Verifica di fine parte IV · Geometria dello spazio

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi, disegna a parte in vera forma i triangoli che usi e controlla le soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio. Nel cubo $ABCDEFGH$ la base è $ABCD$ e i vertici E, F, G, H stanno rispettivamente sopra A, B, C, D (Figura V4.1).

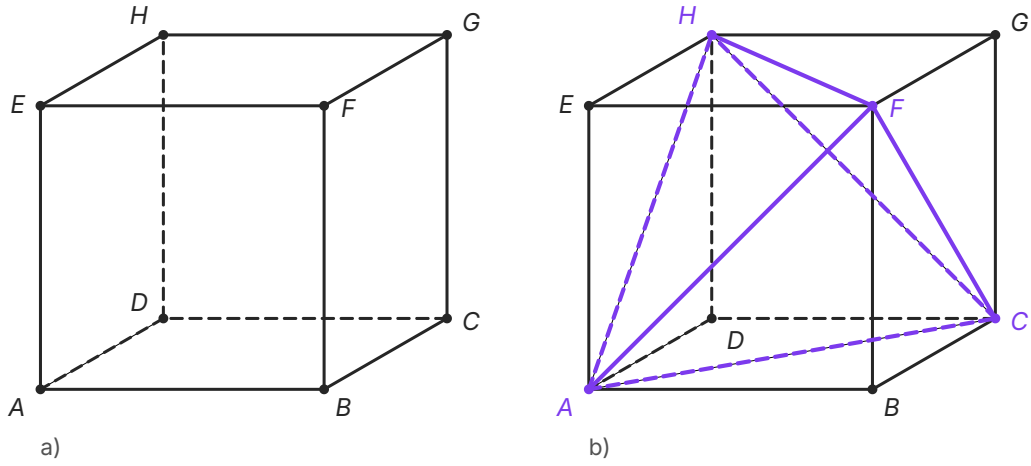


Figura V4.1 a) Il cubo $ABCDEFGH$ in assonometria cavaliera; gli spigoli nascosti AD, DC, DH sono tratteggiati. b) Il tetraedro $ACFH$ inscritto nel cubo: i suoi spigoli sono diagonali di faccia, e sono tratteggiati quelli che stanno su facce nascoste (AC, AH, CH).

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 10)* Nel cubo $ABCDEFGH$ le rette BD e FG sono:
   - **A.** incidenti
   - **B.** parallele
   - **C.** sghembe e ortogonali
   - **D.** sghembe, e formano un angolo di 45°

2. ● *(0,5 punti · cap. 11)* Un poliedro convesso ha 12 vertici e 30 spigoli. Il numero delle sue facce è:

   A. 18

   B. 20

   C. 22

   D. 40

3. ● *(0,5 punti · cap. 12)* Un cono e un cilindro hanno basi congruenti e lo stesso volume. L'altezza del cono è:

   A. un terzo di quella del cilindro

   B. uguale a quella del cilindro

   C. il triplo di quella del cilindro

   D. nove volte quella del cilindro

4. ●● *(0,5 punti · cap. 11)* Una sfera di raggio 13 cm è tagliata da un piano secondo un cerchio di raggio 5 cm. La distanza del piano dal centro della sfera è:

   A. 12 cm

   B. 8 cm

   C. $\sqrt{194}$ cm

   D. 18 cm

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 10)* Nel cubo $ABCDEFGH$ di spigolo 4 cm (Figura V4.1 a): a) spiega perché le rette AF e BG sono sghembe e calcola l'angolo che formano; b) calcola la distanza del vertice E dalla diagonale di base BD, giustificando la costruzione con il teorema delle tre perpendicolari.

6. ●● *(1 punto · cap. 11)* Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 8 cm e lo spigolo laterale di 9 cm. Calcola l'apotema, l'altezza, l'area totale e l'ampiezza del diedro che ogni faccia laterale forma con la base (al centesimo di grado).

7. ●● *(1 punto · cap. 11–12)* Un tronco di cono ha i raggi delle basi di 9 cm e 4 cm e l'altezza di 12 cm. Calcola l'apotema, l'area totale e il volume, in forma esatta e approssimata.

8. ●● *(1 punto · cap. 11–12)* Una superficie sferica ha area 144π cm^2. a) Calcola il raggio e il volume della sfera. b) Un piano dista 3 cm dal centro: calcola il raggio del cerchio di sezione e il volume del segmento sferico minore che il piano stacca dalla sfera.

