Matematica 4 · Parte III · Numeri complessi ed equazioni polinomiali · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 275–276 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Numeri complessi ed equazioni polinomiali

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: lascia i risultati in forma esatta. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione; un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Il numero $i^{45} + i^{46} + i^{47}$ è uguale a:
   - **A.** 1
   - **B.** −1
   - **C.** −i
   - **D.** 0

2. ●● *(0,5 punti · cap. 7)* Nel piano di Gauss, posto $z = x + iy$, il luogo dei punti tali che $|z - 2i| = |z + 2|$ è:
   - **A.** la circonferenza di centro −2 e raggio 2
   - **B.** la retta di equazione $y = x$
   - **C.** l'asse reale
   - **D.** la retta di equazione $y = -x$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 8)* La forma trigonometrica di $z = -1 - \sqrt{3}\,i$, con l'argomento principale in $]-\pi; \pi]$, è:
   - **A.** $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$
   - **B.** $2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{3})]$
   - **C.** $2[\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(-\frac{2\pi}{3})]$
   - **D.** $4[\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(-\frac{2\pi}{3})]$

4. ●● *(0,5 punti · cap. 9)* Un polinomio di grado 5 a coefficienti reali ha tra le sue radici 2i, radice semplice, e 3, radice doppia. Allora:
   - **A.** ha esattamente tre radici reali, contate con la loro molteplicità
   - **B.** le sue radici in $\mathbb{C}$ sono soltanto 2i, −2i e 3
   - **C.** ha certamente anche la radice −3
   - **D.** ha altre due radici non reali, oltre a 2i e −2i

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 7)* Dati $z = 3 - 2i$ e $w = 1 + i$, calcola in forma algebrica: a) $(z - \overline{w})^2$; b) $\frac{z}{w}$. c) Calcola $|zw|$ e verifica che è uguale a $|z| \cdot |w|$.

6. ●● *(1 punto · cap. 8)* Scrivi in forma trigonometrica i numeri $\sqrt{3} + i$ e $1 - i$; poi, con la formula di De Moivre, calcola $\frac{(\sqrt{3} + i)^6}{(1 - i)^8}$ e scrivi il risultato in forma algebrica.

7. ●● *(1 punto · cap. 8)* Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$: scrivi le soluzioni in forma trigonometrica e in forma algebrica esatta. Quale figura hanno per vertici nel piano di Gauss? Calcolane l'area.

8. ●● *(1 punto · cap. 9)* È dato il polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 8x - 5$. a) Con il teorema delle radici razionali trova la sua radice razionale. b) Trova tutte le radici in $\mathbb{C}$ e scomponi $P(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}$ e in fattori di primo grado in $\mathbb{C}$. c) Verifica con le formule di Viète la somma e il prodotto delle radici.

9. ●● *(1 punto · cap. 7)* Usando le proprietà del coniugato e l'uguaglianza $|w|^2 = w\overline{w}$, dimostra che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vale $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Interpreta il risultato nel piano di Gauss, pensando al parallelogramma che ha per lati i vettori z_1 e z_2.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 7–8)* Un programma di grafica ha lo strumento «ruota e ingrandisci»: in un riferimento con le coordinate in centimetri, interpretato come piano di Gauss, sposta ogni punto z del disegno nel punto $f(z) = (1 - i)z + 2 + 2i$. a) Spiega perché f è una similitudine diretta; determina l'angolo di rotazione, il rapporto di omotetia e il centro (il punto fisso). b) Trova le immagini dei vertici del triangolo di vertici 0, 4 e $2i$, e confronta l'area del triangolo con quella della sua immagine. c) Scrivi la trasformazione inversa f^{-1}, che riporta il disegno com'era.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 9)* Considera l'equazione $x^3 + 3x^2 = k$, con k parametro reale. a) Determina i valori di k per i quali il polinomio $x^3 + 3x^2 - k$ ha una radice doppia, e risolvi l'equazione in quei casi. b) Discuti, al variare di k, il numero delle soluzioni reali distinte dell'equazione. c) Risolvi l'equazione per $k = 2$, verificando che le soluzioni rispettano la tua discussione.

Soluzioni

1. B. Le potenze di i si ripetono con periodo 4: $45 = 4 \cdot 11 + 1$, quindi $i^{45} = i$, $i^{46} = i^2 = -1$, $i^{47} = i^3 = -i$. La somma è $i - 1 - i = -1$.

