Verifica di fine parte II · Funzioni periodiche e trigonometria

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica, impostata in gradi (DEG) o in radianti (RAD) secondo il caso; dove il testo chiede la forma esatta, i risultati vanno lasciati in forma esatta, altrimenti si danno con tre o quattro cifre significative. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione; un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La funzione $y = 3\,\text{sen}(4x + \pi) - 2$ ha:
   - **A.** periodo 8π; grafico di $y = 3\,\text{sen}\,4x - 2$ traslato di π verso sinistra
   - **B.** periodo $\frac{\pi}{2}$; grafico di $y = 3\,\text{sen}\,4x - 2$ traslato di $\frac{\pi}{4}$ verso sinistra
   - **C.** periodo $\frac{\pi}{2}$; grafico di $y = 3\,\text{sen}\,4x - 2$ traslato di π verso sinistra
   - **D.** periodo 8π; grafico di $y = 3\,\text{sen}\,4x - 2$ traslato di $\frac{\pi}{4}$ verso sinistra

2. ● *(0,5 punti · cap. 5)* Quale delle seguenti funzioni *non* è periodica?
   - **A.** $y = \text{sen}\,x + \text{sen}\,2x$
   - **B.** $y = \text{sen}\,2x + \cos 3x$
   - **C.** $y = \text{sen}\,x + \cos(\pi x)$
   - **D.** $y = \text{sen}^2 x$

3. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Un quadrilatero convesso ha le diagonali lunghe 10 cm e 6 cm, che formano un angolo di 30°. La sua area è:
   - **A.** 15 cm^2
   - **B.** 30 cm^2
   - **C.** $15\sqrt{3}$ cm^2
   - **D.** 60 cm^2

4. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Due forze di 30 N e 50 N sono applicate allo stesso punto e formano fra loro un angolo di 60°. L'intensità della risultante è:
   - **A.** 80 N
   - **B.** circa 58,3 N
   - **C.** circa 43,6 N
   - **D.** 70 N

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 5)* Data la funzione $y = 2\,\text{sen}(3x - \frac{\pi}{2}) + 1$: a) indica ampiezza, periodo, frequenza, valore medio, massimo e minimo; b) spiega di quanto e in quale verso va traslato il grafico di $y = 2\,\text{sen}\,3x + 1$ per ottenerne il grafico; c) trova le ascisse di tutti i punti di massimo e di minimo (con $n \in \mathbb{Z}$); d) trova gli zeri della funzione nell'intervallo $[0;\ \frac{2\pi}{3}]$.

6. ●● *(1 punto · cap. 5)* a) Scrivi $y = 3\,\text{sen}\,2x - 3\sqrt{3}\cos 2x$ nella forma $y = R\,\text{sen}(2x + \varphi)$, con $R > 0$ e $\varphi \in\ ]-\pi;\ \pi]$, e trova le ascisse dei suoi massimi. b) Determina il periodo della funzione $y = \text{sen}\,\frac{2x}{3} + \cos\frac{3x}{4}$, motivando la risposta.

7. ●● *(1 punto · cap. 6)* In un triangolo $a = 8$ cm, $b = 11$ cm e $\alpha = 40°$ (α è l'angolo opposto al lato a). Stabilisci quanti triangoli hanno questi dati, confrontando a con l'altezza $h = b\,\text{sen}\,\alpha$, e risolvili tutti (angoli al centesimo di grado, lati al centesimo di centimetro).

8. ●● *(1 punto · cap. 6)* Un triangolo ha i lati $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ (in centimetri). Calcola in forma esatta l'area, il raggio R della circonferenza circoscritta, il raggio r della circonferenza inscritta e la lunghezza della mediana relativa al lato b; poi trova l'angolo maggiore del triangolo.

9. ●● *(1 punto · cap. 6)* Dimostra la formula di Erone $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, dove p è il semiperimetro, partendo da $S = \tfrac{1}{2}\,bc\,\text{sen}\,\alpha$ e dal teorema del coseno. Indica in quale passaggio si usa il fatto che α è un angolo di un triangolo.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 5)* Nel porto di una località costiera il livello dell'acqua (dati inventati) raggiunge l'alta marea di 4,2 m alle ore 3:00 e la bassa marea successiva di 0,6 m alle ore 9:12. Il livello è descritto dal modello $h(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) + k$, con t in ore a partire dalla mezzanotte. a) Determina A, k, il periodo T, la pulsazione ω e la fase $\varphi \in\ ]-\pi;\ \pi]$. b) Un traghetto può entrare nel porto solo se il livello è almeno 3,3 m: in quale intervallo di tempo, fra le 0:00 e le 12:24, può farlo? Per quanto tempo? c) Calcola il tasso medio di variazione del livello nell'intervallo $[6;\ 6{,}2]$ e confrontalo con il prodotto $A\omega$. Spiega perché proprio in quell'intervallo il livello cambia più rapidamente.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 6)* Una semicirconferenza ha diametro $AB = 2r$; un punto P si muove sull'arco e x è l'angolo in A del triangolo APB. a) Esprimi in funzione di x la somma $s(x) = AP + \sqrt{3}\cdot PB$, scrivi le limitazioni di x escludendo i triangoli degeneri e riduci $s(x)$ alla forma $R\,\text{sen}(x + \varphi)$. b) Per quale x si ha $s(x) = 2\sqrt{2}\,r$? c) Per quali x si ha $s(x) \geq 2\sqrt{3}\,r$? d) Discuti, al variare del parametro reale k, quante posizioni di P danno $s(x) = kr$, e indica il valore massimo di s.

