CAPITOLO

12

I volumi dei solidi e il principio di Cavalieri

Taglia un solido in fette sottilissime: se le fette di due solidi sono uguali a ogni altezza, i solidi hanno lo stesso volume, qualunque forma abbiano.

OBIETTIVI

1. Definire il volume come misura dell'estensione e usare le proprietà di additività e il rapporto k^3 fra solidi simili.
2. Enunciare il principio di Cavalieri e usarlo per ricavare i volumi del prisma e del cilindro.
3. Dimostrare che la piramide è la terza parte del prisma e ricavare i volumi del cono e dei tronchi.
4. Ricavare il volume della sfera con l'anticlessidra e calcolare i volumi del segmento e del settore sferico.
5. Risolvere problemi su capacità, densità, solidi composti e solidi di rotazione.
6. Impostare semplici problemi di massimo e di minimo con la parabola, la goniometria e il foglio di calcolo.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Il volume e l'equivalenza dei solidi 2
12.2 Il principio di Cavalieri 5
12.3 Piramidi, coni e tronchi 8
12.4 Il volume della sfera 13
12.5 Problemi sui volumi 18

Matematica 4 · Parte IV · Geometria dello spazio · versione 1.0
Capitolo 12: I volumi dei solidi e il principio di Cavalieri · pagine 333–360 del volume completo · estratto per lo studio

Quanta acqua contiene una piscina? Quanto metallo serve per fondere una campana, quanto gelato sta in un cono, quanti litri d'aria respiriamo a ogni inspirazione? Sono tutte domande sul *volume*, cioè sulla porzione di spazio occupata da un corpo. Per i solidi più semplici le risposte erano note già nell'antichità: il cosiddetto papiro di Mosca, un testo egizio di quasi quattromila anni fa, contiene il calcolo corretto del volume di un tronco di piramide a base quadrata. Ma una cosa è conoscere una regola, un'altra è sapere *perché* funziona.

Nel capitolo 11 abbiamo studiato le superfici dei poliedri e dei solidi di rotazione: per calcolarle bastava *sviluppare* la superficie su un piano e usare le aree della geometria piana. Con i volumi non si può fare altrettanto, perché un solido non si «stende» su un piano. Serve un'idea nuova, ed è quella che il matematico Bonaventura Cavalieri formulò nel Seicento: confrontare due solidi *fetta per fetta*, tagliandoli con piani paralleli. Con il **principio di Cavalieri** ricaveremo, uno dopo l'altro, i volumi del prisma, del cilindro, della piramide, del cono, dei tronchi e infine della sfera, seguendo la via aperta da Archimede e ripresa da Galileo.

Nell'ultima parte useremo le formule per risolvere problemi di fisica, di scienze e di vita quotidiana, e affronteremo i primi *problemi di massimo*: fra tutti i cilindri contenuti in una sfera, qual è il più capiente? Useremo la similitudine, le sezioni dei solidi e le relazioni nei triangoli rettangoli del capitolo 11, la trigonometria del capitolo 6 e le proprietà della parabola (vedi *Matematica 3*).

12.1 Il volume e l'equivalenza dei solidi

12.1.1 Che cosa misura il volume

Un solido occupa una parte limitata dello spazio; la sua **estensione** è, intuitivamente, «quanto spazio occupa». Come per le aree dei poligoni, studiate nel primo biennio, non serve sapere che cosa sia l'estensione in sé: basta stabilire quando due solidi hanno la stessa estensione e come si sommano le estensioni. Due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti** (o *equiestesi*); in simboli scriviamo $S_1 \doteq S_2$. Ammettiamo queste proprietà, che corrispondono all'esperienza di chi riempie un recipiente d'acqua:

- due solidi congruenti sono equivalenti;
- se un solido è diviso in due parti che non hanno punti interni in comune, la sua estensione è la *somma* delle estensioni delle parti (**additività**);
- una parte propria di un solido ha estensione minore di quella dell'intero solido.

Ne segue che due solidi **equiscomponibili**, cioè divisibili in un ugual numero di parti rispettivamente congruenti, sono equivalenti. Il **volume** è la misura dell'estensione: fissato come unità

il cubo di spigolo 1 (il **cubo unitario**), il volume V di un solido è il numero reale positivo che dice quante volte l'unità è contenuta nel solido. Due solidi sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso volume.

Nel piano, due poligoni equivalenti sono sempre equiscomponibili: si può tagliare l'uno in pezzi e ricomporli nell'altro. Nello spazio non è così. All'inizio del Novecento il matematico tedesco Max Dehn dimostrò che un tetraedro regolare e un cubo dello stesso volume non si possono ottenere l'uno dall'altro tagliando e ricomponendo un numero finito di pezzi poliedrici. Per questo, già per il volume della piramide, il «taglia e ricomponi» non basta, e serve un principio di natura diversa: è il principio di Cavalieri del paragrafo successivo.

