CAPITOLO

# 2

# Limiti di funzioni

*Un limite non dice dove una funzione arriva, ma dove non può fare a meno di avvicinarsi. (testo della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Riconoscere i punti in cui ha senso calcolare un limite e dare la definizione di limite con gli intorni.
2. Scrivere le quattro definizioni di limite con $\varepsilon$, $\delta$, $M$ e $N$ e verificare un limite in casi semplici.
3. Distinguere limite destro e sinistro, limiti per eccesso e per difetto, e usarli per le funzioni definite a tratti.
4. Definire gli asintoti verticali e orizzontali di un grafico mediante i limiti.
5. Dimostrare i teoremi di unicità, della permanenza del segno e del confronto, e usare le successioni per mostrare che un limite non esiste.
6. Leggere dai grafici i limiti delle funzioni elementari agli estremi del dominio.

**INDICE DEL CAPITOLO**


2.1 Dall'intuizione alla definizione ..... 2
2.2 Le quattro definizioni con ε, δ, M e N ..... 5
2.3 Limite destro, limite sinistro, eccesso e difetto ..... 7
2.4 La verifica di un limite e gli asintoti ..... 10
2.5 I teoremi sui limiti ..... 13
2.6 I limiti delle funzioni elementari ..... 18

**Matematica 5** · Parte I · Limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 2: Limiti di funzioni · pagine 53–76 del volume completo · estratto per lo studio

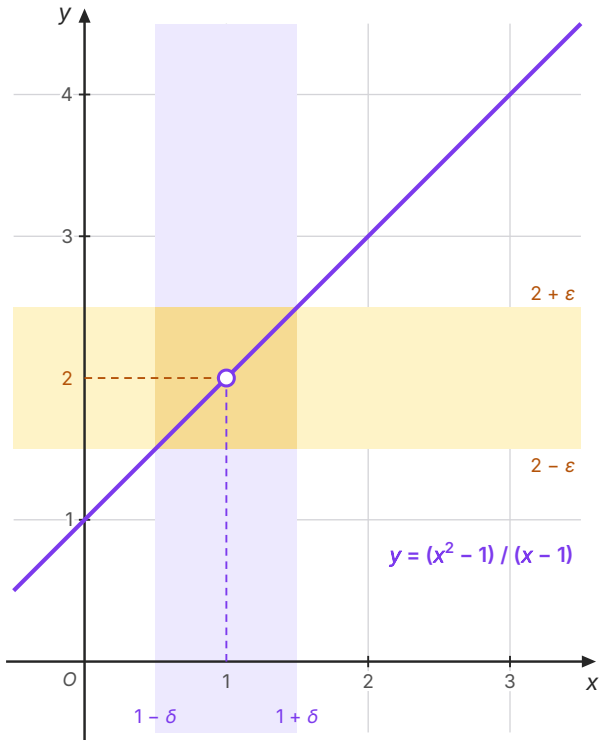
Nel capitolo precedente il limite è nato per le successioni. Una successione è una funzione definita sui numeri naturali, e l'indice $n$ può andare in un solo «posto»: verso $+\infty$. Una funzione reale di variabile reale offre molte più possibilità. La variabile $x$ può avvicinarsi a un numero $x_0$ da destra, da sinistra o da entrambe le parti, oppure crescere o decrescere senza limitazioni; e i valori $f(x)$ possono avvicinarsi a un numero, crescere oltre ogni soglia o non stabilizzarsi affatto.

Queste situazioni non sono curiosità da matematici. La velocità di un'auto in un istante, la pendenza di una curva in un punto, la temperatura che una bevanda raggiunge dopo moltissimo tempo, la distanza a cui si forma l'immagine di un oggetto lontanissimo davanti a una lente: ognuna di queste grandezze è il limite di una funzione. In questo capitolo diamo del limite una definizione unica, scritta con gli intorni, e la traduciamo nelle quattro forme che usano $\varepsilon$, $\delta$, $M$ e $N$. Poi impariamo a verificare un limite, definiamo gli asintoti verticali e orizzontali, dimostriamo i primi teoremi (unicità, permanenza del segno, confronto) e raccogliamo in una tabella i limiti delle funzioni elementari, che nel capitolo 3 diventeranno i mattoni per calcolare limiti più complicati.

## 2.1 Dall'intuizione alla definizione

### 2.1.1 Tre esempi

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: per $x = 1$ il denominatore si annulla e $f(1)$ non esiste. Che cosa succede ai valori di $f$ quando $x$ è *vicino* a 1? Una tabella di valori, calcolati da entrambe le parti, suggerisce una risposta netta: i valori si avvicinano a 2 (Figura 2.1). Il motivo si vede scomponendo il numeratore: per $x \neq 1$ si ha $f(x) = (x-1)(x+1)/(x-1) = x + 1$. Il grafico di $f$ è dunque la retta $y = x + 1$ privata del punto $(1; 2)$: una retta con un «buco».




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,9 | 1,9 |
| 0,99 | 1,99 |
| 0,999 | 1,999 |
| 1 | — |
| 1,001 | 2,001 |
| 1,01 | 2,01 |
| 1,1 | 2,1 |

$f(1)$ non esiste,
ma $f(x)$ si avvicina a 2

**Figura 2.1** Il grafico di $y = (x^2 - 1)/(x - 1)$, cioè la retta $y = x + 1$ senza il punto (1; 2) (cerchio vuoto). Con $\varepsilon = 0{,}5$ la fascia gialla orizzontale contiene i valori che distano da 2 meno di $\varepsilon$; con $\delta = \varepsilon = 0{,}5$ la fascia viola verticale contiene le ascisse che distano da 1 meno di $\delta$. Per ogni $x \neq 1$ della fascia viola il punto del grafico cade nella fascia gialla. A destra, la tabella dei valori. Grafico calcolato dall'equazione, stessa unità sui due assi.

Il secondo esempio è $g(x) = 1/x^2$ vicino a 0. Per $x = \pm 0{,}1, \pm 0{,}01, \pm 0{,}001$ si ottiene $g(x) = 100, 10\,000, 1\,000\,000$: questa volta i valori non si avvicinano a nessun numero, ma superano qualunque soglia fissata, purché $x$ sia abbastanza vicino a 0. Il terzo esempio è $h(x) = 1/x$ quando $x$ cresce: per $x = 10, 100, 1000$ si ha $h(x) = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001$, e i valori si avvicinano a 0. Qui non è $x$ ad avvicinarsi a un numero, ma è $x$ a crescere senza limitazioni.

Diremo che il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a 1 è 2, che il limite di $1/x^2$ per $x$ che tende a 0 è $+\infty$ e che il limite di $1/x$ per $x$ che tende a $+\infty$ è 0. Per dare a queste frasi un significato preciso bisogna rispondere a due domande: che cosa vuol dire «vicino»? E vicino *quanto*?

### 2.1.2 Intorni: la misura della vicinanza

Nel capitolo 1 abbiamo chiamato intorno circolare di un numero $x_0$ di raggio $\delta > 0$ l'intervallo aperto $I_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta;\, x_0 + \delta[$, cioè l'insieme dei numeri $x$ con $|x - x_0| < \delta$; un **intorno di $+\infty$** è una semiretta $]a;\, +\infty[$ e un **intorno di $-\infty$** è una semiretta $]-\infty;\, a[$. Un intorno è il modo matematico

di dire «vicino»: più piccolo è il raggio, o più lontano è l'estremo $a$, più stretta è la vicinanza richiesta.

Torniamo al primo esempio e immaginiamo una sfida. Qualcuno fissa una tolleranza $\varepsilon > 0$, piccola quanto vuole, e chiede che $f(x)$ disti da 2 meno di $\varepsilon$. Noi rispondiamo indicando quanto vicino a 1 deve stare $x$. Poiché per $x \neq 1$ si ha $|f(x) - 2| = |(x + 1) - 2| = |x - 1|$, basta prendere $\delta = \varepsilon$: se $0 < |x - 1| < \delta$, allora $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Con $\varepsilon = 0{,}001$ rispondiamo $\delta = 0{,}001$, con $\varepsilon = 10^{-9}$ rispondiamo $\delta = 10^{-9}$: qualunque sfida può essere vinta. È esattamente questo che intendiamo dicendo che il limite è 2. La condizione $0 < |x - 1|$, cioè $x \neq 1$, è essenziale: il valore di $f$ nel punto 1 non interessa, e qui non esiste neppure.

### 2.1.3 Dove ha senso calcolare un limite

Per avvicinarsi a $x_0$ restando nel dominio $D$ di $f$, occorre che vicino a $x_0$ ci siano punti di $D$. Ricordiamo dal capitolo 1 che $x_0$ è un punto di accumulazione di $D$ se ogni intorno di $x_0$ contiene almeno un punto di $D$ diverso da $x_0$ (e allora ne contiene infiniti). Il limite per $x \to x_0$ si considera soltanto quando $x_0$ è un punto di accumulazione del dominio. Non serve invece che $x_0$ appartenga a $D$: il punto 1 non appartiene al dominio di $(x^2 - 1)/(x - 1)$, ma ne è punto di accumulazione. E non serve che $x_0$ sia «circondato» da punti del dominio: 0 è punto di accumulazione del dominio $[0; +\infty[$ di $\sqrt{x}$, anche se i punti vicini stanno tutti alla sua destra.

Un esempio in cui il limite non ha senso è $f(x) = \sqrt{x^2(x - 1)}$. Il radicando è non negativo per $x = 0$ oppure per $x \geq 1$, quindi $D = \{0\} \cup [1; +\infty[$. L'intorno $]-0{,}5; 0{,}5[$ di 0 non contiene punti del dominio diversi da 0: lo 0 è un punto isolato di $D$, e non ci si può «avvicinare» a 0 restando nel dominio. Analogamente, ha senso chiedersi che cosa succede per $x \to +\infty$ solo se il dominio è illimitato superiormente, cioè se ogni intorno di $+\infty$ contiene punti di $D$.

Siamo pronti per la definizione. Conviene scriverla una volta sola, con gli intorni, perché in questa forma vale sia quando $x_0$ e $L$ sono numeri, sia quando sono $+\infty$ o $-\infty$.

**IN SINTESI**

**Definizione di limite.** Sia $f$ una funzione di dominio $D$ e sia $x_0$ (un numero reale, $+\infty$ oppure $-\infty$) un punto di accumulazione di $D$. Si dice che $f$ ha **limite** $L$ (un numero reale, $+\infty$ oppure $-\infty$) per $x$ che tende a $x_0$, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se **per ogni intorno** $I(L)$ di $L$ **esiste un intorno** $I(x_0)$ di $x_0$ tale che, per ogni $x \in D \cap I(x_0)$ con $x \neq x_0$, si ha $f(x) \in I(L)$.

