CAPITOLO

13

Il calcolo combinatorio

Contare non è elencare: è trovare la domanda giusta (conta l'ordine? si può ripetere?) e lasciare che una moltiplicazione faccia il resto. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Applicare il principio fondamentale del calcolo combinatorio, il principio della somma e il conteggio per complemento, anche con i diagrammi ad albero.
2. Riconoscere e contare disposizioni, permutazioni e combinazioni, semplici e con ripetizione.
3. Calcolare e semplificare espressioni con il fattoriale e con i coefficienti binomiali.
4. Dimostrare le proprietà dei coefficienti binomiali, contando e con l'algebra, e leggerle nel triangolo di Tartaglia.
5. Sviluppare la potenza di un binomio con la formula di Newton e trovarne un termine qualsiasi.
6. Scegliere il modello adatto in un problema di conteggio ed evitare di contare due volte lo stesso oggetto.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Il problema del contare 2
13.2 Disposizioni e permutazioni 4
13.3 Combinazioni 9
13.4 Le proprietà dei coefficienti binomiali 11
13.5 Il binomio di Newton 14
13.6 Come scegliere il modello 17

Matematica 4 · Parte V · Calcolo combinatorio e probabilità · versione 1.0
Capitolo 13: Il calcolo combinatorio · pagine 367–390 del volume completo · estratto per lo studio

Quante password di otto caratteri si possono scrivere? In quanti modi si può comporre una squadra di cinque giocatori scegliendo tra dodici compagni? Quanti sono i possibili ordini di arrivo di una gara? Domande come queste chiedono di *contare*, e a prima vista sembrano facili: basterebbe elencare tutti i casi e numerarli. Ma i casi diventano presto troppi. Le password di otto caratteri scelti tra lettere minuscole e cifre sono più di duemila miliardi, e nessuno potrebbe scriverle tutte; eppure sapremo contarle con una sola moltiplicazione.

Il **calcolo combinatorio** è l'insieme dei metodi che permettono di contare gli elementi di un insieme finito senza elencarli uno per uno. In questo capitolo partiremo da un unico principio, quello della moltiplicazione delle scelte, e ne ricaveremo poche formule: le disposizioni, le permutazioni e le combinazioni. Scopriremo che i numeri che contano le combinazioni, i coefficienti binomiali, formano il triangolo di Tartaglia e sono gli stessi che compaiono nello sviluppo della potenza di un binomio. Il capitolo serve anche da fondamento ai due successivi: calcolare una probabilità, nella definizione classica, significa contare i casi favorevoli e i casi possibili.

13.1 Il problema del contare

13.1.1 Il principio fondamentale

Una mensa scolastica propone ogni giorno 3 primi, 4 secondi e 2 dessert, e ogni studente compone il proprio pasto scegliendo un piatto per tipo. Quanti pasti diversi sono possibili? Per ciascuno dei 3 primi ci sono 4 secondi possibili, quindi le coppie primo–secondo sono $3 \cdot 4 = 12$; ciascuna di queste coppie si completa in 2 modi con il dessert, e i pasti sono $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$. Lo schema del ragionamento è sempre lo stesso: la scelta avviene per *tappe* successive, e ciò che si moltiplica è il numero di possibilità di ciascuna tappa.

IN SINTESI

Principio fondamentale del calcolo combinatorio. Se una scelta si compie in k tappe successive e, qualunque cosa si sia scelto nelle tappe precedenti, la prima tappa offre n_1 possibilità, la seconda n_2, …, la k-esima n_k, allora il numero delle scelte complessive è

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Conta il *numero* di possibilità di ogni tappa, non quali siano: le opzioni concrete possono dipendere dalle scelte già fatte, il loro numero no.

Il **principio fondamentale del calcolo combinatorio**, detto anche *principio di moltiplicazione*, si visualizza con un **diagramma ad albero**, che hai già usato in *Matematica 2* per le probabilità. Da una radice partono tanti rami quante sono le possibilità della prima tappa; dall'estremo di ciascun ramo partono i rami della seconda tappa, e così via. Ogni percorso dalla radice a una foglia è una scelta completa, e le foglie si contano moltiplicando.

Nella Figura 13.1 quattro studenti, Anna, Bruno, Carla e Dario (indicati con le iniziali), devono eleggere tra loro un presidente e un segretario del comitato studentesco, due persone diverse. Il presidente si può scegliere in 4 modi; scelto il presidente, il segretario va scelto tra i 3 rimasti. Le coppie ordinate (presidente; segretario) sono $4 \cdot 3 = 12$. Osserva che i 3 candidati segretari cambiano da un ramo all'altro (se il presidente è C, il segretario è A, B o D), ma sono sempre 3: è proprio la situazione prevista dal principio.

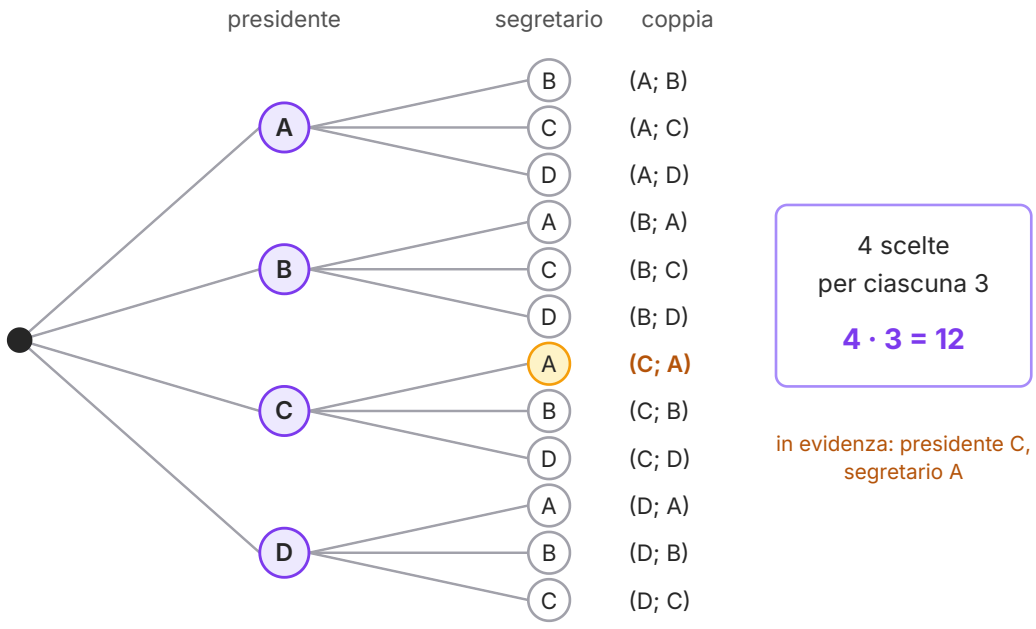


Figura 13.1 Diagramma ad albero per la scelta di un presidente e di un segretario tra quattro persone A, B, C, D. Ogni foglia è una coppia ordinata: le foglie sono $4 \cdot 3 = 12$. In evidenza la scelta (C; A).

Con lo stesso principio contiamo i codici di un armadietto formati da due lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere) seguite da tre cifre: ogni lettera si sceglie in 26 modi e ogni cifra in 10 modi, quindi i codici sono $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676\,000$. Qui le tappe sono indipendenti: le possibilità di una tappa non dipendono affatto da quelle precedenti.

13.1.2 Somma di casi e conteggio per complemento

Spesso conviene dividere gli oggetti da contare in casi che non si sovrappongono. Se un insieme è l'unione di due insiemi *disgiunti*, il numero dei suoi elementi è la somma dei numeri degli elementi delle due parti: è il **principio della somma**. Per esempio, i codici formati da 2 oppure da 3 lettere sono $26^2 + 26^3 = 676 + 17\,576 = 18\,252$: un codice non può avere insieme due e tre lettere, quindi nessun codice è contato due volte.

Altre volte è più facile contare ciò che *non* vogliamo. Se A è un sottoinsieme di un insieme finito U, gli elementi di U che non stanno in A sono il numero degli elementi di U meno quello degli elementi di A: è il **conteggio per complemento**. Quanti PIN di 4 cifre hanno almeno una cifra ripetuta? Contarli direttamente richiede molti casi (una cifra ripetuta due volte, due coppie, una cifra tre volte…). I PIN in tutto sono $10^4 = 10\,000$; quelli con le cifre tutte diverse sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$; quindi i PIN con almeno una ripetizione sono $10\,000 - 5040 = 4960$. L'espressione «almeno uno» è quasi sempre il segnale che conviene passare al complementare.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre? Quanti di essi hanno le cifre tutte diverse? E quanti, tra questi ultimi, sono pari?

Soluzione. Un numero di quattro cifre non può cominciare con 0. La prima cifra si sceglie in 9 modi, ciascuna delle altre in 10: i numeri sono $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (sono quelli da 1000 a 9999, e infatti $9999 - 1000 + 1 = 9000$).

Se le cifre devono essere tutte diverse, la prima si sceglie ancora in 9 modi (da 1 a 9); la seconda in 9 modi, perché ora lo 0 è ammesso ma la cifra già usata no; la terza in 8 e la quarta in 7. I numeri sono $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Per i numeri pari con cifre diverse conviene cominciare dalla tappa più vincolata, l'ultima cifra, che deve essere 0, 2, 4, 6 oppure 8. Ma il numero di scelte per la prima cifra dipende da come è andata l'ultima: se l'ultima è 0, la prima ha 9 possibilità; se l'ultima è 2, 4, 6 o 8, la prima non può essere né 0 né l'ultima cifra e ha 8 possibilità. Il principio fondamentale non si applica direttamente, e dividiamo in due casi disgiunti.