12.1.2 Il volume del parallelepipedo rettangolo

Consideriamo un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni a, b, c espresse da numeri interi, per esempio 4, 3 e 2. Lo possiamo riempire con cubi unitari: ogni strato contiene $4 \cdot 3 = 12$ cubi e gli strati sono 2, quindi i cubi sono 24 e il volume è 24. In generale, con dimensioni intere, gli strati sono c e ognuno contiene ab cubi.

Se le dimensioni sono razionali, per esempio $a = \frac{7}{3}$, si divide lo spigolo unitario in parti uguali: il cubo unitario contiene n^3 cubetti di spigolo $\frac{1}{n}$, ognuno di volume $\frac{1}{n^3}$, e si ripete il conteggio con i cubetti. Con dimensioni reali qualsiasi si approssimano a, b, c per difetto e per eccesso con numeri razionali, come abbiamo fatto per i numeri reali (vedi *Matematica 3*, cap. 8): il volume è compreso fra i prodotti delle approssimazioni, che si avvicinano quanto vogliamo ad abc. Accettiamo quindi il risultato in generale.

IN SINTESI

Volume del parallelepipedo rettangolo e del cubo. Un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c e un cubo di spigolo ℓ hanno volume

$$V = abc = B \cdot h \qquad V_{\text{cubo}} = \ell^3$$

dove $B = ab$ è l'area di una base e $h = c$ l'altezza relativa a quella base.

Le unità di volume derivano dalle unità di lunghezza: 1 cm^3 è il volume di un cubo di spigolo 1 cm. Poiché 1 dm = 10 cm, un decimetro cubo contiene $10^3 = 1000$ centimetri cubi; allo stesso modo 1 $\text{m}^3 = 1000$ dm^3. Per i liquidi si usa il **litro**, che è per definizione 1 dm^3. La **capacità** di un recipiente è il volume della sua cavità interna, cioè quanto liquido può contenere.

DA RICORDARE

$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{L}$; $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$; $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}$.
Ogni passaggio fra due unità di lunghezza consecutive moltiplica per 10 le lunghezze, per 100 le aree e per 1000 i volumi.

12.1.3 Solidi simili: il fattore k^3

Due solidi sono **simili** se uno è l'ingrandimento (o la riduzione) dell'altro, cioè se c'è una corrispondenza fra i loro punti che moltiplica tutte le distanze per uno stesso numero $k > 0$, il **rapporto di similitudine**. Nel capitolo 11 abbiamo visto che le aree di due solidi simili stanno nel rapporto k^2. Per i volumi il rapporto è k^3: un parallelepipedo rettangolo di dimensioni ka, kb, kc ha volume $ka \cdot kb \cdot kc = k^3 \cdot abc$. Poiché ogni solido si può approssimare quanto si vuole con unioni di cubetti, e ogni cubetto di spigolo ℓ diventa un cubetto di spigolo $k\ell$, il risultato vale per qualunque coppia di solidi simili.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: due solidi sono simili con rapporto di similitudine k. **Tesi:** le loro superfici stanno nel rapporto k^2 e i loro volumi nel rapporto k^3.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una piramide di volume $240\ \text{cm}^3$ è tagliata da un piano parallelo alla base che passa per il punto medio dell'altezza. Calcola i volumi delle due parti.

Soluzione. Il piano stacca una piccola piramide simile alla piramide data, con lo stesso vertice: la sua altezza è metà dell'altezza della piramide intera e, per la similitudine, ogni sua lunghezza è la metà della lunghezza corrispondente. Il rapporto di similitudine è $k = \frac{1}{2}$, quindi il rapporto dei volumi è $k^3 = \frac{1}{8}$. La piccola piramide ha volume $240 : 8 = 30\ \text{cm}^3$ e la parte restante, un tronco di piramide, ha volume $240 - 30 = 210\ \text{cm}^3$.

Osservazione. Il piano taglia l'altezza a metà, ma la parte vicina al vertice contiene solo un ottavo del volume. Per dividere la piramide in due parti di ugual volume bisognerebbe tagliarla con $k^3 = \frac{1}{2}$, cioè a una distanza dal vertice pari a $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}794$ volte l'altezza.

ERRORE FREQUENTE

Moltiplicare il volume per k invece che per k^3. Se si raddoppiano tutte le dimensioni di una scatola, il volume non raddoppia ma diventa $2^3 = 8$ volte; la superficie, invece, diventa $2^2 = 4$ volte. Allo stesso modo un modellino in scala 1 : 100 ha un volume pari a un milionesimo di quello reale.

