CAPITOLO

3

Il calcolo dei limiti

Calcolare un limite vuol dire riconoscere, dentro un'espressione complicata, pochi pezzi di cui si conosce già il comportamento. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Applicare i teoremi sull'algebra dei limiti e l'aritmetizzazione parziale di $\pm\infty$.
2. Riconoscere le sette forme indeterminate e scioglierle nelle funzioni razionali, irrazionali e composte.
3. Dimostrare il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e ricavarne gli altri limiti notevoli goniometrici, esponenziali e logaritmici.
4. Confrontare infinitesimi e infiniti, usare il principio di sostituzione e la gerarchia degli infiniti.
5. Calcolare limiti nelle forme 1^∞, 0^0, ∞^0 e applicare i limiti a successioni e modelli, come la capitalizzazione continua.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 L'algebra dei limiti 2
3.2 Funzioni razionali, irrazionali e composte 6
3.3 I limiti notevoli 9
3.4 Infinitesimi e infiniti 15
3.5 Forme esponenziali e applicazioni 20

Matematica 5 · Parte I · Limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 3: Il calcolo dei limiti · pagine 77–104 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente abbiamo dato un significato preciso alla frase «$f(x)$ si avvicina a L quando x si avvicina a x_0». La definizione, però, ha un limite pratico: permette di *verificare* un limite che qualcuno ci ha già suggerito, non di *trovarlo*. Per sapere quanto vale $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\ln(1+2x)}$ non possiamo tirare a indovinare e poi risolvere una disequazione con ε.

Succede lo stesso con l'aritmetica: nessuno calcola $37 \cdot 24$ tornando alla definizione di moltiplicazione. Si usano poche regole generali e una piccola tabella di risultati già noti. In questo capitolo costruiamo gli stessi strumenti per i limiti: i teoremi sulle operazioni, che riducono un limite complicato ai limiti dei suoi pezzi; le *forme indeterminate*, cioè i casi in cui quei teoremi tacciono; una manciata di *limiti notevoli*, dimostrati una volta per tutte; e il confronto fra infinitesimi e fra infiniti, che permette di capire quale pezzo di un'espressione «comanda» vicino a un punto.

3.1 L'algebra dei limiti

3.1.1 I teoremi sulle operazioni

Supponiamo di conoscere i limiti di due funzioni f e g per $x \to x_0$, dove x_0 è un punto di accumulazione del dominio comune, un numero reale oppure $+\infty$ o $-\infty$; tutto ciò che segue vale anche per i limiti destro e sinistro. Se i due limiti sono numeri reali, il limite della somma, del prodotto e del quoziente si ottiene combinando i limiti, esattamente come ci si aspetta.

IN SINTESI

Teorema (algebra dei limiti). Ipotesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, con $L, M \in \mathbb{R}$. **Tesi:**

- $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ e $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$; in particolare $\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot L$ per ogni costante k;
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, purché $M \neq 0$;
- $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = L^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; se $L > 0$, $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = L^M$.

Dimostriamo il teorema della somma: è il modello di tutte le dimostrazioni di questo tipo. Scriviamola per x_0 reale; per $x_0 = \pm\infty$ basta sostituire gli intorni di x_0 con quelli di $\pm\infty$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $f(x) \to L$, in corrispondenza del numero positivo $\varepsilon/2$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per ogni x del dominio con $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Allo stesso modo, poiché

$g(x) \to M$, esiste $\delta_2 > 0$ tale che $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Sia δ il minore fra δ_1 e δ_2: per $0 < |x - x_0| < \delta$ valgono entrambe le disuguaglianze e, per la disuguaglianza triangolare,

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato un intorno di x_0 in cui $f + g$ dista da $L + M$ meno di ε: questa è proprio la definizione di $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$. c.v.d.

Il trucco è stato «dividere» la tolleranza ε in due parti, una per ciascuna funzione. Per il prodotto l'idea è la stessa, con un passaggio in più: si scrive $fg - LM = f(g - M) + M(f - L)$ e si usa il fatto che una funzione che ha limite finito è limitata in un intorno di x_0 (lo dimostrerai negli esercizi). Le altre dimostrazioni non le riportiamo: il programma chiede di saper *usare* questi teoremi, e il loro contenuto è intuitivo.

Una conseguenza immediata: per un polinomio, e per una funzione razionale in un punto in cui il denominatore non si annulla, il limite si calcola *sostituendo*. Per esempio $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x}{x + 1} = \dfrac{8 - 10}{3} = -\dfrac{2}{3}$. Nel prossimo capitolo diremo che queste funzioni sono *continue*.

3.1.2 Limiti infiniti: l'aritmetizzazione parziale

I teoremi si estendono, con qualche cautela, a funzioni che tendono a $+\infty$ o a $-\infty$. Se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to 3$, la somma $f + g$ è un numero enorme più un numero vicino a 3, e quindi tende a $+\infty$. Per dimostrarlo: dato un qualunque $K > 0$, vicino a x_0 si ha $g(x) > 2$ (permanenza del segno applicata a $g - 2$) e $f(x) > K$, dunque $f(x) + g(x) > K + 2 > K$. Risultati di questo tipo si riassumono con un linguaggio abbreviato che tratta $\pm\infty$ *come se* fossero numeri; si parla di **aritmetizzazione parziale** della retta ampliata, «parziale» perché alcune operazioni restano senza risultato. La Tabella 3.1 le raccoglie.

Tabella 3.1 L'aritmetizzazione parziale di ±∞. Ogni riga è un teorema sui limiti: per esempio «$a + (+\infty) = +\infty$» significa «se $f \to a$ e $g \to +\infty$, allora $f + g \to +\infty$». Qui a è un numero reale.

Operazione	Risultato	Condizioni
$a + (+\infty)$; $(+\infty) + (+\infty)$	$+\infty$	$a \in \mathbb{R}$
$a + (-\infty)$; $(-\infty) + (-\infty)$	$-\infty$	$a \in \mathbb{R}$
$a \cdot (\pm\infty)$	$\pm\infty$ se $a > 0$; $\mp\infty$ se $a < 0$	$a \neq 0$
$(+\infty) \cdot (+\infty)$; $(-\infty) \cdot (-\infty)$	$+\infty$	regola dei segni
$(+\infty) \cdot (-\infty)$	$-\infty$	regola dei segni
$\frac{a}{\pm\infty}$	0	$a \in \mathbb{R}$
$\frac{\pm\infty}{a}$	$\pm\infty$ se $a > 0$; $\mp\infty$ se $a < 0$	$a \neq 0$
$\frac{a}{0^+}$; $\frac{a}{0^-}$	$+\infty, -\infty$ se $a > 0$; $-\infty, +\infty$ se $a < 0$	$a \neq 0$; anche $a = \pm\infty$
$(+\infty)^a$	$+\infty$ se $a > 0$; 0 se $a < 0$	$a \neq 0$
$a^{+\infty}$; $a^{-\infty}$	$+\infty$, 0 se $a > 1$; 0, $+\infty$ se $0 < a < 1$	$a > 0$, $a \neq 1$

Il simbolo 0^+ indica una funzione che tende a 0 *restando positiva*, 0^- una che tende a 0 restando negativa. La distinzione è essenziale: scrivere «$\frac{1}{0} = \infty$» non ha senso, perché $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a $-\infty$ per $x \to 0^-$, mentre il limite per $x \to 0$ non esiste (capitolo 2). Prima di applicare la tabella bisogna sempre stabilire il segno di ciò che tende a zero.

Ecco qualche esempio, in cui usiamo i limiti delle funzioni elementari letti dai grafici nel capitolo 2.

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$: il numeratore tende a $-\infty$ e il denominatore a 0^+, quindi il limite è $-\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - 3}{\operatorname{arctg} x}$: il numeratore tende a $0 - 3 = -3$, il denominatore a $\frac{\pi}{2}$; il limite è $-3 \cdot \frac{2}{\pi} = -\frac{6}{\pi}$.
- $\lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}}$: per $x < 1$ l'esponente è $\frac{1}{0^-} \to -\infty$, e $2^{-\infty} = 0$. Da destra, invece, l'esponente tende a $+\infty$ e il limite è $+\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

3.1.3 Le forme indeterminate

La tabella non contiene alcune combinazioni: $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Non è una dimenticanza. Per queste combinazioni la conoscenza dei limiti di f e di g *non basta* a stabilire il limite del risultato, che dipende da come sono fatte le funzioni. Si dice che il limite si presenta in una **forma indeterminata**. Le forme indeterminate sono sette:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

Per convincersi che sono davvero «indeterminate» basta trovare, per ciascuna, due esempi con limiti diversi: la Tabella 3.2 lo fa. Le ultime tre riguardano le potenze $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$: poiché $f^g = e^{g \ln f}$, il limite dipende da quello del prodotto $g \cdot \ln f$, che nei tre casi è proprio della forma $0 \cdot \infty$ (per esempio, nella forma 1^{∞} l'esponente tende a ∞ e $\ln f$ tende a $\ln 1 = 0$).

Tabella 3.2 Le sette forme indeterminate. Per ciascuna, due coppie di funzioni con gli stessi limiti di partenza e limiti diversi del risultato.

Forma	Primo esempio	Secondo esempio
$+\infty - \infty$	$(x+1) - x \to 1 \quad (x \to +\infty)$	$x^2 - x \to +\infty \quad (x \to +\infty)$
$0 \cdot \infty$	$\frac{1}{x} \cdot 2x \to 2 \quad (x \to +\infty)$	$\frac{1}{x} \cdot x^2 \to +\infty \quad (x \to +\infty)$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{3x}{x} \to 3 \quad (x \to +\infty)$	$\frac{x^2}{x} \to +\infty \quad (x \to +\infty)$
$\frac{0}{0}$	$\frac{2x}{x} \to 2 \quad (x \to 0)$	$\frac{x^2}{x} \to 0 \quad (x \to 0)$
1^{∞}	$(1 + \frac{1}{x})^x \to e \quad (x \to +\infty)$	$(1 + \frac{1}{x^2})^x \to 1 \quad (x \to +\infty)$
0^0	$x^x \to 1 \quad (x \to 0^+)$	$(e^{-1/x})^x \to \frac{1}{e} \quad (x \to 0^+)$
∞^0	$x^{1/x} \to 1 \quad (x \to +\infty)$	$(e^x)^{1/x} \to e \quad (x \to +\infty)$

Attenzione al significato della parola: una forma indeterminata *non* è un limite che non esiste. È un limite che i teoremi sulle operazioni non sanno calcolare, e che va calcolato in un altro modo: trasformando l'espressione (scomponendo, raccogliendo, razionalizzando) oppure riconducendola a limiti già noti. Il resto del capitolo è dedicato proprio a queste tecniche. Alcuni dei limiti della tabella, come $x^x \to 1$, li dimostreremo più avanti.