2. D. È il luogo dei punti equidistanti da 2i, cioè (0; 2), e da −2, cioè (−2; 0): l'asse del segmento che li unisce. Con $z = x + iy$: $x^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + y^2$, da cui $-4y + 4 = 4x + 4$, cioè $y = -x$. (Controllo: il punto medio (−1; 1) sta sulla retta.)

3. C. $\rho = \sqrt{1+3} = 2$; il punto $(-1; -\sqrt{3})$ è nel terzo quadrante, quindi l'argomento principale è $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$. L'opzione A è l'errore di chi usa solo $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$: indica il punto opposto $1 + \sqrt{3}\,i$. In D il modulo è sbagliato.

4. A. Il polinomio ha coefficienti reali, quindi anche −2i è radice. Contate con la molteplicità, 2i, −2i, 3, 3 sono quattro radici: la quinta non può essere non reale, perché le radici non reali vengono a coppie di coniugate. Dunque è reale, e le radici reali, contate con molteplicità, sono esattamente tre. B dimentica la quinta radice; C non è garantita (la quinta radice reale può essere qualsiasi); D darebbe sei radici.

5. a) $\overline{w} = 1 - i$, $z - \overline{w} = 2 - i$, $(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$. b) Si moltiplicano numeratore e denominatore per $\overline{w} = 1 - i$:
$\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3 - 3i - 2i + 2i^2}{2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$.
c) $zw = (3-2i)(1+i) = 3 + 3i - 2i + 2 = 5 + i$, $|zw| = \sqrt{26}$; $|z| = \sqrt{13}$, $|w| = \sqrt{2}$, $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{26}$ ✓.

6. $\sqrt{3} + i$: $\rho = 2$, primo quadrante, $\theta = \frac{\pi}{6}$: $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$. $1 - i$: $\rho = \sqrt{2}$, quarto quadrante, $\theta = -\frac{\pi}{4}$: $\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})]$. Per De Moivre: $(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6(\cos\pi + i\,\operatorname{sen}\pi) = -64$; $(1-i)^8 = (\sqrt{2})^8[\cos(-2\pi) + i\,\operatorname{sen}(-2\pi)] = 16$. Il quoziente è $\frac{-64}{16} = -4$: modulo 4, argomento π.

7. $-8 + 8\sqrt{3}\,i$ ha modulo $\sqrt{64 + 192} = 16$ e argomento $\frac{2\pi}{3}$ (secondo quadrante, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Le radici quarte hanno modulo $\sqrt[4]{16} = 2$ e argomenti $\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$;
$z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) = -1 + \sqrt{3}\,i$;
$z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i$;
$z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}\,i$. Sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 2: la diagonale è 4, il lato $2\sqrt{2}$, l'area $(2\sqrt{2})^2 = 8$. (Verifica: $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $(2 + 2\sqrt{3}\,i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}\,i - 12 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$ ✓.)

8. a) Le radici razionali $\frac{p}{q}$ hanno p divisore di −5 e q divisore di 2: candidati $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$.
$P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 4 - 5 = 0$: la radice razionale è $\frac{1}{2}$ (gli altri candidati danno valori non nulli, per esempio $P(1) = 8$, $P(-1) = -12$). b) Con la regola di Ruffini:
$P(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 + 4x + 10) = (2x-1)(x^2 + 2x + 5)$. Il trinomio ha $\frac{\Delta}{4} = 1 - 5 = -4 < 0$: radici $-1 \pm 2i$, coniugate. In $\mathbb{R}$: $(2x-1)(x^2+2x+5)$; in $\mathbb{C}$: $2(x - \frac{1}{2})(x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i)$. c) Somma:
$\frac{1}{2} + (-1 + 2i) + (-1 - 2i) = -\frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$ ✓; prodotto:
$\frac{1}{2} \cdot (1 + 4) = \frac{5}{2} = -\frac{d}{a}$ ✓.

9. Poiché il coniugato di una somma (differenza) è la somma (differenza) dei coniugati:
$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}$,

cioè $|z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$. Allo stesso modo $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$. Sommando membro a membro i termini misti si cancellano e resta $2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. c.v.d. Nel piano di Gauss $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$ sono le due diagonali del parallelogramma costruito sui vettori z_1 e z_2, i cui lati misurano $|z_1|$ e $|z_2|$ (due volte ciascuno): la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati.

10. a) f è del tipo $az + b$ con $a = 1 - \mathrm{i} \neq 0$, quindi è una similitudine diretta.