- ultima cifra 0: prima cifra 9 modi, poi 8 e 7 modi per le due centrali: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$;
- ultima cifra 2, 4, 6 o 8 (4 modi): prima cifra 8 modi, poi 8 e 7: $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$.

Per il principio della somma i numeri pari di quattro cifre diverse sono $504 + 1792 = 2296$. *Controllo:* un programma che esamina uno per uno i numeri da 1000 a 9999 trova lo stesso risultato.

13.2 Disposizioni e permutazioni

D'ora in poi chiameremo **raggruppamento** di classe k di n oggetti un gruppo di k oggetti presi da un insieme di n oggetti distinti. Due domande decidono come contarli: *l'ordine conta?* (la cop-

pia (C; A) è diversa da (A; C)?) e *un oggetto si può ripetere?* Cominciamo dai raggruppamenti in cui l'ordine conta.

13.2.1 Disposizioni semplici

Si chiamano **disposizioni semplici** di n oggetti distinti di classe k (con $k \le n$) i raggruppamenti *ordinati* di k oggetti *diversi* scelti tra gli n. Due disposizioni sono diverse se contengono oggetti diversi oppure gli stessi oggetti in un ordine diverso. Il loro numero si indica con $D_{n,k}$. La coppia (presidente; segretario) della Figura 13.1 è una disposizione semplice di 4 oggetti di classe 2, e abbiamo trovato $D_{4,2} = 12$.

In generale il primo posto si riempie in n modi, il secondo in $n - 1$ (un oggetto è già stato usato), il terzo in $n - 2$, e l'ultimo, il k-esimo, in $n - (k - 1) = n - k + 1$ modi. Per il principio fondamentale

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \quad \text{un prodotto di } k \text{ fattori decrescenti a partire da } n.$$

Per esempio, gli otto finalisti di una gara di nuoto possono occupare il podio (primo, secondo e terzo posto) in $D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ modi diversi.

13.2.2 Disposizioni con ripetizione

Se un oggetto può comparire più volte, ogni posto si riempie sempre in n modi. Le **disposizioni con ripetizione** di n oggetti di classe k sono i raggruppamenti ordinati di k oggetti, non necessariamente diversi, scelti tra n; il loro numero è

$$D'_{n,k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

Questa volta k può anche superare n. I PIN di 4 cifre sono $D'_{10,4} = 10^4$; le sequenze di 8 simboli 0 o 1 sono $D'_{2,8} = 2^8 = 256$; una schedina di pronostici su 13 partite, in cui per ogni partita si sceglie tra 1, X e 2, si può compilare in $D'_{3,13} = 3^{13} = 1\,594\,323$ modi.

13.2.3 Permutazioni e fattoriale

Quando si dispongono in ordine *tutti* gli n oggetti, cioè quando $k = n$, le disposizioni semplici si chiamano **permutazioni** e il loro numero si indica con P_n:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Il prodotto dei numeri naturali da 1 a n si chiama **fattoriale** di n e si scrive $n!$ (si legge «enne fattoriale»): $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$. Dunque $P_n = n!$: cinque libri si possono mettere su uno scaffale in $5! = 120$ ordini diversi. Il fattoriale soddisfa la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$, che permette di calcolarlo passo dopo passo e che lo definisce *per ricorrenza*, come le successioni di *Matematica 3*.

Anche le disposizioni semplici si scrivono con i fattoriali. Moltiplicando e dividendo $D_{n,k}$ per $(n-k)!$ si completa il prodotto fino a 1:

$$D_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Per $k = n$ questa formula darebbe $D_{n,n} = n!/0!$, e deve valere $n!$. Si pone perciò, per definizione, $0! = 1$. Non è un capriccio: è l'unico valore che conserva la relazione $n! = n \cdot (n-1)!$ anche per $n = 1$ ($1! = 1 \cdot 0!$), e corrisponde al fatto che c'è esattamente un modo di mettere in fila zero oggetti, cioè non fare nulla.

Il fattoriale cresce in modo impressionante. La Tabella 13.1 lo confronta con la potenza 2^n e con il quadrato n^2: per $n = 10$ il fattoriale supera già i tre milioni e mezzo, e $20!$ è circa $2{,}43 \cdot 10^{18}$. In *Matematica 3* hai visto che una crescita esponenziale batte qualunque potenza; il fattoriale fa ancora di più e supera, prima o poi, ogni esponenziale a^n: $n!$ supera 2^n da $n = 4$ in poi e supera perfino 10^n da $n = 25$ in poi.

Tabella 13.1 Crescita del fattoriale a confronto con 2^n e con n^2 (valori esatti).

n	n^2	2^n	$n!$
1	1	2	1
2	4	4	2
3	9	8	6
4	16	16	24
5	25	32	120
6	36	64	720
8	64	256	40 320
10	100	1024	3 628 800
15	225	32 768	1 307 674 368 000
20	400	1 048 576	2 432 902 008 176 640 000

Un mazzo di 52 carte da gioco si può ordinare in $52!$ modi, un numero di 68 cifre: $52! \approx 8{,}07 \cdot 10^{67}$. Se una macchina producesse un miliardo di ordinamenti diversi al secondo, per elencarli tutti le servirebbero circa $2{,}6 \cdot 10^{51}$ anni. È per questo che, mescolando bene un mazzo, si ottiene quasi certamente un ordine che nessuno ha mai visto prima.

13.2.4 Permutazioni con ripetizione

Quanti anagrammi, anche privi di significato, ha la parola ANNA? Se le quattro lettere fossero tutte diverse, per esempio A_1, N_1, N_2, A_2, gli anagrammi sarebbero $4! = 24$. Ma scambiando tra loro le due A, oppure le due N, si ottiene la stessa parola: ogni anagramma vero corrisponde a

$2! \cdot 2! = 4$ delle 24 file di lettere «distinte». Gli anagrammi sono quindi $24 : 4 = 6$, e infatti si possono elencare: AANN, ANAN, ANNA, NAAN, NANA, NNAA.

In generale, le **permutazioni con ripetizione** di n oggetti tra i quali ce ne sono k_1 uguali tra loro, k_2 uguali tra loro (e diversi dai primi), ..., k_r uguali tra loro, con $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, sono

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

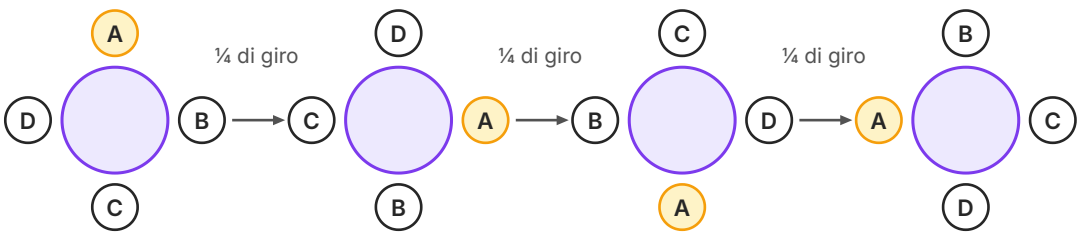
La parola MATEMATICA ha 10 lettere: A compare 3 volte, M e T 2 volte ciascuna, E, I e C una volta. I suoi anagrammi sono $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$ (i fattori 1! delle lettere singole valgono 1 e si possono omettere).

13.2.5 Permutazioni circolari

Quattro amici si siedono attorno a un tavolo rotondo. Se contano soltanto le posizioni reciproche (chi siede alla destra e chi alla sinistra di ciascuno), due sistemazioni che differiscono per una rotazione di tutto il gruppo sono la stessa: la Figura 13.2 mostra le quattro rotazioni di una stessa sistemazione. Le $4! = 24$ file si raggruppano dunque a 4 a 4, e le sistemazioni diverse sono $24 : 4 = 6 = 3!$. Lo stesso ragionamento con n persone dà le **permutazioni circolari**:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Un modo equivalente di vederlo: si fa sedere la prima persona in un posto qualsiasi, che serve da riferimento, e si dispongono le altre $n - 1$ nei posti rimasti, in $(n-1)!$ modi. Cinque persone attorno a un tavolo rotondo si possono sistemare in $4! = 24$ modi.



Ognuno ha sempre gli stessi vicini a destra e a sinistra: è un solo modo di sedersi.

Le 4! = 24 file si raggruppano a 4 a 4: le permutazioni circolari sono 24 : 4 = 3! = 6.

Figura 13.2 Quattro persone attorno a un tavolo rotondo. Le quattro sistemazioni si ottengono l'una dall'altra ruotando tutto il gruppo di un quarto di giro: ognuno conserva gli stessi vicini, quindi sono un'unica permutazione circolare.

IN SINTESI

Raggruppamenti ordinati di n oggetti distinti:

- disposizioni semplici di classe k ($k \le n$): $D_{n,k} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;
- disposizioni con ripetizione di classe k: $D'_{n,k} = n^k$;
- permutazioni: $P_n = n!$, con $0! = 1$; permutazioni circolari: $(n-1)!$;
- permutazioni con ripetizione ($k_1 + \ldots + k_r = n$ oggetti, uguali a gruppi): $\dfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Sei amici, tra cui Elena e Franco, si mettono in fila per una foto. a) In quante file Elena e Franco sono vicini? b) In quante non sono vicini? c) In quante Elena precede Franco (non necessariamente subito)?

