY — per Bolzano, Cauchy, Dirichlet e Weierstrass e la nascita dell'analisi rigorosa nell'Ottocento.

Glossario del capitolo

Asintoto obliquo
Retta $y = mx + q$, con $m \neq 0$, tale che $f(x) - (mx + q) \to 0$ per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$.

Continuità a destra (a sinistra)
Proprietà di f in x_0 quando il limite destro (sinistro) di f in x_0 è uguale a $f(x_0)$.

Discontinuità di prima specie
Punto in cui i limiti destro e sinistro esistono finiti e sono diversi; la loro differenza in valore assoluto è il salto.

Discontinuità di seconda specie
Punto in cui almeno uno dei limiti destro e sinistro è infinito o non esiste.

Discontinuità di terza specie
Detta anche eliminabile: il limite l esiste finito, ma f non è definita nel punto o vi assume un valore diverso da l.

Funzione continua in un intervallo
Funzione continua in ogni punto dell'intervallo; negli estremi che vi appartengono si richiede solo la continuità da destra o da sinistra.

Funzione continua in un punto
Una funzione f è continua in un punto x_0 del dominio, di accumulazione per il dominio, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funzione di Dirichlet
Funzione che vale 1 nei numeri razionali e 0 negli irrazionali; è discontinua in ogni punto.

Grafico probabile
Grafico di una funzione tracciato da dominio, simmetrie, intersezioni, segno, limiti e asintoti, prima dello studio delle derivate.

Massimo e minimo assoluto
Il valore più grande e il più piccolo assunti da una funzione in un insieme, se esistono.

Metodo di bisezione
Algoritmo che approssima uno zero di una funzione continua dimezzando a ogni passo un intervallo ai cui estremi la funzione ha segni opposti.

Prolungamento per continuità
Funzione che coincide con f fuori da una discontinuità eliminabile x_0 e vale in x_0 il limite di f; è continua in x_0.

Punto di discontinuità
Punto di accumulazione del dominio di f in cui f non è continua oppure non è definita.

Punto fisso
Un numero c tale che $f(c) = c$; ogni funzione continua da $[0; 1]$ in $[0; 1]$ ne ha almeno uno.

Teorema dei valori intermedi
Una funzione continua in $[a; b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema di esistenza degli zeri
Detto anche teorema di Bolzano: se f è continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, esiste $c \in]a; b[$ con $f(c) = 0$.

Teorema di Weierstrass
Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ha in esso massimo e minimo assoluti.

Soluzioni

1. C. Il limite deve esistere finito e coincidere con il valore $f(x_0)$; A e B sono condizioni necessarie ma non sufficienti.

2. B. Per $x \neq 1$ si ha $f(x) = x + 1$, quindi $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ma f non è definita in 1: discontinuità eliminabile.

3. A. Per $x > 0$ la funzione vale 1, per $x < 0$ vale -1: limiti laterali 1 e -1, salto $|1 - (-1)| = 2$.

4. D. In A la funzione non è definita in $0 \in [-1; 1]$; in B l'intervallo è aperto; in C tg x non è definita in $\pi/2$; e^{-x} è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0; 5]$.

5. B. $f(x) = x^5 + x - 1$ è continua, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, ed è strettamente crescente (somma di funzioni strettamente crescenti): uno zero e uno solo ($x \approx 0{,}755$).

6. D. $2x^2 + 3x = (x + 1)(2x + 1) - 1$, quindi $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$ e $f(x) - (2x + 1) \to 0$ per $x \to \pm\infty$.

7. a) Falso: gli zeri sono *almeno* uno; $x^3 - x$ in $[-2; 2]$ ne ha tre $(-1, 0, 1)$. b) Falso: x in $]0; 1[$ non ha massimo. c) Vero, per il teorema sulla funzione composta. d) Vero: $1/x$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; il punto 0, escluso dal dominio, è per la nostra convenzione un punto di discontinuità di seconda specie.

8. a) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. b) I limiti destro e sinistro in x_0 esistono finiti e sono diversi. c) Il limite $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

9. a) Terza specie: il limite è 1, la funzione non è definita in 0. b) Seconda specie: $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ (mentre $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$). c) Prima specie: i limiti laterali sono $\pi/2$ e $-\pi/2$, salto π. d) Terza specie: $|x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|$, quindi per il teorema del confronto il limite è 0, ma la funzione non è definita in 0.