Si dice anche che $f(x)$ *tende a* $L$, e si scrive $f(x) \to L$ per $x \to x_0$. Il limite è **finito** se $L$ è un numero reale, **infinito** se $L = \pm\infty$.

L'ordine delle due parti conta. Prima viene scelto l'intorno di $L$, cioè la precisione richiesta ai valori; poi si cerca l'intorno di $x_0$ che la garantisce. Come per le successioni, la definizione non

insegna a *trovare* il limite: dice che cosa significa che un numero proposto *è* il limite, ed è una garanzia che deve valere per ogni precisione richiesta.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **«Il limite è il valore che la funzione assume nel punto».** La definizione considera solo gli $x \neq x_0$: il valore $f(x_0)$, se esiste, non conta. Se definiamo $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ per $x \neq 1$ e $f(1) = 5$, il limite per $x \to 1$ resta 2, mentre $f(1) = 5$. Per molte funzioni il limite coincide con il valore, ed è proprio questa coincidenza che nel capitolo 4 chiameremo *continuità*; ma è una proprietà da verificare, non una regola.

## 2.2 Le quattro definizioni con ε, δ, M e N

Per lavorare con la definizione bisogna tradurre gli intorni in disuguaglianze. Un intorno di un numero $L$ contiene sempre un intorno circolare, di raggio ε: dire che $f(x)$ sta in quell'intorno significa $|f(x) - L| < \varepsilon$. Un intorno di $+\infty$ è una semiretta $]M; +\infty[$, e $f(x)$ vi appartiene se $f(x) > M$. Allo stesso modo «$x$ vicino a $x_0$, ma diverso da $x_0$» diventa $0 < |x - x_0| < \delta$, e «$x$ vicino a $+\infty$» diventa $x > N$. Poiché $x_0$ e $L$ possono essere finiti o infiniti, si ottengono quattro combinazioni (Figura 2.2). In tutte, $x$ si intende nel dominio di $f$.

**1. Limite finito per $x$ che tende a un numero.** $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**2. Limite infinito per $x$ che tende a un numero.** $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\text{per ogni } M > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

**3. Limite finito per $x$ che tende all'infinito.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N > 0 \text{ tale che } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**4. Limite infinito per $x$ che tende all'infinito.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\text{per ogni } M > 0 \text{ esiste } N > 0 \text{ tale che } x > N \Rightarrow f(x) > M.$$

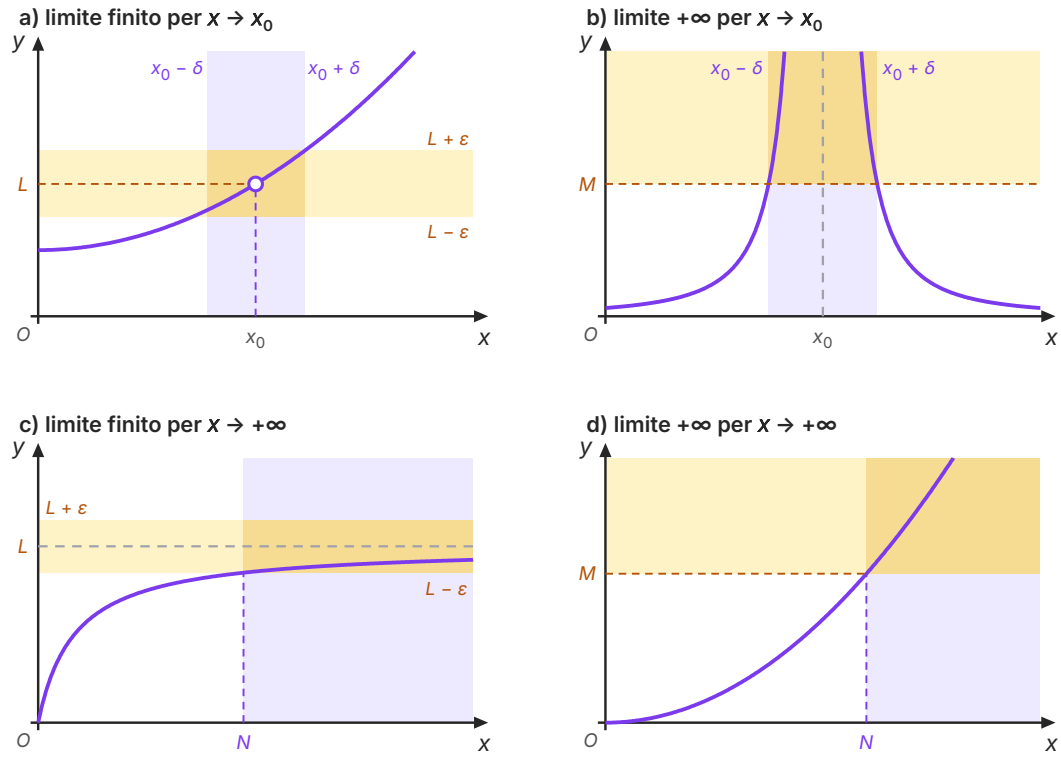



**Figura 2.2** Le quattro definizioni di limite, ciascuna su un grafico calcolato dalla sua equazione. **a)** $f(x) = x^2/4 + 1$ con $x_0 = 2$, $L = 2$, $\varepsilon = 0{,}5$: l'intervallo in cui $|f(x) - 2| < 0{,}5$ è $]\sqrt{2}; \sqrt{6}[ \approx ]1{,}414;\ 2{,}449[$, non simmetrico rispetto a 2, e $\delta \approx 0{,}449$ è la distanza dall'estremo più vicino. **b)** $f(x) = 1/(x-2)^2$ con $M = 4$ e $\delta = 0{,}5$. **c)** $f(x) = 2x/(x+1)$ con $L = 2$, $\varepsilon = 0{,}3$ e $N = 17/3$. **d)** $f(x) = x^2/8$ con $M = 4{,}5$ e $N = 6$. In ogni riquadro, la parte del grafico sopra la fascia viola resta nella fascia gialla.

Le versioni con $-\infty$ si ottengono cambiando la disuguaglianza corrispondente: $f(x) \to -\infty$ si traduce in $f(x) < -M$, e $x \to -\infty$ in $x < -N$. Per esempio $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ significa: per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x < -N \Rightarrow f(x) > M$. La Tabella 2.1 riassume tutti i casi. Le lettere non hanno nulla di magico: $\varepsilon$ e $\delta$ si usano per le distanze piccole, $M$ e $N$ per le soglie grandi.

**Tabella 2.1** Le definizioni di limite tradotte in disuguaglianze: «per ogni [colonna di $f(x)$] esiste [colonna di $x$] tale che, per ogni $x$ del dominio che soddisfa la condizione su $x$, vale la condizione su $f(x)$».

| | $f(x) \to L$ | $f(x) \to +\infty$ | $f(x) \to -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \to x_0$ | $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ | $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow f(x) > M$ | $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow f(x) < -M$ |
| $x \to +\infty$ | $x > N \Rightarrow \lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ | $x > N \Rightarrow f(x) > M$ | $x > N \Rightarrow f(x) < -M$ |
| $x \to -\infty$ | $x < -N \Rightarrow \lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ | $x < -N \Rightarrow f(x) > M$ | $x < -N \Rightarrow f(x) < -M$ |

Il primo esempio del paragrafo precedente rientra nel caso 1 con $\delta = \varepsilon$. Per il secondo, $1/x^2 > M$ equivale a $x^2 < 1/M$, cioè a $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$: basta $\delta = 1/\sqrt{M}$ (con $M = 10^6$ si ottiene $\delta = 0{,}001$). Per il terzo, se $x > 0$ si ha $|1/x| < \varepsilon$ quando $x > 1/\varepsilon$: basta $N = 1/\varepsilon$.

**DA RICORDARE**

In ogni definizione l'ordine è: **prima** la precisione richiesta ai valori ($\varepsilon$ oppure $M$), **poi** la vicinanza di $x$ che la garantisce ($\delta$ oppure $N$). Il numero $\delta$ (o $N$) può dipendere da $\varepsilon$ (o da $M$) e dal punto $x_0$, ma **non da $x$**: deve funzionare per tutti gli $x$ dell'intorno contemporaneamente. Più piccolo è $\varepsilon$, in genere più piccolo dovrà essere $\delta$.

## 2.3 Limite destro, limite sinistro, eccesso e difetto

### 2.3.1 Avvicinarsi da una parte sola

Che cosa fa $1/x$ quando $x$ si avvicina a 0? Se $x$ è positivo e piccolo, $1/x$ è positivo e grande: $1/0{,}001 = 1000$. Se $x$ è negativo e piccolo in valore assoluto, $1/x$ è negativo e grande in valore assoluto: $1/(-0{,}001) = -1000$. Le due parti del grafico si comportano in modo opposto (Figura 2.3), e nessuno dei due simboli $+\infty$ e $-\infty$ descrive da solo che cosa succede. Conviene allora guardare un lato per volta.

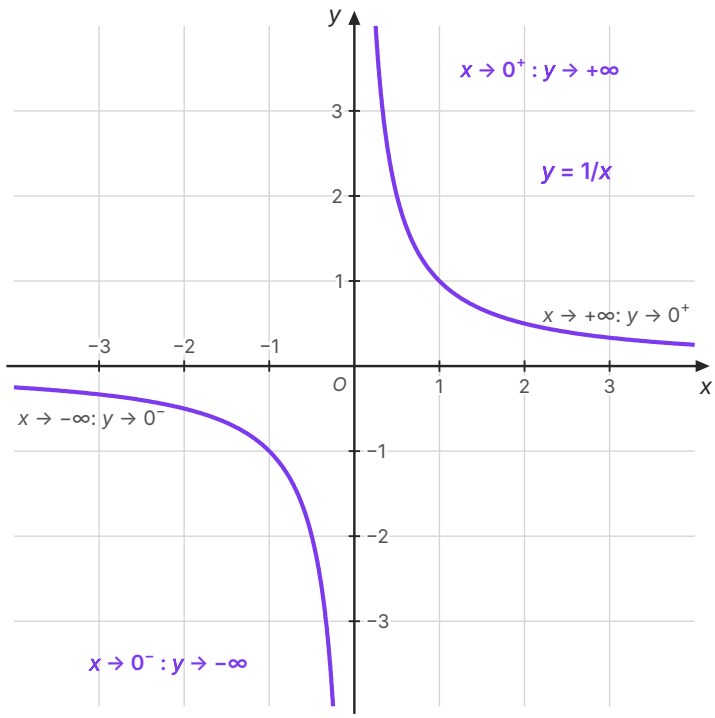



**Figura 2.3** Il grafico di $y = 1/x$ (iperbole equilatera, vedi *Matematica 3*). Per $x \to 0^+$ i valori tendono a $+\infty$, per $x \to 0^-$ a $-\infty$: il limite per $x \to 0$ non esiste. Per $x \to \pm\infty$ i valori tendono a 0, da sopra a destra e da sotto a sinistra. Grafico calcolato dall'equazione, stessa unità sui due assi.