ERRORE FREQUENTE

Le forme indeterminate non sono «numeri da semplificare». Sono sbagliate tutte queste scorciatoie:

- «$\infty - \infty = 0$»: $(x^2 + x) - x^2 \to +\infty$ per $x \to +\infty$, mentre $(x + 5) - x \to 5$;
- «$1^\infty = 1$»: $(1 + \frac{1}{x})^x$ tende a $e \approx 2{,}718$, non a 1;
- «$\frac{0}{0} = 1$» e «$0 \cdot \infty = 0$»: $\frac{x^2}{x} \to 0$ ma $\frac{x}{x^2} \to +\infty$ per $x \to 0^+$; $x \cdot \frac{1}{x} \to 1$;
- «$\frac{1}{0} = \infty$» senza segno: occorre sapere se il denominatore tende a 0^+ o a 0^-, e se non ha segno costante il limite può non esistere.

3.2 Funzioni razionali, irrazionali e composte

3.2.1 Funzioni razionali all'infinito

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 4x^2 + 1)$. I primi due termini tendono a $+\infty$ e $-\infty$: è la forma $+\infty - \infty$. Il rimedio è *raccogliere la potenza di grado massimo*:

$$x^3 - 4x^2 + 1 = x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \to (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

La parentesi tende a 1 perché $\frac{4}{x}$ e $\frac{1}{x^3}$ tendono a 0. In generale, per $x \to \pm\infty$ **un polinomio si comporta come il suo termine di grado massimo**: tutti gli altri, divisi per esso, diventano trascurabili. Lo stesso raccoglimento, fatto al numeratore e al denominatore, risolve la forma $\frac{\infty}{\infty}$ delle funzioni razionali. Se $a_n\,x^n$ e $b_m\,x^m$ sono i termini di grado massimo del numeratore e del denominatore,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \left\{ \pm\infty \text{ se } n > m; \quad \frac{a_n}{b_m} \text{ se } n = m; \quad 0 \text{ se } n < m \right\}.$$

Nel primo caso il segno dell'infinito si ottiene dalla regola dei segni, considerando il segno di $\frac{a_n}{b_m}$ e quello di x^{n-m}. Per esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 3}{2x^2 + x} = \frac{4}{2} = 2$, mentre $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 5} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

3.2.2 La forma 0/0 nelle funzioni razionali

Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi che si annullano entrambi in x_0, il limite di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $x \to x_0$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Per il teorema di Ruffini (*Matematica 2*) entrambi sono divisibili per $x - x_0$: si scompone e si semplifica il fattore comune. La semplificazione è lecita proprio grazie alla definizione di limite, che considera solo valori $x \neq x_0$: per questi $x - x_0 \neq 0$ e $\frac{(x-x_0)\,A(x)}{(x-x_0)\,B(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$. Le due funzioni sono diverse (la prima non è definita in x_0), ma hanno lo stesso limite.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola: a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-2x-3}$; b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-x}{x^2+4}$; c) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+4x+4}$.

a) Sostituendo 3 si ottiene $\frac{0}{0}$. Scomponiamo: $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ (differenza di cubi) e $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Per $x \neq 3$

$$\frac{x^3-27}{x^2-2x-3} = \frac{x^2+3x+9}{x+1} \to \frac{9+9+9}{4} = \frac{27}{4}.$$

b) Il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore: $\frac{2x^3-x}{x^2+4}$ si comporta come $\frac{2x^3}{x^2} = 2x$. Il limite è $+\infty$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$ per $x \to -\infty$.

c) Anche qui la forma è $\frac{0}{0}$, e $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Per $x \neq -2$ la funzione è $\frac{1}{x+2}$, che non è più indeterminata: $\frac{1}{0^+} = +\infty$ per $x \to -2^+$ e $\frac{1}{0^-} = -\infty$ per $x \to -2^-$. Il limite per $x \to -2$ non esiste. Sciogliere una forma indeterminata non garantisce che il limite esista: garantisce solo di poterlo studiare.

3.2.3 Funzioni irrazionali: la razionalizzazione

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$. Entrambi i termini tendono a $+\infty$: forma $+\infty - \infty$. Raccogliere x qui non aiuta subito; conviene invece moltiplicare e dividere per la somma $\sqrt{x^2+x} + x$, sfruttando il prodotto notevole $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Questa operazione si chiama **razionalizzazione**, perché fa sparire la radice dal termine che dava problemi:

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}.$$

Ora la forma è $\frac{\infty}{\infty}$. Per $x > 0$ si ha $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$; dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Il risultato non è affatto evidente: i due termini crescono senza limite, ma la loro differenza si stabilizza su $\frac{1}{2}$. Per $x = 100$, per esempio, $\sqrt{10\,100} - 100 \approx 0{,}49876$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola: a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$; c) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

a) Per $x \to -\infty$ il primo termine tende a $+\infty$ e $-x$ tende a $+\infty$: la forma è $+\infty + \infty = +\infty$, nessuna indeterminazione.

b) Qui la forma è $+\infty - \infty$. Razionalizziamo come sopra: $\sqrt{x^2+x}+x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$. Attenzione al segno: per $x < 0$ si ha $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, quindi $\sqrt{x^2+x} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$. Allora

$$\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} \to -\frac{1}{2}.$$

c) Forma $\frac{0}{0}$. Moltiplichiamo per $\sqrt{x+5}+3$: il numeratore diventa $x+5-9 = x-4$, che si semplifica: $\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} \to \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$.

3.2.4 Limiti di funzioni composte

Molti limiti riguardano funzioni composte, come e^{-x^2} o $\operatorname{arctg}(x^2 - x)$. L'idea è naturale: se la funzione interna g porta x verso y_0, e la funzione esterna f porta y verso L quando $y \to y_0$, allora $f(g(x))$ tende a L.

Teorema (limite della funzione composta). Se $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y\to y_0} f(y) = L$ (dove x_0, y_0, L possono essere anche $\pm\infty$), allora $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L$, purché valga almeno una di queste condizioni: $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$ di un intorno di x_0; oppure f è definita in y_0 e $f(y_0) = L$.

La condizione esclude un caso patologico. Siano $g(x) = 0$ per ogni x e $f(y) = 1$ per $y \neq 0$, $f(0) = 0$. Allora $g(x) \to 0$ e $f(y) \to 1$ per $y \to 0$; ma $f(g(x)) = f(0) = 0$ per ogni x, e il limite della composta è 0, non 1. Con le funzioni che incontrerai nella pratica la condizione è quasi sempre soddisfatta.

Il teorema giustifica la tecnica più usata nel calcolo dei limiti: la *sostituzione*, o cambio di variabile. Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}$ si pone $y = -x^2$: quando $x \to +\infty$, $y \to -\infty$, e $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$. Allo stesso modo $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x^2 - x) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}\, y = \dfrac{\pi}{2}$, perché $x^2 - x \to +\infty$; e $\lim_{x\to1} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}} = \sqrt{2}$, perché il radicando tende a 2 (capitolo 2) e la radice quadrata è definita e continua in 2.

3.3 I limiti notevoli

Con le tecniche algebriche si sciolgono le forme indeterminate delle funzioni razionali e irrazionali. Ma che dire di $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ per $x \to 0$? Nessuna scomposizione trasforma un seno in un polinomio. Servono alcuni risultati di base, dimostrati una volta per tutte, ai quali ricondurre gli altri limiti: si chiamano **limiti notevoli**.

3.3.1 Il limite fondamentale della goniometria

In *Matematica 4* (capitolo 5) avevamo osservato, con una tabella, che per x piccolo e misurato in radianti il rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ è molto vicino a 1. Ora lo dimostriamo.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: x è misurato in radianti. **Tesi:** $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo prima $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Sulla circonferenza goniometrica di centro O siano $A(1; 0)$, $P(\cos x; \operatorname{sen} x)$ il punto che corrisponde all'angolo x, e $T(1; \operatorname{tg} x)$ il punto in cui la semiretta OP incontra la retta tangente in A (Figura 3.1). Il triangolo OAP è contenuto nel settore circolare OAP, che a sua volta è contenuto nel triangolo OAT. Confrontiamo le aree:

- il triangolo OAP ha base OA = 1 e altezza sen x, quindi area $\dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$;
- il settore circolare di raggio 1 e angolo x ha area $\dfrac{1}{2} x$ (l'area di un settore è proporzionale all'angolo: π per l'angolo giro 2π; qui l'uso dei radianti è essenziale);
- il triangolo OAT ha base 1 e altezza AT = tg x, quindi area $\dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