10. $\lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} (2x - 1) = 3$ e $f(2) = 3$: limiti laterali e valore coincidono, f è continua in 2.

11. a) $\cos(\pi/3) = 1/2$. b) $\operatorname{sen} x / x \to 1$ e il logaritmo è continuo in 2: il limite è $\ln 2 \approx 0{,}693$. c) $(1 - x)/(2x) \to -1/2$, quindi il limite è $e^{-1/2} = 1/\sqrt{e} \approx 0{,}607$. d) $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$: il limite è $\operatorname{arctg}(1/2) \approx 0{,}464$.

12. a) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$, dominio $x \neq 1, 2$. In 2: $\lim f(x) = \lim \dfrac{x+2}{x-1} = 4$, discontinuità di terza specie. In 1: limiti $+\infty$ (da destra) e $-\infty$ (da sinistra), seconda specie. b) $f(x) = 1$ per $x > 3$ e -1 per $x < 3$: in 3 prima specie, salto 2. c) Per $x \to 0^+$, $e^{1/x} \to +\infty$ e $f(x) \to 0$; per $x \to 0^-$, $e^{1/x} \to 0$ e $f(x) \to 1$: in 0 prima specie, salto 1.

13. Limite sinistro in 2: $2k + 3$; limite destro e valore: $4 - k$. Da $2k + 3 = 4 - k$ si ottiene $k = 1/3$.

14. Da sinistra $\dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \cdot \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \to 2$; da destra $\dfrac{bx + \operatorname{sen} x}{x} = b + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to b + 1$. Continuità in 0: $a = 2$ e $b + 1 = 2$, cioè $a = 2$, $b = 1$.

15. a) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, limite 12: $F(x) = x^2 + 2x + 4$ per ogni x. b) Limite notevole 1/2: $F(x) = f(x)$ per $x \neq 0$, $F(0) = 1/2$. c) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \to 2/3$: $F(0) = 2/3$.

16. a) Asintoto verticale $x = 1$ (il numeratore in 1 vale 2); $x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x + 3) + 2$, asintoto obliquo $y = x + 3$. b) Nessun asintoto verticale ($x^2 + 1 > 0$); $3x^3 - x = 3x(x^2 + 1) - 4x$, quindi $f(x) = 3x - \dfrac{4x}{x^2+1}$: asintoto obliquo $y = 3x$. c) Dominio $x \leq 0$ o $x \geq 4$, nessun asintoto verticale. Per $x \to +\infty$: $m = 1$, $q = \lim \dfrac{-4x}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} = -2$, asintoto $y = x - 2$. Per $x \to -\infty$: $m = -1$, $q = \lim \dfrac{-4x}{\sqrt{x^2 - 4x} - x} = 2$, asintoto $y = -x + 2$.

17. a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$: $f(0) = -1$, $f(1) = 2$, strettamente crescente; soluzione unica, $x \approx 0{,}453$. b) $g(x) = \ln x + x - 2$: $g(1) = -1$, $g(2) = \ln 2 \approx 0{,}693$, strettamente crescente; $x \approx 1{,}557$. c) $g(x) = e^{-x} - x$: $g(0) = 1$,

$g(1) = 1/e - 1 \approx -0{,}632$, strettamente decrescente (somma di due funzioni decrescenti); $x \approx 0{,}567$. In ogni caso: esistenza dal teorema degli zeri, unicità dalla monotonia.

18. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Passo 0: $m = 0{,}5$, $f(m) = -0{,}375$, nuovo intervallo [0,5; 1]. Passo 1: $m = 0{,}75$, $f(m) \approx 0{,}172$, intervallo [0,5; 0,75]. Passo 2: $m = 0{,}625$, $f(m) \approx -0{,}131$, intervallo [0,625; 0,75], di ampiezza 1/8 (la soluzione è $x \approx 0{,}6823$). Servono $n > \log_2 10^4 \approx 13{,}29$, cioè 14 passi.