Problemi

9. ●● *(1 punto · cap. 11–12)* Un silo per cereali (dati inventati) è formato da un cilindro di diametro 4 m e altezza 6 m e, sotto, da una tramoggia a forma di cono con la stessa base del cilindro, alta 1,5 m e con il vertice in basso. a) Calcola la capacità del silo in m^3. b) Quante tonnellate di grano contiene quando è pieno, se il grano ha una densità apparente di 0,75 t/m^3? c) Quanti metri quadrati di lamiera servono per la parete cilindrica e per la tramoggia?

10. ●● *(1 punto · cap. 11–12)* Un cono alto 16 cm è inscritto in una sfera di raggio 10 cm. Calcola il raggio di base, l'apotema e la superficie laterale del cono; poi calcola quale frazione del volume della sfera è occupata dal cono.

11. ●● *(1 punto · cap. 10)* **Dimostrazione.** Enuncia il teorema delle tre perpendicolari, con ipotesi e tesi, e dimostralo. Poi applicalo: il quadrato $ABCD$ ha il lato di 8 cm e il punto P, che dista 6 cm dal piano del quadrato, ha per proiezione ortogonale il centro O del quadrato. Detto M il punto medio di AB, dimostra che $PM \perp AB$ e calcola la distanza di P dalla retta AB.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 10–12)* Nel cubo $ABCDEFGH$ di spigolo 6 cm (Figura V4.1 b) i vertici A, C, F, H sono i vertici di un tetraedro. a) Dimostra che il tetraedro $ACFH$ è un poliedro regolare e calcolane lo spigolo. b) Calcolane il volume, osservando che si ottiene dal cubo togliendo quattro piramidi congruenti. c) Calcola l'altezza del tetraedro, cioè la distanza di un vertice dal piano della faccia opposta, e verifica che è uguale ai $\frac{2}{3}$ della diagonale del cubo.

Soluzioni

1. D. La retta FG è parallela a BC. Le rette BD e FG non hanno punti in comune (stanno nei piani paralleli delle due basi) e non sono parallele, perché BD non è parallela a BC: sono sghembe. Il loro angolo è quello fra BD e la parallela BC, cioè $\angle CBD = 45°$, l'angolo fra la diagonale e il lato di un quadrato.

2. B. Per la relazione di Eulero $F = 2 - V + S = 2 - 12 + 30 = 20$ (è il caso dell'icosaedro).

3. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h_{\text{cono}} = \pi r^2 h_{\text{cil}}$ dà $h_{\text{cono}} = 3h_{\text{cil}}$.

4. A. Il raggio della sezione è $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$, quindi $d = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.

5. a) Se esistesse un piano contenente AF e BG, conterrebbe i punti non allineati A, B, F, cioè sarebbe il piano della faccia $ABFE$; ma G non sta in quella faccia. Le rette quindi non sono complanari: sono sghembe. Nel rettangolo $ABGH$ si ha $BG \parallel AH$, quindi l'angolo cercato è $\angle FAH$: il triangolo AFH ha per lati tre diagonali di faccia lunghe $4\sqrt{2}$ cm, è equilatero e l'angolo misura 60° (0,5 punti). b) Sia O il centro della base. Poiché EA è perpendicolare alla base e, nella base, $AO \perp BD$ (le diagonali di un quadrato sono perpendicolari), per il teorema delle tre perpendicolari $EO \perp BD$: la distanza è EO. Il triangolo EAO è rettangolo in A, con $AO = 2\sqrt{2}$ cm: $EO = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$ cm (0,5 punti).

6. Siano V il vertice, H il centro della base, K il punto medio dello spigolo di base AB. Il lato di base è $s = 8$ cm, quindi $r = 4$ cm e $R = 4\sqrt{2}$ cm (raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta alla base). Nel triangolo VKB (metà di una faccia laterale): $a = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ cm. Nel triangolo VHK: $h = \sqrt{65 - 16} = 7$ cm (controllo: $h^2 + R^2 = 49 + 32 = 81 = 9^2$). $S_l = p \cdot a = 16\sqrt{65} \approx 129{,}0$ cm^2, $S_t = 64 + 16\sqrt{65} \approx 193{,}0$ cm^2. La sezione normale del diedro è $\angle VKH$: $\text{tg}\,\angle VKH = \frac{7}{4}$, quindi il diedro misura circa 60,26°.

7. $a = \sqrt{12^2 + (9-4)^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.
$S_l = \pi(9 + 4) \cdot 13 = 169\pi$ cm^2,
$S_t = 169\pi + 81\pi + 16\pi = 266\pi \approx 835{,}7$ cm^2.
$V = \frac{\pi \cdot 12}{3}(81 + 36 + 16) = 4\pi \cdot 133 = 532\pi \approx 1671{,}3$ cm^3. Controllo come differenza di due coni: il cono completo ha altezza $H = \frac{12 \cdot 9}{9 - 4} = 21{,}6$ cm, e $\frac{\pi}{3}(81 \cdot 21{,}6 - 16 \cdot 9{,}6) = \frac{\pi}{3} \cdot 1596 = 532\pi$ ✓.