Soluzione. a) Leghiamo Elena e Franco in un unico «blocco». Ora gli oggetti da mettere in fila sono 5 (il blocco e le altre quattro persone): $5! = 120$ file. Dentro il blocco Elena e Franco possono stare in 2 ordini (EF oppure FE). Per il principio fondamentale le file sono $2 \cdot 120 = 240$.

b) Per complemento: le file in tutto sono $6! = 720$, quindi quelle in cui i due non sono vicini sono $720 - 240 = 480$.

c) Scambiando di posto Elena e Franco in una fila qualsiasi si ottiene un'altra fila, in cui l'ordine tra i due è rovesciato. Le 720 file si dividono così in coppie, e in ciascuna coppia esattamente una fila ha Elena prima di Franco: le file cercate sono $720 : 2 = 360$.

COLLEGAMENTI

Informatica. Un *bit* vale 0 oppure 1, e un *byte* è una sequenza di 8 bit: i valori possibili di un byte sono $D'_{2,8} = 2^8 = 256$. Con k bit si rappresentano 2^k valori diversi.

Biologia. Nel codice genetico ogni amminoacido di una proteina è indicato da un *codone*, una sequenza ordinata di tre basi scelte tra le quattro del DNA (A, C, G, T), o dell'RNA (A, C, G, U). I codoni possibili sono $D'_{4,3} = 4^3 = 64$, più che sufficienti per i 20 amminoacidi e i segnali di stop; due sole basi ($4^2 = 16$ combinazioni) non basterebbero.

Sicurezza informatica. Una password di 8 caratteri scelti tra 26 lettere minuscole e 10 cifre può essere una qualsiasi delle $36^8 \approx 2{,}8 \cdot 10^{12}$ disposizioni con ripetizione. Ogni carattere in più moltiplica per 36 il lavoro di chi prova tutte le password una dopo l'altra: per questo le password lunghe sono più sicure.

13.3 Combinazioni

13.3.1 Quando l'ordine non conta

Torniamo ai quattro studenti A, B, C, D. Questa volta devono scegliere tra loro una delegazione di 3 persone, senza incarichi: la delegazione {A, B, C} è la stessa comunque la si elenchi. Le disposizioni $D_{4,3} = 24$ contano invece le terne *ordinate*, e ogni delegazione vi compare tante volte quanti sono gli ordini in cui si possono elencare i suoi 3 membri, cioè $3! = 6$ volte. Le delegazioni sono dunque $24 : 6 = 4$: {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D}, {B, C, D}.

Si chiamano **combinazioni semplici** di n oggetti distinti di classe k ($k \le n$) i raggruppamenti di k oggetti diversi scelti tra gli n, in cui l'ordine non conta. In altre parole, una combinazione è un *sottoinsieme* di k elementi di un insieme di n elementi. Il loro numero si indica con $C_{n,k}$. Il ragionamento fatto sulle delegazioni vale in generale: ogni combinazione di k oggetti genera, ordinando i suoi elementi in tutti i modi possibili, esattamente $k!$ disposizioni, e disposizioni generate da combinazioni diverse sono diverse. Quindi $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$.

IN SINTESI

Combinazioni semplici. Il numero dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi ($0 \le k \le n$) è

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Il numero $C_{n,k}$ si chiama **coefficiente binomiale**, si scrive anche $\binom{n}{k}$ e si legge «n su k».

Per calcolare un coefficiente binomiale a mano conviene la seconda forma, che ha k fattori al numeratore e $k!$ al denominatore: $C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$. Il risultato è sempre un numero naturale, anche se la formula è una frazione, perché conta qualcosa.

13.3.2 Il coefficiente binomiale al lavoro

Le combinazioni compaiono ogni volta che si sceglie «un gruppo» senza incarichi né ordine:

- in una riunione di 10 persone ciascuno stringe la mano a tutti gli altri: le strette di mano sono tante quante le coppie non ordinate, $C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$;
- una mano di 5 carte prese da un mazzo di 52 carte francesi si può ricevere in $C_{52,5} = 2\,598\,960$ modi, da un mazzo di 40 carte italiane in $C_{40,5} = 658\,008$ modi;
- le cinquine di numeri diversi tra 1 e 90 sono $C_{90,5} = 43\,949\,268$;

- per $k = 0$ e $k = n$ si ha $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$ (un solo sottoinsieme vuoto, un solo sottoinsieme che contiene tutto); inoltre $C_{n,1} = n$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una classe ha 12 ragazze e 10 ragazzi. Si deve formare un comitato di 4 studenti. a) Quanti comitati sono possibili? b) Quanti sono formati da 2 ragazze e 2 ragazzi? c) Quanti contengono almeno un ragazzo?

Soluzione. a) Si scelgono 4 studenti tra 22, senza ordine: $C_{22,4} = \dfrac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{24} = 7315$.

b) Si scelgono 2 ragazze tra 12 in $C_{12,2} = 66$ modi e, indipendentemente, 2 ragazzi tra 10 in $C_{10,2} = 45$ modi. Per il principio fondamentale i comitati sono $66 \cdot 45 = 2970$.

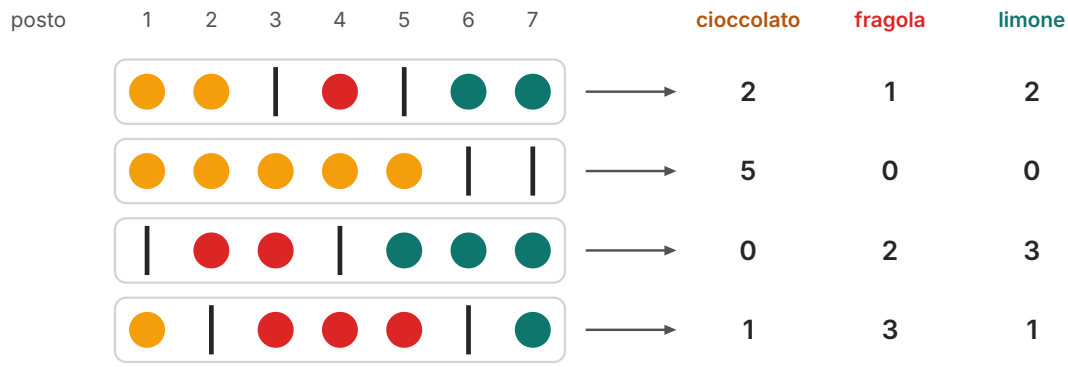
c) «Almeno un ragazzo» suggerisce il complemento: i comitati senza ragazzi sono quelli di sole ragazze, $C_{12,4} = 495$. Quelli con almeno un ragazzo sono $7315 - 495 = 6820$.

Controllo. Dividendo per numero di ragazzi (0, 1, 2, 3 o 4) si trova $495 + 2200 + 2970 + 1440 + 210 = 7315$, il totale: i casi sono disgiunti e li abbiamo contati tutti.

13.3.3 Combinazioni con ripetizione

In una gelateria si compone una coppetta con 5 palline scegliendo tra 3 gusti, cioccolato, fragola e limone; si possono prendere più palline dello stesso gusto, e l'ordine in cui sono messe nella coppetta non conta. Quante coppette diverse si possono ottenere? Una coppetta è determinata dal numero di palline di ciascun gusto: per esempio 2 di cioccolato, 1 di fragola e 2 di limone. Raggruppamenti di questo tipo, non ordinati e con possibili ripetizioni, si chiamano **combinazioni con ripetizione**; il loro numero si indica con $C'_{n,k}$ (n oggetti, classe k), e qui cerchiamo $C'_{3,5}$.

Il conteggio si fa con un'idea elegante, detta delle **stelle e barre** (Figura 13.3). Mettiamo in fila le palline, prima tutte quelle di cioccolato, poi quelle di fragola, poi quelle di limone, e separiamo i gusti con 2 barre. La coppetta (2, 1, 2) diventa ●●|●|●●, la coppetta (5, 0, 0) diventa ●●●●●||, la coppetta (0, 2, 3) diventa |●●|●●●. Ogni coppetta dà una fila di 7 simboli, 5 palline e 2 barre, e viceversa ogni fila di 5 palline e 2 barre si legge come una coppetta. Contare le coppette equivale allora a scegliere, tra i 7 posti della fila, i 2 dove mettere le barre: $C_{7,2} = 21$.



5 palline e 2 barre occupano 7 posti: basta scegliere i 2 posti delle barre.

$$C'_{3,5} = C_{7,2} = C_{7,5} = 21$$

Figura 13.3 Stelle e barre: ogni coppetta di 5 palline scelte tra 3 gusti corrisponde a una fila di 5 pallini e 2 barre, e viceversa. Le coppette sono quante le scelte dei 2 posti delle barre tra 7: $C'_{3,5} = C_{7,2} = 21$.

In generale, con n tipi di oggetti e k oggetti da scegliere servono $n-1$ barre, la fila ha $n+k-1$ posti e si devono scegliere i k posti degli oggetti (o, è lo stesso, gli $n-1$ posti delle barre):

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Come per le disposizioni con ripetizione, k può superare n. Lo stesso modello risponde a domande in apparenza diverse. I risultati di un lancio di 3 dadi indistinguibili (conta solo quali facce escono, non quale dado le mostra) sono $C'_{6,3} = C_{8,3} = 56$. Le soluzioni dell'equazione $x+y+z=5$ con x, y, z numeri naturali sono $C'_{3,5} = 21$: sono le coppette di gelato, con x palline di cioccolato, y di fragola e z di limone.