Si dice che $L$ è il **limite destro** di $f$ per $x$ che tende a $x_0$, e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, se la definizione di limite è soddisfatta considerando soltanto gli $x$ del dominio maggiori di $x_0$: nel caso finito, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. L'intervallo $[x_0; x_0 + \delta[$ si chiama intorno destro di $x_0$. Il **limite sinistro** $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ si definisce allo stesso modo con $x_0 - \delta < x < x_0$, cioè con l'intorno sinistro $]x_0 - \delta; x_0]$. Così $\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$.

**IN SINTESI**

**Teorema. Ipotesi:** $x_0$ è punto di accumulazione del dominio di $f$ sia da destra sia da sinistra. **Tesi:** $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se e solo se esistono il limite destro e il limite sinistro di $f$ per $x \to x_0$ e sono entrambi uguali a $L$.

*Dimostrazione* (caso $L$ finito). Se il limite è $L$, la condizione $|f(x) - L| < \varepsilon$ vale in tutto un intorno di $x_0$ privato di $x_0$, quindi anche nella sua parte destra e nella sua parte sinistra. Viceversa, fissato

$\varepsilon$, il limite destro fornisce un $\delta_1$ che funziona a destra e il limite sinistro un $\delta_2$ che funziona a sinistra; il più piccolo dei due, $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, funziona da entrambe le parti. c.v.d.

In particolare, se i due limiti laterali esistono ma sono diversi, il limite non esiste. È il caso di $1/x$ in 0: il limite destro è $+\infty$, il sinistro $-\infty$, quindi $\lim_{x\to 0} 1/x$ **non esiste**. Diverso è il caso di $1/x^2$, che tende a $+\infty$ da entrambe le parti: lì il limite esiste ed è $+\infty$.

### 2.3.2 Funzioni definite a tratti

I limiti laterali sono lo strumento naturale per le funzioni definite con espressioni diverse a destra e a sinistra di un punto. Consideriamo

$$f(x) = x + 1 \text{ se } x < 1, \qquad f(x) = x^2 - 3 \text{ se } x \geq 1.$$

Per calcolare il limite sinistro in 1 si usa solo la prima espressione: quando $x$ si avvicina a 1 da sinistra, $x + 1$ si avvicina a 2, quindi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$. Per il limite destro si usa la seconda: $x^2 - 3$ si avvicina a $1 - 3 = -2$, quindi $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$. I due limiti sono diversi: il grafico ha un «salto» di ampiezza 4 (Figura 2.4) e il limite per $x \to 1$ non esiste, anche se $f$ è definita in 1 e vale $-2$.

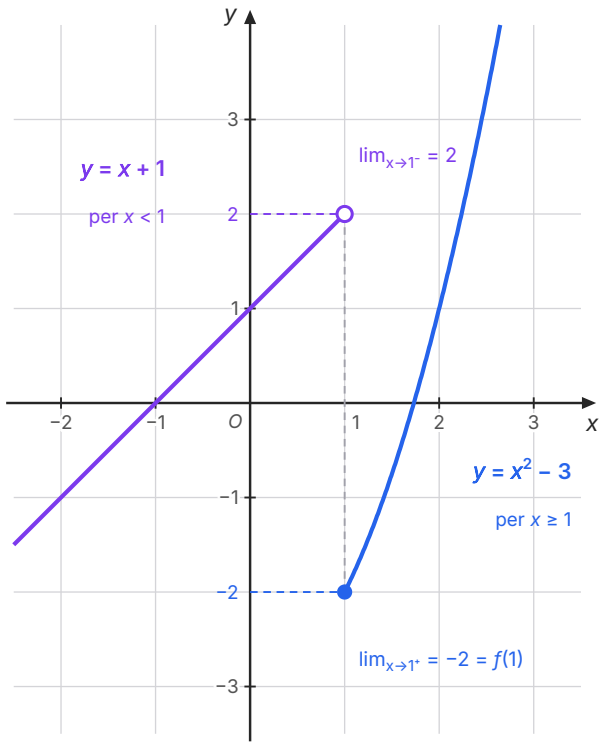



**Figura 2.4** La funzione definita a tratti $f(x) = x + 1$ per $x < 1$ e $f(x) = x^2 - 3$ per $x \geq 1$. Il limite sinistro in 1 è 2 (cerchio vuoto: il punto (1; 2) non appartiene al grafico), il limite destro è $-2$ e coincide con $f(1)$ (punto pieno). Grafico calcolato dalle equazioni, stessa unità sui due assi.

Un altro esempio è la funzione **parte intera**, che associa a $x$ il più grande intero minore o uguale a $x$, indicato con $[x]$: $[2{,}7] = 2$, $[-0{,}5] = -1$, $[3] = 3$. Il suo grafico è una «scala»: in ogni intervallo $[k;\, k+1[$ la funzione vale costantemente $k$. In ogni intero $k$ il limite sinistro è $k-1$ e il limite destro è $k$, quindi il limite non esiste; in ogni punto non intero, invece, il limite esiste ed è uguale al valore. Per esempio $\lim_{x\to 2^-}[x] = 1$, $\lim_{x\to 2^+}[x] = 2$, $\lim_{x\to 2{,}5}[x] = 2$.

### 2.3.3 Limiti per eccesso e per difetto

Quando il limite $L$ è finito, a volte interessa sapere anche da quale parte i valori si avvicinano a $L$. Si dice che $f(x)$ tende a $L$ **per eccesso**, e si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = L^+$, se il limite è $L$ e inoltre $f(x) > L$ in un intorno di $x_0$ (escluso $x_0$); tende a $L$ **per difetto**, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L^-$, se il limite è $L$ e $f(x) < L$ vicino a $x_0$. La Figura 2.3 mostra che $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0^+$ e $\lim_{x\to-\infty} 1/x = 0^-$; inoltre $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$, perché $x^2 > 0$ per $x \neq 0$. Non sempre si può precisare: $x^3$ tende a 0 per $x \to 0$, ma è positivo a destra e negativo a sinistra; si scrive allora $\lim_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$ e $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0^-$.

Le due notazioni con l'esponente «+» e «–» non vanno confuse. In $x \to x_0^+$ il segno riguarda la *variabile*, che si avvicina da destra; in $f(x) \to L^+$ riguarda i *valori*, che si avvicinano da sopra. Questa informazione sarà decisiva nel capitolo 3: il segno di una quantità che tende a 0 decide il segno del suo reciproco, come mostra proprio $1/x$.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Scrivere $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$.** Il simbolo $\infty$ senza segno non è né $+\infty$ né $-\infty$, e questo limite non esiste: a destra è $+\infty$, a sinistra $-\infty$. Prima di concludere che un limite è infinito, controlla **sempre** il segno da entrambe le parti. Per lo stesso motivo «$1/0 = \infty$» non ha senso: 0 non ha reciproco. Nel capitolo 3 useremo le scritture abbreviate $1/0^+ = +\infty$ e $1/0^- = -\infty$, che riassumono proprio i due limiti laterali di $1/x$.

## 2.4 La verifica di un limite e gli asintoti

### 2.4.1 Come si verifica un limite

**Verificare** un limite significa controllare, con la definizione, che un valore proposto è davvero il limite. Nel caso finito il procedimento è sempre lo stesso: si risolve la disequazione $|f(x) - L| < \varepsilon$ (con le tecniche di *Matematica 3*, capp. 1–2) e si controlla che l'insieme delle soluzioni contenga un intorno di $x_0$, privato al più di $x_0$. Se lo contiene per ogni $\varepsilon > 0$, il limite è verificato; se c'è anche un solo $\varepsilon$ per cui non lo contiene, il valore proposto non è il limite. Nei casi infiniti si risolve $f(x) > M$ (oppure $f(x) < -M$), e per $x \to \pm\infty$ si cerca una semiretta invece di un intervallo.

Partiamo da un caso lineare: $\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$. La disequazione $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$ equivale a $2|x - 3| < \varepsilon$, cioè a $|x - 3| < \varepsilon/2$: le soluzioni formano l'intorno di 3 di raggio $\delta = \varepsilon/2$, e il limite è ve-

rificato. Con $\varepsilon = 0{,}01$ si ha $\delta = 0{,}005$: per avere valori che distano da 5 meno di un centesimo basta prendere $x$ entro cinque millesimi da 3.

**ESEMPIO SVOLTO**

Verifichiamo che $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ e troviamo $\delta$ per $\varepsilon = 0{,}1$.

**1. La disequazione.** $|x^2 - 4| < \varepsilon$ equivale a $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$. Possiamo supporre $\varepsilon < 4$: se la condizione vale per gli $\varepsilon$ piccoli, a maggior ragione vale per quelli grandi.

**2. Le soluzioni vicine a 2.** Per $x > 0$ la doppia disuguaglianza equivale a $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$. Poiché $\sqrt{4-\varepsilon} < 2 < \sqrt{4+\varepsilon}$, l'intervallo $]\sqrt{4-\varepsilon};\ \sqrt{4+\varepsilon}[$ contiene 2 al suo interno: è un intorno di 2, anche se non è simmetrico. Il limite è verificato.

**3. Un valore di $\delta$.** Con $\varepsilon = 0{,}1$ l'intervallo è $]\sqrt{3{,}9};\ \sqrt{4{,}1}[ \approx ]1{,}97484;\ 2{,}02485[$. Le distanze di 2 dagli estremi sono circa 0,02516 a sinistra e 0,02485 a destra. Un intorno circolare contenuto nell'intervallo deve avere raggio non superiore alla *minore* delle due: $\delta = 0{,}0248$ va bene (e qualunque $\delta$ più piccolo).

**Controllo.** Con $x = 2{,}0248$ si ottiene $x^2 \approx 4{,}09982 < 4{,}1$; con $x = 1{,}9752$ si ottiene $x^2 \approx 3{,}90142 > 3{,}9$.

