CAPITOLO

1

Numeri reali, successioni e limiti di successioni

Infiniti passi possono portare in un punto preciso: il limite è il modo di dire dove. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali, e usare l'assioma di completezza.
2. Descrivere intorni di un punto e di infinito, punti di accumulazione e punti isolati.
3. Enunciare la definizione di limite di una successione e verificarla in casi semplici, distinguendo successioni convergenti, divergenti e irregolari.
4. Dimostrare i teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno e del confronto, e usare il teorema delle successioni monotone.
5. Calcolare limiti con l'algebra dei limiti, il limite di q^n, il numero e e la somma della serie geometrica.
6. Studiare successioni definite per ricorrenza e usarle per il calcolo approssimato.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Insiemi di numeri reali 2
1.2 Intorni e punti di accumulazione 5
1.3 Il limite di una successione 7
1.4 I teoremi sulle successioni 10
1.5 Limiti notevoli e serie geometrica 14
1.6 Successioni per ricorrenza e calcolo approssimato 20

Matematica 5 · Parte I · Limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 1: Numeri reali, successioni e limiti di successioni · pagine 23–52 del volume completo · estratto per lo studio

Scrivete 0,999… con infiniti 9: è un numero minore di 1 o è proprio 1? Achille, che corre dieci volte più veloce della tartaruga, deve prima raggiungere il punto da cui è partita lei, poi il punto in cui lei è arrivata nel frattempo, e così via all'infinito: come fa a superarla? Premete il tasto √ della calcolatrice: compare 1,414213562, ma la macchina non contiene $\sqrt{2}$, contiene un numero razionale abbastanza vicino. Le tre domande hanno la stessa radice: che cosa significa che un processo infinito «arriva» a un valore.

In *Matematica 3* le successioni erano elenchi di numeri e i loro «valori finali» si intuivano guardando i termini. In questo capitolo l'intuizione diventa una definizione, quella di **limite di una successione**, e la definizione permette di dimostrare teoremi. Prima, però, servono due strumenti: l'estremo superiore di un insieme di numeri reali, che esprime la completezza di $\mathbb{R}$, e gli intorni, che danno un significato preciso alla parola «vicino». Il concetto di limite tornerà in tutto il volume: nei limiti di funzioni, nelle derivate, negli integrali, nelle distribuzioni di probabilità.

1.1 Insiemi di numeri reali

1.1.1 Un richiamo: funzioni e successioni

Il linguaggio delle funzioni (vedi *Matematica 3*, cap. 3) e quello delle successioni (vedi *Matematica 3*, cap. 4) sono già noti. La Tabella 1.1 li riassume. Ricordiamo soltanto che una successione è una funzione che a ogni numero naturale $n \geq 1$ associa un numero reale a_n; quando l'indice parte da 0 lo diremo esplicitamente. Si scrive (a_n) oppure, più spesso, semplicemente a_n.

Tabella 1.1 Richiamo: le proprietà delle funzioni e delle successioni (*Matematica 3*, capp. 3 e 4).

Concetto	Significato	Esempio
dominio e immagine	i valori di x per cui $f(x)$ ha senso; i valori assunti da f	$f(x) = \sqrt{x}$: dominio $[0; +\infty[$, immagine $[0; +\infty[$
funzione iniettiva	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$y = x^3$ sì, $y = x^2$ no
crescente in I	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (in senso lato: $\leq$)	$y = \ln x$ in $]0; +\infty[$
pari, dispari	$f(-x) = f(x)$; $f(-x) = -f(x)$	$\cos x$; $\operatorname{sen} x$
periodica di periodo T	$f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio	$\operatorname{tg} x$, $T = \pi$
composta, inversa	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$; $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$	$y = e^x$ e $y = \ln x$
successione	funzione da $\mathbb{N}$ (o da $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$	$a_n = \dfrac{1}{n}$
definita per ricorrenza	si danno il primo termine e la regola per passare da a_n ad a_{n+1}	$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$
crescente, decrescente	$a_{n+1} > a_n$ per ogni n; $a_{n+1} < a_n$ per ogni n	n^2; $\dfrac{1}{n}$
limitata	esistono m e M con $m \leq a_n \leq M$ per ogni n	$(-1)^n$, con $m = -1$, $M = 1$

1.1.2 Maggioranti, minoranti, massimo e minimo

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Un numero k è un **maggiorante** di A se $x \leq k$ per ogni $x \in A$; è un **minorante** di A se $x \geq k$ per ogni $x \in A$. Se A ha almeno un maggiorante si dice **limitato superiormente**, se ha almeno un minorante si dice limitato inferiormente; se ha entrambi si dice **limitato**. Un insieme limitato superiormente ha infiniti maggioranti: se k lo è, lo è anche ogni numero maggiore di k.

Il **massimo** di A è un maggiorante che appartiene ad A; il **minimo** è un minorante che appartiene ad A. Se esistono, sono unici. L'intervallo $[0; 1]$ ha massimo 1 e minimo 0. L'intervallo $[0; 1[$ ha minimo 0, ma non ha massimo: per ogni $x < 1$ il numero $\dfrac{x+1}{2}$ sta ancora nell'intervallo ed è maggiore di x. Eppure 1 ha un ruolo speciale: è il più piccolo dei maggioranti.

1.1.3 Estremo superiore ed estremo inferiore

Consideriamo l'insieme

$$A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\} = \{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \ldots\}.$$

Ogni elemento è minore di 1, quindi 1 è un maggiorante. Nessun numero minore di 1 lo è: se $k < 1$, basta prendere $n > \dfrac{1}{1-k}$ per avere $1 - \dfrac{1}{n} > k$. Dunque 1 è il minimo dei maggioranti, ma non appartiene ad A, perché $1 - \dfrac{1}{n} = 1$ non ha soluzioni. L'insieme A non ha massimo; ha invece minimo, 0, che si ottiene per $n = 1$.

IN SINTESI

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Il minimo dei maggioranti di A si chiama **estremo superiore** di A e si indica con $\sup A$. Analogamente, se A è limitato inferiormente, il massimo dei minoranti si chiama **estremo inferiore**, $\inf A$.

Caratterizzazione. Il numero S è l'estremo superiore di A se e solo se: (i) $x \le S$ per ogni $x \in A$; (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ con $x > S - \varepsilon$.

Se A non è limitato superiormente si pone $\sup A = +\infty$; se non è limitato inferiormente, $\inf A = -\infty$.

La condizione (i) dice che S è un maggiorante; la (ii) dice che nessun numero più piccolo, $S - \varepsilon$, lo è. Se l'estremo superiore appartiene all'insieme, allora è il massimo; altrimenti l'insieme non ha massimo. Lo stesso vale per l'estremo inferiore e il minimo. Per l'insieme A precedente: $\sup A = 1$ (non è un massimo), $\inf A = \min A = 0$.

ERRORE FREQUENTE

Confondere l'estremo superiore con il massimo. Ogni massimo è un estremo superiore, ma non viceversa: $\sup\,]0;1[= 1$ e l'intervallo $]0;1[$ non ha massimo. Prima di scrivere «$\max A = \ldots$» bisogna verificare che il valore trovato *appartenga* all'insieme. Viceversa, non si scrive «l'insieme non ha estremo superiore» solo perché non ha massimo.

1.1.4 L'assioma di completezza

In *Matematica 3* (cap. 8) la completezza di $\mathbb{R}$ è stata espressa con le classi contigue: due classi separate di numeri reali, con elementi vicini quanto si vuole, individuano uno e un solo numero reale. La stessa proprietà si può enunciare con l'estremo superiore, nella forma che useremo d'ora in poi.

IN SINTESI

Assioma di completezza. Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ha estremo superiore in $\mathbb{R}$. (Di conseguenza, ogni sottoinsieme non vuoto limitato inferiormente ha estremo inferiore in $\mathbb{R}$.)

L'**assioma di completezza** distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$. Consideriamo $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. L'insieme è non vuoto (contiene 1) ed è limitato superiormente (2 è un maggiorante). In $\mathbb{R}$ il suo estremo superiore è $\sqrt{2}$. Ma $\sqrt{2}$ non è razionale, e si dimostra che nessun numero razionale è il minimo dei maggioranti di B: per ogni maggiorante razionale q se ne trova uno razionale più piccolo. In $\mathbb{Q}$, dunque, l'insieme B è limitato superiormente ma non ha estremo superiore: $\mathbb{Q}$ «ha dei buchi», $\mathbb{R}$ no. È su questa proprietà che si reggono tutti i teoremi di esistenza di questo volume, a cominciare da quello sulle successioni monotone.

1.2 Intorni e punti di accumulazione

1.2.1 Intorni di un punto

Per dire con precisione che un numero è «vicino» a un altro serve un linguaggio. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si chiama **intorno completo** di x_0 ogni intervallo aperto che contiene x_0, e si indica con $I(x_0)$. Fra questi, l'**intorno circolare** di centro x_0 e **raggio** $\delta > 0$ è l'intervallo simmetrico

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta;\, x_0 + \delta[= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

La forma con il valore assoluto è la più utile: $|x - x_0| < \delta$ si legge «la distanza di x da x_0 è minore di δ». Si usano anche gli intorni da un lato solo: l'**intorno destro** $[x_0;\, x_0 + \delta[$ e l'**intorno sinistro** $]x_0 - \delta;\, x_0]$ (Figura 1.1).

1.2.2 Intorni di infinito

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali, ma si può parlare di numeri «vicini» a $+\infty$: sono i numeri molto grandi. Si chiama **intorno di $+\infty$** ogni semiretta aperta $]M;\, +\infty[$, con $M \in \mathbb{R}$; intorno di $-\infty$ ogni semiretta $]-\infty;\, N[$. Più grande è M, più «piccolo» è l'intorno di $+\infty$. Quando il segno non interessa, un intorno di ∞ è l'unione $]-\infty;\, -M[\cup]M;\, +\infty[$, con $M > 0$, cioè l'insieme degli x con $|x| > M$.