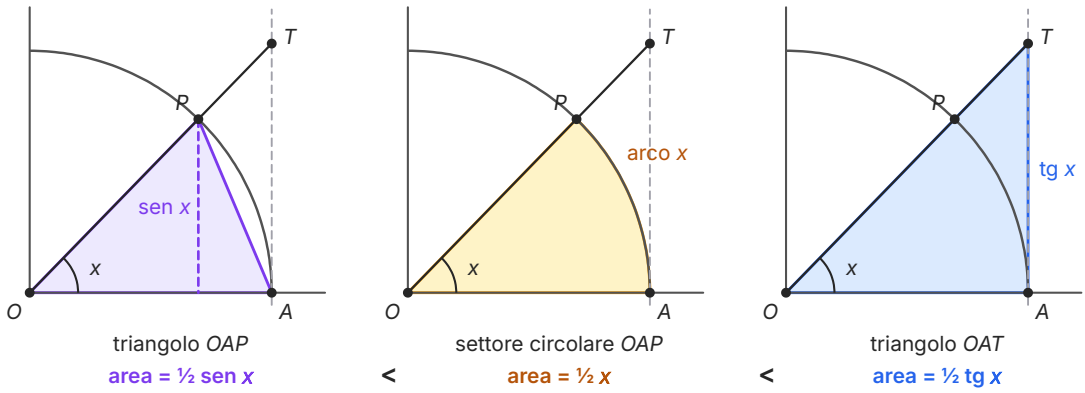


Figura 3.1 Le tre figure confrontate nella dimostrazione, con $x = 0{,}8$ rad sulla circonferenza goniometrica (scala uguale sui due assi). Il triangolo OAP è contenuto nel settore circolare OAP, che è contenuto nel triangolo OAT: perciò $\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Dalle inclusioni segue $\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x < \frac{1}{2}\, x < \frac{1}{2}\,\text{tg}\, x$, cioè $\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x$. Dividiamo per $\text{sen}\, x$, che è positivo:

$$1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \textit{e passando ai reciproci} \qquad \cos x < \frac{\text{sen}\, x}{x} < 1.$$

Le stesse disuguaglianze valgono per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, perché $\cos x$ e $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ sono funzioni pari: cambiando x in $-x$ non cambiano. Infine $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. La funzione $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ è dunque compresa fra $\cos x$ e la costante 1, che tendono entrambe a 1: per il teorema del confronto (capitolo 2) anche $\frac{\text{sen}\, x}{x} \to 1$. c.v.d. Dalla disuguaglianza $\text{sen}\, x < x$ su $]0; \frac{\pi}{2}[$ segue anche $|\text{sen}\, x| \le |x|$ per ogni x reale: per $x \ge \frac{\pi}{2}$ è ovvia, perché $\text{sen}\, x \le 1 < \frac{\pi}{2}$, e per $x < 0$ basta cambiare x in $-x$.

La Figura 3.2 mostra il grafico di $y = \frac{\text{sen}\, x}{x}$. La funzione non è definita in 0, ma il suo grafico si avvicina al punto (0; 1) da entrambi i lati. Lontano dall'origine oscilla con ampiezza sempre minore, perché $\left|\frac{\text{sen}\, x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$: per il teorema del confronto, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 0$.

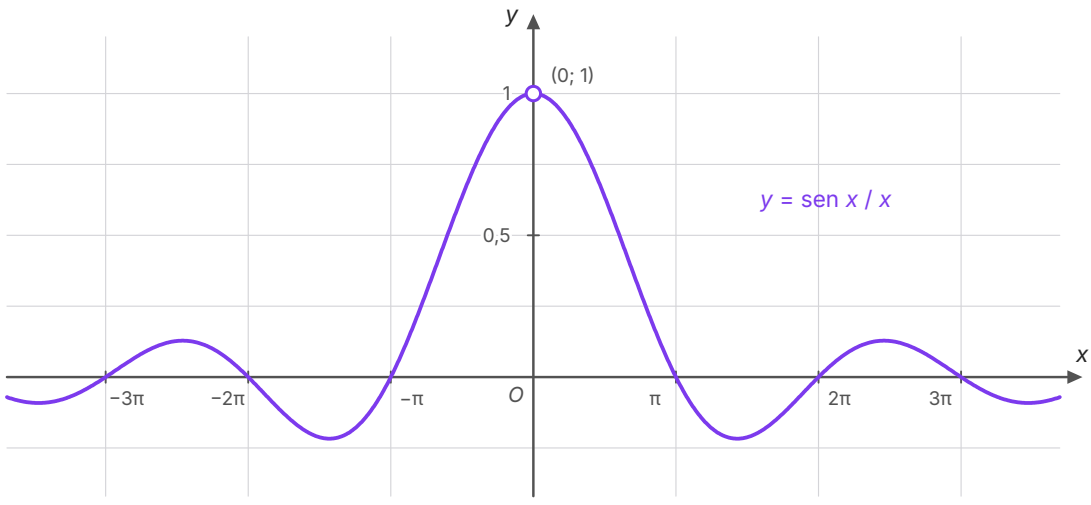


Figura 3.2 Il grafico di $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (scale diverse sui due assi). La funzione è pari, non è definita in $x = 0$ (cerchietto vuoto) e tende a 1 per $x \to 0$; si annulla nei punti $x = k\pi$ con $k \neq 0$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

APPROFONDIMENTO · PERCHÉ I RADIANTI

Perché in analisi gli angoli si misurano in radianti? Il limite appena dimostrato dà la risposta. Se x è un angolo in gradi, il suo seno è il seno dell'angolo di $\dfrac{\pi x}{180}$ radianti. Con la sostituzione $t = \dfrac{\pi x}{180}$, che tende a 0 quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^\circ)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{\frac{180\,t}{\pi}} = \frac{\pi}{180} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453.$$

In gradi, il limite fondamentale non è 1 ma un numero scomodo, e quel fattore $\dfrac{\pi}{180}$ si trascinerebbe in tutte le formule del calcolo: nel capitolo 5 la derivata di sen x sarebbe $\dfrac{\pi}{180}\cos x$ invece di $\cos x$. Il radiante è l'unità «naturale» proprio perché rende 1 questo limite: geometricamente, per angoli piccoli l'arco e la corda della circonferenza goniometrica hanno quasi la stessa lunghezza, e il radiante misura l'angolo proprio con l'arco.

3.3.2 Conseguenze: altri limiti goniometrici

Dal limite fondamentale se ne ricavano altri, con trasformazioni goniometriche. Per $x \to 0$ il rapporto $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ è nella forma $\dfrac{0}{0}$. Moltiplichiamo e dividiamo per $1 + \cos x$ e usiamo

$1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} \to 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue anche $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot x = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Allo stesso modo $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \to 1 \cdot 1 = 1$. Infine, grazie al teorema sulle funzioni composte, nel limite fondamentale si può mettere al posto di x qualsiasi funzione che tende a 0 senza annullarsi: per esempio, con $t = 5x$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5 \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 5.$$

3.3.3 Il numero *e* e i limiti esponenziali e logaritmici

Nel capitolo 1 abbiamo definito il numero e come limite della successione $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Si dimostra (ma non lo faremo) che lo stesso limite vale quando la variabile è reale e tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}718281828.$$

La funzione $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ è definita dove la base è positiva, cioè per $x < -1$ o $x > 0$. La Figura 3.3 mostra che per $x \to +\infty$ cresce verso e restando sotto la retta $y = e$, mentre per $x \to -\infty$ decresce verso e restando sopra. Con la sostituzione $t = \dfrac{1}{x}$, che tende a 0 quando $x \to \pm\infty$, si ottiene una forma equivalente, molto comoda:

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

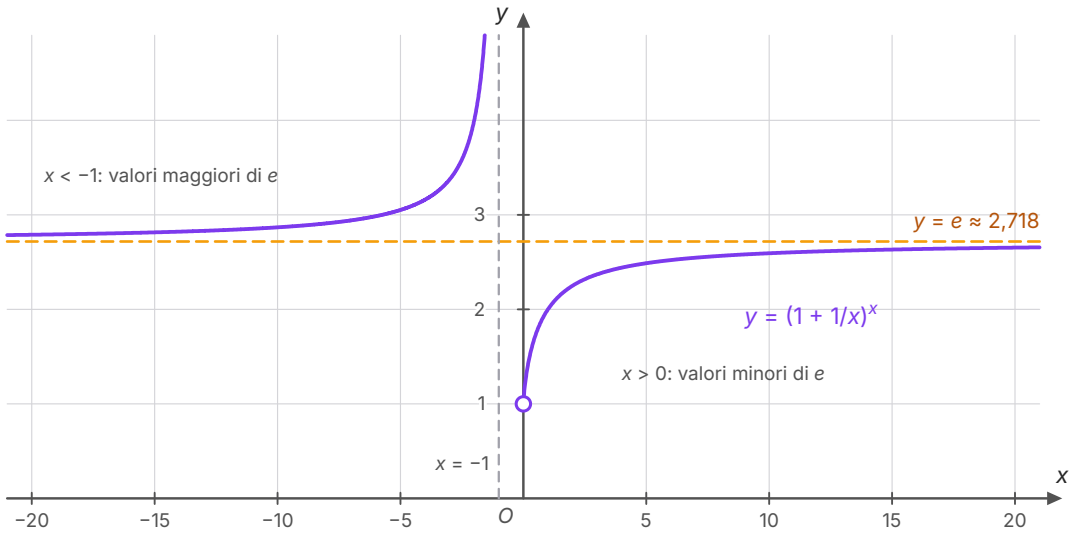


Figura 3.3 Il grafico di $y = (1 + \frac{1}{x})^x$, definita per $x < -1$ e per $x > 0$ (scale diverse sui due assi). La retta $y = e$ (tratteggiata) è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$; per $x \to -1^-$ la funzione tende a $+\infty$, per $x \to 0^+$ tende a 1 (cerchietto vuoto).

Da qui discendono i limiti notevoli delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Li ricaviamo uno dopo l'altro, ciascuno dal precedente.

- **Logaritmo.** Per le proprietà dei logaritmi $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x}$. L'argomento tende a e e il logaritmo è continuo, quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$.
- **Esponenziale.** In $\dfrac{e^x - 1}{x}$ poniamo $t = e^x - 1$: allora $x = \ln(1+t)$ e $t \to 0$ quando $x \to 0$. Il rapporto diventa $\dfrac{t}{\ln(1+t)}$, il reciproco del precedente, e tende a 1. Dunque $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- **Base qualsiasi.** Poiché $a^x = e^{x \ln a}$ (con $a > 0$), si ha $\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \dfrac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \to \ln a$. Dal logaritmo naturale, con $\log_a(1+x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}$, si ottiene $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} \to \dfrac{1}{\ln a}$ (con $a \neq 1$).
- **Potenza.** Per ogni k reale, $(1+x)^k - 1 = e^{k \ln(1+x)} - 1$. Posto $u = k \ln(1+x)$, che tende a 0, si scrive $\dfrac{(1+x)^k - 1}{x} = \dfrac{e^u - 1}{u} \cdot k \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \cdot k \cdot 1 = k$ (per $k = 0$ il rapporto è identicamente nullo e il risultato vale ancora).