8. a) $4\pi r^2 = 144\pi$, $r = 6$ cm;
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \approx 904{,}8$ cm^3 (0,4 punti). b) $\rho = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ cm. Il segmento minore ha altezza $h = 6 - 3 = 3$ cm:
$V = \pi h^2(R - \frac{h}{3}) = \pi \cdot 9 \cdot (6 - 1) = 45\pi \approx 141{,}4$ cm^3 (0,6 punti). Controllo: il segmento maggiore, di altezza 9 cm, ha volume $\pi \cdot 81 \cdot (6 - 3) = 243\pi$ cm^3, e $45\pi + 243\pi = 288\pi$ ✓.

9. a) Cilindro: $\pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$ m^3; tramoggia: $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}5 = 2\pi$ m^3; capacità $26\pi \approx 81{,}7$ m^3. b) $0{,}75 \cdot 26\pi = 19{,}5\pi \approx 61{,}3$ t. c) Parete cilindrica $2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$ m^2; apotema della tramoggia $\sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m, superficie laterale $\pi \cdot 2 \cdot 2{,}5 = 5\pi$ m^2; in tutto $29\pi \approx 91{,}1$ m^2.

10. Nella sezione assiale il cono è un triangolo isoscele inscritto in un cerchio massimo; per il secondo teorema di Euclide $r^2 = h(2R - h) = 16 \cdot 4 = 64$, $r = 8$ cm. $a = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17{,}89$ cm (controllo con il primo teorema di Euclide: $a^2 = h \cdot 2R = 16 \cdot 20 = 320$).
$S_l = \pi \cdot 8 \cdot 8\sqrt{5} = 64\sqrt{5}\pi \approx 449{,}6$ cm^2. Volume del cono $\frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 16 = \frac{1024}{3}\pi \approx 1072{,}3$ cm^3, volume della sfera $\frac{4000}{3}\pi$ cm^3: la frazione è $\frac{1024}{4000} = \frac{32}{125} = 0{,}256$, cioè il 25,6%.

11. Teorema. Ipotesi: $PH \perp \alpha$; $r \subset \alpha$, $H \notin r$; $K \in r$ e $HK \perp r$. Tesi: $PK \perp r$. *Dimostrazione.* Su r si prendono due punti X e Y simmetrici rispetto a K. Nel piano α la retta HK è perpendicolare a XY nel suo punto medio, quindi ne è l'asse e $HX = HY$. Poiché $PH \perp \alpha$, i triangoli PHX e PHY sono rettangoli in H, hanno il cateto PH in comune e i cateti HX e HY congruenti: sono congruenti, e $PX = PY$. Il triangolo PXY è isoscele sulla base XY e la mediana PK è anche altezza: $PK \perp r$. c.v.d. (0,7 punti). Applicazione: OM congiunge il centro del quadrato con il punto medio di un lato, è parallelo ad AD e quindi $OM \perp AB$, con $OM = 4$ cm; inoltre PO è perpendicolare al piano del quadrato e O non sta su AB. Per il teorema, $PM \perp AB$, e la distanza di P da AB è $PM = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm (0,3 punti).

12. a) I sei spigoli AC, AF, AH, CF, CH, FH sono diagonali di facce del cubo, tutte lunghe $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm. Le quattro facce sono quindi triangoli equilateri congruenti e in ogni vertice ne concorrono tre: il tetraedro è regolare (0,3 punti). b) Togliendo il tetraedro dal cubo restano quattro piramidi con i vertici in B, D, E, G; per esempio quella di vertice B ha per base il triangolo rettangolo ABC, di area 18 cm^2, e altezza $BF = 6$ cm, quindi volume $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ cm^3. Le quattro piramidi sono congruenti, e il volume del tetraedro è $216 - 4 \cdot 36 = 72$ cm^3, cioè un terzo del cubo (0,3 punti). c) Una faccia ha area $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}$ cm^2. Poiché il volume è un terzo dell'area di una faccia per l'altezza relativa, $h = \frac{3 \cdot 72}{18\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm. La diagonale del cubo è $6\sqrt{3}$ cm e $\frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ✓ (0,4 punti). (Il piano CFH è perpendicolare alla diagonale AG, come il piano BDE, e la taglia a due terzi da A.)