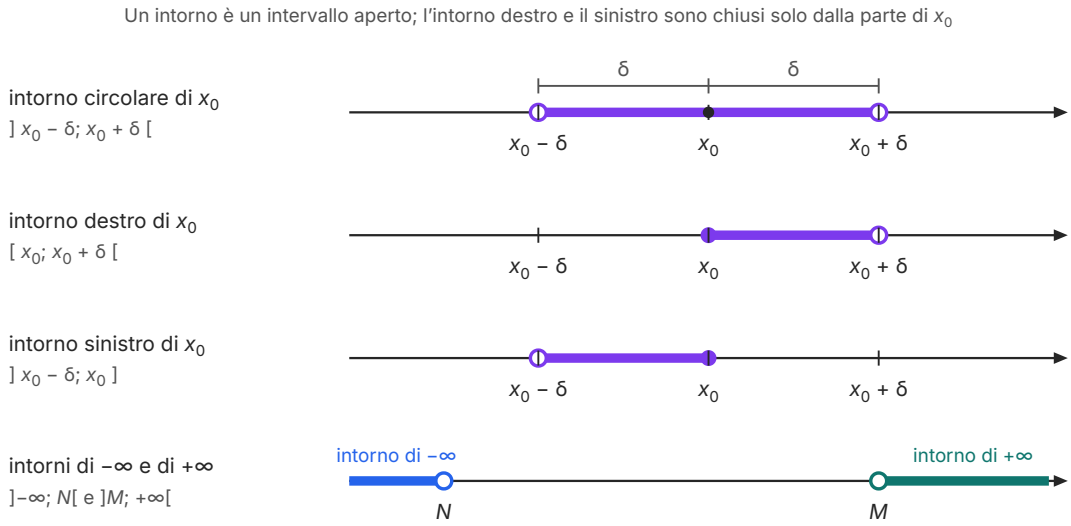


Figura 1.1 Intorni sulla retta reale. Dall'alto: l'intorno circolare $]x_0 - \delta;\, x_0 + \delta[$, l'intorno destro $[x_0;\, x_0 + \delta[$ e l'intorno sinistro $]x_0 - \delta;\, x_0]$; in basso, un intorno di $-\infty$ (in blu) e uno di $+\infty$ (in verde). Un pallino vuoto indica un estremo escluso, uno pieno un estremo incluso.

1.2.3 Punti di accumulazione e punti isolati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un numero x_0 è un **punto di accumulazione** di A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A diverso da x_0. Il punto x_0 può appartenere o no ad A: conta soltanto che i punti di A gli si addensino intorno. Un punto $x_0 \in A$ che ha un intorno nel quale non cade nessun altro punto di A si chiama **punto isolato** di A.

- Per $A =]0;\, 2] \cup \{5\}$ i punti di accumulazione sono tutti i numeri di $[0;\, 2]$: anche 0, che non appartiene ad A. Il punto 5 è isolato: l'intorno $]4;\, 6[$ non contiene altri punti di A.
- L'insieme $\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ ha un solo punto di accumulazione, 0, che non gli appartiene: ogni intorno $]-\delta;\, \delta[$ contiene i numeri $\frac{1}{n}$ con $n > \frac{1}{\delta}$. Ogni elemento $\frac{1}{n}$ è un punto isolato.
- L'insieme $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$: tutti i suoi punti sono isolati (l'intorno di raggio $\frac{1}{2}$ di un numero naturale non contiene altri naturali). Però $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente: ogni intorno $]M;\, +\infty[$ di $+\infty$ contiene infiniti numeri naturali. In questo senso si dice che $+\infty$ è l'unico «punto di accumulazione» di $\mathbb{N}$.

L'ultima osservazione è la chiave del resto del capitolo. Il limite descrive che cosa succede a una funzione quando la variabile si avvicina a un punto, e ha senso soltanto in un punto a cui la variabile si può avvicinare restando nel dominio, cioè in un punto di accumulazione del dominio.

Il dominio di una successione è $\mathbb{N}$, e il solo «punto» a cui n si può avvicinare è $+\infty$: per questo, per una successione, ha senso un solo limite, quello per $n \to +\infty$.

1.3 Il limite di una successione

1.3.1 Avvicinarsi non basta

I termini di $a_n = \dfrac{1}{n}$, cioè 1; 0,5; 0,333...; 0,25; ..., si avvicinano sempre di più a 0. Ma si avvicinano sempre di più anche a -1, e a -5: ogni termine è più vicino a -1 del precedente, perché la successione è decrescente. «Avvicinarsi sempre di più» non individua quindi un numero. Ciò che distingue 0 da -1 è un'altra cosa: la distanza di $\dfrac{1}{n}$ da 0 diventa *piccola quanto si vuole*, mentre la distanza da -1 resta sempre maggiore di 1. È questa l'idea che la definizione rende precisa.

IN SINTESI

Definizione. La successione a_n **converge** al numero reale L, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \text{ oppure } a_n \to L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$. Il numero L si chiama **limite** della successione.

Con gli intorni: per ogni intorno $I(L)$ esiste un intorno $]\bar{n}; +\infty[$ di $+\infty$ tale che, per ogni n di questo intorno, $a_n \in I(L)$.

La disuguaglianza $|a_n - L| < \varepsilon$ equivale a $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$: il termine a_n sta nella striscia di semiampiezza ε attorno a L. La definizione chiede dunque che, *comunque stretta* si scelga la striscia, da un certo indice in poi tutti i termini vi cadano dentro; i termini che restano fuori sono un numero finito. Si dice che una proprietà vale **definitivamente** se vale per tutti gli n maggiori di un opportuno $\bar{n}$: $a_n \to L$ significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente $|a_n - L| < \varepsilon$. Una successione che converge a 0 si dice **infinitesima**.

La Figura 1.2 mostra la successione $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ e la striscia di semiampiezza $\varepsilon = 0{,}25$ attorno a 2: i primi 17 termini sono fuori, tutti gli altri dentro.

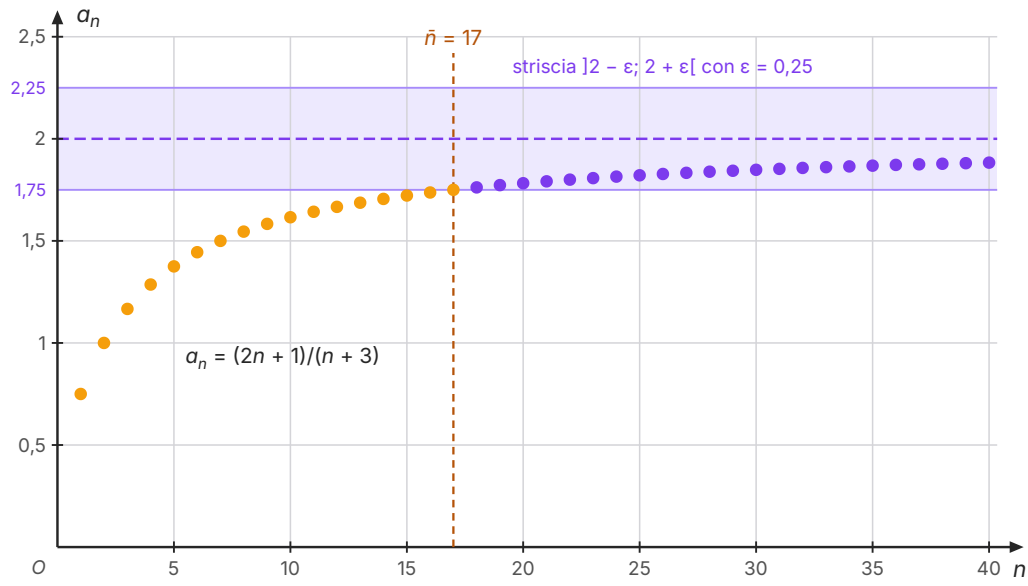


Figura 1.2 I primi 40 termini di $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ (punti calcolati). Nella striscia]1,75; 2,25[cadono i termini con $n > 17$ (in viola); quelli con $n \le 17$ (in arancio) sono fuori. Il termine $a_{17} = 1{,}75$ sta esattamente sul bordo, che è escluso. Le unità sui due assi sono diverse.

ESEMPIO SVOLTO

Verifichiamo con la definizione che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$ e troviamo $\bar{n}$ per $\varepsilon = 0{,}01$.

La distanza dal limite. $|a_n - 2| = \left|\dfrac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \dfrac{5}{n+3}$, positiva per ogni $n \ge 1$.

La disequazione. $\dfrac{5}{n+3} < \varepsilon$ equivale a $n + 3 > \dfrac{5}{\varepsilon}$, cioè $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 3$. Qualunque sia $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\bar{n} = \dfrac{5}{\varepsilon} - 3$ (o un numero maggiore): per ogni $n > \bar{n}$ la disuguaglianza vale. Il limite è verificato.

Il caso ε = 0,01. $\bar{n} = 500 - 3 = 497$: dal termine $a_{498} = \dfrac{997}{501} \approx 1{,}990020$ in poi la distanza da 2 è minore di un centesimo. Il termine $a_{497} = \dfrac{995}{500} = 1{,}99$ ha distanza esattamente 0,01, quindi non soddisfa la disuguaglianza stretta: 497 è il più piccolo $\bar{n}$ possibile.

L'esempio mostra a che cosa serve la definizione. Non è un procedimento per *trovare* il limite: il valore 2 l'abbiamo intuito prima, dividendo numeratore e denominatore per n. È una *garanzia*: chi chiede una precisione ε riceve un indice oltre il quale la precisione è assicurata. Per questo

le verifiche si fanno solo in casi semplici, e nel cap. 3 si imparerà a calcolare i limiti senza ricorrere ogni volta a ε.

1.3.2 Successioni divergenti

I termini di $a_n = n^2$ non si avvicinano a nessun numero: superano qualunque soglia. Diciamo che la successione a_n **diverge** a $+\infty$, e scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si ha $a_n > M$; con gli intorni, per ogni intorno $]M; +\infty[$ di $+\infty$, definitivamente a_n vi appartiene. Analogamente a_n diverge a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ si ha definitivamente $a_n < -M$.

Per $a_n = n^2$: $n^2 > M$ equivale a $n > \sqrt{M}$, e basta prendere $\bar{n} = \sqrt{M}$. Con $M = 10^6$ si trova $\bar{n} = 1000$: dal termine di indice 1001 in poi tutti superano un milione. Per $b_n = 3 - 2n$: $3 - 2n < -M$ equivale a $n > \dfrac{M+3}{2}$, quindi $b_n \to -\infty$.