Soluzioni

1. B. Il periodo è $2\pi/4 = \pi/2$; raccogliendo la pulsazione, $4x + \pi = 4(x + \pi/4)$: la traslazione è $-\varphi/\omega = -\pi/4$, cioè di $\pi/4$ verso sinistra (non di π).

2. C. I periodi di sen x e di $\cos(\pi x)$ sono 2π e 2, il cui rapporto π è irrazionale: non esiste un multiplo comune e la somma non è periodica. A ha periodo 2π, B ha periodo 2π (minimo comune multiplo di π e $2\pi/3$), D ha periodo π.

3. A. $S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 30° = 15\ \text{cm}^2$.

4. D. $R^2 = 30^2 + 50^2 + 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 60°$ $= 900 + 2500 + 1500 = 4900$, $R = 70$ N. La risposta C usa il segno meno (è la differenza delle due forze), B il teorema di Pitagora, A somma le intensità come se le forze fossero parallele.

5. a) $A = 2$, $\omega = 3$, $T = 2\pi/3$, $f = 3/(2\pi)$, valore medio 1, massimo 3, minimo -1. b) $3x - \pi/2 = 3(x - \pi/6)$: traslazione di $\pi/6$ verso destra. c) Massimi: $3x - \pi/2 = \pi/2 + 2n\pi$, $x = \pi/3 + 2n\pi/3$; minimi: $3x - \pi/2 = 3\pi/2 + 2n\pi$, $x = 2n\pi/3$, con $n \in \mathbb{Z}$. d) $\operatorname{sen}(3x - \pi/2) = -\frac{1}{2}$: $3x - \pi/2 = -\pi/6 + 2n\pi$ oppure $3x - \pi/2 = 7\pi/6 + 2n\pi$, cioè $x = \pi/9 + 2n\pi/3 \vee$ $x = 5\pi/9 + 2n\pi/3$. In $[0; 2\pi/3]$: $x = \pi/9$ e $x = 5\pi/9$. Controllo: la funzione è $1 - 2\cos 3x$, che si annulla per $\cos 3x = \frac{1}{2}$, $3x = \pi/3$ o $3x = 5\pi/3$.

6. a) $R = \sqrt{9 + 27} = 6$; $\cos\varphi = 3/6 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\varphi = -3\sqrt{3}/6 = -\sqrt{3}/2$: φ è nel quarto quadrante, $\varphi = -\pi/3$ (dalla sola $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$ si potrebbe scegliere per errore $2\pi/3$). Quindi $y = 6\operatorname{sen}(2x - \pi/3)$, con massimi per $2x - \pi/3 = \pi/2 + 2n\pi$, cioè $x = 5\pi/12 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (verifica: $3\operatorname{sen}(5\pi/6) - 3\sqrt{3}\cos(5\pi/6) = 3/2 + 9/2 = 6$). b) I periodi degli addendi sono $2\pi/(2/3) = 3\pi$ e $2\pi/(3/4) = 8\pi/3$; il rapporto $3\pi : (8\pi/3) = 9/8$ è razionale, quindi la somma è periodica, con periodo il minimo comune multiplo $8 \cdot 3\pi = 9 \cdot 8\pi/3 = 24\pi$.

7. $h = 11\operatorname{sen}40° \approx 7{,}07$: poiché $h < a < b$ i triangoli sono due. Teorema dei seni: $\operatorname{sen}\beta = 11\operatorname{sen}40°/8 \approx 0{,}8838$, $\beta_1 \approx 62{,}11°$ oppure $\beta_2 \approx 117{,}89°$, entrambi accettabili ($40° + 117{,}89° < 180°$). Primo triangolo: $\gamma_1 \approx 77{,}89°$, $c_1 = 8\operatorname{sen}\gamma_1/\operatorname{sen}40° \approx 12{,}17$ cm. Secondo triangolo: $\gamma_2 \approx 22{,}11°$, $c_2 \approx 4{,}68$ cm. Controllo con il teorema del coseno: $c^2 - 22\cos 40° \cdot c + 121 - 64 = 0$ dà $c = 11\cos 40° \pm \sqrt{(64 - 121\operatorname{sen}^2 40°)} \approx 8{,}426 \pm 3{,}742$, cioè 12,17 e 4,68: due radici positive, perché il loro prodotto $b^2 - a^2 = 57$ è positivo.