Per un limite infinito il procedimento è analogo. Verifichiamo che $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$: la disequazione $1/x^2 > M$ equivale, per $x \neq 0$, a $x^2 < 1/M$, cioè a $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$: le soluzioni formano un intorno di 0 privato di 0, qualunque sia $M > 0$. Il limite è verificato, con $\delta = 1/\sqrt{M}$.

Vediamo infine un valore sbagliato. È vero che $\lim_{x\to 1} (x + 1) = 3$? Proviamo con $\varepsilon = 0{,}5$: la disequazione $|x + 1 - 3| < 0{,}5$ ha soluzioni $1{,}5 < x < 2{,}5$, un intervallo che non contiene 1 e quindi nessun suo intorno. Un solo $\varepsilon$ che «non funziona» basta a concludere che 3 non è il limite (il limite è 2).

**ESEMPIO SVOLTO**

Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} (2x + 1)/(x - 1) = 2$ e troviamo $N$ per $\varepsilon = 0{,}01$.

**1. Semplificare la differenza.** Per $x \neq 1$ si ha $(2x + 1)/(x - 1) - 2 = (2x + 1 - 2x + 2)/(x - 1) = 3/(x - 1)$.

**2. La disequazione.** Poiché ci interessa $x \to +\infty$, possiamo limitarci agli $x > 1$, dove $x - 1 > 0$. Allora $|3/(x - 1)| < \varepsilon$ equivale a $x - 1 > 3/\varepsilon$, cioè a $x > 1 + 3/\varepsilon$. Le soluzioni contengono la semiretta $]1 + 3/\varepsilon;\ +\infty[$, un intorno di $+\infty$: il limite è verificato con $N = 1 + 3/\varepsilon$.

**3. Il caso numerico.** Con $\varepsilon = 0{,}01$ si ottiene $N = 1 + 300 = 301$: per $x > 301$ la funzione dista da 2 meno di un centesimo. Per esempio $x = 401$ dà $803/400 = 2{,}0075$.

**4. Che cosa fa vicino a 1.** Dalla forma $2 + 3/(x - 1)$ si legge anche il comportamento vicino a 1: per $x \to 1^+$ il termine $3/(x - 1)$ tende a $+\infty$, per $x \to 1^-$ tende a $-\infty$. Il grafico è un'iperbole equilatera traslata, con centro di simmetria $(1; 2)$.

**ERRORE FREQUENTE**

**Scegliere δ in funzione di *x*.** Per verificare $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ uno studente scrive $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ se $|x - 2| < \varepsilon/|x + 2|$, e propone «$\delta = \varepsilon/|x + 2|$». Ma δ deve essere un **numero**, fissato prima di scegliere $x$: un raggio che cambia con $x$ non individua alcun intorno. Il ragionamento si salva limitando prima $x$: se $|x - 2| < 1$, allora $1 < x < 3$ e $|x + 2| < 5$; quindi con $\delta = \min(1; \varepsilon/5)$ si ha $|x^2 - 4| < 5 \cdot \varepsilon/5 = \varepsilon$. Questo δ dipende solo da ε.

### 2.4.2 Asintoti verticali e orizzontali

I limiti infiniti e i limiti all'infinito hanno un significato geometrico che conosci già dalle iperboli, dagli esponenziali e dai logaritmi (*Matematica 3*): il grafico si avvicina sempre di più a una retta. Adesso possiamo dirlo con precisione.

**IN SINTESI**

La retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** del grafico di $f$ se almeno uno dei due limiti $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ è $+\infty$ oppure $-\infty$.

La retta $y = L$, con $L$ numero reale, è un **asintoto orizzontale** del grafico di $f$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ oppure $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Il grafico di $1/x$ ha l'asintoto verticale $x = 0$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$; quello di $(2x + 1)/(x - 1)$ ha gli asintoti $x = 1$ e $y = 2$. Il grafico di $y = e^x$ ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ soltanto a sinistra, perché $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ mentre per $x \to +\infty$ la funzione diverge; quello di $y = \ln x$ ha l'asintoto verticale $x = 0$, raggiunto solo da destra perché il dominio è $]0; +\infty[$. La funzione tangente ha infiniti asintoti verticali, le rette $x = \pi/2 + k\pi$ con $k$ intero.

Un grafico può avere due asintoti orizzontali diversi, uno a destra e uno a sinistra. È il caso della funzione $y = \operatorname{arctg} x$ (*Matematica 4*): per $x \to +\infty$ l'angolo, compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, la cui tangente è $x$ si avvicina a $\pi/2$, e per $x \to -\infty$ si avvicina a $-\pi/2$ (Figura 2.5). Quindi $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = (\pi/2)^-$ e $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = (-\pi/2)^+$, e le rette $y = \pm\pi/2$ sono asintoti orizzontali.

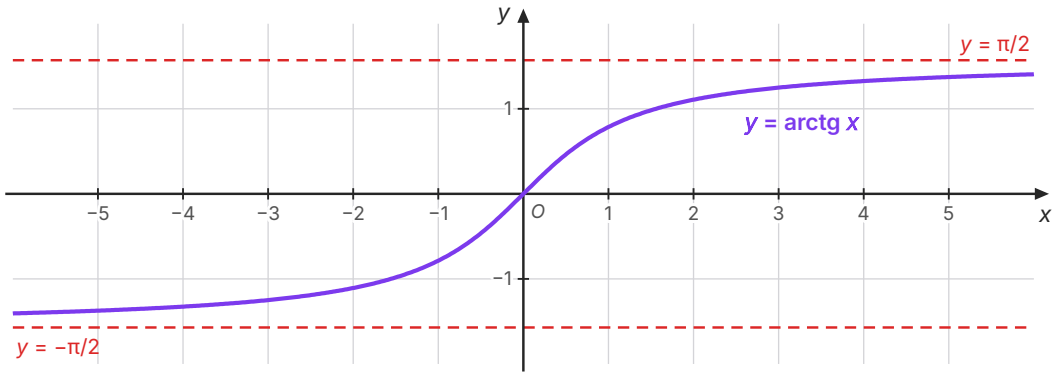



**Figura 2.5** Il grafico di $y = \text{arctg}\, x$ e i suoi due asintoti orizzontali $y = \pi/2 \approx 1{,}571$ (per $x \to +\infty$) e $y = -\pi/2$ (per $x \to -\infty$). Il grafico resta sempre tra i due asintoti senza mai toccarli. Grafico calcolato dall'equazione, stessa unità sui due assi.

Attenzione a un'idea diffusa: che un grafico non possa mai attraversare un suo asintoto. Per un asintoto verticale $x = x_0$ l'idea è quasi giusta: il grafico di una funzione incontra quella retta al più in un punto, $(x_0; f(x_0))$, e soltanto se $x_0$ appartiene al dominio. Per gli asintoti orizzontali, invece, l'idea è sbagliata. La funzione $y = x/(x^2 + 1)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi ha l'asintoto $y = 0$, e passa per l'origine, che sta sull'asintoto. Nel prossimo paragrafo vedremo una funzione che attraversa il suo asintoto orizzontale infinite volte.

## 2.5 I teoremi sui limiti

I teoremi di questo paragrafo valgono per tutti i tipi di limite, con $x_0$ finito o infinito. Li dimostriamo nel caso $x_0$ e $L$ finiti; negli altri casi le dimostrazioni sono identiche, sostituendo gli intorni circolari con le semirette. Sono le stesse proprietà già dimostrate nel capitolo 1 per le successioni, e le idee delle dimostrazioni sono le stesse.

### 2.5.1 Unicità del limite

**IN SINTESI**

**Teorema di unicità del limite. Ipotesi:** $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$. **Tesi:** $L_1 = L_2$.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo $L_1 \neq L_2$ e scegliamo $\varepsilon = |L_1 - L_2|/2$. Gli intorni di $L_1$ e di $L_2$ di raggio $\varepsilon$ sono disgiunti: un numero non può distare meno di metà della loro distanza da entrambi. Per la prima ipotesi esiste $\delta_1$ tale che $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$; per la seconda esi-

ste $\delta_2$ tale che $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Sia $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$. Poiché $x_0$ è punto di accumulazione del dominio, esiste un $x$ del dominio con $0 < |x - x_0| < \delta$: per questo $x$ il valore $f(x)$ appartiene a entrambi gli intorni, che sono disgiunti. Questo è assurdo, quindi $L_1 = L_2$. c.v.d.

La dimostrazione usa in modo essenziale l'ipotesi che $x_0$ sia un punto di accumulazione: in un punto isolato «ogni» numero soddisferebbe la definizione, perché non ci sarebbero $x$ da controllare. Ecco perché la definizione la richiede. L'unicità giustifica l'uso dell'articolo determinativo: si parla de *il* limite.

### 2.5.2 Permanenza del segno

**IN SINTESI**

**Teorema della permanenza del segno. Ipotesi:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ con $L > 0$ (oppure $L = +\infty$). **Tesi:** esiste un intorno di $x_0$ in cui, per ogni $x \neq x_0$ del dominio, si ha $f(x) > 0$. Lo stesso vale con $L < 0$ (oppure $L = -\infty$) e $f(x) < 0$.

*Dimostrazione* (caso $L > 0$ finito). Scegliamo $\varepsilon = L$. Per la definizione esiste $\delta$ tale che, per $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - L| < L$, cioè $0 < f(x) < 2L$. In particolare $f(x) > 0$ in tutto quell'intorno. c.v.d.

Il teorema dice che una funzione con limite positivo è positiva vicino a $x_0$, ma non dice nulla *in* $x_0$: l'esempio della funzione con $f(1) = 5$ lo mostra di nuovo. Esiste anche una forma «inversa» del teorema, che si usa spesso.

**IN SINTESI**

**Teorema (forma inversa). Ipotesi:** $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq x_0$ del dominio in un intorno di $x_0$, e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. **Tesi:** $L \geq 0$.

*Dimostrazione.* Se fosse $L < 0$, per la permanenza del segno si avrebbe $f(x) < 0$ vicino a $x_0$, contro l'ipotesi. c.v.d. Nella tesi la disuguaglianza è debole, e deve esserlo: $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$, ma il suo limite per $x \to 0$ è 0, che non è positivo. Passando al limite, «>» può diventare «=».

### 2.5.3 Il teorema del confronto

**IN SINTESI**

**Teorema del confronto. Ipotesi:** in un intorno di $x_0$, per ogni $x \neq x_0$ del dominio, si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$; inoltre $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$. **Tesi:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

*Dimostrazione.* Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta_1$ tale che $L - \varepsilon < g(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$, ed esiste $\delta_2$ tale che $h(x) < L + \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Sia $\delta$ il più piccolo tra $\delta_1$, $\delta_2$ e il raggio dell'intorno in cui vale

l'ipotesi. Per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha allora $L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon$, cioè $|f(x) - L| < \varepsilon$. c.v.d.

