Matematica 4 · Parte V · Calcolo combinatorio e probabilità · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte V · pagine 445–446 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte V · Calcolo combinatorio e probabilità

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica, ma dai prima ogni probabilità in forma di frazione e arrotonda solo alla fine. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 13)* Alla fine di una riunione 12 persone si salutano: ognuna stringe la mano a ciascuna delle altre esattamente una volta. Quante sono le strette di mano?
   - **A.** 66
   - **B.** 132
   - **C.** 144
   - **D.** 24

2. ● *(0,5 punti · cap. 13)* Nello sviluppo di $(a-b)^5$ il coefficiente del termine a^2b^3 è:
   - **A.** 10
   - **B.** −10
   - **C.** 20
   - **D.** −5

3. ●● *(0,5 punti · cap. 14)* Da un mazzo di 40 carte (4 semi da 10 carte) se ne estraggono contemporaneamente 2. La probabilità che siano entrambe di coppe è:
   - **A.** $\frac{1}{16}$
   - **B.** $\frac{1}{4}$
   - **C.** $\frac{3}{52}$
   - **D.** $\frac{9}{160}$

4. ●● *(0,5 punti · cap. 15)* Due eventi A e B sono incompatibili e hanno $p(A) > 0$ e $p(B) > 0$. Allora:
   - **A.** A e B sono indipendenti
   - **B.** $p(A\mid B) = p(A)$
   - **C.** A e B sono eventi contrari
   - **D.** A e B sono dipendenti

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 13)* a) Quanti anagrammi, anche privi di significato, ha la parola PARABOLA? b) Quanti di essi cominciano e finiscono con la lettera A? c) Risolvi l'equazione $D_{n,2} + C_{n,2} = 45$ nell'incognita naturale n.

6. ●● *(1 punto · cap. 13)* Considera lo sviluppo di $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ con $x \neq 0$. a) Scrivi il termine generale. b) Trova il termine che non contiene x. c) Trova il coefficiente di x^3.

7. ●● *(1 punto · cap. 14)* Un'urna contiene 6 palline rosse e 4 blu. a) Si estraggono contemporaneamente 3 palline: calcola la probabilità di ottenere esattamente 2 rosse e la probabilità di ottenere almeno una blu. b) Si estraggono invece 3 palline una alla volta, rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta: qual è ora la probabilità di ottenere esattamente 2 rosse?

8. ●● *(1 punto · cap. 14)* Una cestista realizza un tiro libero con probabilità 0,7, indipendentemente dagli altri tiri (dati inventati). Tira 5 tiri liberi. a) Calcola la probabilità che ne realizzi esattamente 4. b) Calcola la probabilità che ne sbagli almeno uno. c) È più probabile che ne realizzi esattamente 3 o esattamente 4?

Problemi

9. ●● *(1,5 punti · cap. 15)* Un test per una malattia ha sensibilità 80% e specificità 98%; nella popolazione in cui si usa la prevalenza della malattia è 4% (dati inventati). a) Costruisci la tabella delle frequenze naturali per 10 000 persone (malati e sani, positivi e negativi). b) Calcola il valore predittivo positivo $p(M|+)$ e il valore predittivo negativo $p(\overline{M}|-)$. c) Lo stesso test si usa in un gruppo a rischio, con prevalenza 20%: quanto vale ora $p(M|+)$? Spiega in una frase perché il risultato cambia.

10. ●● *(1 punto · cap. 13)* **Dimostrazione.** Dimostra che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale l'identità $C_{n,2} + C_{n+1,2} = n^2$. Verificala per $n = 5$ leggendo i due coefficienti nel triangolo di Tartaglia.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 14–15)* a) Quante volte, come minimo, bisogna lanciare un dado equilibrato perché la probabilità di ottenere almeno un 6 superi 0,9? b) In una scatola ci sono due monete: una equilibrata e una truccata, con testa su entrambe le facce. Si sceglie una moneta a caso e la si lancia 3 volte, ottenendo sempre testa. Qual è la probabilità che sia la moneta truccata? c) Quante teste consecutive, come minimo, servono perché questa probabilità raggiunga il 99%?

Soluzioni

1. A. Una stretta di mano è una coppia non ordinata di persone: $C_{12,2} = 12 \cdot 11 : 2 = 66$. (132 conta ogni stretta due volte.)

2. B. Il termine generale è $C_{5,k}\, a^{5-k}(-b)^k$; per $k = 3$: $C_{5,3} \cdot (-1)^3 = -10$.

3. C. Casi favorevoli $C_{10,2} = 45$, casi possibili $C_{40,2} = 780$: $p = \frac{45}{780} = \frac{3}{52} \approx 0{,}058$.