13.4 Le proprietà dei coefficienti binomiali

13.4.1 La simmetria

Scegliere i 3 studenti che vanno in gita tra 10 equivale a scegliere i 7 che restano a casa: ogni scelta del primo tipo determina una e una sola scelta del secondo. Quindi $C_{10,3} = C_{10,7}$, e in generale

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}, \quad \text{per } 0 \le k \le n.$$

La formula lo conferma subito: scambiando k con $n-k$ in $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ i due fattori del denominatore si scambiano e la frazione non cambia. Abbiamo così due dimostrazioni dello stesso fatto: una **dimostrazione combinatoria**, che mostra che i due numeri contano lo stesso insieme (o due insiemi in corrispondenza biunivoca), e una algebrica, che lavora sulle formule. La simmetria serve anche nei calcoli: $C_{100,98} = C_{100,2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.

13.4.2 La formula di Stifel

IN SINTESI

Teorema (formula di Stifel).

Ipotesi: n, k numeri naturali con $1 \le k \le n-1$.

Tesi: $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$.

Dimostrazione combinatoria. $C_{n,k}$ conta i sottoinsiemi di k elementi di un insieme U di n elementi. Fissiamo un elemento u di U e dividiamo questi sottoinsiemi in due gruppi disgiunti. Quelli che *contengono* u si ottengono aggiungendo u a un sottoinsieme di $k-1$ elementi scelti tra gli altri $n-1$: sono $C_{n-1,k-1}$. Quelli che *non contengono* u sono sottoinsiemi di k elementi scelti tra gli altri $n-1$: sono $C_{n-1,k}$. Per il principio della somma $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$. c.v.d.

Dimostrazione algebrica. Riduciamo allo stesso denominatore $k!(n-k)!$, ricordando che $k! = k \cdot (k-1)!$ e $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$:

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

e l'ultima frazione è $C_{n,k}$. c.v.d. La formula prende il nome da Michael Stifel, matematico tedesco del Cinquecento.

13.4.3 Il triangolo di Tartaglia

Scriviamo i coefficienti binomiali in righe: nella riga n (cominciando da $n = 0$) mettiamo $C_{n,0}$, $C_{n,1}$, …, $C_{n,n}$, centrando le righe l'una sotto l'altra. Si ottiene il **triangolo di Tartaglia** (Figura 13.4), che hai incontrato in *Matematica 1* a proposito delle potenze di un binomio. Ora sappiamo spiegare perché si costruisce così: ogni riga comincia e finisce con 1 ($C_{n,0} = C_{n,n} = 1$), è simmetrica (simmetria dei coefficienti binomiali) e ogni numero interno è la somma dei due numeri che gli stanno sopra (formula di Stifel). Nella figura, per esempio, $C_{5,2} = C_{4,1} + C_{4,2} = 4 + 6 = 10$.

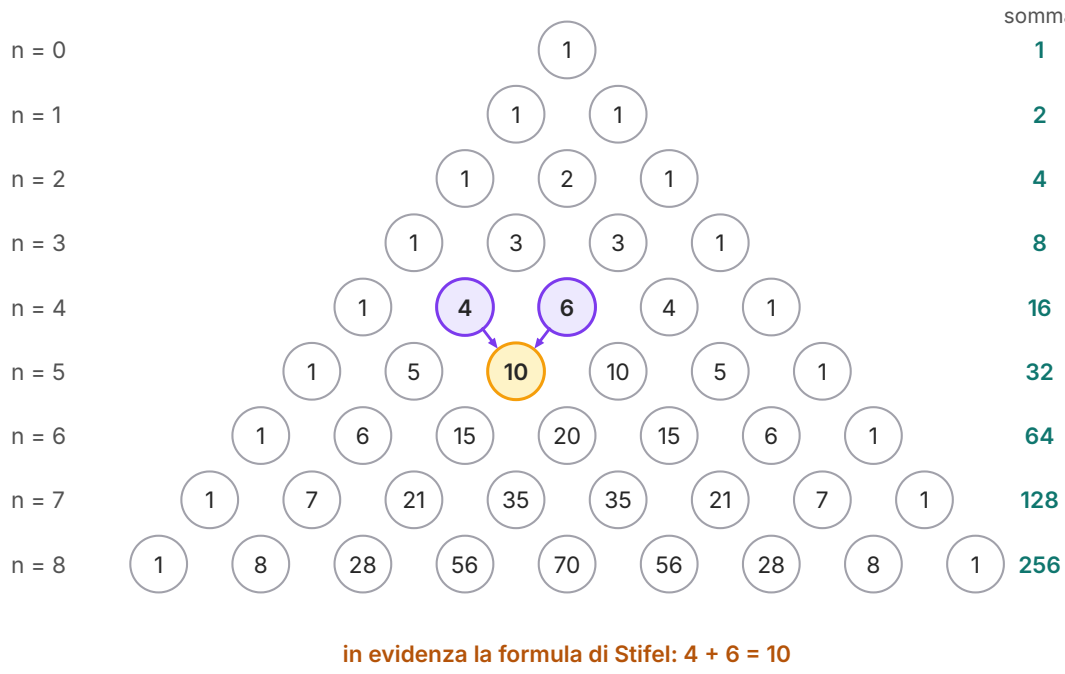


Figura 13.4 Il triangolo di Tartaglia fino alla riga $n = 8$: il k-esimo numero della riga n (contando da 0) è $C_{n,k}$. In evidenza la formula di Stifel $C_{5,2} = C_{4,1} + C_{4,2}$; a destra la somma di ogni riga, 2^n.

Il triangolo nasconde molte altre regolarità. La seconda diagonale (1, 2, 3, 4, ...) contiene i numeri naturali, $C_{n,1} = n$; la terza (1, 3, 6, 10, 15, ...) contiene i *numeri triangolari* $C_{n,2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, che contano le strette di mano tra n persone. E la somma dei numeri di ogni riga è una potenza di 2: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

13.4.4 Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme

L'ultima osservazione è un teorema: **per ogni n naturale, $C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = 2^n$**. Lo dimostriamo in due modi.

Contando. Il primo membro conta i sottoinsiemi di un insieme U di n elementi, raggruppati secondo il numero k dei loro elementi: quelli di 0 elementi, quelli di 1, ..., quelli di n. Ma possiamo contare tutti i sottoinsiemi anche in un altro modo: costruire un sottoinsieme significa decidere, per ciascuno degli n elementi di U, se prenderlo o no. Sono n tappe con 2 possibilità ciascuna, e i sottoinsiemi sono $D'_{2,n} = 2^n$. c.v.d.

Per induzione (vedi *Matematica 3*). Indichiamo con S_n la somma della riga n.

Passo base. Per $n = 0$ la riga contiene solo $C_{0,0} = 1 = 2^0$.

Passo induttivo. Supponiamo $S_{n-1} = 2^{n-1}$ e consideriamo la riga n. Per la formula di Stifel ogni suo numero interno è la somma di due numeri adiacenti della riga $n - 1$, mentre i due 1 agli

estremi coincidono con i due 1 agli estremi della riga precedente. Sommando tutta la riga n, ogni numero della riga $n-1$ viene contato esattamente due volte: una nel numero che gli sta sotto a sinistra e una in quello che gli sta sotto a destra. Quindi $S_n = 2 \cdot S_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. c.v.d.

APPROFONDIMENTO · IL TRIANGOLO ARITMETICO

Il triangolo dei coefficienti binomiali è molto più antico del nome con cui lo chiamiamo. Nel XIII secolo il matematico cinese Yang Hui lo riportò in un suo trattato, attribuendolo a un autore più antico, Jia Xian; tavole simili si trovano anche nella matematica indiana e in quella araba medievale.

In Italia porta il nome di Niccolò Fontana detto Tartaglia, che lo inserì nel suo *General trattato di numeri et misure*, a metà del Cinquecento. In Francia e nei paesi di lingua inglese si chiama invece triangolo di Pascal: Blaise Pascal gli dedicò il *Traité du triangle arithmétique*, scritto nel 1654 e pubblicato dopo la sua morte, dove ne studiò sistematicamente le proprietà e lo usò per risolvere problemi di giochi d'azzardo. È uno dei testi da cui nasce il calcolo delle probabilità, di cui ci occuperemo nei prossimi capitoli.

13.5 Il binomio di Newton

13.5.1 Dai prodotti notevoli a una formula generale

Conosci il quadrato e il cubo di un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. I coefficienti 1, 2, 1 e 1, 3, 3, 1 sono le righe 2 e 3 del triangolo di Tartaglia. Non è una coincidenza, e il calcolo combinatorio spiega perché.

Scriviamo $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ e moltiplichiamo senza raccogliere nulla. Ogni prodotto parziale si ottiene scegliendo da ciascuno dei tre fattori o a o b: tre tappe con due possibilità, $2^3 = 8$ prodotti, che si leggono come le parole di tre lettere a e b della Figura 13.5. Il prodotto aab, per esempio, nasce scegliendo a dal primo fattore, a dal secondo e b dal terzo, e vale a^2b. Quante parole danno a^2b? Tante quanti sono i modi di scegliere *quale* dei 3 fattori fornisce la b: $C_{3,1} = 3$ (aab, aba, baa). In generale il monomio $a^{3-k}b^k$ compare $C_{3,k}$ volte.