La Tabella 3.3 raccoglie tutti i limiti notevoli. Conviene ricordarli nella forma «generalizzata»: al posto di x può stare qualsiasi funzione $f(x)$ che tende a 0 (senza annullarsi vicino al punto),

come abbiamo fatto con $\operatorname{sen} 5x$.

Tabella 3.3 I limiti notevoli. Tutti, tranne il primo, sono per $x \to 0$; per gli ultimi due $a > 0$, $a \neq 1$ nel logaritmo.

Limite	Valore	Da dove viene
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$	e	capitolo 1
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	1	confronto di aree
$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	1	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$
$\frac{1-\cos x}{x^2}$	$\frac{1}{2}$	$1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x$
$\frac{\ln(1+x)}{x}$	1	logaritmo di $(1+x)^{1/x}$
$\frac{e^x-1}{x}$	1	sostituzione $t=e^x-1$
$\frac{(1+x)^k-1}{x}$	k	$e^{k\ln(1+x)}$
$\frac{a^x-1}{x}$; $\frac{\log_a(1+x)}{x}$	$\ln a$; $\frac{1}{\ln a}$	cambio di base

ESEMPIO SVOLTO

Calcola: a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\operatorname{sen} x}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$.

a) Forma $\frac{0}{0}$. Facciamo comparire i due limiti notevoli moltiplicando e dividendo per $4x$ e per $3x$:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 3x}=\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{4x}{3x}\to 1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

b) Dividiamo numeratore e denominatore per x^2: $\frac{1-\cos x}{x\operatorname{sen} x}=\frac{(1-\cos x)/x^2}{(\operatorname{sen} x)/x}\to\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$.

c) Moltiplichiamo e dividiamo per $3x$ e per $2x$:

$$\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{3x}{2x}\to 1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

3.4 Infinitesimi e infiniti

3.4.1 Il confronto fra infinitesimi

Una funzione f si dice un **infinitesimo** per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Per $x \to 0$ sono infinitesimi x, x^2, $\operatorname{sen} x$, $1 - \cos x$, $e^x - 1$; per $x \to +\infty$ lo sono $\dfrac{1}{x}$ e e^{-x}. Tutti tendono a zero, ma non con la stessa rapidità: per $x = 0{,}1$ si ha $x^2 = 0{,}01$ e $1 - \cos x \approx 0{,}005$, mentre $\operatorname{sen} x \approx 0{,}0998$ è quasi uguale a x (Figura 3.4). Per confrontare due infinitesimi f e g (con $g \neq 0$ vicino a x_0) si studia il limite del loro rapporto.

- Se $\lim \dfrac{f}{g} = 0$, f è un **infinitesimo di ordine superiore** a g: tende a zero «più in fretta». Per esempio x^2 è di ordine superiore a x per $x \to 0$, perché $\dfrac{x^2}{x} = x \to 0$.
- Se $\lim \dfrac{f}{g} = l$, con l reale diverso da 0, f e g sono **infinitesimi dello stesso ordine**. In particolare, se $l = 1$, si dicono **infinitesimi equivalenti** e si scrive $f \sim g$.
- Se $\lim \dfrac{f}{g} = \pm\infty$, f è di ordine inferiore a g (cioè g è di ordine superiore a f).
- Se il limite del rapporto non esiste, i due infinitesimi sono **non confrontabili**: per esempio $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e x per $x \to 0$, il cui rapporto $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ oscilla fra -1 e 1 senza limite (capitolo 2).

I limiti notevoli sono, riletti in questa luce, un elenco di infinitesimi equivalenti. Per $x \to 0$:

$$\operatorname{sen} x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1 + x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1 + x)^k - 1 \sim kx \quad (k \neq 0).$$

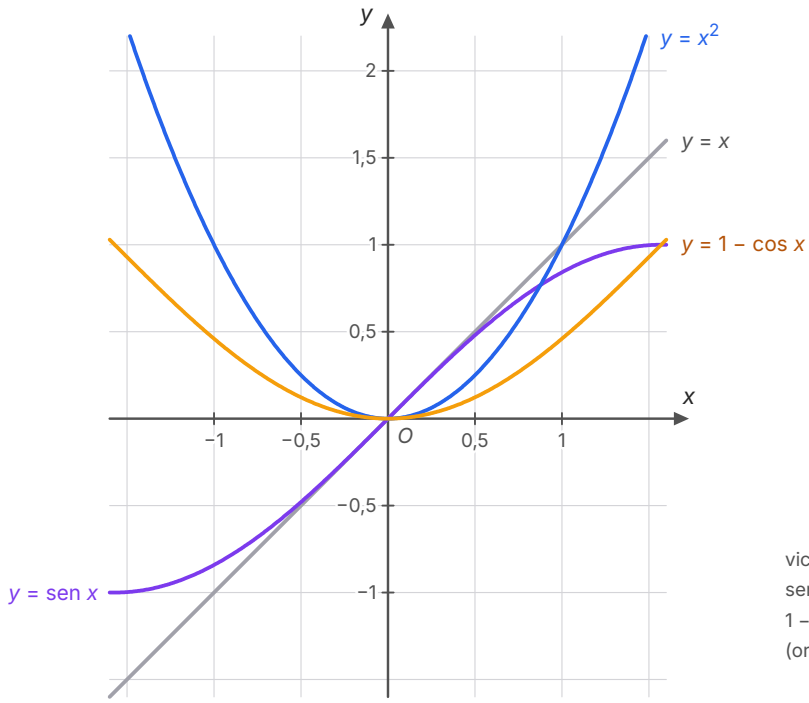


Figura 3.4 Quattro infinitesimi per $x \to 0$ (scala uguale sui due assi). Vicino all'origine i grafici di $y = \text{sen } x$ e $y = x$ quasi coincidono (infinitesimi equivalenti); $y = x^2$ e $y = 1 - \cos x$ sono tangenti all'asse x e restano molto più vicini a 0 (infinitesimi di ordine superiore a x, dello stesso ordine fra loro).

3.4.2 L'ordine di un infinitesimo

Per misurare la rapidità di un infinitesimo si sceglie un infinitesimo di riferimento, detto **campione**: per $x \to 0$ si usa x (per $x \to x_0$, $x - x_0$; per $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x}$). Si dice che f è un infinitesimo di **ordine** $\alpha > 0$ rispetto al campione x se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l, \qquad \text{con } l \in \mathbb{R},\ l \neq 0.$$

In questo caso $f \sim l\,x^\alpha$, e la funzione $l\,x^\alpha$ si chiama **parte principale** di f: è la funzione più semplice che descrive f vicino a 0. Per esempio $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 con parte principale $\frac{1}{2}\,x^2$; $\text{sen}^2\,3x$ è di ordine 2 con parte principale $9x^2$, perché $\frac{\text{sen}^2\,3x}{x^2} = 9\,(\frac{\text{sen}\,3x}{3x})^2 \to 9$; $\sqrt{x}$ è, per $x \to 0^+$, un infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$. Non tutti gli infinitesimi hanno un ordine: lo vedrai in un quesito alla fine del capitolo.

3.4.3 Il principio di sostituzione

Il confronto fra infinitesimi diventa uno strumento di calcolo grazie al seguente risultato.

Principio di sostituzione. Se per $x \to x_0$ si ha $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\,g_1(x),$$

nel senso che se esiste uno dei due limiti esiste anche l'altro, e sono uguali. La dimostrazione è una riga: $\frac{f}{g} = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{g_1}{g}$, e il primo e il terzo fattore tendono a 1 per definizione di equivalenza. Insomma, **nei prodotti e nei quozienti un infinitesimo si può sostituire con uno equivalente**, e in particolare con la sua parte principale. Il principio vale, con la stessa dimostrazione, anche per gli infiniti.

Un risultato simile riguarda le somme: *la somma di due infinitesimi di ordine diverso è equivalente a quello di ordine inferiore*. Se g è di ordine superiore a f, infatti, $\frac{f+g}{f} = 1 + \frac{g}{f} \to 1$. Così $x + x^2 - 3x^3 \sim x$ per $x \to 0$: i termini di ordine superiore si possono trascurare.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot (e^{2x} - 1)}{x \cdot \ln(1+x)}$.

Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} 3x \sim 3x$, $e^{2x} - 1 \sim 2x$ e $\ln(1+x) \sim x$ (limiti notevoli generalizzati). Numeratore e denominatore sono prodotti, quindi possiamo sostituire ciascun fattore con il suo equivalente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot (e^{2x} - 1)}{x \cdot \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot 2x}{x \cdot x} = 6.$$

Lo stesso risultato si ottiene moltiplicando e dividendo per $3x$ e $2x$, come nell'esempio svolto precedente: il principio di sostituzione è un modo rapido di scrivere quei passaggi.

ERRORE FREQUENTE

Sostituire dentro una somma. Calcoliamo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. Un ragionamento sbagliato è: «$\operatorname{tg} x \sim x$ e $\operatorname{sen} x \sim x$, quindi il numeratore è come $x - x = 0$ e il limite vale 0». Il principio di sostituzione vale per prodotti e quozienti, **non per le differenze**: i due termini sono equivalenti e si cancellano proprio nella parte che il ragionamento ha conservato. Il modo corretto è trasformare la differenza in un prodotto:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\operatorname{tg} x\,(1 - \cos x)}{x^3} \to \frac{x \cdot x^2/2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Gradi al posto dei radianti. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ e tutte le equivalenze goniometriche valgono solo con x in radianti; con una calcolatrice impostata in gradi si «verifica» numericamente un limite falso.