4. D. Se A e B sono incompatibili, $p(A \cap B) = 0$, mentre $p(A) \cdot p(B) > 0$: il prodotto non vale, quindi sono dipendenti (infatti $p(A|B) = 0 \neq p(A)$). Non sono necessariamente contrari: la loro unione può non essere Ω.

5. a) PARABOLA ha 8 lettere, con A ripetuta 3 volte e le altre (P, R, B, O, L) tutte diverse: $8! : 3! = 40\,320 : 6 = 6720$. b) Fissate due A agli estremi, restano al centro le 6 lettere P, R, B, O, L, A, tutte diverse: $6! = 720$. c) Con $n \geq 2$: $n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = 45$, cioè $\frac{3}{2}n(n-1) = 45$, $n^2 - n - 30 = 0$, $n = 6$ (la radice -5 non è accettabile). Verifica: $30 + 15 = 45$.

6. a) $C_{6,k}\,(2x)^{6-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \cdot C_{6,k} \cdot 2^{6-k}\, x^{6-3k}$, con $k = 0, 1, \ldots, 6$. b) $6 - 3k = 0$ per $k = 2$: $C_{6,2} \cdot 2^4 = 15 \cdot 16 = 240$. c) $6 - 3k = 3$ per $k = 1$: $-6 \cdot 2^5 = -192$; il termine è $-192x^3$.

7. a) Casi possibili $C_{10,3} = 120$. Esattamente 2 rosse: $C_{6,2} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 60$, $p = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. Almeno una blu: evento contrario «tutte rosse», $C_{6,3} = 20$, quindi $p = 1 - \frac{20}{120} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$. b) Con reimmissione le estrazioni sono prove indipendenti con $p(\text{rossa}) = 0{,}6$: $C_{3,2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = \frac{54}{125} = 0{,}432$.

8. Schema di Bernoulli con $n = 5$, $p = 0{,}7$. a) $p_5(4) = C_{5,4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 5 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015 \approx 36{,}0\%$. b) Il contrario è «5 canestri su 5»: $1 - 0{,}7^5 = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193 \approx 83{,}2\%$. c) $p_5(3) = C_{5,3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = 10 \cdot 0{,}343 \cdot 0{,}09 = 0{,}3087 < 0{,}36015$: è più probabile realizzarne esattamente 4 (che è anche il numero più probabile di successi).

9. a) Su 10 000 persone: malati 400, di cui positivi $400 \cdot 0{,}8 = 320$ e negativi 80; sani 9600, di cui positivi $9600 \cdot 0{,}02 = 192$ e negativi 9408. Positivi in tutto 512, negativi 9488. b) $p(M|+) = \frac{320}{512} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$; $p(\overline{M}|-) = \frac{9408}{9488} = \frac{588}{593} \approx 99{,}2\%$. c) Malati 2000, positivi 1600; sani 8000, falsi positivi 160: $p(M|+) = \frac{1600}{1760} = \frac{10}{11} \approx 90{,}9\%$. Sensibilità e specificità sono le stesse, ma cambia la probabilità a priori: con una prevalenza più alta i veri positivi crescono rispetto ai falsi positivi, quindi un positivo è più spesso un malato.

10. Dalla formula $C_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2}$ si ha $C_{n+1,2} = \frac{(n+1)n}{2}$. Sommando: $\frac{n(n-1) + n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1+n+1)}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2$. c.v.d. (Per $n = 1$ vale $0 + 1 = 1$, in accordo con la formula.) Per $n = 5$: nella riga 5 del triangolo di Tartaglia $C_{5,2} = 10$, nella riga 6 $C_{6,2} = 15$, e $10 + 15 = 25 = 5^2$.

11. a) Con n lanci $p(\text{almeno un 6}) = 1 - (5/6)^n$. Serve $(5/6)^n < 0{,}1$, cioè $n > \log 0{,}1 : \log(5/6) \approx 12{,}63$: almeno 13 lanci (con 12 la probabilità è circa 0,888, con 13 circa 0,907). b) Sia T la moneta truccata ed E quella equilibrata, con $p(T) = p(E) = 1/2$. Tre teste hanno probabilità 1 con T e $(1/2)^3 = 1/8$ con E. Per la formula di Bayes $p(T|\text{3 teste}) = \frac{1/2}{1/2 + 1/16} = \frac{8}{9} \approx 88{,}9\%$. c) Con k teste, allo stesso modo, $p(T|k \text{ teste}) = \frac{1/2}{1/2 + 1/2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^k + 1}$. La condizione $2^k : (2^k + 1) \geq 0{,}99$ equivale a $2^k \geq 99$, cioè $k \geq 7$: servono 7 teste consecutive (con 6 si ha $64/65 \approx 98{,}5\%$, con 7 si ha $128/129 \approx 99{,}2\%$).