8. $p = 12$; $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}\ \text{cm}^2$ (circa $26{,}83\ \text{cm}^2$). $R = abc/(4S) = 504/(48\sqrt{5}) = 21/(2\sqrt{5}) = 21\sqrt{5}/10$ cm (circa 4,70 cm). $r = S/p = 12\sqrt{5}/12 = \sqrt{5}$ cm (circa 2,24 cm). Mediana relativa a b: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 49 + 2 \cdot 81 - 64} = \frac{1}{2}\sqrt{196} = 7$ cm. L'angolo maggiore è γ, opposto al lato maggiore: $\cos\gamma = (49 + 64 - 81)/(2 \cdot 7 \cdot 8) = 32/112 = 2/7$, $\gamma \approx 73{,}40°$ (gli altri due: $\alpha \approx 48{,}19°$, $\beta \approx 58{,}41°$).

9. Dal teorema del coseno $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Poiché α è un angolo di un triangolo, $0 < \alpha < \pi$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$: quindi $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}$ (è il passaggio richiesto) e, elevando al quadrato $S = \frac{1}{2}\, bc\operatorname{sen}\alpha$, $16S^2 = 4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$. Scomponendo la differenza di quadrati: $[a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]$ $= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c)$. Con $a + b + c = 2p$, $b + c - a = 2(p - a)$, $a - b + c = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p - c)$ si ha $16S^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$; dividendo per 16 ed estraendo la radice ($S > 0$) si ottiene la tesi. c.v.d.

10. a) $k = (4{,}2 + 0{,}6)/2 = 2{,}4$ m, $A = (4{,}2 - 0{,}6)/2 = 1{,}8$ m. Da un'alta marea alla bassa marea successiva passano 6 h 12 min = 6,2 h, mezzo periodo: $T = 12{,}4$ h, $\omega = 2\pi/12{,}4 = 5\pi/31$ rad/h (circa 0,507 rad/h). Il massimo in $t = 3$ impone $3\omega + \varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 - 15\pi/31 = \pi/62$. Modello: $h(t) = 1{,}8\operatorname{sen}(5\pi t/31 + \pi/62) + 2{,}4$ (verifica: $h(9{,}2) = 1{,}8\operatorname{sen}(3\pi/2) + 2{,}4 = 0{,}6$). b) $h(t) \geq 3{,}3$ equivale a $\operatorname{sen}(5\pi t/31 + \pi/62) \geq \frac{1}{2}$: nel primo periodo l'argomento va da $\pi/62$ a $2\pi + \pi/62$, e la condizione vale

per $\pi/6 \le 5\pi t/31 + \pi/62 \le 5\pi/6$, cioè $14/15 \le t \le 76/15$: dalle 0:56 alle 5:04, per 4 h 8 min (un terzo del periodo). c) $h(6) \approx 2{,}4912$, $h(6{,}2) \approx 2{,}3088$: tasso medio $\approx (2{,}3088 - 2{,}4912)/0{,}2 \approx -0{,}912$ m/h; $A\omega = 1{,}8 \cdot 5\pi/31 \approx 0{,}912$ m/h. I due valori quasi coincidono in valore assoluto: per $t = 6{,}1$ l'argomento vale π e il livello passa per il valore medio scendendo, e una sinusoide varia più rapidamente proprio quando attraversa il valore medio (come il moto armonico al centro), con velocità di variazione $A\omega$. Per confronto, vicino all'alta marea, in $[2{,}9; 3{,}1]$, il tasso medio è 0.

11. a) L'angolo in P è retto (inscritto in una semicirconferenza): $AP = 2r\cos x$, $PB = 2r \operatorname{sen} x$, con $0 < x < \pi/2$.
$s(x) = 2r\cos x + 2\sqrt{3}\, r \operatorname{sen} x = 4r \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ (angolo aggiunto: $R = r\sqrt{4 + 12} = 4r$, $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen}\varphi = \tfrac{1}{2}$). b) $\operatorname{sen}(x + \pi/6) = \sqrt{2}/2$ con $\pi/6 < x + \pi/6 < 2\pi/3$: solo $x + \pi/6 = \pi/4$ ($3\pi/4 > 2\pi/3$ è esclusa), quindi $x = \pi/12$. c) $\operatorname{sen}(x + \pi/6) \ge \sqrt{3}/2$ nell'intervallo delle limitazioni dà $\pi/3 \le x + \pi/6 < 2\pi/3$, cioè $\pi/6 \le x < \pi/2$. d) Al crescere di x da 0 a $\pi/3$, $s/r = 4 \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ cresce da 2 (escluso) a 4; da $\pi/3$ a $\pi/2$ decresce fino a $4 \operatorname{sen}(2\pi/3) = 2\sqrt{3}$ (escluso). La retta $y = k$ taglia il grafico in: una posizione per $2 < k \le 2\sqrt{3}$; due posizioni per $2\sqrt{3} < k < 4$; una posizione per $k = 4$ ($x = \pi/3$, il massimo $s = 4r$, con $AP = r$ e $PB = \sqrt{3}\, r$); nessuna per $k \le 2$ o $k > 4$. Coerenza con b): $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ sta in $]2; 2\sqrt{3}]$, una soluzione.