3.4.4 Infiniti e gerarchia degli infiniti

In modo analogo, f si dice un **infinito** per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$. Due infiniti si confrontano con il limite del rapporto: se $\dfrac{f}{g} \to \pm\infty$, f è un **infinito di ordine superiore** a g; se il rapporto tende a un numero diverso da 0, sono dello stesso ordine; se tende a 0, f è di ordine inferiore. Per $x \to +\infty$ il campione è x: un polinomio di grado n è un infinito di ordine n, e questo spiega la regola dei gradi per le funzioni razionali.

Ma come si confrontano un logaritmo, una potenza e un esponenziale? La Tabella 3.4 mette a confronto alcuni valori.

Tabella 3.4 Valori di alcuni infiniti per $x \to +\infty$ (arrotondati).

x	$\ln x$	$\sqrt{x}$	x^2	e^x	x^x
10	2,30	3,16	100	$2{,}20 \cdot 10^4$	10^{10}
100	4,61	10	10^4	$2{,}69 \cdot 10^{43}$	10^{200}
1000	6,91	31,6	10^6	$1{,}97 \cdot 10^{434}$	10^{3000}

La tabella suggerisce una **gerarchia degli infiniti**: per $x \to +\infty$, se $a > 0$ e $b > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^x} = 0.$$

In parole: il logaritmo è un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza (anche $\sqrt{x}$ o $x^{0{,}01}$), e qualsiasi potenza è di ordine inferiore a qualsiasi esponenziale con base maggiore di 1. Il terzo

limite è il più facile: per $x > 2b$ si ha $0 < \frac{b^x}{x^x} = (\frac{b}{x})^x < (\frac{1}{2})^x$, e $(\frac{1}{2})^x \to 0$. I primi due li dimostreremo nel capitolo 6 con il teorema di de l'Hôpital; per ora li accettiamo, sostenuti dalla tabella e dalla Figura 3.5.

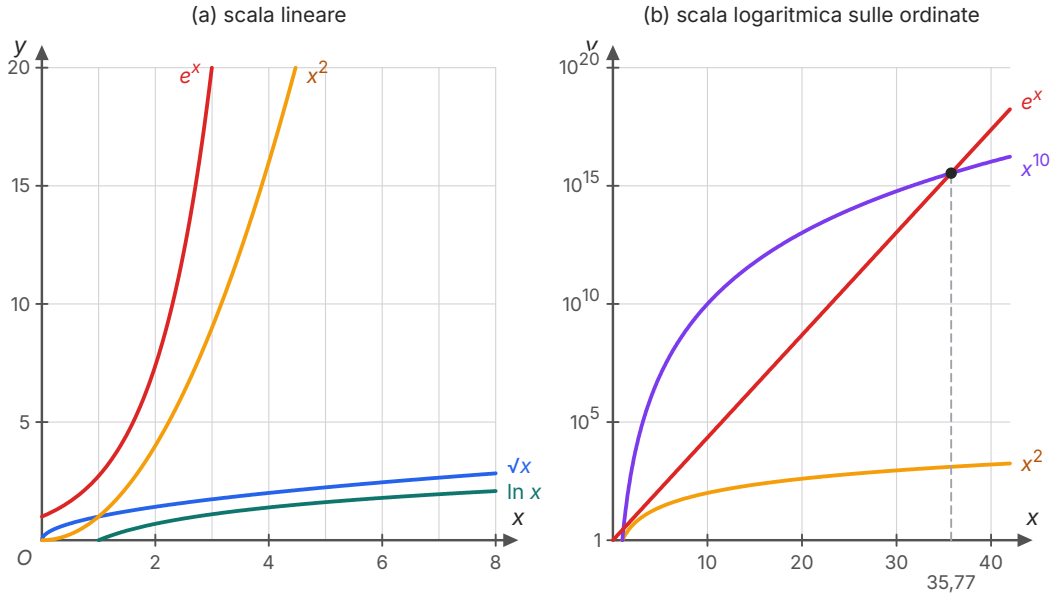


Figura 3.5 La gerarchia degli infiniti. (a) In scala lineare e^x supera rapidamente x^2, che supera $\sqrt{x}$ e $\ln x$. (b) Con l'asse delle ordinate in scala logaritmica: per $x > 1{,}12$ la potenza x^{10} resta a lungo sopra e^x, che la raggiunge solo per $x \approx 35{,}77$ (a un valore di circa $3{,}4 \cdot 10^{15}$) e da lì in poi la supera definitivamente.

La figura avverte che la gerarchia riguarda il comportamento *definitivo*: un esponenziale vince su una potenza «alla lunga», non subito. Fra $x = 1{,}12$ e $x = 35{,}77$ è x^{10} a essere più grande; eppure $\frac{x^{10}}{e^x} \to 0$.

DA RICORDARE

Gerarchia degli infiniti (per $x \to +\infty$, con $a > 0$, $b > 1$): $\ln x \ll x^a \ll b^x \ll x^x$, dove $f \ll g$ significa $\frac{f}{g} \to 0$. Alcune conseguenze utili:

- $x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} \to 0$ per $x \to +\infty$: l'esponenziale «vince» anche nella forma $\infty \cdot 0$;
- $\frac{\ln x}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, e quindi $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to e^0 = 1$;
- $x \ln x \to 0$ per $x \to 0^+$: con $x = \frac{1}{t}$ si ha $x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \to 0$ per $t \to +\infty$. Quindi $x^x = e^{x \ln x} \to 1$.

3.5 Forme esponenziali e applicazioni

3.5.1 Le forme 1^∞, 0^0, ∞^0

Per calcolare il limite di una potenza $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) > 0$, si usa sempre la stessa identità:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Se l'esponente $g(x)\ln f(x)$ tende a un numero l, la potenza tende a e^l; se tende a $+\infty$ la potenza tende a $+\infty$, se tende a $-\infty$ la potenza tende a 0 (teorema della funzione composta, con la continuità dell'esponenziale). Così le tre forme esponenziali si riducono alla forma $0\cdot\infty$ dell'esponente, che si scioglie con i limiti notevoli. Un esempio tipico è $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^x$, nella forma 1^∞:

$$x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 2\cdot\frac{\ln(1+2/x)}{2/x} \to 2\cdot 1 = 2, \qquad \text{quindi} \qquad \left(1+\frac{2}{x}\right)^x \to e^2 \approx 7{,}389.$$

Abbiamo usato il limite notevole del logaritmo con $t = \frac{2}{x} \to 0$. Allo stesso modo si vede che $(1+\frac{k}{x})^x \to e^k$ per ogni k reale: il numero e^k compare ogni volta che una quantità cresce di una frazione $\frac{k}{x}$ per un numero x di volte sempre più grande.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$.

La base tende a 1 e l'esponente a $+\infty$: forma 1^∞. Scriviamo la base come 1 + un infinitesimo: $\frac{x+3}{x-1} = 1+\frac{4}{x-1}$. L'esponente della forma esponenziale è

$$x\cdot\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right) \sim x\cdot\frac{4}{x-1} \to 4,$$

dove abbiamo usato $\ln(1+t)\sim t$ con $t = \frac{4}{x-1}\to 0$ (principio di sostituzione in un prodotto). Quindi il limite è $e^4 \approx 54{,}6$.

Controllo numerico: per $x = 1000$ la funzione vale circa 54,38, per $x = 10^6$ circa 54,598; $e^4 = 54{,}598\ldots$

3.5.2 Dai limiti di funzioni ai limiti di successioni

Nel capitolo 2 abbiamo visto che se $f(x)\to L$ per $x\to+\infty$, allora anche la successione $a_n = f(n)$ tende a L: i numeri naturali sono solo alcuni dei valori di x che tendono a $+\infty$. Questo permette

di usare tutti gli strumenti del capitolo per calcolare limiti di successioni. Per esempio:

- $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1$, perché $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \to 1$ per $x \to +\infty$ (limite notevole con $t = \frac{1}{x}$);
- $\lim_{n\to+\infty} n\,(\sqrt[n]{2} - 1) = \ln 2 \approx 0{,}693$, perché $x\,(2^{1/x} - 1) = \frac{2^{1/x} - 1}{1/x} \to \ln 2$.

Il viceversa è falso: la successione $\operatorname{sen}(n\pi)$ vale sempre 0, ma la funzione $\operatorname{sen}(\pi x)$ non ha limite per $x \to +\infty$. Una successione «vede» la funzione solo nei punti interi.

3.5.3 La capitalizzazione continua

COLLEGAMENTI

Economia: l'interesse composto. Un capitale C_0 è depositato al tasso annuo r (per esempio $r = 0{,}05$, cioè 5%). Se gli interessi si aggiungono al capitale una volta all'anno, dopo un anno si ha $C_0\,(1 + r)$. Se invece si aggiungono n volte all'anno, ogni volta al tasso $\frac{r}{n}$, dopo un anno il capitale è $C_0\,(1 + \frac{r}{n})^n$. Aumentando n si guadagna di più, ma non illimitatamente:

$$\lim_{n\to+\infty} C_0\,(1 + \frac{r}{n})^n = C_0 e^r.$$

Con $C_0 = 1000$ € e $r = 5\%$: annuale 1050,00 €; trimestrale 1050,95 €; mensile 1051,16 €; giornaliera ($n = 365$) 1051,27 €; il limite 1000 $e^{0{,}05}$ vale 1051,27 €; dopo t anni si arriva a $C_0\,e^{rt}$. Il regime limite si chiama **capitalizzazione continua**: è come se l'interesse maturasse in ogni istante. È un modo nuovo di incontrare il numero e e la funzione esponenziale di *Matematica 3* (cap. 12). Lo stesso schema, una crescita proporzionale alla quantità presente, governa la crescita di una popolazione di batteri o il decadimento di una sostanza radioattiva: lo ritroveremo nel capitolo 12 con le equazioni differenziali.

