Verifica di fine parte I · Goniometria

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: i risultati vanno dati in forma esatta. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* Il valore di $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ è:

   A. $\frac{2\pi}{3}$

   B. $\frac{\pi}{3}$

   C. $-\frac{\pi}{3}$

   D. $\frac{4\pi}{3}$

2. ● *(0,5 punti · cap. 2)* Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, allora $\operatorname{sen} 2\alpha$ vale:

   A. $\frac{24}{25}$

   B. $\frac{7}{25}$

   C. $\frac{6}{5}$

   D. $-\frac{24}{25}$

3. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Le soluzioni dell'equazione $\operatorname{tg} 2x = 1$ sono:

   A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

   B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

   C. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

   D. $x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi$

4. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Nell'intervallo $[0; 2\pi[$ la disequazione $\cos x < \frac{1}{2}$ ha come soluzioni:

   A. $0 \le x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

   B. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

   C. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

   D. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 1)* a) Semplifica l'espressione $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(-\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$. b) Calcola il valore esatto di $\operatorname{sen}(\arccos(-\frac{1}{3}))$.

6. ●● *(1 punto · cap. 2)* Dimostra l'identità $\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$ e indica per quali valori di x ha senso.

7. ●● *(1 punto · cap. 3)* Risolvi l'equazione $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$.

8. ●● *(1 punto · cap. 3)* Risolvi nell'intervallo $[0; 2\pi[$ l'equazione $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x = 1$.

9. ●● *(1 punto · cap. 4)* Risolvi nell'intervallo $[0; 2\pi[$ la disequazione $\frac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} \le 0$.

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 3, 4)* In un porto l'altezza dell'acqua, in metri, segue il modello $h(t) = 3 + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}t)$, con t in ore a partire dalla mezzanotte ($0 \le t \le 24$). Una barca può entrare nel porto solo se l'acqua è alta almeno 4 m. a) In quali fasce orarie della giornata la barca può entrare? Per quante ore in tutto? b) A che ore l'acqua è più bassa, e quanto è alta in quei momenti?

11. ●● *(1 punto · cap. 3, 4)* È data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$; P è un punto dell'arco e $x = \mathrm{P\hat{A}B}$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$. a) Esprimi AP e PB in funzione di x. b) Determina x in modo che $AP + PB = (1 + \sqrt{3})r$. c) Per quali x si ha $AP + PB > (1 + \sqrt{3})r$?

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 3)* Discuti, al variare del parametro reale m, il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} x + \cos x = m$ nell'intervallo $[0; \pi]$.

Soluzioni

1. A. L'arcocoseno ha valori in $[0; \pi]$ e $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$: $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. La C è l'errore di chi tratta l'arcocoseno come una funzione dispari; la D ha il coseno giusto ma è fuori da $[0; \pi]$.

2. D. Nel secondo quadrante il coseno è negativo: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. Quindi $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$.

3. C. $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, e dividendo per 2 anche il periodo si dimezza: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. La A perde metà delle soluzioni (per esempio $\frac{5\pi}{8}$: $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$).

4. B. Sulla circonferenza goniometrica $\cos x = \frac{1}{2}$ per $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$; il coseno è minore di $\frac{1}{2}$ sull'arco che passa per π, cioè per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. La A è l'insieme in cui $\cos x > \frac{1}{2}$.

5. a) Con gli archi associati: $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$. L'espressione diventa $-\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = -1$, per ogni α. b) Posto $\beta = \arccos(-\frac{1}{3})$, si ha $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ e $\beta \in [0; \pi]$, dove il seno non è negativo: $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. L'identità ha senso se $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$, cioè $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Riducendo allo stesso denominatore il primo membro diventa $\frac{\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$. Il numeratore è, per la formula di sottrazione del seno, $\operatorname{sen}(3x - x) = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$; dividendo per $\operatorname{sen} x \cos x$ si ottiene 2. c.v.d. (Controllo: per $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} - \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 + 1 = 2$.)

7. Con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$: $2 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 3 = 0$, cioè $2\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$. Posto $s = \operatorname{sen} x$: $s = 1$ oppure $s = \frac{1}{2}$. Soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Controllo per $x = \frac{\pi}{6}$: $2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 3 = 0$.)

8. Metodo dell'angolo aggiunto: $R = \sqrt{3 + 1} = 2$, e $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 2 \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{6})$, perché $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. L'equazione diventa $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$: $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, cioè $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \pi + 2k\pi$. In $[0; 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \pi$. Verifica: $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 1$; $0 - (-1) = 1$. (Con le formule parametriche la soluzione $x = \pi$ va controllata a parte, perché lì $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ non esiste.)

9. Il denominatore si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, che vanno esclusi. Numeratore: $2 \operatorname{sen} x - 1 \geq 0$ per $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. Denominatore: $\cos x > 0$ per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Dalla tabella dei segni sul periodo, il quoziente è negativo o nullo per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. (Controllo: per $x = \pi$ il quoziente vale $\frac{-1}{-1} = 1 > 0$, escluso; per $x = \frac{2\pi}{3}$ vale $\frac{\sqrt{3} - 1}{-1/2} < 0$, incluso.)

10. a) $3 + 2\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}t) \geq 4$ equivale a $\text{sen}(\frac{\pi}{6}t) \geq \frac{1}{2}$, cioè $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6}t \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ossia $1 + 12k \leq t \leq 5 + 12k$. Nella giornata ($k = 0$ e $k = 1$): dall'1 alle 5 e dalle 13 alle 17, in tutto 8 ore. b) Il minimo si ha per $\text{sen}(\frac{\pi}{6}t) = -1$, cioè $\frac{\pi}{6}t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $t = 9 + 12k$: alle 9 e alle 21, con l'acqua alta $3 - 2 = 1$ m.

11. a) Il triangolo APB è inscritto in una semicirconferenza, quindi è rettangolo in P: $AP = 2r\cos x$, $PB = 2r\,\text{sen}\,x$. b) $2(\text{sen}\,x + \cos x) = 1 + \sqrt{3}$. Con l'angolo aggiunto, $\text{sen}\,x + \cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{4})$, quindi $\text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{12}$. Poiché $\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, le soluzioni sono $x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ e $x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$: $x = \frac{\pi}{6}$ oppure $x = \frac{\pi}{3}$, le due posizioni simmetriche di P. (Controllo per $x = \frac{\pi}{6}$: $2r(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) = (1 + \sqrt{3})r$.) c) $\text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) > \text{sen}\,\frac{5\pi}{12}$ con l'argomento in $]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$: $\frac{5\pi}{12} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{12}$, cioè $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

12. Si scrive $\text{sen}\,x + \cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{4})$. Posto $t = x + \frac{\pi}{4}$, quando x percorre $[0; \pi]$ l'angolo t percorre $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$, e si contano le intersezioni del grafico di $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t$ su questo intervallo con la retta $y = m$. Il grafico parte da $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, sale al massimo $\sqrt{2}$ per $t = \frac{\pi}{2}$ e scende fino a $\sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$ per $t = \frac{5\pi}{4}$. Quindi: per $m < -1$ o $m > \sqrt{2}$ nessuna soluzione; per $-1 \leq m < 1$ una soluzione (sul tratto discendente); per $1 \leq m < \sqrt{2}$ due soluzioni; per $m = \sqrt{2}$ una sola soluzione, $x = \frac{\pi}{4}$. (Controllo: per $m = 1$ le soluzioni sono $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$; per $m = -1$ solo $x = \pi$.)