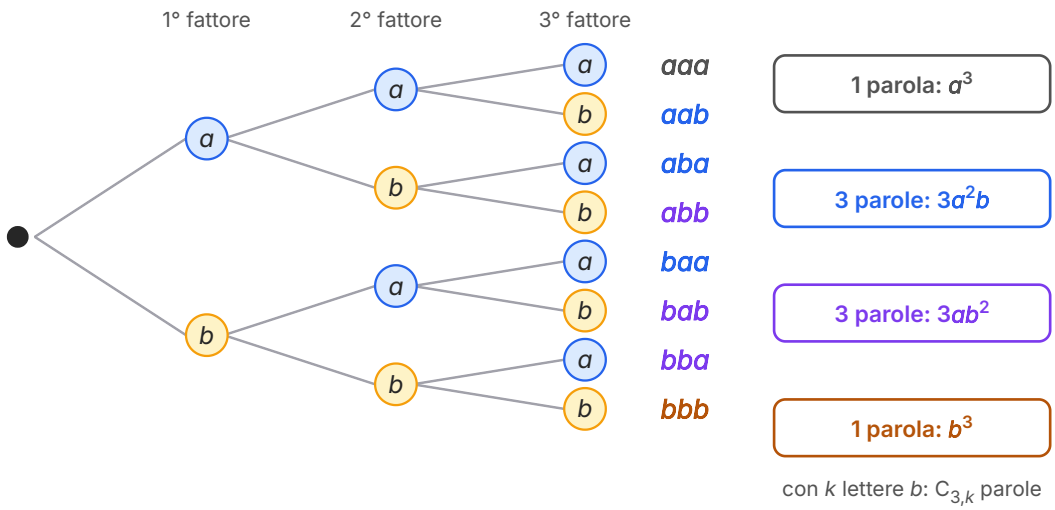


Figura 13.5 Sviluppando $(a + b)^3$ si sceglie a o b da ciascuno dei tre fattori: si ottengono 8 parole. Le parole con k lettere b sono $C_{3,k}$ e danno il termine $C_{3,k}\, a^{3-k}b^k$: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Lo stesso ragionamento vale per qualunque esponente naturale n: nel prodotto di n fattori $(a + b)$ il monomio $a^{n-k}b^k$ si ottiene tante volte quanti sono i modi di scegliere i k fattori da cui prendere b, cioè $C_{n,k}$ volte. È la dimostrazione combinatoria del teorema seguente.

IN SINTESI

Teorema (formula del binomio di Newton).

Ipotesi: a, b numeri reali, n numero naturale (con la convenzione $x^0 = 1$).

Tesi:

$$(a + b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Il simbolo Σ (sigma maiuscola) indica la somma dei termini ottenuti dando a k i valori da 0 a n. La formula è detta **binomio di Newton**: Isaac Newton la estese anche a esponenti non interi, ma per gli esponenti naturali era nota da secoli. Lo sviluppo ha $n + 1$ termini; gli esponenti di a scendono da n a 0, quelli di b salgono da 0 a n, e in ogni termine la loro somma è n.

13.5.2 Una seconda dimostrazione, per induzione

Passo base. Per $n = 0$ entrambi i membri valgono 1.

Passo induttivo. Supponiamo vera la formula per l'esponente $n - 1$ e moltiplichiamo per $(a + b)$:

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot \Sigma_{k=0}^{n-1} C_{n-1,k} a^{n-1-k} b^k.$$

Moltiplicando per a, ogni termine $C_{n-1,k}\, a^{n-1-k} b^k$ diventa $C_{n-1,k}\, a^{n-k} b^k$; moltiplicando per b diventa $C_{n-1,k}\, a^{n-1-k} b^{k+1}$. Raccogliamo i termini che contengono lo stesso monomio $a^{n-k} b^k$. Per $1 \le k \le n-1$ ne arrivano due: uno dal prodotto per a, con coefficiente $C_{n-1,k}$, e uno dal prodotto per b, con coefficiente $C_{n-1,k-1}$. Il loro coefficiente complessivo è $C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} = C_{n,k}$ per la formula di Stifel. I termini estremi a^n e b^n arrivano ciascuno una sola volta, con coefficiente $1 = C_{n,0} = C_{n,n}$. Dunque $(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C_{n,k}\, a^{n-k} b^k$. c.v.d.

Le due dimostrazioni si completano: quella combinatoria spiega *perché* compaiono proprio i coefficienti binomiali, quella per induzione mostra che la regola costruttiva del triangolo (la formula di Stifel) è esattamente ciò che accade quando si moltiplica una potenza per $(a+b)$.

13.5.3 Il termine generale

Nello sviluppo di $(a+b)^n$ il termine che contiene b^k è il $(k+1)$-esimo, e si chiama **termine generale**:

$$T_{k+1} = C_{n,k} a^{n-k} b^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Serve quando interessa un solo termine dello sviluppo, senza scriverli tutti. Se il binomio è una differenza, si scrive $a - b = a + (-b)$: i termini con k dispari cambiano segno. Per esempio $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nello sviluppo di $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ (con $x \neq 0$) trova il termine che contiene x^4, e stabilisci se c'è un termine che non contiene x.

Soluzione. Il termine generale, con $a = x^2$ e $b = -\frac{1}{x}$, è

$$T_{k+1} = C_{8,k}\,(x^2)^{8-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k\, C_{8,k} x^{16-2k}\cdot x^{-k} = (-1)^k\, C_{8,k} x^{16-3k}.$$

Il termine contiene x^4 quando $16 - 3k = 4$, cioè $k = 4$: è $T_5 = (-1)^4\, C_{8,4}\, x^4 = 70x^4$.

Un termine senza x richiederebbe $16 - 3k = 0$, cioè $k = 16/3$, che non è un numero naturale: lo sviluppo non ha termine noto. *Controllo:* lo sviluppo completo, fatto con un programma di calcolo simbolico, contiene $70x^4$ e nessuna costante.

13.5.4 Applicazioni

Potenze vicine a 1. Se x è piccolo, i termini con potenze alte di x sono piccolissimi. Per esempio

$$1{,}01^{10} = (1 + 0{,}01)^{10} = 1 + 10\cdot 0{,}01 + 45\cdot 0{,}0001 + 120\cdot 0{,}000001 + \ldots \approx 1{,}10462,$$

e il valore esatto, 1,1046221..., conferma le prime cinque cifre decimali già con quattro termini. Un capitale investito all'1% annuo per 10 anni con interesse composto cresce dunque di circa il 10,46%, non del 10%: la differenza sono i termini dal terzo in poi, gli «interessi sugli interessi».

La disuguaglianza di Bernoulli. In *Matematica 3* hai dimostrato per induzione che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (per $x > -1$). Per $x \geq 0$ ora la si legge nello sviluppo: $(1+x)^n = 1 + nx + C_{n,2}x^2 + \ldots + x^n$, e tutti i termini dopo i primi due sono non negativi.

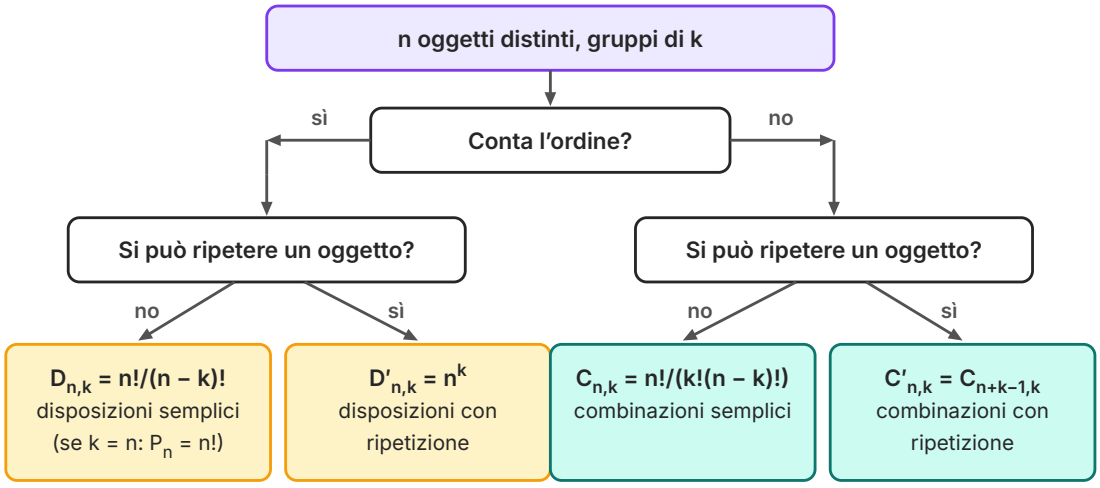
Identità sui coefficienti. Scegliendo valori particolari di a e b si ottengono identità. Con $a = b = 1$ si ritrova $\Sigma_{k=0}{}^{n}\, C_{n,k} = 2^n$; con $a = 1$ e $b = -1$ si ottiene, per $n \geq 1$,

$$C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - \ldots + (-1)^n C_{n,n} = (1-1)^n = 0:$$

in ogni riga del triangolo (tranne la prima) la somma dei numeri di posto pari è uguale a quella dei numeri di posto dispari (contando i posti da 0, come k). Per esempio $1 + 6 + 1 = 4 + 4$.

13.6 Come scegliere il modello

In un problema di conteggio la parte difficile non è il calcolo, ma capire *che cosa* si sta contando. Le domande da porsi sono sempre le stesse, e la Figura 13.6 le riassume in uno schema: si usano tutti gli oggetti o solo alcuni? Conta l'ordine? Un oggetto si può ripetere? Gli oggetti sono tutti distinti? Spesso aiuta immaginare di *costruire* uno degli oggetti da contare, tappa dopo tappa, oppure di provare con numeri piccoli e confrontare con un elenco completo.