3.5.4 Quando la tabella inganna

Una tabella di valori è un ottimo modo per *intuire* un limite, e per controllare un calcolo; ma non è una dimostrazione. Consideriamo $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ per $x \to 0^+$ e calcoliamola nei punti $x = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001\ldots$, cioè $x = \frac{1}{n}$: si ottiene $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ ogni volta. La tabella «dice» che il limite è 0. Ma nei punti $x = \frac{2}{4n+1}$, che tendono anch'essi a 0, si ha $f(x) = \operatorname{sen}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Due successioni che tendono a 0 danno valori che tendono a limiti diversi: per il criterio del capitolo 2, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ **non ha limite** per $x \to 0^+$ (Figura 3.6).

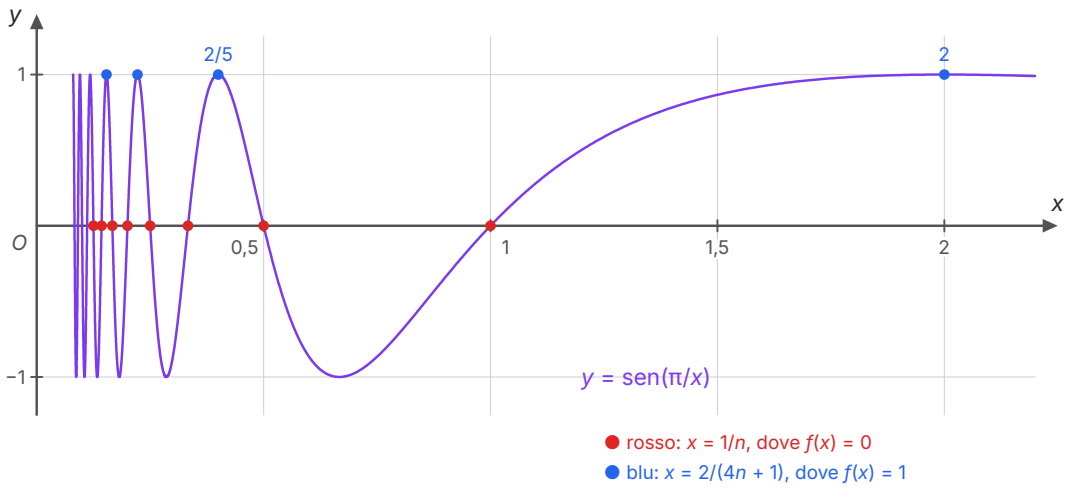


Figura 3.6 Il grafico di $y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ per $0{,}08 \le x \le 2{,}2$ (scale diverse sui due assi; più vicino a 0 le oscillazioni sono troppo fitte per essere disegnate). Nei punti $x = \frac{1}{n}$ (rossi) la funzione vale 0, nei punti $x = \frac{2}{4n+1}$ (blu) vale 1: una tabella costruita solo sui primi suggerirebbe un limite che non esiste.

Anche il calcolatore ha i suoi limiti. Un foglio di calcolo lavora con circa 15–16 cifre significative: se calcoli $(1 + \frac{1}{x})^x$ per $x = 10^{16}$, la somma $1 + 10^{-16}$ viene arrotondata a 1 e il risultato è 1, non e. Le tabelle servono a farsi un'idea e a controllare; il valore del limite lo stabiliscono i teoremi.

SINTESI

- Se $f \to L$ e $g \to M$ (finiti), allora $f \pm g \to L \pm M$, $f\,g \to L\,M$ e $\frac{f}{g} \to \frac{L}{M}$ (se $M \neq 0$). La dimostrazione per la somma «divide» la tolleranza ε fra le due funzioni.
- L'aritmetizzazione parziale di $\pm\infty$ riassume i teoremi sui limiti infiniti: $a + \infty = +\infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{a}{0^+} = +\infty$ ($a > 0$)... Il segno di ciò che tende a 0 va sempre stabilito.
- Le forme indeterminate sono sette: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Indeterminata non vuol dire inesistente: il limite va calcolato trasformando l'espressione.
- Per $x \to \pm\infty$ un polinomio si comporta come il termine di grado massimo; il limite di una funzione razionale dipende dal confronto dei gradi. La forma $\frac{0}{0}$ in x_0 si scioglie scomponendo con Ruffini.
- Le forme $+\infty - \infty$ con radici si sciolgono razionalizzando; per $x \to -\infty$ ricordare che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.
- Limite della funzione composta: se $g \to y_0$ e $f(y) \to L$ per $y \to y_0$, allora $f(g(x)) \to L$ (se $g \neq y_0$ vicino a x_0, oppure $f(y_0) = L$). È la base della sostituzione.
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (in radianti), dimostrato con $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ e il teorema del confronto; ne seguono $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$ e $\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$.
- Da $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ seguono, per $x \to 0$: $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$, $\frac{a^x - 1}{x} \to \ln a$, $\frac{(1+x)^k - 1}{x} \to k$.
- Infinitesimi e infiniti si confrontano con il limite del rapporto; $f \sim g$ se il rapporto tende a 1. Un infinitesimo di ordine α ha parte principale $l\,x^\alpha$.
- Principio di sostituzione: nei prodotti e nei quozienti un infinitesimo (o un infinito) si può sostituire con uno equivalente, mai nelle somme e nelle differenze.
- Gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$: $\ln x \ll x^a \ll b^x \ll x^x$ ($a > 0$, $b > 1$); vale «alla lunga», non per ogni x.
- Le forme 1^∞, 0^0, ∞^0 si calcolano con $f^g = e^{g \ln f}$; per esempio $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x \to e^k$, da cui la capitalizzazione continua $C_0\,e^r$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti espressioni **non** è una forma indeterminata?
   - **A.** $0 \cdot \infty$
   - **B.** $\frac{\infty}{\infty}$
   - **C.** $\frac{0}{\infty}$
   - **D.** 1^{∞}

2. ● $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{2 - 6x^2}$ è uguale a:
   - **A.** 0
   - **B.** $-\frac{1}{2}$
   - **C.** $\frac{3}{2}$
   - **D.** $-\infty$

3. ● Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$:
   - **A.** è $+\infty$
   - **B.** è 0
   - **C.** è -3
   - **D.** è $-\infty$

4. ● $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$ vale:
   - **A.** 5
   - **B.** $\frac{1}{5}$
   - **C.** 1
   - **D.** 0

5. ●● Quale di questi infinitesimi, per $x \to 0$, è di ordine superiore rispetto a x?
   - **A.** sen x
   - **B.** tg $3x$
   - **C.** $\sqrt{x}$ (per $x \to 0^+$)
   - **D.** $1 - \cos x$

6. ●● $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{3}{x})^x$ è uguale a:

   A. 1
   B. e^3
   C. 3
   D. $+\infty$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\infty - \infty = 0$. b) Se $f \to 0$ e $g \to +\infty$, il prodotto $f\,g$ può tendere a 5. c) $x^2 + x \sim x$ per $x \to 0$. d) $x^2 + x \sim x$ per $x \to +\infty$. e) $\frac{\ln x}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

8. ● Completa. Due infinitesimi f e g per $x \to x_0$ si dicono equivalenti se _____ ; f è di ordine superiore a g se _____ . Il principio di sostituzione permette di sostituire un infinitesimo con uno equivalente nei _____ e nei _____ , ma non nelle _____ .

9. ●● Per ciascun limite stabilisci se si presenta in forma indeterminata (e quale); se non lo è, calcolalo. a) $\lim_{x\to0^+}\frac{1+x}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$; c) $\lim_{x\to0^+} x^x$; d) $\lim_{x\to+\infty}(2x)^{1/x}$; e) $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}$.

Calcolare

10. ● Calcola. a) $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 5x^4 + x)$; b) $\lim_{x\to-\infty}(2x^5 - x^2)$; c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3 - x}{2x^3 + 5x^2}$; d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1 - x^4}{x^2 + 3}$; e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x + 2}{x^2 + 1}$.

11. ● Calcola, scomponendo. a) $\lim_{x\to2}\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$; b) $\lim_{x\to1}\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$; c) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$.

12. ●● Calcola $\lim_{x\to1}\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. (Suggerimento: applica la regola di Ruffini due volte.)

13. ●● Calcola, razionalizzando. a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + 4x} - x)$; b) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$; c) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; d) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

14. ● Calcola con i limiti notevoli goniometrici. a) $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$; b) $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}$; c) $\lim_{x\to0}\frac{1 - \cos 2x}{x^2}$; d) $\lim_{x\to0}\frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

15. ●● Calcola con i limiti notevoli esponenziali e logaritmici. a) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x} - 1}{x}$; b) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 3x)}{\operatorname{sen} x}$; c) $\lim_{x\to0}\frac{2^x - 1}{x}$; d) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; e) $\lim_{x\to0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

16. ●● Calcola le forme 1^∞. a) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x})^x$; b) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$; c) $\lim_{x\to0}(1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$; d) $\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

17. ●● Calcola usando il principio di sostituzione. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\, 3x}{x\ \text{tg}\ 2x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+x)}{x^2\ \text{sen}\ x}$.

18. ●● Stabilisci l'ordine rispetto a x e la parte principale dei seguenti infinitesimi per $x \to 0$. a) $x^2 + 3x^3$; b) $\sqrt{1+x^2}-1$; c) $\text{tg}\ x - \text{sen}\ x$; d) $x\,(e^x - 1)\ \text{sen}\ x$.

19. ●● Calcola usando la gerarchia degli infiniti. a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2^x}{3^x+x^5}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x-\sqrt{x}}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^2}{e^x-\ln x}$; d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^x}$.

20. ●●● Calcola. a) $\lim_{x\to+\infty} x\,(e^{1/x}-1)$; b) $\lim_{x\to+\infty} x^2\,(1-\cos\frac{1}{x})$; c) $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{2}{x})$; d) $\lim_{x\to\pi/2} (\frac{\pi}{2}-x)\ \text{tg}\ x$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Sul modello della dimostrazione del teorema della somma, dimostra con la definizione che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ allora $\lim_{x\to x_0} k\,f(x) = k\,L$ per ogni costante k.