1.3.3 Successioni irregolari

Una successione convergente o divergente si dice **regolare**; una successione che non converge e non diverge si dice **irregolare** (o oscillante). L'esempio tipico è $a_n = (-1)^n$, che vale alternativamente -1 e 1 (Figura 1.3). Non diverge, perché è limitata. Dimostriamo che non converge. Se convergesse a un numero L, scegliendo $\varepsilon = 1$ si avrebbe definitivamente $|a_n - L| < 1$: per un indice pari n e uno dispari m, entrambi abbastanza grandi, $|1 - L| < 1$ e $|-1 - L| < 1$. Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$2 = |1 - (-1)| \le |1 - L| + |L - (-1)| < 1 + 1 = 2,$$

cioè $2 < 2$, che è assurdo. La successione $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, invece, oscilla attorno a 0 con oscillazioni sempre più piccole: $|b_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ per $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, quindi $b_n \to 0$. Una successione convergente non deve essere monotòna.

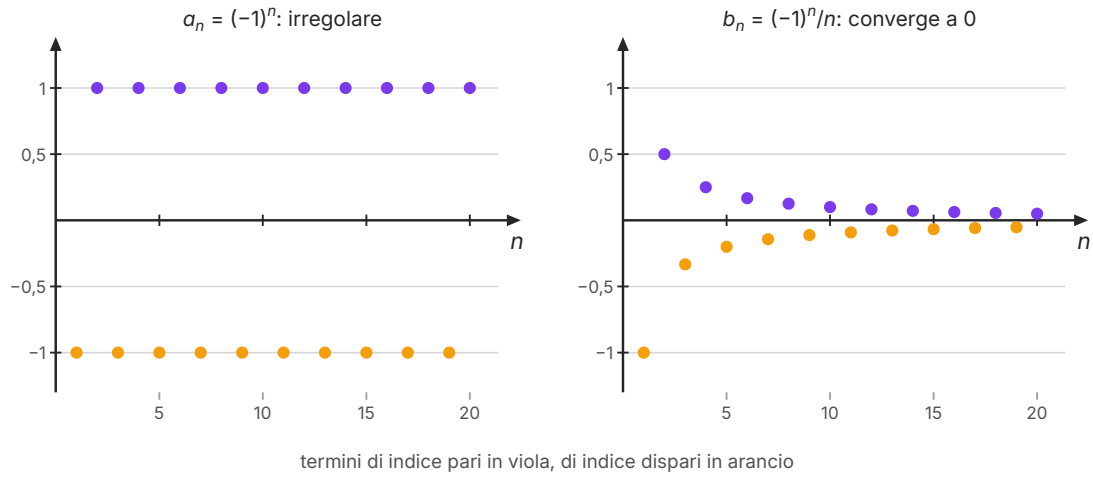


Figura 1.3 A sinistra $a_n = (-1)^n$: i termini saltano fra −1 e 1, e nessuna striscia di semiampiezza minore di 1 li contiene definitivamente. A destra $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$: i termini oscillano attorno a 0, ma la loro distanza da 0, $\dfrac{1}{n}$, tende a 0. Punti calcolati per $1 \le n \le 20$.

DA RICORDARE

Ogni successione è di uno e uno solo di questi tre tipi: **convergente** (a un numero reale L), **divergente** (a $+\infty$ o a $-\infty$), **irregolare**. Le prime due si dicono regolari. «Divergente» non significa «non convergente»: $(-1)^n$ non converge, ma non diverge.

ERRORE FREQUENTE

«La successione si avvicina sempre di più a L, quindi L è il suo limite». I termini di $\dfrac{1}{n}$ si avvicinano sempre di più anche a −1, che non è il limite. Ciò che conta è che la distanza da L diventi, definitivamente, minore di *ogni* ε fissato.

Trattare ∞ come un numero. Scrivere $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ è una abbreviazione per «n^2 supera definitivamente ogni numero»; non significa che la successione «raggiunge» un valore. Espressioni come $\infty - \infty$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ non hanno un valore: sono forme indeterminate (Tabella 1.2).

1.4 I teoremi sulle successioni

La definizione di limite permette di dimostrare proprietà che valgono per tutte le successioni. I teoremi di questo paragrafo torneranno, con lo stesso nome e quasi le stesse dimostrazioni, per i limiti di funzioni nel cap. 2.

1.4.1 Unicità del limite

IN SINTESI

Teorema dell'unicità del limite. Ipotesi: $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$. **Tesi:** $L_1 = L_2$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $L_1 \neq L_2$ e scegliamo $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$. Per la definizione esistono n_1 tale che $|a_n - L_1| < \varepsilon$ per $n > n_1$, e n_2 tale che $|a_n - L_2| < \varepsilon$ per $n > n_2$. Per un n maggiore di entrambi valgono tutte e due, e per la disuguaglianza triangolare

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = |L_1 - L_2|,$$

cioè $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$: assurdo. Quindi $L_1 = L_2$. c.v.d.

In termini di intorni, la dimostrazione dice che due numeri distinti hanno intorni disgiunti, e i termini di una successione non possono stare definitivamente in due insiemi disgiunti. Allo stesso modo si dimostra che una successione non può convergere e divergere insieme: è ciò che giustifica l'espressione «*il* limite».

1.4.2 Permanenza del segno

IN SINTESI

Teorema della permanenza del segno. Ipotesi: $a_n \to L$ con $L > 0$. **Tesi:** definitivamente $a_n > 0$. (Lo stesso vale con $L < 0$ e $a_n < 0$.)

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$. Definitivamente $|a_n - L| < \dfrac{L}{2}$, quindi $a_n > L - \dfrac{L}{2} = \dfrac{L}{2} > 0$. c.v.d.

Il teorema ha una forma «rovesciata», che si ottiene per assurdo: **se definitivamente $a_n \geq 0$ e $a_n \to L$, allora $L \geq 0$** (se fosse $L < 0$, la successione sarebbe definitivamente negativa). Attenzione: da $a_n > 0$ per ogni n non segue $L > 0$, ma solo $L \geq 0$. I termini di $\dfrac{1}{n}$ sono tutti positivi e il limite è 0. Il segno stretto non passa al limite.

1.4.3 Successioni convergenti e successioni limitate

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: a_n è convergente. **Tesi:** a_n è limitata.

Dimostrazione. Sia $a_n \to L$. Con $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ si ha $L - 1 < a_n < L + 1$. I termini con $n \le \bar{n}$ sono in numero finito, quindi fra essi c'è un massimo M' e un minimo m'. Allora $\min(m'; L - 1) \le a_n \le \max(M'; L + 1)$ per ogni n: la successione è limitata. c.v.d.

Il viceversa è falso: $(-1)^n$ è limitata e non converge. Il teorema si usa spesso «al contrario»: una successione illimitata, come $(-2)^n$, non può convergere.

1.4.4 Il teorema del confronto

IN SINTESI

Teorema del confronto (o «dei carabinieri»). **Ipotesi:** definitivamente $a_n \le c_n \le b_n$, e $a_n \to L$, $b_n \to L$. **Tesi:** $c_n \to L$.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente $L - \varepsilon < a_n$ e $b_n < L + \varepsilon$; definitivamente vale anche $a_n \le c_n \le b_n$. Da un indice in poi valgono tutte e tre, e allora $L - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < L + \varepsilon$, cioè $|c_n - L| < \varepsilon$. c.v.d.

Il nome scherzoso descrive la situazione: due «carabinieri» a_n e b_n, diretti allo stesso punto, portano con sé la successione che sta fra loro. Il teorema ha anche una versione per le successioni divergenti, con un solo «carabiniere»: se definitivamente $c_n \ge b_n$ e $b_n \to +\infty$, allora $c_n \to +\infty$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ (l'angolo n è in radianti).

Il numeratore non ha limite: $\operatorname{sen} n$ continua a oscillare fra -1 e 1. Però è limitato: $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$, quindi per ogni $n \ge 1$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Le due successioni esterne tendono a 0, e per il teorema del confronto $\dfrac{\operatorname{sen} n}{n} \to 0$. Lo stesso ragionamento mostra che il prodotto di una successione limitata per una successione infinitesima è infinitesimo (esercizio 24).

1.4.5 Successioni monotone

Per le successioni monotone la situazione è molto più semplice che in generale: un limite c'è sempre. È qui che interviene la completezza di $\mathbb{R}$.

IN SINTESI

Teorema delle successioni monotone. Ipotesi: a_n è crescente (anche in senso lato). **Tesi:** se a_n è limitata superiormente, converge a $\sup\{a_n\}$; se non lo è, diverge a $+\infty$.

Analogamente, una successione decrescente converge al suo estremo inferiore se è limitata inferiormente, e diverge a $-\infty$ altrimenti. In ogni caso **una successione monotòna è regolare**.

Dimostrazione (caso limitato). Per l'assioma di completezza l'insieme dei termini ha estremo superiore S. Fissato $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ non è un maggiorante, quindi esiste un indice $\bar{n}$ con $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$. Per $n > \bar{n}$, poiché la successione è crescente e S è un maggiorante, $S - \varepsilon < a_{\bar{n}} \le a_n \le S$, quindi $|a_n - S| < \varepsilon$. c.v.d.

Il teorema garantisce l'*esistenza* del limite senza dirne il valore; più avanti in questo capitolo lo useremo per il numero e e per le successioni per ricorrenza. In $\mathbb{Q}$ sarebbe falso: le approssimazioni decimali per difetto di $\sqrt{2}$, cioè 1; 1,4; 1,41; 1,414; …, formano una successione crescente e limitata di numeri razionali che non ha limite in $\mathbb{Q}$.

1.4.6 Le operazioni con i limiti

Calcolare un limite con la definizione è faticoso. Per fortuna i limiti si comportano bene rispetto alle operazioni. Se $a_n \to L$ e $b_n \to M$, con L e M reali, allora

$$a_n + b_n \to L + M,\quad a_n \cdot b_n \to L \cdot M,\quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{L}{M}\ (M \neq 0).$$

Dimostriamo la prima come modello. Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$; allora $|(a_n + b_n) - (L + M)| \le |a_n - L| + |b_n - M| < \varepsilon$. Le altre si dimostrano con idee simili e un po' più di calcolo. Quando uno dei limiti è infinito valgono le regole della Tabella 1.2, che si leggono come abbreviazioni: «$L + (+\infty) = +\infty$» significa «se $a_n \to L$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$». La stessa tabella varrà per i limiti di funzioni (cap. 3).