Oggetti non tutti distinti messi in fila (anagrammi): permutazioni con ripetizione $n!/(k_1!\, k_2!\, \ldots)$

Figura 13.6 Schema decisionale per scegliere il modello di conteggio: dopo aver stabilito se conta l'ordine e se gli oggetti si possono ripetere, si arriva a una delle quattro formule fondamentali.

13.6.1 Percorsi su una griglia

Un quartiere ha strade disposte a griglia, e per andare dall'incrocio A all'incrocio B bisogna percorrere 4 isolati verso est e 3 verso nord (Figura 13.7). Quanti sono i percorsi di lunghezza minima, cioè quelli che non tornano mai indietro? Ogni percorso minimo è una sequenza di 7 tratti, 4 verso est (E) e 3 verso nord (N): il percorso in figura è la parola ENEENEN. Viceversa, ogni parola di 7 lettere con 4 E e 3 N descrive un percorso minimo. Contare i percorsi significa scegliere, tra i 7 tratti, i 3 da fare verso nord:

$$C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Lo stesso numero si ottiene vedendo le parole come permutazioni con ripetizione di 7 lettere, 4 uguali e 3 uguali: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$. In generale, su una griglia con m passi in una direzione e n nell'altra i percorsi minimi sono $C_{m+n,n} = C_{m+n,m}$.

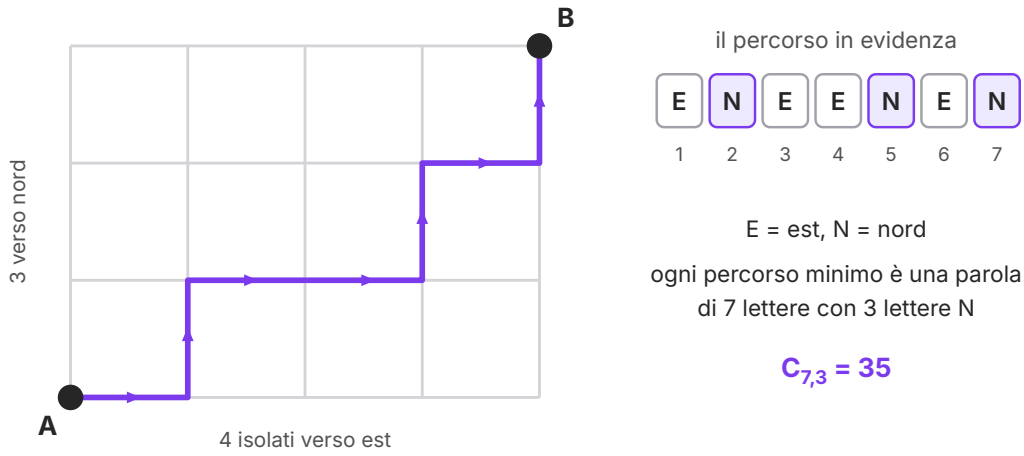


Figura 13.7 Un percorso minimo da A a B su una griglia di 4 · 3 isolati e la parola che lo descrive. Ogni percorso minimo è una parola di 7 lettere con 3 lettere N: i percorsi sono $C_{7,3} = 35$.

13.6.2 Distribuire oggetti

Distribuire oggetti tra persone (o palline in scatole) è un altro modello che ritorna spesso, e la risposta dipende da come sono gli oggetti.

- **Oggetti distinti, quantità fissate.** Sei libri diversi vanno distribuiti a tre amici, due libri a testa. Il primo amico riceve 2 libri scelti tra 6, in $C_{6,2} = 15$ modi; il secondo 2 tra i 4 rimasti, in $C_{4,2} = 6$ modi; il terzo prende gli ultimi 2. Le distribuzioni sono $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$, che è anche

$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$: ogni distribuzione è una «parola» di 6 lettere, una per libro, che dice a chi va ciascun libro.

- **Oggetti distinti, nessun vincolo.** Se ognuno dei 6 libri può andare a uno qualsiasi dei tre amici, le distribuzioni sono $D'_{3,6} = 3^6 = 729$: ogni libro è una tappa con 3 possibilità.
- **Oggetti identici.** Se si distribuiscono 6 caramelle uguali tra tre bambini, conta solo quante ne riceve ciascuno: è il modello delle stelle e barre, $C'_{3,6} = C_{8,2} = 28$.

13.6.3 Contare due volte la stessa cosa

L'errore più insidioso è contare lo stesso oggetto più volte senza accorgersene. Da un gruppo di 5 ragazzi e 4 ragazze si vuole scegliere un comitato di 3 persone con almeno una ragazza. Un ragionamento sbagliato ma convincente è: «scelgo prima una ragazza, in 4 modi, poi completo il comitato con 2 persone qualsiasi tra le 8 rimaste, in $C_{8,2} = 28$ modi: $4 \cdot 28 = 112$». Il comitato formato dalle ragazze R_1, R_2 e dal ragazzo M_1, però, viene contato due volte: una scegliendo per prima R_1 e completando con R_2 e M_1, una scegliendo per prima R_2 e completando con R_1 e M_1. Il conteggio corretto passa per il complemento: $C_{9,3} - C_{5,3} = 84 - 10 = 74$. Quando un procedimento «sceglie per primo» un elemento che poi non ha nessun ruolo speciale, introduce un ordine che non c'è.

ERRORE FREQUENTE

- **Contare con l'ordine quando l'ordine non conta** (o viceversa). Una delegazione, una mano di carte, un gruppo di numeri giocati sono insiemi: si contano con $C_{n,k}$. Usare $D_{n,k}$ significa dimenticare di dividere per $k!$; il podio di una gara, invece, è ordinato.
- **Confondere $D_{n,k}$ con $D'_{n,k}$.** Le cifre di un PIN si possono ripetere (10^4 PIN), i posti del podio no ($D_{8,3}$): prima di scegliere la formula chiediti se lo stesso oggetto può comparire due volte.
- **Scrivere 0! = 0.** Per definizione $0! = 1$, ed è l'unico valore coerente con $n! = n \cdot (n-1)!$ e con $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$.
- **Contare due volte** scegliendo «prima uno, poi gli altri» in un problema con «almeno uno»: usa il complemento, oppure dividi in casi disgiunti.

Concludiamo con un esempio che mette insieme più modelli. In quanti modi si possono ricevere 5 carte da un mazzo di 40 carte italiane in modo da avere esattamente 2 assi? Gli assi sono 4: se ne scelgono 2 in $C_{4,2} = 6$ modi; le altre 3 carte vanno scelte tra le 36 che non sono assi, in $C_{36,3} = 7140$ modi. Le mani sono $6 \cdot 7140 = 42\,840$. Dividendo questo numero per il numero di tutte le mani possibili, $C_{40,5} = 658\,008$, si ottiene la probabilità di ricevere esattamente due assi: è il tema del prossimo capitolo.

SINTESI

- Il **principio fondamentale**: se una scelta si fa in tappe con $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilità, le scelte complessive sono $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$; il diagramma ad albero lo visualizza.
- Il **principio della somma** conta un insieme diviso in casi disgiunti; il **conteggio per complemento** sottrae dal totale ciò che non si vuole («almeno uno»).
- **Disposizioni semplici** (ordine conta, nessuna ripetizione): $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; **con ripetizione**: $D'_{n,k} = n^k$.
- **Permutazioni**: $P_n = n!$, con $0! = 1$; con oggetti uguali a gruppi $\dfrac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$; circolari $(n-1)!$.
- **Combinazioni semplici** (ordine non conta): $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, il numero dei sottoinsiemi di k elementi.
- **Combinazioni con ripetizione**: $C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}$ (stelle e barre).
- **Simmetria** $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ e **formula di Stifel** $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$, dimostrate contando e con l'algebra.
- Il **triangolo di Tartaglia** raccoglie i coefficienti binomiali; la riga n ha somma 2^n, il numero dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi.
- **Binomio di Newton**: $(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C_{n,k} a^{n-k} b^k$; termine generale $T_{k+1} = C_{n,k} a^{n-k} b^k$.
- Per scegliere il modello: si usano tutti gli oggetti? conta l'ordine? ci sono ripetizioni? gli oggetti sono distinti? Prova con numeri piccoli e attento a non contare due volte.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● In quanti modi si possono assegnare la medaglia d'oro, quella d'argento e quella di bronzo a 3 dei 10 finalisti di una gara?

   A. 120
   B. 720
   C. 1000
   D. 59 049

2. ● Quanto vale 0!?

   A. 1
   B. 0
   C. Non è definito
   D. Dipende dal contesto

3. ● Quanti sono i sottoinsiemi (compresi l'insieme vuoto e l'insieme stesso) di un insieme di 6 elementi?

   A. 6
   B. 36
   C. 64
   D. 720

4. ●● Quale delle seguenti uguaglianze è **falsa**?

   A. $C_{10,3} = C_{10,7}$
   B. $C_{9,4} = C_{8,3} + C_{8,4}$
   C. $C_{n,1} = n$
   D. $C_{n,k} = D_{n,k} \cdot k!$

5. ● Nello sviluppo di $(a + b)^5$ il coefficiente del termine a^2b^3 è:

   A. 5
   B. 10
   C. 20
   D. 15

6. ● In quanti modi si possono scegliere 3 gusti di gelato diversi tra 8, se l'ordine non conta?