Il teorema, chiamato anche «dei carabinieri» perché $g$ e $h$ «scortano» $f$ verso il limite, è utilissimo con le funzioni che oscillano. Consideriamo $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, definita per $x \neq 0$. Poiché $|\operatorname{sen}(1/x)| \le 1$, si ha $|f(x)| \le |x|$, cioè $-|x| \le x \operatorname{sen}(1/x) \le |x|$. Le due funzioni esterne tendono a 0 per $x \to 0$, quindi

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

Il grafico oscilla infinite volte vicino a 0, ma le oscillazioni sono «schiacciate» tra le due rette $y = \pm x$ (Figura 2.6). Allo stesso modo, per $x > 0$ si ha $-1/x \le (\operatorname{sen} x)/x \le 1/x$, e quindi $\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$: la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale del grafico di $y = (\operatorname{sen} x)/x$, che la attraversa in tutti i punti $x = k\pi$ con $k$ intero non nullo, cioè infinite volte.

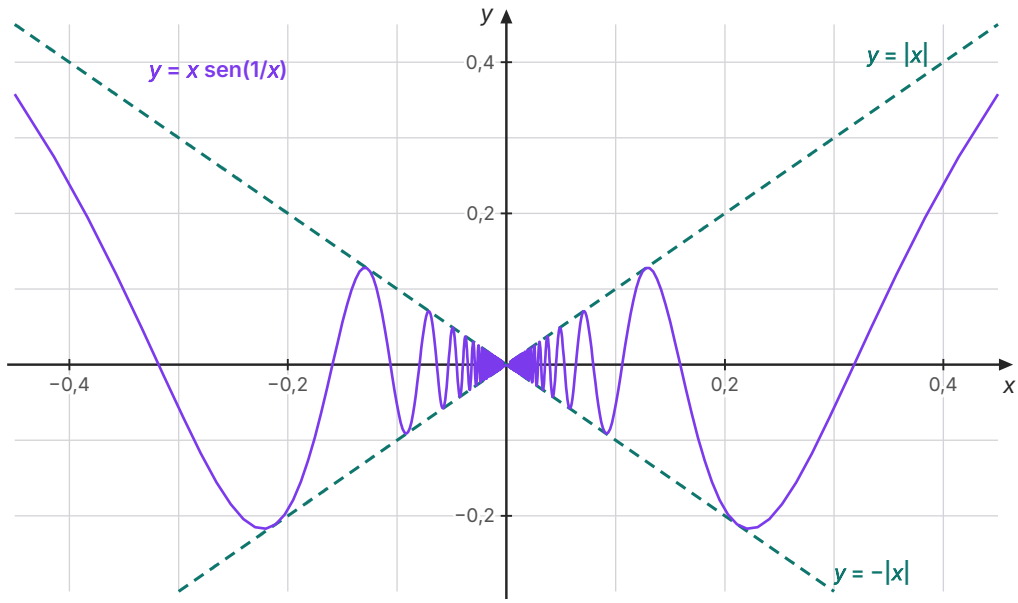



**Figura 2.6** Il teorema del confronto: il grafico di $y = x \operatorname{sen}(1/x)$ è compreso tra quelli di $y = |x|$ e $y = -|x|$ (tratteggiati), che tendono entrambi a 0 per $x \to 0$; quindi anche $x \operatorname{sen}(1/x)$ tende a 0. Vicino a 0 le oscillazioni sono troppo fitte e troppo piccole per essere disegnate una per una. Grafico calcolato dall'equazione; unità diverse sui due assi.

Il confronto ha anche una versione per i limiti infiniti, che basta «a metà»: se $f(x) \ge g(x)$ vicino a $x_0$ e $g(x) \to +\infty$, allora anche $f(x) \to +\infty$ (la dimostrazione è proposta negli esercizi). Per esempio $x + \operatorname{sen} x \ge x - 1$, e $x - 1 \to +\infty$ per $x \to +\infty$: quindi $\lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{sen} x) = +\infty$. Analogamente, se $f(x) \le h(x)$ e $h(x) \to -\infty$, allora $f(x) \to -\infty$.

### 2.5.4 Limiti di funzioni e limiti di successioni

Il legame tra i due concetti di limite che abbiamo incontrato, per le successioni e per le funzioni, è espresso dal teorema seguente, che enunciamo senza dimostrazione.

**IN SINTESI**

**Teorema. Ipotesi:** $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, e $(x_n)$ è una successione di punti del dominio di $f$, tutti diversi da $x_0$, tale che $x_n \to x_0$ ($x_0$ e $L$ finiti o infiniti). **Tesi:** $f(x_n) \to L$.

Intuitivamente: se $f(x)$ si avvicina a $L$ comunque $x$ si avvicini a $x_0$, ci si avvicina anche lungo una qualsiasi successione di punti. Il teorema serve soprattutto «al contrario», per dimostrare che un limite **non esiste**: basta trovare due successioni che tendono a $x_0$ lungo le quali $f$ ha limiti diversi (oppure una lungo la quale $f$ non ha limite).

**ESEMPIO SVOLTO**

●●● Dimostriamo che $\lim_{x \to 0} \text{sen}(1/x)$ non esiste (Figura 2.7).

**1. Una successione su cui la funzione vale 0.** Sia $x_n = 1/(n\pi)$, con $n \geq 1$. I termini sono positivi, diversi da 0, e tendono a 0. Inoltre $\text{sen}(1/x_n) = \text{sen}(n\pi) = 0$ per ogni $n$, quindi lungo questa successione i valori tendono a 0.

**2. Una successione su cui la funzione vale 1.** Sia $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$. Anche questi termini sono positivi e tendono a 0, e $\text{sen}(1/y_n) = \text{sen}(\pi/2 + 2n\pi) = 1$ per ogni $n$: lungo questa successione i valori tendono a 1.

**3. Conclusione.** Se il limite esistesse e valesse $L$, per il teorema entrambe le successioni dei valori dovrebbero tendere a $L$: avremmo $L = 0$ e $L = 1$, contro l'unicità del limite. Quindi il limite non esiste, né da destra né da sinistra (per il limite sinistro si usano $-x_n$ e $-y_n$).

**Osservazione.** La funzione non tende neppure a $+\infty$ o a $-\infty$: è limitata, perché $|\text{sen}(1/x)| \leq 1$. Il suo limite non esiste perché, in ogni intorno di 0, i valori percorrono infinite volte tutto l'intervallo $[-1; 1]$.

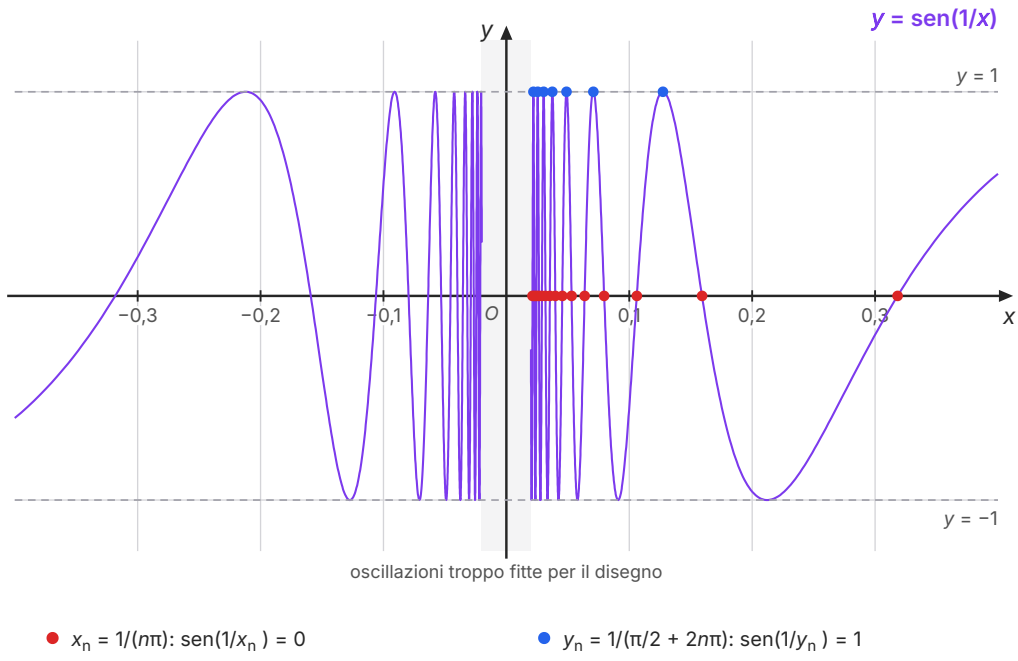



**Figura 2.7** Il grafico di $y = \operatorname{sen}(1/x)$ per $0{,}02 \le |x| \le 0{,}4$, calcolato con 2818 punti distribuiti in modo da seguire ogni oscillazione. In ogni intorno di 0 la funzione assume infinite volte il valore 0 (punti rossi, $x = 1/(n\pi)$) e infinite volte il valore 1 (punti blu, $x = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$): il limite per $x \to 0$ non esiste. Nella fascia grigia, $|x| < 0{,}02$, le oscillazioni sono troppo fitte per essere disegnate. Unità diverse sui due assi.

Con lo stesso metodo si dimostra che sen $x$ e cos $x$ non hanno limite per $x \to \pm\infty$. Per il coseno, per esempio, lungo $x_n = 2n\pi$ i valori sono tutti 1, lungo $y_n = \pi + 2n\pi$ sono tutti $-1$, ed entrambe le successioni tendono a $+\infty$. Una funzione periodica non costante non ha mai limite all'infinito.

**APPROFONDIMENTO · NEGARE UNA DEFINIZIONE**

Dire che un limite *non* è $L$ significa negare la frase «per ogni $\varepsilon$ esiste $\delta$ tale che per ogni $x$...». La logica (che studi anche in filosofia) insegna a negare una frase con i quantificatori scambiando «per ogni» con «esiste» e negando la condizione finale. La negazione è quindi: **esiste** $\varepsilon > 0$ tale che **per ogni** $\delta > 0$ **esiste** un $x$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \ge \varepsilon$.