Tabella 1.2 L'algebra dei limiti. L è un numero reale; i casi indicati come «forma indeterminata» non hanno una regola generale: il limite dipende dalle successioni.

Operazione	Regola	Forme indeterminate
somma	$L + (\pm\infty) = \pm\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$+\infty - \infty$
prodotto	$L\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$ se $L > 0$, $\mp\infty$ se $L < 0$; $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)$ con la regola dei segni	$0\cdot\infty$
quoziente	$\frac{L}{\pm\infty} = 0$; $\frac{\pm\infty}{L} = \pm\infty$ se $L > 0$, $\mp\infty$ se $L < 0$; $\frac{L}{0^+} = +\infty$, $\frac{L}{0^-} = -\infty$ se $L > 0$	$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$
potenza	si vedrà nel cap. 3	1^∞, 0^0, ∞^0

Il simbolo 0^+ indica una successione infinitesima definitivamente positiva: per esempio $\frac{1}{n} \to 0^+$, e infatti $\frac{1}{1/n} = n \to +\infty$. Le forme indeterminate sono sette in tutto; per le successioni di questo capitolo bastano le prime quattro. «Indeterminata» non vuol dire che il limite non esiste: vuol dire che le regole non bastano e bisogna trasformare l'espressione.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 + 5}$ e $\lim_{n\to+\infty} (n^2 - 5n)$.

Il quoziente. Numeratore e denominatore divergono a $+\infty$: è la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Raccogliamo la potenza più alta: $\frac{n^2(3 - \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}}$. Ora $\frac{1}{n} \to 0$ e $\frac{5}{n^2} \to 0$, quindi per le regole delle operazioni il limite è $\frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$.

La differenza. $n^2 \to +\infty$ e $5n \to +\infty$: è la forma $+\infty - \infty$. Raccogliamo: $n^2 - 5n = n(n - 5)$, prodotto di due successioni che divergono a $+\infty$, quindi $n^2 - 5n \to +\infty$. Il termine di grado più alto «vince».

1.5 Limiti notevoli e serie geometrica

1.5.1 La successione geometrica

La progressione geometrica q^n è il modello di ogni crescita o decadimento in percentuale costante: un capitale, una popolazione, una sostanza radioattiva. Il suo comportamento dipende soltanto da q.

IN SINTESI

Limite della successione geometrica.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \text{ se } q > 1;\ = 1 \text{ se } q = 1;\ = 0 \text{ se } |q| < 1;\ \text{non esiste se } q \le -1.$$

Per $q \le -1$ la successione è irregolare: per $q = -1$ oscilla fra -1 e 1; per $q < -1$ i termini hanno segni alterni e valore assoluto che diverge.

Dimostrazione. Se $q > 1$, poniamo $q = 1 + h$ con $h > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli, $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ per ogni $n \ge 1$ (si dimostra per induzione: esercizio 21). Poiché $1 + nh \to +\infty$, per il confronto $q^n \to +\infty$. Se $0 < |q| < 1$, il numero $\frac{1}{|q|}$ è maggiore di 1, quindi $(\frac{1}{|q|})^n \to +\infty$ e $|q|^n \to 0$; infine $-|q|^n \le q^n \le |q|^n$ e il confronto dà $q^n \to 0$. Il caso $q = 0$ è banale, e i casi $q = 1$, $q = -1$ sono già noti. Se $q < -1$, $|q^n| = |q|^n \to +\infty$: la successione è illimitata, quindi non converge, e cambia segno a ogni passo, quindi non diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$. c.v.d.

Per esempio $(\frac{3}{2})^n \to +\infty$, $(0{,}99)^n \to 0$ (lentamente: $0{,}99^{100} \approx 0{,}366$), $(-\frac{1}{2})^n \to 0$ oscillando, mentre $(-2)^n$ è irregolare.

1.5.2 La radice n-esima

Se $a > 0$, la successione $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ tende a 1. Con $a = 2$: $2^{1/10} \approx 1{,}0718$, $2^{1/100} \approx 1{,}00696$, $2^{1/1000} \approx 1{,}000693$; con $a = 0{,}5$: 0,9330; 0,99309; 0,999307. Per $a > 1$ si può dimostrarlo come per q^n: scriviamo $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ con $h_n > 0$; per Bernoulli $a = (1 + h_n)^n \ge 1 + n\,h_n$, quindi $0 < h_n \le \frac{a-1}{n}$, e per il confronto $h_n \to 0$. Per $0 < a < 1$ si passa al reciproco.

1.5.3 Il numero *e*

In *Matematica 3* (cap. 12) il numero e è stato introdotto come base della funzione esponenziale «naturale», e lo si è visto comparire, solo numericamente, come limite. Ora possiamo dargli una definizione precisa. Consideriamo la successione

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

La base tende a 1 e l'esponente diverge: è la forma indeterminata 1^∞, e infatti il risultato non è 1. La Tabella 1.3 e la Figura 1.4 mostrano che i termini crescono e si stabilizzano attorno a 2,718.

Tabella 1.3 Alcuni termini della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$, troncati alla decima cifra decimale.

n	1	10	100	1000	1 000 000
$(1 + \frac{1}{n})^n$	2	2,5937424601	2,7048138294	2,7169239322	2,7182804693

Nel riquadro che segue si dimostra che la successione è crescente e limitata (tutti i termini sono minori di 3). Per il teorema delle successioni monotone, quindi, converge. Il suo limite si chiama **numero di Nepero**, e si indica con e:

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718281828.$$

Il numero e è irrazionale (anzi trascendente, come π). Nel cap. 3 vedremo che lo stesso limite vale anche per $x \to \pm\infty$ con x reale, e da lì si ricaveranno i limiti di $\frac{\ln(1+x)}{x}$ e di $\frac{e^x - 1}{x}$, che spiegano perché e è la base «naturale» degli esponenziali e dei logaritmi.

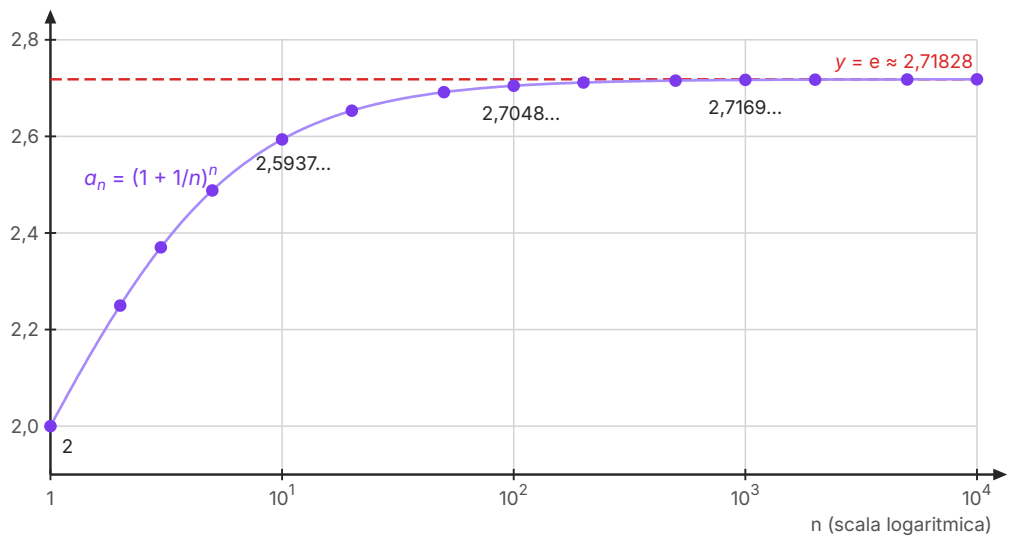


Figura 1.4 I termini di $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (punti) per alcuni valori di n fra 1 e 10 000, con l'asse delle ascisse in scala logaritmica; la linea chiara collega i valori di $(1 + \frac{1}{x})^x$ per x reale. La successione cresce e si avvicina alla retta $y = e$ (tratteggiata) senza raggiungerla. Valori calcolati.

APPROFONDIMENTO · PERCHÉ LA SUCCESSIONE DI E CONVERGE

Sviluppiamo la potenza con la formula del binomio di Newton (*Matematica 4*, cap. 13):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \Sigma_{k=0}{}^{n}C_{n,k}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$

Il termine di posto k è $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$. **Crescenza.** Passando da n a $n+1$ ogni fattore $1-\frac{j}{n}$ aumenta, quindi aumenta ogni termine; inoltre si aggiunge un termine positivo in più. Dunque $a_{n+1} > a_n$. **Limitatezza.** Ogni fattore fra parentesi è minore di 1, quindi $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Poiché $k! \geq 2^{k-1}$, si ha $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3$, per la somma geometrica che studieremo tra poco. Quindi $2 \leq a_n < 3$ per ogni n, e il limite e sta fra 2 e 3.

COLLEGAMENTI · ECONOMIA: L'INTERESSE COMPOSTO

Un capitale di 1 euro è depositato per un anno a un tasso del 100% (un tasso inventato, scelto per semplicità). Se l'interesse è pagato una volta, alla fine si hanno 2 euro. Se è pagato due volte, ogni volta al tasso del 50% e sommato al capitale, si hanno $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ euro; con dodici pagamenti mensili $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}613$ euro; con un pagamento al giorno $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}7146$ euro. Capitalizzare sempre più spesso aiuta sempre meno: il capitale non cresce senza limite, ma si avvicina a $e \approx 2{,}718$ euro. È la «capitalizzazione continua» della matematica finanziaria, e il suo limite è la definizione di e.

1.5.4 La serie geometrica

Sommare infiniti numeri ha senso solo come limite. Data una progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q, la somma dei primi n termini, o **somma parziale** (*Matematica 3*, cap. 4), è

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

La **serie geometrica** $a_1 + a_1\, q + a_1\, q^2 + \dots$ è la successione delle somme parziali S_n; il suo limite, se esiste, si chiama **somma della serie**. Dal limite di q^n segue subito il risultato.

IN SINTESI

Serie geometrica ($a_1 \neq 0$). Se $|q| < 1$ la serie converge e

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Se $q \geq 1$ la serie diverge (a $+\infty$ se $a_1 > 0$, a $-\infty$ se $a_1 < 0$); se $q \leq -1$ è irregolare.