   A. 56
   B. 336
   C. 512
   D. 120

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Per ogni n e ogni $k \leq n$ si ha $D_{n,k} \geq C_{n,k}$. b) $D'_{3,5}$ non ha senso, perché la classe 5 supera il numero 3 degli oggetti. c) Le permutazioni di n oggetti distinti sono le disposizioni semplici di classe n. d) La simmetria $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ vale solo per $k \leq n/2$.

8. ● Completa. Le combinazioni semplici sono raggruppamenti in cui l'ordine _____ e gli oggetti _____ ripetersi; il loro numero è $C_{n,k}$ = _____. Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k è _____. Il numero degli anagrammi di una parola di n lettere tutte diverse è _____.

Calcolare

9. ● Calcola: a) $D_{7,3}$; b) $D'_{4,3}$; c) P_6; d) $C_{9,4}$; e) $C'_{4,3}$.

10. ● Semplifica: a) $\frac{12!}{10!}$; b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ con $n \geq 1$; c) $\frac{n!}{(n-2)!} - n$ con $n \geq 2$.

11. ●● Risolvi le equazioni nell'incognita naturale n: a) $D_{n,2} = 30$; b) $C_{n,2} + C_{n,1} = 15$; c) $C_{n,3} = 2C_{n,2}$.

12. ● Quanti anagrammi, anche privi di significato, hanno le parole: a) LIBRO; b) BANANA; c) STATISTICA? d) Quanti anagrammi di MATEMATICA cominciano con M?

13. ●● Sviluppa con la formula del binomio di Newton: a) $(x + 2)^4$; b) $(2a - b)^5$.

14. ●● a) Trova il coefficiente di x^5 nello sviluppo di $(1 + 2x)^8$. b) Trova il termine che non contiene x nello sviluppo di $(x + \frac{1}{x})^6$.

15. ●● Nello sviluppo di $(x^2 - \frac{2}{x})^9$ trova il termine che contiene x^6 e il termine noto.

16. ●● Considera i numeri naturali di cinque cifre (la prima diversa da 0). Quanti sono: a) in tutto; b) con le cifre tutte diverse; c) palindromi (uguali letti da destra e da sinistra, come 12321); d) con almeno una cifra ripetuta?

17. ●● a) Quante soluzioni ha l'equazione $x + y + z + w = 6$ con x, y, z, w numeri naturali? b) E con x, y, z, w tutti maggiori o uguali a 1?

18. ● Calcola senza sviluppare i singoli termini: a) $C_{10,0} + C_{10,1} + \ldots + C_{10,10}$; b) $C_{10,1} + C_{10,2} + \ldots + C_{10,9}$; c) $C_{10,0} - C_{10,1} + C_{10,2} - \ldots + C_{10,10}$.

19. ● Dati 10 punti nel piano, a tre a tre non allineati (tre qualsiasi di essi non stanno mai su una stessa retta), quante rette passano per due di essi? Quanti triangoli hanno i vertici tra questi punti? Se i punti sono i vertici di un decagono convesso, quante sono le sue diagonali?

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra algebricamente che $k \cdot C_{n,k} = n \cdot C_{n-1,k-1}$ per $1 \le k \le n$. Poi dai una dimostrazione combinatoria, contando in due modi i comitati di k persone scelte tra n con un presidente scelto tra i membri del comitato.

21. ●● Usando la formula del binomio di Newton dimostra che, per $n \ge 1$, un insieme di n elementi ha tanti sottoinsiemi con un numero pari di elementi quanti con un numero dispari, e che sono 2^{n-1} ciascuno.

22. ●● Trova l'errore. «Da 6 ragazzi e 3 ragazze si forma un comitato di 4 persone con almeno una ragazza. Scelgo una ragazza in 3 modi e poi le altre 3 persone tra le 8 rimaste in $C_{8,3} = 56$ modi: i comitati sono $3 \cdot 56 = 168$.» Spiega dove sta l'errore e trova il risultato corretto.

23. ●●● Dimostra con un argomento combinatorio che $C_{n,0}^2 + C_{n,1}^2 + \ldots + C_{n,n}^2 = C_{2n,n}$. (Suggerimento: in un gruppo di n ragazze e n ragazzi si scelgono n persone; dividi secondo il numero k di ragazze scelte e usa la simmetria.) Verifica l'uguaglianza per $n = 4$.

24. ●● Su una griglia, un percorso minimo da A a B richiede m passi verso est e n verso nord. Spiega perché i percorsi minimi sono $C_{m+n,n}$, e perché questo numero è uguale a $C_{m+n,m}$ e a $\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$.

25. ●●● Dimostra per induzione che $n! \ge 2^{n-1}$ per ogni numero naturale $n \ge 1$.

Problemi

26. ●● Una password è formata da 8 caratteri scelti tra le 26 lettere minuscole e le 10 cifre. a) Quante password sono possibili? b) Quante non contengono nessuna cifra? c) Quante contengono almeno una cifra? d) Un programma prova un miliardo di password al secondo: quanto tempo impiega, al massimo, a provarle tutte?

27. ●● a) Un torneo di calcio tra 16 squadre si gioca con partite di andata e ritorno: ogni squadra incontra ogni altra due volte, una in casa e una in trasferta. Quante partite si giocano? b) E se si gioca solo l'andata? c) Alla festa di fine torneo 20 allenatori si stringono la mano a due a due: quante strette di mano ci sono?

28. ●● Una pizzeria offre una base a cui aggiungere ingredienti scelti tra 8, ciascuno al massimo una volta. Quante pizze diverse si possono ordinare: a) con esattamente 3 ingredienti aggiunti; b) con al massimo 3; c) in tutto (anche senza ingredienti aggiunti)?

29. ●● a) In quanti modi si possono distribuire 12 regali diversi a 3 bambini, 4 regali ciascuno? b) In quanti modi si possono distribuire 12 caramelle uguali tra 3 bambini (qualcuno può non riceverne)? c) E se ogni bambino deve riceverne almeno 2?

30. ●●● In un quartiere a griglia, per andare da casa (A) a scuola (B) Giulia deve percorrere 5 isolati verso est e 4 verso nord. a) Quanti percorsi minimi ci sono? b) Quanti passano per l'edicola E, che si trova 2 isolati a est e 2 a nord di A? c) Quanti evitano l'edicola?

Con il computer

31. ● In un foglio di calcolo scrivi nella colonna A i numeri da 1 a 30. Nella colonna B calcola $n!$ con la funzione fattoriale del foglio di calcolo, nella colonna C la potenza 2^n e nella D la potenza 10^n. Per quali n il fattoriale supera 2^n? E 10^n? Che cosa noti nella colonna B quando n diventa grande?

32. ●● Costruisci il triangolo di Tartaglia in un foglio di calcolo: metti 1 nelle celle della prima colonna e lascia vuote le altre celle della prima riga; dalla seconda riga in poi scrivi, in ogni cella delle colonne successive, una formula che sommi la cella sopra e quella sopra a sinistra, e copiala verso il basso e verso destra. Controlla qualche valore con la funzione del foglio che calcola le combinazioni e calcola la somma della riga 10. Infine usa la funzione che calcola le permutazioni di k oggetti scelti tra n (cioè le disposizioni $D_{n,k}$) per verificare che $D_{10,3} = 720 = C_{10,3} \cdot 3!$.

Verso la verifica

33. ●● Una classe ha 25 studenti. a) In quanti modi si possono eleggere 2 rappresentanti di classe (con lo stesso ruolo)? b) In quanti modi un presidente e un vicepresidente? c) In quanti ordini diversi possono entrare in aula uno alla volta? Esprimi l'ultimo risultato in notazione scientifica.

34. ●● a) Risolvi l'equazione $D_{n,3} = 20 \cdot C_{n,2}$. b) Per quale n il coefficiente di x^2 nello sviluppo di $(1 + x)^n$ è 28?

35. ●●● *Sfida.* Una scacchiera è un quadrato diviso in $8 \cdot 8$ caselle. a) Quanti rettangoli (di ogni dimensione, quadrati compresi) hanno i lati sulle linee della scacchiera? b) Quanti di essi sono quadrati? (Suggerimento per a): un rettangolo è individuato da due linee verticali e due orizzontali.)

PER APPROFONDIRE

- [FEL] Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I: il capitolo sull'analisi combinatoria, con molti problemi di conteggio legati alla probabilità.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come impostare un problema, provare su casi piccoli e controllare il risultato, strategie preziose nei problemi di conteggio.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il principio di induzione e la formula del binomio, con il triangolo dei coefficienti binomiali.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: il triangolo aritmetico in Cina e in Europa, Tartaglia e Pascal.

Glossario del capitolo

Binomio di Newton
La formula $(a+b)^n = \Sigma_{k=0}{}^{n}\, C_{n,k} a^{n-k} b^k$.

Calcolo combinatorio
L'insieme dei metodi per contare gli elementi di un insieme finito senza elencarli.

Coefficiente binomiale
Il numero $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi.

Combinazione con ripetizione
Raggruppamento non ordinato di k oggetti, anche ripetuti, scelti tra n tipi; sono $C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}$.

Combinazione semplice
Raggruppamento non ordinato di k oggetti diversi scelti tra n, cioè un sottoinsieme di k elementi; sono $C_{n,k}$.

Conteggio per complemento
Contare gli elementi che non hanno una proprietà sottraendo dal totale quelli che la hanno.

Diagramma ad albero
Schema in cui ogni tappa di una scelta è una ramificazione e ogni percorso dalla radice a una foglia è una scelta completa.