Si può usare direttamente per $\operatorname{sen}(1/x)$. Qualunque sia il numero $L$ proposto come limite, scegliamo $\varepsilon = 1/2$. In ogni intorno di 0 ci sono punti in cui la funzione vale 0 e punti in cui vale 1; poiché 0 e 1 distano 1, almeno uno dei due valori dista da $L$ almeno $1/2$. Quindi nessun $\delta$ funziona e $L$ non è il limite: il limite non esiste. È lo stesso risultato dell'esempio svolto, ottenuto senza le successioni. Saper negare correttamente una definizione è una competenza che serve ovunque in matematica, e non solo lì: «non è vero che tutti gli studenti hanno superato la verifica» significa «almeno uno studente non l'ha superata», non «nessuno l'ha superata».

## 2.6 I limiti delle funzioni elementari

Per le funzioni elementari (polinomi, potenze, radici, esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche e le loro inverse) vale un fatto che giustificheremo nel capitolo 4: **se $x_0$ appartiene al dominio (e ne è punto di accumulazione), il limite per $x \to x_0$ è il valore $f(x_0)$**. Per esempio $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$, $\lim_{x\to\pi} \cos x = -1$, $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$, $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. Le questioni interessanti sono quindi i punti di accumulazione del dominio che non gli appartengono, gli estremi del dominio e $\pm\infty$. Per le funzioni elementari i limiti in questi punti si leggono dai grafici che conosci dagli anni precedenti, e la Tabella 2.2 li raccoglie. Imparala bene: nel capitolo 3 sarà il punto di partenza di tutti i calcoli.

**Tabella 2.2** I limiti delle funzioni elementari agli estremi del dominio ($n$ intero positivo). I grafici sono quelli di *Matematica 3* (capp. 3, 12, 13) e *Matematica 4* (cap. 1).

| Funzione | Limiti |
|---|---|
| $x^n$, $n$ pari | $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$ |
| $x^n$, $n$ dispari | $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ |
| $1/x^n$ | $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x^n = 0$; in 0: $+\infty$ da entrambe le parti se $n$ è pari; $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $-\infty$ per $x \to 0^-$ se $n$ è dispari |
| $\sqrt{x}$ | $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ |
| $a^x$, $a > 1$ | $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+$ |
| $a^x$, $0 < a < 1$ | $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ |
| $\log_a x$, $a > 1$ | $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ |
| $\log_a x$, $0 < a < 1$ | $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ |
| sen $x$, cos $x$ | nessun limite per $x \to \pm\infty$ |
| tg $x$ | $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg}\, x = +\infty$; $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$ (e così in ogni $\pi/2 + k\pi$) |
| arctg $x$ | $\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}\, x = (\pi/2)^-$; $\lim_{x\to-\infty} \text{arctg}\, x = (-\pi/2)^+$ |

Qualche riga della tabella merita un commento. Per la tangente basta ricordare che $\text{tg}\, x = \text{sen}\, x/\cos x$: quando $x$ si avvicina a $\pi/2$ da sinistra il seno si avvicina a 1 e il coseno a 0 restando *positivo*, quindi il quoziente è positivo e sempre più grande; da destra il coseno è *negativo* e il quoziente tende a $-\infty$. Ecco di nuovo l'importanza dei limiti laterali. Per gli esponenziali e i logaritmi conviene ricordare che $(1/2)^x = 2^{-x}$ e $\log_{1/2} x = -\log_2 x$: i grafici con base minore di 1 sono simmetrici di quelli con base maggiore di 1 rispetto all'asse $y$ (gli esponenziali) o all'asse $x$ (i logaritmi), e i limiti si scambiano di conseguenza.

Con le traslazioni e le simmetrie di *Matematica 3* la tabella si estende subito a molte altre funzioni. Il grafico di $y = 1/(x-3)^2$ è quello di $1/x^2$ traslato di 3 verso destra, quindi $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = +\infty$; il grafico di $y = 2 + e^{-x}$ è quello di $e^{-x} = (1/e)^x$ alzato di 2, quindi $\lim_{x\to+\infty} (2 + e^{-x}) = 2^+$. Nel capitolo 3 l'*algebra dei limiti* renderà sistematico questo modo di procedere, permettendo di combinare i limiti della tabella con le operazioni e con la composizione.

**COLLEGAMENTI · VELOCITÀ ISTANTANEA E IDEALIZZAZIONI DELLA FISICA**

Un corpo cade da fermo e percorre $s(t) = 5t^2$ metri in $t$ secondi (è la legge $s = \frac{1}{2}gt^2$, con l'accelerazione di gravità arrotondata a $g = 10$ m/s$^2$). La sua velocità media tra l'istante 1 s e un istante $t \neq 1$ è

$$v_m(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{5(t^2 - 1)}{t - 1} = 5(t + 1) \quad \text{m/s}.$$

È, a meno del fattore 5, proprio la funzione con cui abbiamo aperto il capitolo: non è definita per $t = 1$, perché in un intervallo di tempo nullo il corpo percorre uno spazio nullo e il quoziente diventa 0/0. Ma il suo limite per $t \to 1$ esiste e vale 10 m/s: è la velocità istantanea all'istante 1 s, la grandezza che in un'auto misura il tachimetro. Nel capitolo 5 questo limite prenderà il nome di *derivata*.

La fisica è piena di limiti di questo tipo. L'*istante* è un intervallo di tempo la cui durata tende a 0; il *punto materiale* è un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze in gioco; la *velocità limite* di un paracadutista è il limite della sua velocità per $t \to +\infty$. Nessuna di queste grandezze si osserva «esattamente»: sono idealizzazioni, e il concetto di limite è ciò che dà loro un significato preciso.

## SINTESI

- Il limite per $x \to x_0$ si considera solo se $x_0$ è un **punto di accumulazione** del dominio; $x_0$ può non appartenere al dominio, e il valore $f(x_0)$ non interviene nella definizione.
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa: per ogni intorno di $L$ esiste un intorno di $x_0$ tale che, per ogni $x \neq x_0$ del dominio in quell'intorno, $f(x)$ appartiene all'intorno di $L$. Vale per $x_0$ e $L$ finiti o infiniti.
- Con le disuguaglianze: intorno di $L \leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$; di $+\infty \leftrightarrow f(x) > M$; di $x_0 \leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$; di $+\infty$ per la variabile $\leftrightarrow x > N$. Prima si fissa $\varepsilon$ (o $M$), poi si cerca $\delta$ (o $N$), che non può dipendere da $x$.
- Il limite esiste ed è $L$ se e solo se il **limite destro** e il **limite sinistro** esistono e sono uguali a $L$. $\lim_{x \to 0} 1/x$ non esiste: a destra è $+\infty$, a sinistra $-\infty$.
- $L^+$ e $L^-$ indicano un limite raggiunto per eccesso o per difetto; $x_0^+$ e $x_0^-$ indicano da quale parte si avvicina la variabile.
- **Verificare** un limite finito significa risolvere $|f(x) - L| < \varepsilon$ e controllare che le soluzioni contengano un intorno di $x_0$ (privato di $x_0$) per ogni $\varepsilon$; un solo $\varepsilon$ che non funziona smentisce il limite.
- $x = x_0$ è **asintoto verticale** se almeno un limite laterale in $x_0$ è infinito; $y = L$ è **asintoto orizzontale** se $f(x)$ tende a $L$ per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$. Un grafico può attraversare un asintoto orizzontale.
- **Unicità:** il limite, se esiste, è unico. **Permanenza del segno:** se il limite è positivo, la funzione è positiva vicino a $x_0$; se $f(x) \geq 0$ vicino a $x_0$, il limite è $\geq 0$.
- **Confronto:** se $g \leq f \leq h$ e $g$, $h$ tendono allo stesso $L$, anche $f$ tende a $L$; così $x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$ per $x \to 0$ e $(\operatorname{sen} x)/x \to 0$ per $x \to +\infty$.
- Se $f(x) \to L$, allora $f(x_n) \to L$ lungo ogni successione $x_n \to x_0$; due successioni con limiti diversi dei valori dimostrano che il limite non esiste ($\operatorname{sen}(1/x)$ in 0, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ a $\pm\infty$).
- Per le funzioni elementari, nei punti del dominio il limite è il valore; agli estremi del dominio i limiti si leggono dai grafici (Tabella 2.2), per esempio $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● Che cosa significa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (con $x_0$ e $L$ numeri reali)?

   **A.** che $f(x_0) = L$

   **B.** che per ogni intorno di $L$ esiste un intorno di $x_0$ in cui, per $x \neq x_0$ nel dominio, $f(x)$ appartiene all'intorno di $L$

   **C.** che esiste un intorno di $L$ tale che per ogni intorno di $x_0$ i valori $f(x)$ vi appartengono

   **D.** che i valori di $f$ si avvicinano sempre di più a $L$ ma non lo raggiungono mai

2. ● Sia $D = ]0; 1[ \cup \{2\}$. Quale dei seguenti numeri **non** è punto di accumulazione di $D$?

   **A.** 0

   **B.** 1

   **C.** 1/2

   **D.** 2

3. ● Quanto vale $\lim_{x \to 0^-} 1/x^3$?

   **A.** $-\infty$

   **B.** $+\infty$

   **C.** 0

   **D.** non esiste

4. ●● Quale dei seguenti limiti vale $0^-$?

   **A.** $\lim_{x \to +\infty} 1/x$

   **B.** $\lim_{x \to -\infty} e^x$

   **C.** $\lim_{x \to -\infty} 1/x$

   **D.** $\lim_{x \to 0} x^2$

5. ●● Quanto vale $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \text{tg}\, x$?

   **A.** $+\infty$

   **B.** $-\infty$

   **C.** 0

   **D.** 1

6. ●● Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 3$. Quale affermazione è **sicuramente** vera?

   **A.** $f(x_0) = 3$

   **B.** $f$ è definita in $x_0$

   **C.** $f(x) < 3$ per ogni $x$ vicino a $x_0$

   **D.** esiste un intorno di $x_0$ in cui, per $x \neq x_0$ nel dominio, $f(x) > 2$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $f$ non è definita in $x_0$, il limite di $f$ per $x \to x_0$ non esiste. b) Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = 5$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 5$. c) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, allora $L > 0$. d) Il grafico di una funzione non può mai intersecare un suo asintoto orizzontale.

8. ● Completa la definizione: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che, per ogni $x$ del dominio con _____ , si ha _____ .

9. ●● Scrivi con $\varepsilon$, $\delta$, $M$ o $N$ il significato delle scritture: a) $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$; b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3^-$; c) $\lim_{x \to 2^+} h(x) = 0$.