Infatti per $|q| < 1$, $q^n \to 0$ e $S_n \to a_1 \dfrac{1 - 0}{1 - q}$. Per $q = 1$, $S_n = n\, a_1$ diverge; per $q > 1$ e per $q \leq -1$ si usa il comportamento di q^n. La Figura 1.5, a), illustra la serie $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$: ogni termine copre metà di ciò che manca per arrivare a 1, e la somma è $\dfrac{1/2}{1 - 1/2} = 1$.

ESEMPIO SVOLTO

Dimostriamo che $0{,}999\ldots = 1$ e scriviamo $0{,}3\overline{18}$ come frazione.

Il primo numero. Per definizione di numero decimale illimitato, $0{,}999\ldots = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{1000} + \ldots$, cioè il limite delle somme parziali della serie geometrica con $a_1 = \dfrac{9}{10}$ e $q = \dfrac{1}{10}$. La somma è $\dfrac{9/10}{1 - 1/10} = \dfrac{9/10}{9/10} = 1$. Non è un'approssimazione: le somme parziali 0,9; 0,99; 0,999; … sono tutte minori di 1, ma il *limite*, che è il valore del numero decimale illimitato, è esattamente 1.

Il secondo numero. $0{,}3181818\ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{18}{1000} + \dfrac{18}{100000} + \ldots$. Dopo il primo addendo c'è una serie geometrica con $a_1 = \dfrac{18}{1000}$ e $q = \dfrac{1}{100}$, di somma $\dfrac{18/1000}{99/100} = \dfrac{18}{990} = \dfrac{1}{55}$. Quindi il numero è $\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{55} = \dfrac{33 + 2}{110} = \dfrac{35}{110} = \dfrac{7}{22}$. Controllo: $7 : 22 = 0{,}31818\ldots$

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA: ACHILLE E LA TARTARUGA

Zenone di Elea sosteneva che Achille non raggiungerà mai la tartaruga: quando arriva dove era la tartaruga, questa si è spostata, e così all'infinito. Diamo dei numeri (inventati): Achille corre a 10 m/s, la tartaruga a 1 m/s e parte 100 m più avanti (Figura 1.5, b). Achille impiega 10 s per arrivare al punto di partenza della tartaruga, che intanto ha percorso 10 m; poi 1 s per coprire questi 10 m, mentre la tartaruga avanza di 1 m; poi 0,1 s, e così via. Gli intervalli di tempo formano una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10}$:

$$10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}\ \text{s} \approx 11{,}1\ \text{s}.$$

Gli infiniti passi di Zenone occupano un tempo finito, e Achille raggiunge la tartaruga dopo $\frac{100}{9}$ s, a $\frac{1000}{9}$ m $\approx 111{,}1$ m dalla sua partenza. Lo stesso risultato si ottiene senza serie: la distanza di 100 m si riduce di 9 m al secondo. Il paradosso non sta nella fisica, ma nell'idea che una somma di infiniti tempi debba essere infinita: la serie geometrica mostra che non è così.

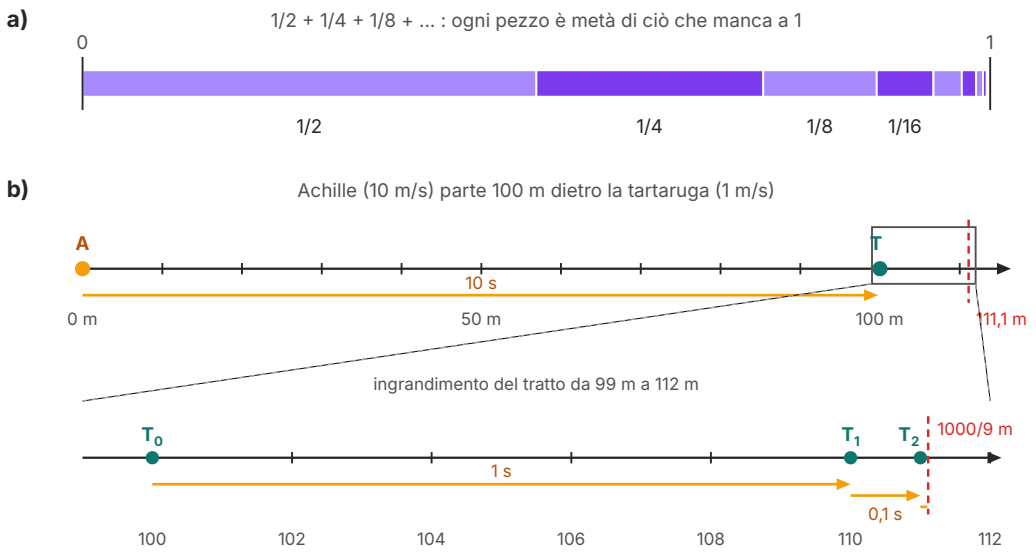


Figura 1.5 a) La serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ come successione di segmenti che riempiono $[0; 1]$. b) Achille (A) e la tartaruga (T) nell'esempio di Zenone, con dati inventati. In basso, ingrandito, il tratto finale: le posizioni T_0, T_1, T_2 della tartaruga quando Achille arriva dove lei era un attimo prima, e il punto d'incontro a $\frac{1000}{9}$ m (tratteggiato).

APPROFONDIMENTO · LA SERIE ARMONICA DIVERGE

Non tutte le serie i cui termini tendono a 0 hanno somma finita. Nel XIV secolo Nicola d'Oresme diede un argomento, ancora oggi il più semplice, per la serie armonica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Si raggruppano i termini a blocchi di lunghezza 1, 2, 4, 8, ...:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Ogni blocco tra parentesi è maggiore o uguale a $\frac{1}{2}$: per esempio $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, e i quattro termini da $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{8}$ sono ciascuno almeno $\frac{1}{8}$. Quindi $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, che diverge: le somme parziali superano qualunque numero, anche se molto lentamente (per superare 10 servono più di 12 000 termini). Lo studio generale delle serie va oltre il programma; per noi basta la lezione: *che i termini tendano a 0 è necessario, ma non sufficiente*.

1.6 Successioni per ricorrenza e calcolo approssimato

Molti procedimenti di calcolo approssimato producono una successione per ricorrenza: si parte da un valore e si applica sempre la stessa regola $a_{n+1} = f(a_n)$. La domanda è se la successione converge, e a che cosa. Il teorema delle successioni monotone e l'algebra dei limiti danno un metodo in due tempi: prima si dimostra che il limite esiste, poi lo si calcola.

1.6.1 Un esempio guida

ESEMPIO SVOLTO

Studiamo la successione $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, cioè $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...

I primi termini. $a_1 \approx 1{,}41421$, $a_2 \approx 1{,}84776$, $a_3 \approx 1{,}96157$, $a_4 \approx 1{,}99037$, $a_5 \approx 1{,}99759$: sembra che la successione cresca verso 2.

Limitata: $a_n < 2$ per ogni n. Per induzione. *Passo base:* $a_1 = \sqrt{2} < 2$. *Passo induttivo:* se $a_n < 2$, allora $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Crescente: $a_{n+1} > a_n$. Poiché i termini sono positivi, $a_{n+1} > a_n$ equivale a $2 + a_n > a_n^2$, cioè $a_n^2 - a_n - 2 < 0$, cioè $(a_n - 2)(a_n + 1) < 0$, vero perché $0 < a_n < 2$.

Il limite. Per il teorema delle successioni monotone, a_n converge a un numero L con $\sqrt{2} \leq L \leq 2$. Anche $a_{n+1} \to L$ (è la stessa successione, spostata di un posto), e $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$; passando al limite con le regole delle operazioni, $L^2 = 2 + L$, quindi $L = 2$ oppure $L = -1$. Poiché $L \geq \sqrt{2}$, il limite è 2.

La Figura 1.6 mostra il procedimento con un **diagramma a ragnatela**. Si disegnano il grafico di $y = \sqrt{2 + x}$ e la bisettrice $y = x$. Da a_1 sull'asse x si sale fino alla curva, trovando l'ordinata a_2; ci si sposta in orizzontale fino alla bisettrice, che riporta a_2 in ascissa; si sale di nuovo alla curva, e così via. La spezzata si avvita verso il punto in cui curva e bisettrice si incontrano, cioè verso la soluzione di $x = \sqrt{2 + x}$.

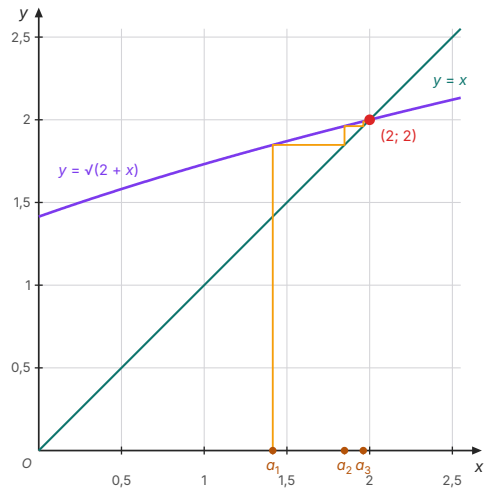


Figura 1.6 Diagramma a ragnatela per $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_1 = \sqrt{2}$: la curva $y = \sqrt{2 + x}$ (viola), la bisettrice $y = x$ (verde) e la spezzata dei passi (arancio). I termini a_1, a_2, a_3 sono segnati sull'asse x; la spezzata converge al punto (2; 2). Stessa unità sui due assi; curva calcolata dall'equazione.

ERRORE FREQUENTE

Passare al limite prima di sapere che il limite esiste. Per $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2\,a_n$ si avrebbe «$L = 2L$, quindi $L = 0$», ma la successione è 1, 2, 4, 8, … e diverge. L'equazione $L = f(L)$ dice soltanto quali sono i limiti *possibili* se la successione converge. Prima si dimostra la convergenza (per esempio con la monotonia e la limitatezza), poi si risolve l'equazione e si sceglie la soluzione compatibile con i termini.