22. ●●● a) Dimostra che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (finito), esiste un intorno di x_0 in cui, per $x \neq x_0$, $|f(x)| < |L| + 1$. b) Usando a) e l'identità $f\,g - L\,M = f\,(g-M) + M\,(f-L)$, dimostra il teorema del limite del prodotto.

23. ●● Trova l'errore. «$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\text{sen}\ x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{\text{sen}\ x}{x})$. Poiché sen x non ha limite per $x \to +\infty$, il limite non esiste.» Correggi il ragionamento e calcola il limite.

24. ●● Dimostra che $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}\ x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}\ x}{x} = 1$. (Suggerimento: poni $y = \text{arcsen}\ x$, rispettivamente $y = \text{arctg}\ x$.)

25. ●● Mostra con esempi che la forma $0 \cdot \infty$ è indeterminata: trova quattro coppie di funzioni $f \to 0$ e $g \to +\infty$ per $x \to 0^+$ tali che $f\,g$ tenda rispettivamente a 0, a 3, a $+\infty$, e non abbia limite.

26. ●● Dimostra che, per $x \to x_0$: a) se $f \sim g$ e $g \sim h$, allora $f \sim h$; b) $f \sim g$ se e solo se $f - g$ è un infinitesimo di ordine superiore a g.

Problemi

27. ●● Un capitale di 2000 € è investito al tasso annuo del 4%. a) Calcola il montante dopo un anno con capitalizzazione annuale, trimestrale, mensile e continua. b) Di quanti euro la capitalizzazione continua supera quella annuale? c) Quale tasso annuo, in capitalizzazione continua, dà lo stesso montante della capitalizzazione annuale al 4%?

28. ●● In una circonferenza di raggio r è inscritto un poligono regolare di n lati. a) Dimostra che il suo perimetro è $p_n = 2nr \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ e la sua area $A_n = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$. b) Calcola $\lim_{n\to+\infty} p_n$ e $\lim_{n\to+\infty} A_n$ e interpreta il risultato. c) Per $r = 1$ e $n = 96$ (il poligono usato da Archimede) calcola $\frac{p_n}{2}$.

29. ●● Un paracadutista di massa $m = 80$ kg cade con il paracadute chiuso; tenendo conto della resistenza dell'aria, un modello semplice dà la velocità $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})$, con $g = 9{,}8$ m/s^2 e $k = 16$ kg/s (valori scelti per l'esercizio). a) Calcola la velocità limite $\lim_{t\to+\infty} v(t)$. b) Calcola $v(5)$. c) Fissato t, calcola $\lim_{k\to0^+} v(t)$ e interpreta il risultato.

30. ●●● In una circonferenza di raggio r una corda AB sottende l'angolo al centro $2x$. La *freccia* f è la distanza fra il punto medio dell'arco AB e la corda. a) Dimostra che $f = r(1 - \cos x)$ e che la corda è $c = 2r \operatorname{sen} x$. b) Calcola $\lim_{x\to0^+} \frac{f}{c^2}$ e deduci la formula approssimata $f \approx \frac{c^2}{8r}$ per archi piccoli. c) Per una curva stradale di raggio 50 m, confronta la freccia di una corda di 10 m data dalla formula approssimata con il valore esatto.

Con il computer

31. ●● In un foglio di calcolo: a) tabula $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ per $x = \frac{1}{n}$ e per $x = \frac{2}{4n+1}$, con $n = 1, 2, \ldots, 20$; che cosa suggerisce ciascuna colonna? Che cosa puoi concludere? b) Tabula $(1 + \frac{1}{x})^x$ per $x = 10, 10^2, \ldots, 10^{17}$ e spiega i valori delle ultime righe.

32. ●● Tabula $g(x) = \frac{\ln x}{x^{0,1}}$ per $x = 10, 10^2, \ldots, 10^{30}$. a) Osservando solo le prime quattro righe, quale limite ipotizzeresti per $x \to +\infty$? b) Qual è il vero limite? Individua dalla tabella dove g smette di crescere.

Verso l'esame

33. ●● Determina i numeri reali a e b in modo che $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = 1$.

34. ●● Determina il valore del parametro reale k per cui $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{k}{x})^{2x} = e^6$.

35. ●●● Calcola, al variare del parametro reale $a > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x + 2^x}{3^x}$.

36. ●●● Sia $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$. a) Dimostra che f è un infinitesimo di ordine superiore a x per $x \to 0$. b) Dimostra che f non ha un ordine rispetto al campione x, cioè che non esiste $\alpha > 0$ per cui $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ tenda a un numero reale diverso da 0.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il concetto di limite, il numero *e* e il limite di sen *x*/*x* spiegati con grande chiarezza, con molti esempi.
- [SPI] Spivak, *Calculus*: le dimostrazioni dei teoremi sull'algebra dei limiti, con tutti i dettagli che in questo capitolo abbiamo omesso.
- [APO] Apostol, *Calculus*, vol. I: limiti, infinitesimi e confronto fra funzioni, in una trattazione rigorosa a livello universitario.

Glossario del capitolo

Aritmetizzazione parziale
Insieme delle regole che permettono di operare con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ come se fossero numeri, riassumendo teoremi sui limiti; alcune operazioni (le forme indeterminate) restano senza risultato.

Campione
Infinitesimo (o infinito) di riferimento con cui si misura l'ordine degli altri: per esempio x per $x \to 0$.

Capitalizzazione continua
Regime in cui l'interesse si aggiunge al capitale in ogni istante; un capitale C_0 al tasso annuo r diventa $C_0\, e^r$ in un anno.

Gerarchia degli infiniti
Per $x \to +\infty$, con $a > 0$ e $b > 1$: $\ln x$ è di ordine inferiore a x^a, che è di ordine inferiore a b^x, a sua volta di ordine inferiore a x^x.

Infinitesimi dello stesso ordine
Due infinitesimi il cui rapporto tende a un numero reale diverso da 0.

Infinitesimi equivalenti
Due infinitesimi f e g il cui rapporto tende a 1; si scrive $f \sim g$.

Infinitesimi non confrontabili
Due infinitesimi il cui rapporto non ha limite.

Infinitesimo
Funzione che tende a 0 per $x \to x_0$.

Infinitesimo di ordine superiore
f è di ordine superiore a g se $\frac{f}{g} \to 0$: tende a zero più rapidamente.

Infinito
Funzione f tale che $|f(x)| \to +\infty$ per $x \to x_0$.

Infinito di ordine superiore
f è un infinito di ordine superiore a g se $\frac{f}{g} \to \pm\infty$.

Limite della funzione composta
Se $g(x) \to y_0$ e $f(y) \to L$ per $y \to y_0$, allora $f(g(x)) \to L$, purché $g(x) \neq y_0$ vicino a x_0 oppure $f(y_0) = L$; giustifica il cambio di variabile.

Limite notevole
Limite di una forma indeterminata calcolato una volta per tutte, al quale se ne riconducono molti altri: per esempio $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ per $x \to 0$.

Ordine di un infinitesimo
Numero $\alpha > 0$ tale che $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ tenda a un numero reale $l \neq 0$; non tutti gli infinitesimi hanno un ordine.

Parte principale
Se f è un infinitesimo di ordine α e $\frac{f(x)}{x^\alpha} \to l$, la funzione $l\, x^\alpha$, equivalente a f.

Principio di sostituzione
Nel limite di un prodotto o di un quoziente un infinitesimo (o un infinito) si può sostituire con uno equivalente; non vale nelle somme.

Razionalizzazione
Moltiplicazione di numeratore e denominatore per un'espressione coniugata, per eliminare la differenza di radici che genera una forma indeterminata.

Soluzioni

1. C. Se il numeratore tende a 0 e il denominatore a ∞, il quoziente tende a 0: non c'è indeterminazione.

2. B. Stesso grado: rapporto dei coefficienti direttivi, $\frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$.

3. D. $(+\infty) \cdot (-3) = -\infty$ per la regola dei segni.

4. A. $\frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \to 5$.

5. D. $\frac{1 - \cos x}{x} \to 0$. sen x e tg $3x$ sono dello stesso ordine di x; $\sqrt{x}$ è di ordine inferiore ($\frac{\sqrt{x}}{x} \to +\infty$).

6. B. $x \ln(1 + \frac{3}{x}) \to 3$, quindi il limite è $e^3 \approx 20{,}09$.

7. a) Falso: $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata (per esempio $(x + 5) - x \to 5$, $x^2 - x \to +\infty$). b) Vero: per $x \to +\infty, f = \frac{5}{x}, g = x, fg = 5$. c) Vero: $\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \to 1$. d) Falso: per $x \to +\infty$, $\frac{x^2 + x}{x} \to +\infty$; vale $x^2 + x \sim x^2$. e) Vero, per la gerarchia degli infiniti.

8. $\lim \frac{f}{g} = 1$; $\lim \frac{f}{g} = 0$; prodotti; quozienti; somme (e differenze).

9. a) Non indeterminata: $\frac{1}{0^+} = +\infty$. b) Forma $\infty \cdot 0$; il limite è 0 (gerarchia: $\frac{x}{e^x} \to 0$). c) Forma 0^0; il limite è 1 ($x \ln x \to 0$). d) Forma ∞^0; $(2x)^{1/x} = e^{\ln(2x)/x}$ e $\frac{\ln 2x}{x} = \frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln x}{x} \to 0$, quindi il limite è 1. e) Non indeterminata: $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

10. a) $-\infty$ (si comporta come $-5x^4$). b) $-\infty$ (come $2x^5$). c) 3 (stesso grado: $\frac{6}{2} = 3$). d) $-\infty$ (come $-x^2$). e) 0 (grado del denominatore maggiore).

11. a) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-1} \to 4$. b) $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \to \frac{3}{2}$. c) $\frac{x(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{x-1} \to \frac{0}{-2} = 0$.

12. $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$ e $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 (x+1)$. Per $x \neq 1$ la funzione è $\frac{x+2}{x+1} \to \frac{3}{2}$.