### Calcolare

10. ● Verifica con la definizione che $\lim_{x \to 2} (3x - 4) = 2$ e trova $\delta$ per $\varepsilon = 0{,}03$.

11. ● Verifica che $\lim_{x\to+\infty} 5/(x+2) = 0$ e trova $N$ per $\varepsilon = 0{,}01$.

12. ● Verifica che $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = +\infty$ e trova $\delta$ per $M = 10^4$.

13. ●● Verifica che $\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$. Per $\varepsilon = 0{,}1$ trova l'intervallo in cui $|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$ e un $\delta$ adatto.

14. ●● Verifica che $\lim_{x\to-\infty} (1 - 2x) = +\infty$ e trova $N$ per $M = 1000$.

15. ●● Verifica che $\lim_{x\to+\infty} (3x-2)/(x+1) = 3$ e trova $N$ per $\varepsilon = 0{,}05$. Il limite è raggiunto per eccesso o per difetto?

16. ●● Verifica che $\lim_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$: per $\varepsilon = 0{,}21$ risolvi la disequazione $|x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$ vicino a 1 e trova il $\delta$ più grande possibile.

17. ● Calcola i limiti destro e sinistro e stabilisci se il limite esiste. a) $f(x) = |x|/x$ per $x \to 0$; b) $g(x) = (x^2-4)/|x-2|$ per $x \to 2$; c) $h(x) = [x]$ (parte intera) per $x \to -1$.

18. ●● Data la funzione $f(x) = x^2 + k$ per $x < 1$ e $f(x) = 3x - 1$ per $x > 1$, trova $k$ in modo che $\lim_{x\to 1} f(x)$ esista, e calcolalo.

19. ●● Trova gli asintoti verticali e orizzontali dei grafici, deducendoli dai grafici delle funzioni elementari, e precisa i limiti che li giustificano. a) $y = 3/(x+2) - 1$; b) $y = \ln(x-1)$; c) $y = 2 + e^{-x}$; d) $y = 1/(x-3)^2$.

20. ●● Usando la Tabella 2.2, calcola: a) $\lim_{x\to-\infty} (1/2)^x$; b) $\lim_{x\to 0^+} \log_{1/3} x$; c) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$; d) $\lim_{x\to-\infty} x^3$; e) $\lim_{x\to 0^+} 1/\sqrt{x}$; f) $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \operatorname{tg} x$.

21. ●● Con il teorema del confronto calcola: a) $\lim_{x\to+\infty} (\cos x)/x$; b) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$; c) $\lim_{x\to+\infty} (x + 2\operatorname{sen} x)$.

### Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra la permanenza del segno nel caso negativo: se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ con $L < 0$, esiste un intorno di $x_0$ in cui $f(x) < 0$ per ogni $x \neq x_0$ del dominio.

23. ●● Spiega perché $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ non esiste, usando due successioni opportune.

24. ●● Trova l'errore. Per verificare che $\lim_{x\to 0} 1/x = +\infty$, uno studente risolve $1/x > M$ e trova $0 < x < 1/M$; conclude: «le soluzioni formano un intorno di 0, quindi il limite è verificato».

25. ●●● Dimostra la versione del teorema del confronto per i limiti infiniti: se $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \neq x_0$ del dominio in un intorno di $x_0$, e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

26. ●● a) Dimostra che, se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. b) Mostra con un controesempio che, se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 1$, non è detto che $f$ abbia limite per $x \to x_0$.

### Problemi

27. ●● Un oggetto lasciato cadere in un fluido raggiunge la velocità $v(t) = 20(1 - e^{-t/2})$ m/s dopo $t$ secondi (dati inventati). a) Calcola $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ e interpretalo. b) Da quale istante la velocità differisce dal suo limite per meno di 0,1 m/s? c) La velocità raggiunge mai il valore limite?

28. ●● Il costo per produrre $x$ pezzi di un oggetto è $C(x) = 500 + 2x$ euro (dati inventati), e il costo medio per pezzo è $c(x) = C(x)/x$. a) Calcola $\lim_{x\to+\infty} c(x)$ e $\lim_{x\to0^+} c(x)$ e interpretali. b) Quanti pezzi bisogna produrre perché il costo medio sia minore di 2,05 euro?

29. ●● Per una lente convergente di distanza focale 10 cm, un oggetto posto a distanza $p > 10$ cm forma un'immagine a distanza $q(p) = 10p/(p - 10)$ cm. a) Verifica che $q(p) = 10 + 100/(p - 10)$. b) Calcola i limiti di $q$ per $p \to 10^+$ e per $p \to +\infty$ e interpretali. c) A quale distanza deve stare l'oggetto perché l'immagine si formi a meno di 0,5 cm dal fuoco?

30. ●●● Una bevanda calda si raffredda in una stanza; la sua temperatura dopo $t$ minuti è $T(t) = 20 + 60 \cdot 2^{-t/5}$ °C (dati inventati). a) Qual è la temperatura iniziale? b) Calcola $\lim_{t\to+\infty} T(t)$, precisando se il limite è raggiunto per eccesso o per difetto, e interpretalo. c) Dopo quanti minuti la temperatura scende sotto 20,5 °C?

### Verso l'esame

31. ●● Determina i numeri reali $a$ e $b$ in modo che il grafico di $f(x) = (ax + b)/(x - 2)$ abbia la retta $y = 3$ come asintoto orizzontale e passi per il punto (0; 1). Verifica poi che $x = 2$ è asintoto verticale, calcolando i limiti laterali. *(Suggerimento: scrivi $f(x) = a + (2a + b)/(x - 2)$.)*

32. ●● Data $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, dimostra che $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ e che, in ogni intorno di 0, $f$ si annulla in infiniti punti.

33. ●● Determina $k$ in modo che esista $\lim_{x\to0} f(x)$, dove $f(x) = e^x + k$ per $x < 0$ e $f(x) = (x + 2)/(x + 1)$ per $x \geq 0$. Con il valore trovato, determina gli asintoti orizzontali del grafico.

34. ●●● Dimostra che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste e che $\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$. Quante volte il grafico di $y = (\operatorname{sen} x)/x$ interseca, per $x > 0$, il suo asintoto orizzontale?

35. ●●● Dimostra che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ (con $L$ reale) se e solo se $\lim_{t\to0^+} f(1/t) = L$. Usa il risultato per calcolare $\lim_{t\to0^+} \operatorname{arctg}(1/t)$.

## PER APPROFONDIRE

- SPI — i capitoli sui limiti: la definizione con ε e δ discussa a lungo, con molti esempi di verifiche e di funzioni «patologiche» come $\operatorname{sen}(1/x)$.
- APO — la definizione di limite e i teoremi fondamentali, con le dimostrazioni complete.
- CJ — l'introduzione al limite di una funzione, con un'attenzione particolare al legame tra limiti di funzioni e di successioni.
- CR — il capitolo sul calcolo, per capire perché il concetto di limite ha richiesto tanto tempo per essere precisato.

# Glossario del capitolo

**Asintoto orizzontale**
La retta $y = L$, quando $f(x)$ tende a $L$ per $x \to +\infty$ oppure per $x \to -\infty$.

**Asintoto verticale**
La retta $x = x_0$, quando almeno uno dei limiti laterali di $f$ in $x_0$ è infinito.

**Intorno destro**
Un intervallo $[x_0; x_0 + \delta[$, con $\delta > 0$; l'intorno sinistro è $]x_0 - \delta; x_0]$.

**Limite destro**
Il limite per $x \to x_0^+$, calcolato considerando solo gli $x$ del dominio maggiori di $x_0$.

**Limite di una funzione**
$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se per ogni intorno di $L$ esiste un intorno di $x_0$ in cui, per ogni $x \neq x_0$ del dominio, $f(x)$ appartiene all'intorno di $L$.

**Limite finito**
Un limite $L$ che è un numero reale; in un punto $x_0$: per ogni $\varepsilon$ esiste $\delta$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

**Limite infinito**
Un limite uguale a $+\infty$ o a $-\infty$: i valori superano (o restano sotto) ogni soglia fissata, purché $x$ sia abbastanza vicino a $x_0$.

**Limite per difetto**
$f(x) \to L^-$: il limite è $L$ e vicino a $x_0$ si ha $f(x) < L$.

**Limite per eccesso**
$f(x) \to L^+$: il limite è $L$ e vicino a $x_0$ si ha $f(x) > L$.

**Limite sinistro**
Il limite per $x \to x_0^-$, calcolato considerando solo gli $x$ del dominio minori di $x_0$.

**Parte intera**
La funzione che associa a $x$ il più grande intero minore o uguale a $x$, indicato con $[x]$.

**Teorema del confronto per le funzioni**
Se $g \leq f \leq h$ vicino a $x_0$ e $g$, $h$ hanno lo stesso limite $L$, anche $f$ ha limite $L$; detto anche «dei carabinieri».

**Teorema della permanenza del segno**
Se il limite di $f$ per $x \to x_0$ è positivo (negativo), in un intorno di $x_0$ la funzione è positiva (negativa), escluso al più $x_0$.

**Teorema di unicità del limite**
Se una funzione ha limite per $x \to x_0$, il limite è uno solo.

**Verifica di un limite**
Il controllo, con la definizione, che un valore proposto è il limite: nel caso finito si risolve $|f(x) - L| < \varepsilon$ e si controlla che le soluzioni contengano un intorno di $x_0$.

# Soluzioni

**1.** B. È la definizione con gli intorni. A è falsa (il valore in $x_0$ non conta), C inverte i quantificatori, D è falsa: una funzione costante uguale a $L$ ha limite $L$ e lo raggiunge sempre.

**2.** D. L'intorno ]1,5; 2,5[ di 2 non contiene punti di $D$ diversi da 2: 2 è un punto isolato. 0 e 1 sono punti di accumulazione pur non appartenendo a $D$; 1/2 è interno a $D$.

**3.** A. Per $x < 0$ anche $x^3 < 0$ e $|x^3|$ tende a 0, quindi $1/x^3$ è negativo e il suo valore assoluto supera ogni $M$.

**4.** C. Per $x < 0$ si ha $1/x < 0$, e $1/x \to 0$. A vale $0^+$, B vale $0^+$, D vale $0^+$.

**5.** B. A destra di $\pi/2$ il seno è positivo (vicino a 1) e il coseno è negativo e tende a 0: il quoziente tende a $-\infty$.

**6.** D. Per la permanenza del segno applicata a $f(x) - 2$, che tende a $1 > 0$. A e B sono false perché il valore in $x_0$ non interviene; C è falsa (per esempio $f(x) = 3 + (x - x_0)^2$ è sempre maggiore di 3 per $x \neq x_0$).