1.6.2 Il metodo di Erone

Per calcolare $\sqrt{2}$ si può usare un procedimento che risale all'antichità ed è descritto da Erone di Alessandria (I secolo d.C.). Se a è un'approssimazione di $\sqrt{2}$, allora $\dfrac{2}{a}$ è un'approssimazione «dall'altra parte» (se $a > \sqrt{2}$, allora $\dfrac{2}{a} < \sqrt{2}$), e la loro media è un'approssimazione migliore. Si ottiene il **metodo di Erone**:

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Tabella 1.4 Il metodo di Erone per $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309… I valori sono troncati alla quattordicesima cifra decimale; le cifre corrette sono in neretto.

n	a_n	$a_n - \sqrt{2}$
1	**1**	−0,414
2	**1**,5	0,0858
3	**1,41**666666666666	0,00245
4	**1,41421**568627450	$2{,}12 \cdot 10^{-6}$
5	**1,41421356237**468	$1{,}59 \cdot 10^{-12}$

La Tabella 1.4 mostra un fatto notevole: da a_3 in poi l'errore viene, all'incirca, elevato al quadrato a ogni passo (0,00245; 0,0000021; 0,0000000000016), e il numero di cifre corrette all'incirca raddoppia. Che la successione converga a $\sqrt{2}$ si dimostra come nell'esempio guida: da a_2 in poi è decrescente e limitata inferiormente da $\sqrt{2}$ (esercizio 34 per un caso simile); il limite $L > 0$ soddisfa $L = \frac{1}{2}(L + \frac{2}{L})$, cioè $L^2 = 2$. Lo stesso schema, con k al posto di 2, calcola $\sqrt{k}$; nel cap. 8 lo ritroveremo come caso particolare del metodo di Newton.

1.6.3 Il rapporto aureo

La successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … (*Matematica 3*, cap. 4) è definita da $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. I rapporti fra termini consecutivi, $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, valgono 1; 2; 1,5; 1,667; 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,6176; 1,6182; … e oscillano, con oscillazioni sempre più piccole, attorno a 1,618. Dividendo la regola per F_{n+1} si trova una ricorrenza per i rapporti:

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Questa successione non è monotòna, quindi il teorema delle successioni monotone non si applica; la convergenza si dimostra in altro modo (esercizio 26). Ammessa la convergenza, il limite $L \geq 1$ soddisfa $L = 1 + \frac{1}{L}$, cioè $L^2 - L - 1 = 0$, la cui soluzione positiva è il **rapporto aureo** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180340$. In *Matematica 3* il rapporto aureo si era visto «apparire» nei rapporti; ora è il limite di una successione.

APPROFONDIMENTO · DAGLI INFINITESIMI AL RIGORE

Newton e Leibniz, che pubblicò il suo calcolo differenziale negli *Acta Eruditorum* del 1684, ragionavano con quantità «infinitamente piccole» che a volte trattavano come diverse da zero e a volte trascuravano. Il metodo funzionava, ma le sue basi furono criticate per oltre un secolo. Augustin-Louis Cauchy, nel *Cours d'analyse* del 1821, mise al centro il concetto di limite e definì una quantità infinitesima come una variabile che tende a zero. Bernard Bolzano, in un lavoro del 1817, aveva usato idee simili per dimostrare il teorema degli zeri (cap. 4). Le definizioni scritte interamente con disuguaglianze, «per ogni ε esiste…», che abbiamo usato in questo capitolo, si diffusero nella seconda metà dell'Ottocento soprattutto con l'insegnamento di Karl Weierstrass a Berlino. Il linguaggio di ε ha un vantaggio decisivo: trasforma un'idea dinamica, «avvicinarsi», in un'affermazione statica su disuguaglianze, che si può dimostrare o confutare.

SINTESI

- Un maggiorante di A è un numero maggiore o uguale a tutti gli elementi di A; l'**estremo superiore** sup A è il minimo dei maggioranti. Se appartiene ad A è il massimo, altrimenti A non ha massimo.
- **Assioma di completezza:** ogni insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente ha estremo superiore in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{Q}$ la proprietà è falsa: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ha estremo superiore razionale.
- L'intorno circolare di x_0 di raggio δ è $]x_0 - \delta;\, x_0 + \delta[$; un intorno di $+\infty$ è $]M;\, +\infty[$. Un punto di accumulazione di A ha in ogni intorno punti di A diversi da sé; il limite ha senso solo nei punti di accumulazione del dominio, e per le successioni solo per $n \to +\infty$.
- $a_n \to L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$; $a_n \to +\infty$ se per ogni $M > 0$ definitivamente $a_n > M$. Una successione è convergente, divergente oppure irregolare.
- Il limite è unico; una successione convergente a $L > 0$ è definitivamente positiva; ogni successione convergente è limitata (non viceversa).
- **Teorema del confronto:** se definitivamente $a_n \le c_n \le b_n$ e a_n, b_n tendono a L, anche $c_n \to L$.
- Una successione monotòna ha sempre limite: crescente e limitata superiormente converge al suo estremo superiore, illimitata diverge.
- Somma, prodotto e quoziente di successioni convergenti convergono a somma, prodotto e quoziente dei limiti; con limiti infiniti valgono le regole della Tabella 1.2, tranne le forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.
- $q^n \to +\infty$ per $q > 1$, $\to 0$ per $|q| < 1$, è irregolare per $q \le -1$. La serie geometrica $a_1 + a_1 q + \dots$ converge a $\frac{a_1}{1-q}$ se e solo se $|q| < 1$.
- Il numero e è il limite della successione crescente e limitata $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: $e \approx 2{,}718281828$.
- Per una successione $a_{n+1} = f(a_n)$ si dimostra prima che converge (monotonia e limitatezza), poi si cerca il limite fra le soluzioni di $L = f(L)$. Il metodo di Erone $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ raddoppia all'incirca le cifre corrette di $\sqrt{2}$ a ogni passo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Sia $A = \{\frac{n}{n+1} : n \geq 1\}$. Allora:
   - **A.** $\max A = 1$
   - **B.** $\sup A = 1$ e $\min A = \frac{1}{2}$
   - **C.** A non ha estremo superiore
   - **D.** $\inf A = 0$

2. ● Quale delle seguenti successioni è irregolare?
   - **A.** $\frac{(-1)^n}{n}$
   - **B.** $n^2 - n$
   - **C.** $\frac{1}{n}$
   - **D.** $\cos(n\pi)$

3. ● Quale frase esprime correttamente $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$?
   - **A.** per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$
   - **B.** esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni n
   - **C.** esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$ per un $n > \bar{n}$
   - **D.** per ogni n la distanza $|a_{n+1} - L|$ è minore di $|a_n - L|$

4. ● La successione $(-\frac{3}{2})^n$
   - **A.** converge a 0
   - **B.** diverge a $+\infty$
   - **C.** è irregolare
   - **D.** diverge a $-\infty$

5. ● Quale affermazione è vera?
   - **A.** ogni successione limitata è convergente
   - **B.** ogni successione monotòna è convergente
   - **C.** ogni successione crescente diverge a $+\infty$
   - **D.** ogni successione convergente è limitata

6. ● La somma della serie $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \ldots$ è

   A. $\frac{3}{2}$

   B. $\frac{9}{4}$

   C. $\frac{9}{2}$

   D. la serie non converge

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) 0 è un punto di accumulazione di $\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. b) L'insieme $\mathbb{Z}$ ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$. c) Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ limitato superiormente ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$. d) Un punto isolato di un insieme A appartiene sempre ad A.

8. ● Completa le definizioni. a) La successione a_n diverge a $-\infty$ se per ogni _____ esiste $\bar{n}$ tale che _____ per ogni $n > \bar{n}$. b) Una successione si dice infinitesima se _____. c) Il numero S è l'estremo superiore di A se è un _____ di A e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ con _____.

9. ● Vero o falso? Motiva. a) Se $a_n \to L$ e $L > 0$, allora $a_n > 0$ per ogni n. b) Se $a_n > 0$ per ogni n e $a_n \to L$, allora $L > 0$. c) Una successione crescente e limitata superiormente converge. d) La successione $\frac{(-1)^n}{n}$ è monotòna.

Calcolare

10. ● Determina estremo superiore e inferiore e stabilisci se sono massimo o minimo. a) $A = \{\frac{n+1}{n} : n \geq 1\}$; b) $B =]-1; 3]$; c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$; d) $D = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \geq 1\}$.

11. ● Trova i punti di accumulazione e i punti isolati di: a) $]0; 2[\cup \{3\}$; b) $\{1 + \frac{1}{n} : n \geq 1\}$; c) $\mathbb{Z}$; d) $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$.

12. ● Verifica con la definizione i limiti e trova il più piccolo $\bar{n}$ intero per il valore di ε indicato. a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, $\varepsilon = 0{,}01$; b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, $\varepsilon = 0{,}001$.

13. ●● Verifica con la definizione e trova il più piccolo $\bar{n}$ intero per il valore di M indicato. a) $\lim_{n\to+\infty} (n^2 + 1) = +\infty$, $M = 10\,000$; b) $\lim_{n\to+\infty} (5 - 2n) = -\infty$, cioè $5 - 2n < -M$ definitivamente, con $M = 1000$.

14. ● Calcola i limiti. a) $\lim \frac{3n^2 - n}{n^2 + 5}$; b) $\lim \frac{n+2}{n^2+1}$; c) $\lim \frac{n^3 - 4}{2n^2 + n}$; d) $\lim \frac{(2n-1)^2}{4n^2+3}$; e) $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (tutti per $n \to +\infty$).

15. ● Calcola i limiti per $n \to +\infty$. a) $(\frac{5}{4})^n$; b) $(-0{,}9)^n$; c) $\frac{2^n + 3^n}{3^{n+1}}$; d) $\frac{3^n - 2^n}{3^n + 5}$.

16. ●● Usa il teorema del confronto. a) $\lim \frac{\cos n}{n+1}$; b) $\lim \frac{n+\operatorname{sen} n}{n}$; c) $\lim \frac{n!}{n^n}$ (suggerimento: $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n} \le \frac{1}{n}$).

17. ●● Calcola la somma. a) $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots$; b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$; c) scrivi $0,\overline{27}$ come frazione. d) Per quali valori di x la serie $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots$ converge? Qual è la sua somma?

18. ●● Sapendo che $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$, calcola: a) $\lim (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$; b) $\lim (1 + \frac{1}{n})^{2n}$; c) $\lim [(1 + \frac{1}{n})^n - (1 + \frac{1}{n})]$.

19. ●● Sia $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2}$. a) Calcola i primi quattro termini. b) Dimostra per induzione che $a_n < 6$ e che la successione è crescente. c) Calcola il limite.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che se $a_n \to L$ allora $|a_n| \to |L|$ (usa $||a| - |b|| \le |a - b|$). Il viceversa è vero? Se no, trova un controesempio; mostra però che vale nel caso $L = 0$.