13. a) $\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1} \to 2$. b) $\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \to \frac{1}{4}$. c) $\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \to \frac{2}{2} = 1$. d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$: per $x \to -\infty$ il denominatore tende a $+\infty$, quindi il limite è 0.

14. a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \to \frac{3}{2}$. b) $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$. c) $4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \to 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. d) $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \to 1 \cdot 2 = 2$.

15. a) $2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \to 2$. b) $3 \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} \to 3$. c) $\ln 2 \approx 0{,}693$. d) $(1+x)^{1/2}$: $k = \frac{1}{2}$, il limite è $\frac{1}{2}$. e) $\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \to 1 + 1 = 2$.

16. a) $x \ln(1 + \frac{1}{2x}) \to \frac{1}{2}$: il limite è $e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1{,}649$. b) Base $1 + \frac{2}{x-1}$; $x \cdot \frac{2}{x-1} \to 2$: il limite è $e^2 \approx 7{,}389$. c) $\frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{x} \sim \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$: il limite è e. d) $\frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{x^2} \sim \frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}$: il limite è $e^{-1/2} \approx 0{,}607$.

17. a) $\frac{9x^2}{x \cdot 2x} = \frac{9}{2}$. b) $e^{x^2} - 1 \sim x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$: il limite è 2. c) $\frac{(x^2/2) \cdot x}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{2}$.

18. a) Ordine 2, parte principale x^2. b) $(1 + x^2)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2} x^2$: ordine 2, parte principale $\frac{1}{2} x^2$. c) $\operatorname{tg} x\,(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2}$: ordine 3, parte principale $\frac{1}{2} x^3$. d) $x \cdot x \cdot x$: ordine 3, parte principale x^3.

19. a) Numeratore $\sim 2^x$, denominatore $\sim 3^x$: $(\frac{2}{3})^x \to 0$. b) Entrambi $\sim x$: limite 1. c) Entrambi $\sim e^x$: limite 1. d) 0 (anche se fino a $x \approx 35{,}77$ il numeratore è maggiore).

20. Con $t = \frac{1}{x} \to 0^+$: a) $\frac{e^t - 1}{t} \to 1$; b) $\frac{1 - \cos t}{t^2} \to \frac{1}{2}$; c) $2 \cdot \frac{\ln(1 + 2t)}{2t} \to 2$. d) Con $t = \frac{\pi}{2} - x \to 0$: $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} t$, e $t \operatorname{cotg} t = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \cdot \cos t \to 1$.

21. Se $k = 0$ è ovvio. Se $k \neq 0$, fissato $\varepsilon > 0$ si applica la definizione a f con il numero positivo $\frac{\varepsilon}{|k|}$: esiste δ tale che $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Per tali x, $|k\,f(x) - k\,L| = |k| \cdot |f(x) - L| < \varepsilon$. c.v.d.

22. a) Con $\varepsilon = 1$ esiste δ tale che $|f(x) - L| < 1$ per $0 < |x - x_0| < \delta$; allora $|f(x)| \le |f(x) - L| + |L| < |L| + 1$. b) Fissato $\varepsilon > 0$, si sceglie δ così piccolo che valgano insieme $|f(x)| < |L| + 1$, $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)}$ e $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)}$ (minimo dei tre δ). Allora $|f\,g - L\,M| \le |f| \cdot |g - M| + |M| \cdot |f - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. c.v.d.

23. Il fatto che $\operatorname{sen} x$ non abbia limite non impedisce a $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ di averlo: il teorema sul quoziente richiede che esistano i limiti dei due termini, ma se uno non esiste non si può concludere nulla. Poiché $|\frac{\operatorname{sen} x}{x}| \le \frac{1}{x} \to 0$, per il teorema del confronto $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$ e il limite è 1.

24. Con $y = \operatorname{arcsen} x$ si ha $x = \operatorname{sen} y$, e $y \to 0$ quando $x \to 0$ (con $y \neq 0$ per $x \neq 0$). Quindi $\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \frac{y}{\operatorname{sen} y} \to 1$ per il teorema della funzione composta. Analogamente, con $y = \operatorname{arctg} x$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{y}{\operatorname{tg} y} \to 1$. Dunque $\operatorname{arcsen} x \sim x$ e $\operatorname{arctg} x \sim x$ per $x \to 0$.

25. Per esempio: $f = x^2$, $g = \frac{1}{x}$: $f\,g = x \to 0$; $f = 3x$, $g = \frac{1}{x}$: $f\,g = 3$; $f = x$, $g = \frac{1}{x^2}$: $f\,g = \frac{1}{x} \to +\infty$; $f = x$, $g = \frac{2 + \operatorname{sen}(1/x)}{x}$ (che tende a $+\infty$ perché $g \ge \frac{1}{x}$): $f\,g = 2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ oscilla fra 1 e 3 e non ha limite.

26. a) $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} \to 1 \cdot 1 = 1$. b) $\frac{f - g}{g} = \frac{f}{g} - 1$: questo tende a 0 se e solo se $\frac{f}{g} \to 1$. c.v.d.

27. a) $2000 \cdot 1{,}04 = 2080{,}00$ €; $2000\,(1 + 0{,}01)^4 \approx 2081{,}21$ €; $2000\,(1 + \frac{0{,}04}{12})^{12} \approx 2081{,}48$ €; $2000\,e^{0{,}04} \approx 2081{,}62$ €. b) Di circa 1,62 €. c) Da $e^r = 1{,}04$: $r = \ln 1{,}04 \approx 0{,}03922$, cioè circa 3,92%.

28. a) Il poligono si divide in n triangoli isosceli con vertice nel centro, lati r e angolo al vertice $\frac{2\pi}{n}$: ciascun lato del poligono è $2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ e l'area di ciascun triangolo è $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$. b) $p_n = 2\pi r \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \to 2\pi r$ e $A_n = \pi r^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(2\pi/n)}{2\pi/n} \to \pi r^2$: lunghezza della circonferenza e area del cerchio. c) $\frac{p_{96}}{2} = 96 \operatorname{sen} \frac{\pi}{96} \approx 3{,}1410$, contro $\pi \approx 3{,}1416$.

29. a) $\frac{mg}{k} = \frac{80 \cdot 9{,}8}{16} = 49$ m/s. b) $v(5) = 49\,(1 - e^{-1}) \approx 31{,}0$ m/s. c) Con $u = \frac{kt}{m} \to 0^+$:

$v = g\,t \cdot \frac{1 - e^{-u}}{u} \to g\,t$, perché $\frac{1 - e^{-u}}{u} = \frac{e^{-u} - 1}{-u} \to 1$. Senza attrito si ritrova la caduta libera $v = g\,t$.

30. a) La distanza del centro dalla corda è $r \cos x$, quindi $f = r - r \cos x$; la semicorda è $r \operatorname{sen} x$. b) $\frac{f}{c^2} = \frac{r(1 - \cos x)}{4r^2 \operatorname{sen}^2 x} \sim \frac{r\,x^2/2}{4r^2\,x^2} = \frac{1}{8r}$. c) Approssimata: $\frac{100}{400} = 0{,}25$ m; esatta: $\operatorname{sen} x = 0{,}1$, $f = 50\,(1 - \sqrt{0{,}99}) \approx 0{,}2506$ m.

31. a) Nella prima colonna si leggono valori nulli o piccolissimi (dell'ordine di 10^{-15}, dovuti agli arrotondamenti di π), nella seconda valori uguali a 1: le due successioni di punti tendono a 0 ma i valori tendono a limiti diversi, quindi $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ non ha limite per $x \to 0^+$. b) Fino a circa $x = 10^8$ i valori si avvicinano a $e = 2{,}71828\ldots$; poi gli errori di arrotondamento crescono (per $x = 10^{15}$ si può ottenere un valore come 3,03) e per $x \geq 10^{16}$ il calcolatore arrotonda $1 + \frac{1}{x}$ a 1 e restituisce 1. Il limite è comunque e: l'errore è del calcolo, non della matematica.

32. a) I valori crescono: 1,83; 2,91; 3,46; 3,67. Si potrebbe pensare a una crescita illimitata. b) Per la gerarchia degli infiniti il limite è 0: da $x = 10^5$ in poi i valori diminuiscono (3,64 per $x = 10^5$, 2,30 per $x = 10^{10}$, 0,46 per 10^{20}, 0,07 per 10^{30}). Il massimo, fra 10^4 e 10^5, è in $x = e^{10} \approx 22\,026$, dove $g = \frac{10}{e} \approx 3{,}68$ (lo dimostrerai con le derivate).

33. Se $\sqrt{a} \neq 2$ il numeratore tende a un numero non nullo e il denominatore a 0: il limite non è finito. Quindi $a = 4$. Allora $\frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} = \frac{bx}{x\,(\sqrt{4 + bx} + 2)} \to \frac{b}{4}$, e $\frac{b}{4} = 1$ dà $b = 4$.

34. $(1 + \frac{k}{x})^{2x} = [(1 + \frac{k}{x})^x]^2 \to (e^k)^2 = e^{2k}$. Da $e^{2k} = e^6$ segue $k = 3$.

35. $\frac{a^x + 2^x}{3^x} = (\frac{a}{3})^x + (\frac{2}{3})^x$, e $(\frac{2}{3})^x \to 0$. Se $0 < a < 3$ anche $(\frac{a}{3})^x \to 0$: il limite è 0. Se $a = 3$ il limite è 1. Se $a > 3$, $(\frac{a}{3})^x \to +\infty$: il limite è $+\infty$.

36. a) $|\frac{f(x)}{x}| = |x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$, quindi $\frac{f}{x} \to 0$ per il teorema del confronto. b) $\frac{f(x)}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Se $\alpha < 2$ tende a 0 (confronto, come in a)). Se $\alpha = 2$ è $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$, che non ha limite. Se $\alpha > 2$ si annulla nei punti $x = \frac{1}{k\pi}$ e assume valori di modulo arbitrariamente grande nei punti $x = \frac{2}{(4k + 1)\pi}$, dove vale $x^{2-\alpha}$: non ha limite. In nessun caso il limite è finito e non nullo.