19. Dominio $x \neq 1$; nessuna simmetria. Unica intersezione con gli assi: O(0; 0). Segno: $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < 1$ con $x \neq 0$, e $f(0) = 0$: il grafico tocca l'asse x in O senza attraversarlo, e O è un massimo relativo. Limiti: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$: asintoto verticale $x = 1$, discontinuità di seconda specie. Da $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$: asintoto obliquo $y = x + 1$ per $x \to \pm\infty$, con il grafico sopra per $x > 1$ e sotto per $x < 1$. Il ramo destro scende da $+\infty$ e risale lungo l'asintoto: ha un minimo (nel capitolo 7 si trova (2; 4)).

20. Si ha $||x| - |x_0|| \le |x - x_0|$ (disuguaglianza triangolare). Dato $\varepsilon > 0$, con $\delta = \varepsilon$: se $|x - x_0| < \delta$, allora $||x| - |x_0|| < \varepsilon$. Quindi $\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$ in ogni punto.

21. Traccia: con coefficiente direttivo positivo, $p(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ e $p(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$; per la definizione di limite esistono $a < b$ con $p(a) < 0 < p(b)$; il polinomio è continuo in $[a; b]$ e il teorema degli zeri dà uno zero. Con coefficiente direttivo negativo si considera $-p$. Per il grado pari i limiti a $\pm\infty$ hanno lo stesso segno e il ragionamento cade: $x^2 + 1$ non ha zeri reali.

22. Sia $g(x) = f(x) - x$, continua in [0; 1]. Poiché i valori di f stanno in [0; 1], $g(0) = f(0) \ge 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \le 0$. Se uno dei due è nullo, $c = 0$ o $c = 1$; altrimenti $g(0) > 0 > g(1)$ e per il teorema degli zeri esiste $c \in]0; 1[$ con $g(c) = 0$, cioè $f(c) = c$. Sul grafico: la curva $y = f(x)$, che sta nel quadrato $[0; 1] \times [0; 1]$ e va da un lato verticale all'altro senza salti, incontra la diagonale $y = x$.

23. Il teorema richiede che f sia continua nell'intervallo chiuso $[-1; 1]$, ma $1/x$ non è definita in 0, che sta nell'intervallo. Infatti $1/x$ non si annulla mai: il cambiamento di segno avviene attraverso l'asintoto verticale $x = 0$.

24. a) Per esempio $f(x) = -1$ per $0 \le x < 1$ e $f(x) = 1$ per $1 \le x \le 2$: manca la continuità (salto in 1). b) Per esempio $f(x) = x$ in $]0; 1[$: l'estremo superiore 1 e l'estremo inferiore 0 non sono raggiunti; manca la chiusura dell'intervallo.

25. Per il teorema di Weierstrass esistono x_m, $x_M \in [a; b]$ con $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$, e tutti i valori di f stanno in $[m; M]$. Applicando il teorema dei valori intermedi a f nell'intervallo di estremi x_m e x_M (contenuto in $[a; b]$, dove f è continua), ogni $k \in [m; M]$ è un valore di f. Quindi l'insieme dei valori è esattamente $[m; M]$ (un solo punto se f è costante).

26. Sia L la lunghezza del sentiero e siano $s_1(t)$ e $s_2(t)$ le distanze, misurate lungo il sentiero dal rifugio a valle, a cui si trova l'escursionista all'ora t del sabato e della domenica, per $7 \le t \le 17$. La funzione $d(t) = s_1(t) - s_2(t)$ è continua, con $d(7) = 0 - L < 0$ e $d(17) = L - 0 > 0$: per il teorema degli zeri esiste t^* con $s_1(t^*) = s_2(t^*)$. Ipotesi: la posizione varia con continuità nel tempo (le soste sono tratti in cui è costante, e non creano salti).

27. a) $C(t) = 2$ € per $0 < t \le 1$, 4 € per $1 < t \le 2$, 6 € per $2 < t \le 3$, 8 € per $3 < t \le 4$; il grafico è una «scala» di gradini alti 2 €, ciascuno chiuso a destra. b) In $t = 1, 2, 3$ discontinuità di prima specie con salto 2 €. c) In $t = 1$: $C(1) = 2$, limite sinistro 2, limite destro 4: C è continua a sinistra, non a destra.