21. ●● **Disuguaglianza di Bernoulli.** Dimostra per induzione che, per ogni $h \ge 0$ e ogni $n \ge 1$, $(1 + h)^n \ge 1 + nh$. Deduci che $q^n \to +\infty$ per $q > 1$, e trova un $\bar{n}$ per cui $1{,}1^n > 1000$ per ogni $n > \bar{n}$.

22. ●● **Trova l'errore.** «Sia $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n{}^2$. Se L è il limite, passando al limite si ha $L = L^2$, quindi $L = 0$ oppure $L = 1$. Poiché i termini sono positivi, il limite è 1». Dove sta l'errore? Qual è il vero comportamento della successione?

23. ●● Trova un controesempio a ciascuna affermazione falsa. a) Una successione limitata converge. b) Se $a_n + b_n$ converge, allora a_n e b_n convergono. c) Se $a_n \cdot b_n \to 0$, allora $a_n \to 0$ oppure $b_n \to 0$. d) Se $a_n > 0$ per ogni n e a_n converge, il limite è positivo.

24. ●●● Dimostra che se $a_n \to 0$ e b_n è limitata, allora $a_n \cdot b_n \to 0$. Perché non si può usare la regola del prodotto dei limiti? Applica il risultato a $\frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$.

25. ●● Sia $S = \sup A$, con $S \notin A$. Dimostra che S è un punto di accumulazione di A. Mostra con un esempio che, se $S \in A$, S può essere un punto isolato.

26. ●●● I rapporti di Fibonacci $r_1 = 1$, $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ sono tutti ≥ 1, e il rapporto aureo soddisfa $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. a) Dimostra che $|r_{n+1} - \varphi| \le \frac{|r_n - \varphi|}{\varphi}$. b) Deduci che $|r_n - \varphi| \le \frac{|r_1 - \varphi|}{\varphi^{n-1}}$ e che $r_n \to \varphi$.

Problemi

27. ●● Una pallina cade da 2 m di altezza e a ogni rimbalzo risale ai $\frac{3}{5}$ dell'altezza da cui è caduta (dati inventati). a) Qual è la distanza totale percorsa, in salita e in discesa, se i rimbalzi continuano all'infinito? b) Dopo quanti rimbalzi l'altezza raggiunta diventa minore di 1 cm?

28. ●● Un paziente assume ogni 24 ore una dose di 100 mg di un farmaco; dopo 24 ore nell'organismo resta il 30% della quantità presente subito dopo l'ultima dose (dati inventati). a) Scrivi la ricorrenza per la quantità Q_n presente subito dopo la n-esima dose e calcola Q_1, Q_2, Q_3. b) Scrivi Q_n come somma geometrica e calcola $\lim Q_n$.

29. ●● In un quadrato di lato 1 si congiungono i punti medi dei lati, ottenendo un secondo quadrato; nel secondo si ripete la costruzione, e così via. Calcola la somma delle aree e la somma dei perimetri di tutti i quadrati.

30. ●●● **Il fiocco di neve di Koch.** Si parte da un triangolo equilatero di area A_0 e perimetro P_0. A ogni passo, su ogni lato, si sostituisce il terzo centrale con due lati di un triangolo equilatero esterno. a) Dimostra che il perimetro dopo n passi è $P_0 \left(\frac{4}{3}\right)^n$ e che diverge. b) Al passo k si aggiungono $3 \cdot 4^{k-1}$ triangoli, ciascuno di area $\frac{A_0}{9^k}$: dimostra che l'area tende a $\frac{8}{5} A_0$.

Con il computer

31. ●● Con un foglio di calcolo genera i primi 30 termini di $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, in una colonna; in quella accanto calcola $2 - a_n$, e in una terza il rapporto $\frac{2 - a_{n+1}}{2 - a_n}$. a) A quale valore sembra tendere il rapporto? b) Trova il più piccolo n per cui $2 - a_n < 10^{-6}$. c) Perché, oltre un certo n, la colonna $2 - a_n$ mostra 0?

Verso l'esame

32. ●● Determina il valore del parametro reale k per cui $\lim_{n \to +\infty} \frac{k n^2 + 3n}{2n^2 - 1} = 4$. Per quali valori di k la successione $\frac{k n^3 + 3n}{2n^2 - 1}$ diverge a $+\infty$?

33. ●● Dimostra che la successione $a_n = \frac{n}{n+1}$ è crescente e limitata, e determina l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini, dicendo se sono massimo o minimo.

34. ●●● Sia $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$. a) Dimostra per induzione che $2 \le a_n < 3$ per ogni n. b) Dimostra che la successione è crescente. c) Calcolane il limite, giustificando la scelta fra le soluzioni dell'equazione del limite.

35. ●● Determina il numero reale x per cui $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = 3$, verificando che la serie converge per il valore trovato.

PER APPROFONDIRE

- SPI — i capitoli sull'estremo superiore e sulle successioni: la completezza dei numeri reali è il punto di partenza di tutta l'analisi.
- APO — una presentazione rigorosa dei numeri reali, dell'assioma dell'estremo superiore e dei limiti di successioni.
- CR — il capitolo sui limiti discute la serie geometrica, il numero *e* e i paradossi di Zenone in modo elementare.
- BOY — per Zenone, Oresme, Cauchy e Weierstrass, e per la lunga storia del concetto di limite.

Glossario del capitolo

Assioma di completezza
Proprietà dei numeri reali: ogni insieme non vuoto limitato superiormente ha estremo superiore in $\mathbb{R}$. È falsa in $\mathbb{Q}$.

Definitivamente
Una proprietà dei termini di una successione vale definitivamente se vale per tutti gli n maggiori di un opportuno $\bar{n}$.

Estremo inferiore
Il massimo dei minoranti di un insieme limitato inferiormente, $\inf A$; se appartiene all'insieme ne è il minimo.

Estremo superiore
Il minimo dei maggioranti di un insieme limitato superiormente, $\sup A$; se appartiene all'insieme ne è il massimo.

Forma indeterminata
Combinazione di limiti per cui le regole delle operazioni non danno il risultato: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Intorno
Di un numero x_0: un intervallo aperto che contiene x_0; l'intorno circolare di raggio δ è $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$. Di $+\infty$: un intervallo $]M; +\infty[$.

Maggiorante
Un numero maggiore o uguale a tutti gli elementi di un insieme; analogamente, un minorante è minore o uguale a tutti.

Metodo di Erone
Il procedimento $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n})$ per approssimare $\sqrt{k}$, che a ogni passo raddoppia all'incirca le cifre corrette.

Numero di Nepero
Il numero $e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718281828$, base dei logaritmi naturali.

Punto di accumulazione
Un numero x_0 tale che ogni suo intorno contiene punti dell'insieme diversi da x_0; può non appartenere all'insieme.

Punto isolato
Un punto di un insieme che ha un intorno in cui non cadono altri punti dell'insieme.

Serie geometrica
La successione delle somme parziali di una progressione geometrica; converge, con somma $\frac{a_1}{1-q}$, se e solo se $|q| < 1$.

Successione convergente
Una successione a_n tale che, per un numero reale L, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $|a_n - L| < \varepsilon$.

Successione divergente
Una successione che tende a $+\infty$ (supera definitivamente ogni numero M) o a $-\infty$.

Successione infinitesima
Una successione convergente a 0.

Successione irregolare
Una successione che non converge e non diverge, come $(-1)^n$.

Teorema del confronto
Se definitivamente $a_n \le c_n \le b_n$ e a_n, b_n tendono allo stesso limite L, anche c_n tende a L. Vale anche per le funzioni (cap. 2).

Teorema delle successioni monotone
Una successione monotòna e limitata converge (crescente: al suo estremo superiore); se è illimitata diverge.

Soluzioni

1. B. $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ cresce: il minimo è $a_1 = \frac{1}{2}$; $\sup A = 1$, che non è un massimo perché $\frac{n}{n+1} = 1$ non ha soluzioni.

2. D. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ è irregolare; $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $n^2 - n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$.

3. A. È la definizione. La C scambia l'ordine dei quantificatori; la D descrive solo l'«avvicinarsi sempre di più».

4. C. $q = -\frac{3}{2} < -1$: i termini cambiano segno e $|q|^n \to +\infty$.

5. D. Le altre sono false: $(-1)^n$ è limitata e non converge; n è monotòna e diverge; $1 - \frac{1}{n}$ è crescente e converge a 1.

6. B. Serie geometrica con $a_1 = 3$, $q = -\frac{1}{3}$: $\frac{3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$.

7. a) V. b) F: tutti i punti di $\mathbb{Z}$ sono isolati (intorno di raggio $\frac{1}{2}$). c) F: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$. d) V: per definizione un punto isolato è un punto di A.

8. a) $M > 0$; $a_n < -M$. b) $a_n \to 0$. c) maggiorante; $x > S - \varepsilon$.

9. a) F: è vero solo *definitivamente*; per esempio $a_n = 1 - \frac{5}{n} \to 1$ ma $a_1 = -4$. b) F: si può dire solo $L \geq 0$; $\frac{1}{n} > 0$ e il limite è 0. c) V: teorema delle successioni monotone. d) F: i termini -1; 0,5; $-0{,}333\ldots$; 0,25 alternano il segno, la successione non è né crescente né decrescente.

10. a) $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ decresce: $\sup A = \max A = 2$ ($n = 1$), $\inf A = 1$, non minimo. b) $\sup B = \max B = 3$; $\inf B = -1$, non minimo. c) $C =]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$: $\sup C = \sqrt{5}$, $\inf C = -\sqrt{5}$, né massimo né minimo. d) Per n pari i termini sono $1 + \frac{1}{n}$: 1,5; 1,25; ...; per n dispari $-1 + \frac{1}{n}$: 0; $-\frac{2}{3}$; $-0{,}8$; ... Quindi $\sup D = \max D = \frac{3}{2}$ ($n = 2$); $\inf D = -1$, non minimo.

11. a) Punti di accumulazione: [0; 2]; punto isolato: 3. b) Punto di accumulazione: 1 (non appartiene all'insieme); tutti i punti $1 + \frac{1}{n}$ sono isolati. c) Nessun punto di accumulazione; tutti i punti sono isolati. d) Punti di accumulazione: tutto [0; 1] (fra due reali c'è sempre un razionale); nessun punto isolato.