$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{4})]$: rotazione di $-\frac{\pi}{4}$, cioè di 45° in senso orario, composta con un'omotetia di rapporto $\sqrt{2}$. Punto fisso: $z = (1 - \mathrm{i})z + 2 + 2\mathrm{i}$, $\mathrm{i}z = 2 + 2\mathrm{i}$, $z = \frac{2 + 2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 2 - 2\mathrm{i}$ (verifica: $(1 - \mathrm{i})(2 - 2\mathrm{i}) + 2 + 2\mathrm{i} = -4\mathrm{i} + 2 + 2\mathrm{i} = 2 - 2\mathrm{i}$ ✓); è il centro della similitudine. b) $f(0) = 2 + 2\mathrm{i}$, $f(4) = 4 - 4\mathrm{i} + 2 + 2\mathrm{i} = 6 - 2\mathrm{i}$, $f(2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} + 2 + 2 + 2\mathrm{i} = 4 + 4\mathrm{i}$. Il triangolo di partenza è rettangolo in O con cateti 4 e 2: area 4. Nell'immagine i lati uscenti da $2 + 2\mathrm{i}$ sono $4 - 4\mathrm{i}$ e $2 + 2\mathrm{i}$, perpendicolari (il primo è il secondo moltiplicato per $-2\mathrm{i}$) e lunghi $4\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$: area $\frac{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 8$. Il rapporto delle aree è $2 = |1 - \mathrm{i}|^2$, il quadrato del rapporto di similitudine. c) Da $w = (1 - \mathrm{i})z + 2 + 2\mathrm{i}$:

$$z = \frac{w - 2 - 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}w - \frac{(1 + \mathrm{i})(2 + 2\mathrm{i})}{2} = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}w - 2\mathrm{i}.$$

Quindi $f^{-1}(z) = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}z - 2\mathrm{i}$: rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario e omotetia di rapporto $\frac{\sqrt{2}}{2}$, con lo stesso centro $2 - 2\mathrm{i}$. (Controllo: $f^{-1}(2 + 2\mathrm{i}) = \frac{(1 + \mathrm{i})(2 + 2\mathrm{i})}{2} - 2\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i} = 0$.)

11. a) Cerchiamo $x^3 + 3x^2 - k = (x - \alpha)^2(x - \beta)$. Sviluppando, $(x - \alpha)^2(x - \beta) = x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta$, e per il principio d'identità: $2\alpha + \beta = -3$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta = 0$, $\alpha^2\beta = k$. La seconda dà $\alpha(\alpha + 2\beta) = 0$. Se $\alpha = 0$: $\beta = -3$, $k = 0$, e l'equazione $x^2(x + 3) = 0$ ha la soluzione doppia 0 e la soluzione −3. Se $\alpha = -2\beta$: $-3\beta = -3$, $\beta = 1$, $\alpha = -2$, $k = 4$, e $x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2(x - 1)$: soluzione doppia −2 e soluzione 1. b) Sia $p(x) = x^3 + 3x^2 - k$. *Per* $0 < k < 4$: $p(-3) = -k < 0$, $p(-2) = 4 - k > 0$, $p(0) = -k < 0$, $p(1) = 4 - k > 0$: tre cambiamenti di segno, in $]-3; -2[$, $]-2; 0[$, $]0; 1[$, quindi tre soluzioni reali distinte, e non possono essercene di più. *Per* $k > 4$: $p(x) = (x + 2)^2(x - 1) - (k - 4)$; per $x \leq 1$ il prodotto è $\leq 0 < k - 4$, per $x > 1$ i due fattori sono positivi e crescenti, quindi il prodotto cresce da 0 senza limite e vale $k - 4$ una sola volta: una soluzione reale (e due complesse coniugate). *Per* $k < 0$: l'equazione è $x^2(x + 3) = k$; per $x \geq -3$ il primo membro è $\geq 0 > k$, per $x < -3$ vale $-x^2|x + 3|$, che decresce senza limite al decrescere di x: una soluzione. In sintesi: tre soluzioni reali distinte per $0 < k < 4$; due (una doppia) per $k = 0$ e $k = 4$; una per $k < 0$ o $k > 4$. c) Per $k = 2$: $x = -1$ è radice $(-1 + 3 - 2 = 0)$; Ruffini: $x^3 + 3x^2 - 2 = (x + 1)(x^2 + 2x - 2)$, soluzioni -1, $-1 \pm \sqrt{3}$. Sono tre, come previsto per $0 < 2 < 4$, e cadono negli intervalli trovati: $-1 - \sqrt{3}$ in $]-3; -2[$ (perché $1 < \sqrt{3} < 2$), -1 in $]-2; 0[$, $-1 + \sqrt{3}$ in $]0; 1[$.