28. a) Continuità in R: $kR = GM/R^2$, quindi $k = GM/R^3$. b) $g(R) = GM/R^2$; $g(R/2) = k \cdot R/2 = GM/(2R^2) = g(R)/2$; $g(2R) = GM/(4R^2) = g(R)/4$. c) g è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0; 3R]$, cresce in $[0; R]$ e decresce per $r > R$: il massimo è $g(R) = GM/R^2$, sulla superficie.

29. a) Sia $\varphi(h) = h^2(3 - h)$, continua, con $\varphi(0) = 0 < 2{,}4$ e $\varphi(2) = 4 > 2{,}4$: per il teorema dei valori intermedi c'è una soluzione. Per $0 \le h_1 < h_2 \le 2$: $\varphi(h_2) - \varphi(h_1) = (h_2 - h_1)[3(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)]$; poiché $h_1^2 \le 2h_1$, $h_1h_2 \le 2h_1$ e $h_2^2 \le 2h_2$, la seconda parentesi è almeno $3h_1 + 3h_2 - 4h_1 - 2h_2 = h_2 - h_1 > 0$. Quindi φ è strettamente crescente (più la sfera affonda, più acqua sposta) e la soluzione è unica. b)

$2/2^n < 0{,}01$, cioè $2^n > 200$: 8 passi ($2^8 = 256$). c) Con $f(h) = h^3 - 3h^2 + 2{,}4$ ($f(0) = 2{,}4$, $f(2) = -1{,}6$) gli intervalli sono [1; 2], [1; 1,5], [1; 1,25], [1,125; 1,25], [1,125; 1,1875], [1,125; 1,15625], [1,125; 1,140625], [1,1328125; 1,140625]. Quindi $h \approx 1{,}13$ dm (più precisamente $h \approx 1{,}134$ dm).

30. a) $\lim_{x\to 0^+} p(x) = +\infty$: asintoto verticale $x = 0$; $p(x) - 2x = 32/x \to 0$ per $x \to +\infty$: asintoto obliquo $y = 2x$. Un rettangolo con base piccolissima ha altezza $16/x$ enorme e perimetro enorme; uno con base molto lunga ha perimetro circa doppio della base. b) p è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 8]. c) No: $]0; +\infty[$ non è né chiuso né limitato, e il teorema non dice nulla; il minimo esiste comunque ($x = 4$, il quadrato, con $p = 16$ cm), come si dimostrerà nel capitolo 8.

31. a) I valori della tabella. b) $n > \log_2 10^6 \approx 19{,}93$: 20 passi.

32. Per $x \to 0^+$, $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} \to 2$; la continuità in 0 richiede $f(0) = a + b = 2$. Per $x \to -\infty$, $a\,e^x + b \to b$, quindi $b = 1$ e $a = 1$: $f(x) = e^x + 1$ per $x \le 0$.

33. $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ è continua, $f(-1) = -1 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$: c'è uno zero in $]-1; 0[$. È strettamente crescente in $\mathbb{R}$, perché x^5 e x^3 lo sono: lo zero è unico ($x \approx -0{,}838$).

34. Sia $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, continua in [0; 1]. Allora $g(0) = f(1) - f(0)$ e $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0)$. Se $g(0) = 0$ basta $c = 0$; altrimenti $g(0)$ e $g(1)$ hanno segni opposti e per il teorema degli zeri esiste $c \in]0; 1[$ con $g(c) = 0$, cioè $f(c) = f(c + 1)$.

35. $m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = a$, quindi $a = 2$. Poi $f(x) - 2x = \dfrac{(b+2)x + 1}{x - 1} \to b + 2$, quindi $b + 2 = 3$ e $b = 1$. Con $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$ il numeratore in 1 vale $4 \neq 0$, quindi $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to 1^{\pm}$: $x = 1$ è un asintoto verticale.

36. $\dfrac{1 - \cos kx}{x^2} = k^2 \cdot \dfrac{1 - \cos kx}{(kx)^2} \to \dfrac{k^2}{2}$; la continuità richiede $k^2/2 = 8$, quindi $k = 4$.