12. a) $\frac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$; per $\varepsilon = 0{,}01$: $n > 299$, $\bar{n} = 299$. b) $|\frac{n-1}{n+1} - 1| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$; per $\varepsilon = 0{,}001$: $n > 1999$, $\bar{n} = 1999$.

13. a) $n^2 + 1 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M-1}$ ($M > 1$); per $M = 10\,000$: $n > \sqrt{9999} \approx 99{,}995$, quindi $\bar{n} = 99$ ($100^2 + 1 = 10\,001 > 10\,000$, mentre $99^2 + 1 = 9802$). b) $5 - 2n < -M \Leftrightarrow n > \frac{M+5}{2}$; per $M = 1000$: $n > 502{,}5$, $\bar{n} = 502$.

14. a) 3 (si divide per n^2). b) 0 ($\frac{n(1+2/n)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+2/n}{1+1/n^2}$). c) $+\infty$ ($\frac{n^3(1-4/n^3)}{n^2(2+1/n)} = n \cdot \frac{1-4/n^3}{2+1/n}$). d) 1 ($\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+3}$, si divide per n^2). e) 0: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, e il denominatore diverge.

15. a) $+\infty$ ($q = 1{,}25 > 1$). b) 0 ($|q| = 0{,}9 < 1$). c) $\frac{2^n + 3^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3}((\frac{2}{3})^n + 1) \to \frac{1}{3}$. d) $\frac{1 - (2/3)^n}{1 + 5/3^n} \to 1$.

16. a) $-\frac{1}{n+1} \le \frac{\cos n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$: limite 0. b) $\frac{n+\operatorname{sen} n}{n} = 1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ e $-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n}$: limite 1. c) Ogni fattore $\frac{k}{n}$ è al più 1, quindi $0 < \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}$: limite 0.

17. a) $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$: somma 8. b) $a_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$: somma $\frac{3}{4}$. c) $\frac{27}{100} + \frac{27}{10\,000} + \ldots = \frac{27/100}{99/100} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. d) $q = x - 1$: converge se $|x-1| < 1$, cioè $0 < x < 2$, con somma $\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}$.

18. a) $(1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) \to e \cdot 1 = e$. b) $[(1+\frac{1}{n})^n]^2 = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n \to e^2$. c) $e - 1$.

19. a) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{19}{4}$, $a_4 = \frac{43}{8}$, $a_5 = \frac{91}{16}$. b) *Passo base:* $a_1 = 1 < 6$. *Passo induttivo:* se $a_n < 6$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} < \frac{6+6}{2} = 6$. Crescenza: $a_{n+1} - a_n = \frac{6 - a_n}{2} > 0$. c) La successione converge; il limite soddisfa $L = \frac{L+6}{2}$, cioè $L = 6$.

20. Fissato ε, definitivamente $||a_n| - |L|| \le |a_n - L| < \varepsilon$. Il viceversa è falso: $|(-1)^n| = 1 \to 1$, ma $(-1)^n$ non converge. Se $L = 0$ vale: $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$, quindi $|a_n| \to 0$ equivale ad $a_n \to 0$.

21. *Passo base:* $n = 1$, $1 + h \ge 1 + h$. *Passo induttivo:* se $(1+h)^n \ge 1 + nh$, moltiplicando per $1 + h > 0$: $(1+h)^{n+1} \ge (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \ge 1 + (n+1)h$. Se $q = 1 + h > 1$, $q^n \ge 1 + nh \to +\infty$. Con $h = 0{,}1$: $1 + 0{,}1n > 1000$ per $n > 9990$, quindi basta $\bar{n} = 9990$ (in realtà già $1{,}1^{73} \approx 1051 > 1000$: Bernoulli dà una stima, non il valore minimo).

22. Si è passati al limite senza sapere che il limite esiste. I termini sono 2, 4, 16, 256, ...: per induzione $a_n \ge 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 \ge 2a_n$, quindi $a_n \ge 2^n$ e la successione diverge a $+\infty$. L'equazione $L = L^2$ dà solo i limiti possibili *se* la successione convergesse.

23. a) $(-1)^n$. b) $a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$: la somma è 0. c) $a_n = 1, 0, 1, 0, \ldots$ e $b_n = 0, 1, 0, 1, \ldots$: il prodotto è sempre 0, ma nessuna delle due converge. d) $a_n = \frac{1}{n}$.

24. Sia $|b_n| \le K$ per ogni n, con $K > 0$. Allora $0 \le |a_n b_n| \le K|a_n|$, e $K|a_n| \to 0$; per il confronto $|a_n b_n| \to 0$, quindi $a_n b_n \to 0$. La regola del prodotto richiede che entrambe le successioni convergano, e b_n può non convergere. Esempio: $\frac{(-1)^n n}{n^2+1} = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$, prodotto di una successione limitata per una infinitesima: il limite è 0.

25. Fissato un intorno $]S - \varepsilon; S + \varepsilon[$, per la proprietà (ii) esiste $x \in A$ con $S - \varepsilon < x \le S$; poiché $S \notin A$, $x \ne S$. Ogni intorno di S contiene dunque un punto di A diverso da S. Esempio con $S \in A$: $A = [0; 1] \cup \{5\}$ ha $\sup A = 5$, punto isolato.

26. a) $|r_{n+1} - \varphi| = |\frac{1}{r_n} - \frac{1}{\varphi}| = \frac{|\varphi - r_n|}{r_n \varphi} \le \frac{|r_n - \varphi|}{\varphi}$, perché $r_n \ge 1$. b) Applicando a) $n - 1$ volte, $|r_n - \varphi| \le \frac{|r_1 - \varphi|}{\varphi^{n-1}}$. Poiché $\frac{1}{\varphi} \approx 0{,}618 < 1$, $(\frac{1}{\varphi})^{n-1} \to 0$; per il confronto $|r_n - \varphi| \to 0$, cioè $r_n \to \varphi$.

27. a) Discese: $2 + 1{,}2 + 0{,}72 + \ldots$; salite: $1{,}2 + 0{,}72 + \ldots$. Totale $2 + 2 \cdot \frac{1{,}2}{1 - 0{,}6} = 2 + 6 = 8$ m. b) Dopo n rimbalzi l'altezza è $2 \cdot 0{,}6^n$; $2 \cdot 0{,}6^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}6} \approx 10{,}37$: dopo 11 rimbalzi ($2 \cdot 0{,}6^{11} \approx 0{,}0073$ m; dopo 10 è circa 0,0121 m).

28. a) $Q_1 = 100$, $Q_{n+1} = 0{,}3\, Q_n + 100$: $Q_2 = 130$, $Q_3 = 139$ mg. b) $Q_n = 100(1 + 0{,}3 + \ldots + 0{,}3^{n-1}) = 100 \cdot \frac{1 - 0{,}3^n}{0{,}7}$, e $Q_n \to \frac{100}{0{,}7} \approx 142{,}9$ mg.

29. Il lato del quadrato successivo è $\frac{1}{\sqrt{2}}$ volte il precedente, l'area la metà. Aree: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$. Perimetri: $4 + \frac{4}{\sqrt{2}} + 2 + \ldots = \frac{4}{1 - 1/\sqrt{2}} = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}66$.

30. a) A ogni passo ogni lato è sostituito da 4 segmenti lunghi $\frac{1}{3}$ del lato: il perimetro è moltiplica-

to per $\frac{4}{3}$, quindi $P_n = P_0(\frac{4}{3})^n \to +\infty$. b) Al passo k si aggiunge l'area $3 \cdot 4^{k-1} \cdot \frac{A_0}{9^k} = \frac{A_0}{3}(\frac{4}{9})^{k-1}$. La somma di tutte le aggiunte è $\frac{A_0/3}{1 - 4/9} = \frac{3}{5}A_0$, e l'area tende a $A_0 + \frac{3}{5}A_0 = \frac{8}{5}A_0$: una figura di perimetro infinito racchiude un'area finita.

31. a) Il rapporto tende a $\frac{1}{4}$ (0,2599; 0,2524; 0,2506; ...): l'errore si riduce di circa quattro volte a ogni passo. b) $2 - a_{10} \approx 2{,}35 \cdot 10^{-6}$, $2 - a_{11} \approx 5{,}88 \cdot 10^{-7}$: il più piccolo è $n = 11$. c) Il foglio di calcolo lavora con circa 15 cifre significative: quando $2 - a_n$ scende sotto 10^{-15} circa, a_n è memorizzato come 2.

32. Dividendo per n^2 il limite è $\frac{k}{2}$; $\frac{k}{2} = 4 \Leftrightarrow k = 8$. Nella seconda successione, per $k > 0$ il termine dominante è $\frac{k\,n^3}{2n^2} = \frac{k\,n}{2} \to +\infty$; per $k = 0$ si ha $\frac{3n}{2n^2 - 1} \to 0$; per $k < 0$ diverge a $-\infty$. Quindi diverge a $+\infty$ se e solo se $k > 0$.

33. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: crescente. $0 < a_n < 1$: limitata. L'estremo inferiore è il primo termine $\frac{1}{2}$, che è il minimo; l'estremo superiore è $\lim a_n = 1$ (teorema delle successioni monotone), che non è un massimo.

34. a) *Passo base:* $a_1 = 2$. *Passo induttivo:* se $2 \le a_n < 3$, allora $\frac{3}{a_n} \in]1;\ \frac{3}{2}]$ e

$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} \in [\frac{5}{2};\ 3[\subset [2;\ 3[$. b)

$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^{\,2} + 4a_n - 3}{a_n} = -\frac{(a_n - 1)(a_n - 3)}{a_n} > 0$ per $1 < a_n < 3$. c) La successione è crescente e limitata, quindi converge a L con $2 \le L \le 3$; da $L = 4 - \frac{3}{L}$: $L^2 - 4L + 3 = 0$, $L = 1$ oppure $L = 3$. Poiché $L \ge 2$, $L = 3$. (Termini: 2; 2,5; 2,8; 2,929; 2,976; ...)

35. È una serie geometrica di ragione $2x$: converge per $|2x| < 1$ con somma $\frac{1}{1 - 2x}$.

$\frac{1}{1 - 2x} = 3 \Leftrightarrow 1 - 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, e $|\frac{2}{3}| < 1$: accettabile.