**7.** a) Falso: $(x^2 - 1)/(x - 1)$ non è definita in 1 ma ha limite 2. b) Vero (teorema sui limiti laterali). c) Falso: si può concludere solo $L \geq 0$; per esempio $x^2 > 0$ per $x \neq 0$ ma il limite è 0. d) Falso: $x/(x^2 + 1)$ ha l'asintoto $y = 0$ e passa per l'origine; $(\operatorname{sen} x)/x$ lo attraversa infinite volte.

**8.** ... con $x < -N$, si ha $f(x) > M$.

**9.** a) Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$. b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x > N \Rightarrow 3 - \varepsilon < g(x) < 3$. c) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $2 < x < 2 + \delta \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon$.

**10.** $|3x - 4 - 2| = 3|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon/3$: intorno di 2 di raggio $\delta = \varepsilon/3$. Con $\varepsilon = 0{,}03$, $\delta = 0{,}01$.

**11.** Per $x > -2$ la frazione è positiva e $5/(x + 2) < \varepsilon \Leftrightarrow x > 5/\varepsilon - 2$: semiretta, intorno di $+\infty$. Con $\varepsilon = 0{,}01$, $N = 498$.

**12.** $1/(x - 3)^2 > M \Leftrightarrow 0 < |x - 3| < 1/\sqrt{M}$. Con $M = 10^4$, $\delta = 1/100 = 0{,}01$.

**13.** Per $0 < \varepsilon < 3$: $3 - \varepsilon < \sqrt{x} < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow (3 - \varepsilon)^2 < x < (3 + \varepsilon)^2$, intervallo che contiene 9 al suo interno: limite verificato. Con $\varepsilon = 0{,}1$: $8{,}41 < x < 9{,}61$; distanze da 9: 0,59 e 0,61, quindi $\delta = 0{,}59$.

**14.** $1 - 2x > M \Leftrightarrow x < (1 - M)/2$: per $M > 1$ è una semiretta $x < -N$ con $N = (M - 1)/2$, intorno di $-\infty$. Con $M = 1000$, $N = 499{,}5$: per $x < -499{,}5$ si ha $1 - 2x > 1000$.

**15.** $(3x - 2)/(x + 1) - 3 = -5/(x + 1)$. Per $x > -1$: $5/(x + 1) < \varepsilon \Leftrightarrow x > 5/\varepsilon - 1$. Con $\varepsilon = 0{,}05$, $N = 99$. La differenza è negativa per $x > -1$: il limite è raggiunto per difetto, $3^-$.

**16.** $|x^2 - 1| < 0{,}21 \Leftrightarrow 0{,}79 < x^2 < 1{,}21$; vicino a 1 ($x > 0$): $\sqrt{0{,}79} < x < 1{,}1$, cioè circa $0{,}8888 < x < 1{,}1$. Distanze da 1: circa 0,1112 e 0,1; il $\delta$ più grande è $\delta = 0{,}1$.

**17.** a) Per $x > 0$ la funzione vale 1, per $x < 0$ vale $-1$: limite destro 1, sinistro $-1$, il limite non esiste. b) Per $x > 2$: $g(x) = x + 2 \to 4$; per $x < 2$: $g(x) = -(x + 2) \to -4$; il limite non esiste. c) A sinistra di $-1$ (in $]-2; -1[$) la funzione vale $-2$, a destra (in $[-1; 0[$) vale $-1$: limite sinistro $-2$, destro $-1$, il limite non esiste.

**18.** Limite sinistro $1 + k$, destro $3 - 1 = 2$: il limite esiste se $1 + k = 2$, cioè $k = 1$, e vale 2.

**19.** a) Iperbole traslata: $x = -2$ asintoto verticale ($x \to -2^+$: $+\infty$; $x \to -2^-$: $-\infty$), $y = -1$ asintoto orizzontale (limite $-1$ per $x \to \pm\infty$). b) Logaritmo traslato di 1 a destra: $x = 1$ asintoto verticale ($x \to 1^+$: $-\infty$); nessun asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$ il limite è $+\infty$). c) $y = 2$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (limite $2^+$); per $x \to -\infty$ il limite è $+\infty$; nessun asintoto verticale. d) $x = 3$ asintoto verticale ($+\infty$ da entrambe le parti), $y = 0$ asintoto orizzontale (limite $0^+$ per $x \to \pm\infty$).

**20.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $\pi/2$ (per difetto); d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$.

**21.** a) Per $x > 0$: $-1/x \leq (\cos x)/x \leq 1/x$, entrambe tendono a 0: limite 0. b) $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}(1/x) \leq x^2$: limite 0.

c) $x + 2 \operatorname{sen} x \geq x - 2 \to +\infty$: limite $+\infty$.

**22.** Si sceglie $\varepsilon = -L = |L|$. Esiste $\delta$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < -L$, cioè $2L < f(x) < 0$. In particolare $f(x) < 0$. c.v.d.

**23.** Con $x_n = 1/(2n\pi) \to 0$ si ha $\cos(1/x_n) = \cos(2n\pi) = 1$; con $y_n = 1/((2n + 1)\pi) \to 0$ si ha $\cos((2n + 1)\pi) = -1$. Se il limite esistesse, per il teorema sulle successioni sarebbe uguale sia a 1 sia a −1: assurdo.

**24.** L'insieme $]0; 1/M[$ è un intorno **destro** di 0, non un intorno di 0: per $x < 0$ si ha $1/x < 0 < M$. Lo studente ha verificato solo $\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$; da sinistra il limite è $-\infty$, quindi $\lim_{x\to 0} 1/x$ non esiste.

**25.** Sia $M > 0$. Poiché $g \to +\infty$, esiste $\delta_1$ tale che $g(x) > M$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Sia $\delta$ il minimo tra $\delta_1$ e il raggio dell'intorno in cui $f \geq g$. Per $0 < |x - x_0| < \delta$: $f(x) \geq g(x) > M$. c.v.d.

**26.** a) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e i due estremi tendono a 0: per il confronto $f(x) \to 0$. (Oppure: $|f(x) - 0| = ||f(x)| - 0|$, e le due definizioni coincidono.) b) $f(x) = |x|/x$ con $x_0 = 0$: $|f(x)| = 1$ per ogni $x \neq 0$, ma $f$ vale 1 a destra e −1 a sinistra e non ha limite.

**27.** a) $e^{-t/2} \to 0$, quindi $v \to 20$ m/s (per difetto): è la velocità limite, asintoto orizzontale $v = 20$. b) $20 - v = 20e^{-t/2} < 0{,}1 \Leftrightarrow e^{-t/2} < 0{,}005 \Leftrightarrow t > 2 \ln 200 \approx 10{,}6$ s. c) No: $e^{-t/2} > 0$ per ogni $t$, quindi $v(t) < 20$ sempre.

**28.** a) $c(x) = 2 + 500/x$: per $x \to +\infty$ tende a $2^+$ (il costo fisso si ripartisce su moltissimi pezzi e resta il costo di 2 euro per pezzo); per $x \to 0^+$ tende a $+\infty$ (pochissimi pezzi devono pagare tutto il costo fisso). b) $500/x < 0{,}05 \Leftrightarrow x > 10\,000$: più di 10 000 pezzi.

**29.** a) $10 + 100/(p - 10) = (10p - 100 + 100)/(p - 10) = 10p/(p - 10)$. b) Per $p \to 10^+$, $q \to +\infty$: con l'oggetto nel fuoco l'immagine si forma «all'infinito». Per $p \to +\infty$, $q \to 10^+$: un oggetto lontanissimo forma l'immagine nel fuoco. c) $100/(p - 10) < 0{,}5 \Leftrightarrow p - 10 > 200 \Leftrightarrow p > 210$ cm.

**30.** a) $T(0) = 80$ °C. b) $2^{-t/5} \to 0^+$, quindi $T \to 20^+$: la bevanda tende alla temperatura della stanza, restando sempre più calda. c) $60 \cdot 2^{-t/5} < 0{,}5 \Leftrightarrow 2^{t/5} > 120 \Leftrightarrow t > 5 \log_2 120 \approx 34{,}5$ minuti.

**31.** $(ax + b)/(x - 2) = a + (2a + b)/(x - 2)$; il secondo termine tende a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi l'asintoto orizzontale è $y = a$: $a = 3$. Da $f(0) = -b/2 = 1$: $b = -2$. Quindi $f(x) = (3x - 2)/(x - 2) = 3 + 4/(x - 2)$: per $x \to 2^+$, $4/(x - 2) \to +\infty$; per $x \to 2^-$, $\to -\infty$. Quindi $x = 2$ è asintoto verticale.

**32.** $-|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$ e $\pm|x| \to 0$: per il confronto il limite è 0. Gli zeri sono i punti $x = 1/(k\pi)$, $k$ intero non nullo. Dato $\delta > 0$, per ogni intero $k > 1/(\pi\delta)$ si ha $0 < 1/(k\pi) < \delta$: gli zeri nell'intorno sono infiniti.

**33.** Limite sinistro: $e^0 + k = 1 + k$; destro: $(0 + 2)/(0 + 1) = 2$ (funzioni elementari, il limite è il valore). Il limite esiste se $k = 1$. Per $x \to -\infty$: $e^x + 1 \to 1^+$; per $x \to +\infty$: $(x + 2)/(x + 1) = 1 + 1/(x + 1) \to 1^+$. L'unico asintoto orizzontale è $y = 1$, sia a destra sia a sinistra.

**34.** Lungo $x_n = n\pi \to +\infty$ si ha $\operatorname{sen} x_n = 0$, lungo $y_n = \pi/2 + 2n\pi \to +\infty$ si ha $\operatorname{sen} y_n = 1$: il limite non esiste. Per $x > 0$: $-1/x \leq (\operatorname{sen} x)/x \leq 1/x$, quindi il limite è 0 per il confronto, e $y = 0$ è asintoto orizzontale. Il grafico lo interseca nei punti $x = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$: infinite volte.

**35.** Poniamo $t = 1/x$: per $x > 0$ e $t > 0$, $x > N \Leftrightarrow 0 < t < 1/N$. Se $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$: dato $\varepsilon$, esiste $N$ con $|f(x) - L| < \varepsilon$ per $x > N$; allora per $0 < t < \delta = 1/N$ si ha $1/t > N$ e $|f(1/t) - L| < \varepsilon$. Viceversa, dato $\delta$ per $t \to 0^+$, si prende $N = 1/\delta$. Applicazione: $\lim_{t\to 0^+} \operatorname{arctg}(1/t) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$.