Disposizione con ripetizione
Raggruppamento ordinato di k oggetti, anche ripetuti, scelti tra n; sono $D'_{n,k} = n^k$.

Disposizione semplice
Raggruppamento ordinato di k oggetti diversi scelti tra n; sono $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Fattoriale
Il prodotto $n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ dei naturali da 1 a n; per definizione $0! = 1$.

Formula di Stifel
$C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$ per $1 \le k \le n-1$.

Permutazione
Ordinamento di tutti gli n oggetti di un insieme; sono $P_n = n!$.

Permutazione circolare
Disposizione di n oggetti attorno a un cerchio, a meno di rotazioni; sono $(n-1)!$.

Permutazione con ripetizione
Ordinamento di n oggetti uguali a gruppi di $k_1, \ldots, k_r$; sono $\dfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$.

Principio della somma
Il numero degli elementi dell'unione di insiemi disgiunti è la somma dei numeri dei loro elementi.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio
Se una scelta si compie in tappe con $n_1, n_2, \ldots, n_k$ possibilità, le scelte complessive sono $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Termine generale
Il termine $T_{k+1} = C_{n,k} a^{n-k} b^k$ dello sviluppo di $(a+b)^n$.

Triangolo di Tartaglia
La disposizione a triangolo dei coefficienti binomiali, in cui ogni numero interno è la somma dei due che gli stanno sopra.

Soluzioni

1. B. Conta l'ordine e un atleta non vince due medaglie: $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

2. A. Per definizione $0! = 1$, l'unico valore coerente con $n! = n \cdot (n-1)!$ per $n = 1$.

3. C. $C_{6,0} + C_{6,1} + \ldots + C_{6,6} = 2^6 = 64$.

4. D. È $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$, cioè $C_{n,k} = D_{n,k}/k!$. A è la simmetria, B la formula di Stifel ($126 = 56 + 70$), C è vera.

5. B. $C_{5,3} = 10$.

6. A. $C_{8,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$.

7. a) V: $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$ e $k! \geq 1$. b) F: nelle disposizioni con ripetizione la classe può superare n; $D'_{3,5} = 3^5 = 243$. c) V: $P_n = D_{n,n} = n!$. d) F: vale per ogni k con $0 \leq k \leq n$.

8. non conta; non possono; $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; n^k; $n!$.

9. a) $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. b) $4^3 = 64$. c) $6! = 720$. d) $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = 126$. e) $C_{6,3} = 20$.

10. a) $12 \cdot 11 = 132$. b) $(n+1)n = n^2 + n$. c) $n(n-1) - n = n^2 - 2n$.

11. a) $n(n-1) = 30$, $n^2 - n - 30 = 0$, $n = 6$ (la soluzione -5 non è accettabile). b) $\dfrac{n(n-1)}{2} + n = 15$, $n^2 + n - 30 = 0$, $n = 5$ (verifica: $10 + 5 = 15$). c) Con $n \geq 3$: $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = n(n-1)$, dividendo per $n(n-1) \neq 0$ si ha $n - 2 = 6$, $n = 8$ (verifica: $C_{8,3} = 56 = 2 \cdot 28$).

12. a) $5! = 120$. b) A tre volte, N due volte: $\dfrac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$. c) S 2, T 3, A 2, I 2, C 1: $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \dfrac{3\,628\,800}{48} = 75\,600$. d) Fissata la M iniziale restano A, A, A, T, T, E, M, I, C: $\dfrac{9!}{3! \cdot 2!} = 30\,240$.

13. a) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$. b) $32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$.

14. a) $T_6 = C_{8,5}(2x)^5 = 56 \cdot 32x^5$: il coefficiente è 1792. b) $T_{k+1} = C_{6,k}x^{6-2k}$; $6 - 2k = 0$ per $k = 3$: il termine è $C_{6,3} = 20$.

15. $T_{k+1} = C_{9,k}(x^2)^{9-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k = (-2)^k C_{9,k}x^{18-3k}$. Per x^6: $k = 4$, termine $16 \cdot 126x^6 = 2016x^6$. Termine noto: $k = 6$, $64 \cdot 84 = 5376$.

16. a) $9 \cdot 10^4 = 90\,000$. b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$. c) Le ultime due cifre sono determinate dalle prime due: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. d) Per complemento: $90\,000 - 27\,216 = 62\,784$.

17. a) Stelle e barre, 6 unità e 3 barre: $C'_{4,6} = C_{9,6} = C_{9,3} = 84$. b) Ponendo $x = x' + 1$ e così via, si ha $x' + y' + z' + w' = 2$ con incognite naturali: $C'_{4,2} = C_{5,2} = 10$.

18. a) $2^{10} = 1024$. b) Si tolgono $C_{10,0} = C_{10,10} = 1$: $1024 - 2 = 1022$. c) $(1-1)^{10} = 0$.

19. Rette: $C_{10,2} = 45$. Triangoli: $C_{10,3} = 120$. Diagonali: tutte le coppie meno i 10 lati, $45 - 10 = 35$ (in generale $\dfrac{n(n-3)}{2}$).

20. Algebra: $k \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot C_{n-1,k-1}$. Conteggio: si sceglie il comitato ($C_{n,k}$) e poi il presidente tra i suoi k membri, oppure prima il presidente tra le n persone e poi gli altri $k - 1$ membri tra le $n - 1$ rimaste; i due conteggi devono coincidere.

21. Da $(1-1)^n = 0$ si ha $C_{n,0} - C_{n,1} + C_{n,2} - \ldots = 0$: la somma dei $C_{n,k}$ con k pari (sottoinsiemi pari) è uguale a quella con k dispari. Le due somme insieme danno 2^n, quindi ciascuna vale 2^{n-1}.

22. Un comitato con due o tre ragazze viene contato più volte, una per ciascuna ragazza che può essere stata scelta «per prima». Corretto: $C_{9,4} - C_{6,4} = 126 - 15 = 111$.

23. Le scelte di n persone tra $2n$ sono $C_{2n,n}$. Quelle con k ragazze (e quindi $n - k$ ragazzi) sono $C_{n,k} \cdot C_{n,n-k} = C_{n,k}^2$; sommando su $k = 0, \ldots, n$ (casi disgiunti) si ottiene il primo membro. Per $n = 4$: $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = C_{8,4}$.

24. Ogni percorso è una parola di $m + n$ lettere con n lettere N e m lettere E, e viceversa; la parola è determinata dalle posizioni delle N, scelte tra $m + n$: $C_{m+n,n}$. Scegliere le posizioni delle N equivale a scegliere quelle delle E (simmetria), e il numero è anche quello delle permutazioni con ripetizione di $m + n$ lettere, m e n uguali tra loro.

25. Passo base: $1! = 1 = 2^0$. Passo induttivo: se $n! \geq 2^{n-1}$, allora $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \geq 2 \cdot n! \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, perché $n + 1 \geq 2$. c.v.d.

26. a) $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456 \approx 2{,}82 \cdot 10^{12}$. b) $26^8 = 208\,827\,064\,576$. c) $36^8 - 26^8 = 2\,612\,282\,842\,880$. d) $2{,}82 \cdot 10^{12} : 10^9 \approx 2821$ s, circa 47 minuti.

27. a) Coppie ordinate (squadra di casa; ospite): $D_{16,2} = 240$. b) Coppie non ordinate: $C_{16,2} = 120$. c) $C_{20,2} = 190$.

28. a) $C_{8,3} = 56$. b) $1 + 8 + 28 + 56 = 93$. c) Ogni sottoinsieme degli ingredienti: $2^8 = 256$.

29. a) $C_{12,4} \cdot C_{8,4} = 495 \cdot 70 = 34\,650 = \dfrac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$. b) $C'_{3,12} = C_{14,2} = 91$. c) Si danno prima 2 caramelle a ciascuno e si distribuiscono le 6 rimaste liberamente: $C_{8,2} = 28$.

30. a) $C_{9,4} = 126$. b) Da A a E: $C_{4,2} = 6$; da E a B (3 est, 2 nord): $C_{5,2} = 10$; in tutto $6 \cdot 10 = 60$. c) $126 - 60 = 66$.

31. $n! > 2^n$ per $n \geq 4$ ($4! = 24 > 16$); $n! > 10^n$ per $n \geq 25$. Per n grande il foglio mostra il fattoriale in notazione esponenziale (per esempio $20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$) e oltre una certa soglia arrotonda le ultime cifre: il valore non è più esatto.

32. La riga 10 è 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 (ogni valore coincide con $C_{10,k}$ dato dalla funzione delle combinazioni); la sua somma è $2^{10} = 1024$. La formula «sopra + sopra a sinistra» è la formula di Stifel; le celle a destra della diagonale valgono 0 e non fanno parte del triangolo. La funzione delle permutazioni dà $D_{10,3} = 720 = 120 \cdot 6$.

33. a) $C_{25,2} = 300$. b) $D_{25,2} = 600$. c) $25! \approx 1{,}55 \cdot 10^{25}$.

34. a) Con $n \geq 3$: $n(n - 1)(n - 2) = 10n(n - 1)$, quindi $n - 2 = 10$, $n = 12$ (verifica: $1320 = 20 \cdot 66$). b) $C_{n,2} = 28$, $n(n - 1) = 56$, $n = 8$.

35. a) Le linee verticali sono 9, e così quelle orizzontali: $C_{9,2} \cdot C_{9,2} = 36 \cdot 36 = 1296$. b) I quadrati di lato k caselle sono $(9 - k)^2$; sommando per k da 1 a 8: $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$.