Convertire le unità di volume come quelle di lunghezza. 1 m = 100 cm, ma 1 $m^3 = 100^3$ $cm^3 = 1\,000\,000$ cm^3, e non 100 cm^3. Prima di calcolare, esprimi tutte le lunghezze nella stessa unità.

COLLEGAMENTI

Biologia e fisica. Il fattore k^3 dei volumi contro il fattore k^2 delle superfici spiega molti fenomeni. Il peso di un animale è proporzionale al volume, mentre la resistenza delle ossa dipende dall'area della loro sezione: nei *Discorsi* del 1638 Galileo osservò che un animale ingrandito in tutte le proporzioni avrebbe bisogno di ossa via via più grosse, in proporzione, per non spezzarsi sotto il proprio peso. Per la stessa ragione una cellula non può crescere oltre una certa misura: le sostanze entrano ed escono attraverso la membrana, la cui superficie cresce come k^2, mentre il fabbisogno cresce con il volume, come k^3; il rapporto fra superficie e volume diminuisce come $\frac{1}{k}$. E un cubetto di ghiaccio tritato si scioglie prima di un cubetto intero: a parità di volume, i pezzi piccoli espongono una superficie totale maggiore.

12.2 Il principio di Cavalieri

12.2.1 Confrontare due solidi fetta per fetta

Prendiamo una pila di monete uguali e spingiamola di lato, in modo che le monete scivolino una sull'altra e la pila diventi inclinata (Figura 12.1). La forma è cambiata, ma il volume no: le monete sono le stesse. Se tagliamo le due pile con un piano parallelo al piano del tavolo, otteniamo nei due casi lo stesso cerchio, la faccia di una moneta. Il principio di Cavalieri trasforma questa osservazione in uno strumento generale: per confrontare due solidi non serve scomporli, basta confrontare le loro **sezioni** con piani paralleli.

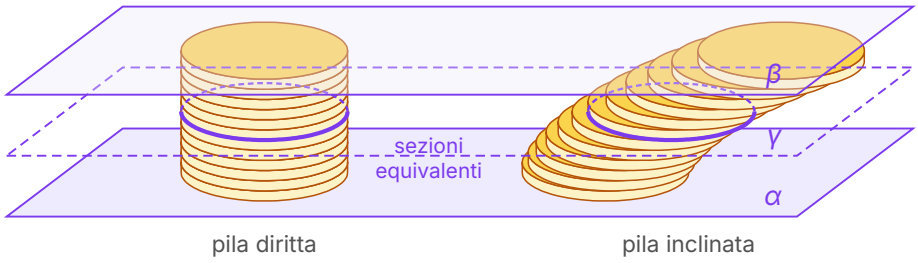


Figura 12.1 Due pile di 12 monete uguali appoggiate sul piano α, una diritta e una inclinata, alte entrambe fino al piano β. Ogni piano γ parallelo ad α le taglia secondo due cerchi congruenti, quindi le due pile hanno lo stesso volume.

IN SINTESI

Principio di Cavalieri. Siano dati due solidi e un piano α. Se ogni piano parallelo ad α che interseca uno dei due solidi interseca anche l'altro, e le due sezioni sono *equivalenti* (hanno la stessa area), allora i due solidi sono equivalenti.

In questo libro il principio di Cavalieri è un *postulato*: lo accettiamo senza dimostrazione, come gli assiomi della geometria. Con il calcolo integrale, che studierai il prossimo anno, potrà essere dimostrato. Nota che l'ipotesi riguarda *ogni* piano parallelo ad α: le sezioni corrispondenti devono essere equivalenti *a ogni altezza*, e quindi i due solidi sono compresi fra gli stessi due piani paralleli ad α. Non basta che *alcune* sezioni coincidano: due solidi qualsiasi della stessa altezza possono avere la stessa sezione a metà altezza e volumi del tutto diversi.

APPROFONDIMENTO · CAVALIERI E GLI INDIVISIBILI

Bonaventura Cavalieri (1598–1647), frate dell'ordine dei Gesuati e professore di matematica all'Università di Bologna, era in corrispondenza con Galileo, di cui si considerava discepolo. Nel 1635 pubblicò la *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* («Geometria degli indivisibili dei continui, sviluppata con un metodo nuovo»). L'idea era di pensare una figura piana come formata da tutte le sue corde parallele e un solido come formato da tutte le sue sezioni piane parallele, gli «indivisibili», e di confrontare due figure confrontando i loro indivisibili.

L'idea aveva radici antiche. Archimede, nel trattato oggi chiamato *Il metodo*, scriveva di aver scoperto alcuni suoi risultati immaginando i solidi come composti da sezioni sottilissime e «pesandole» su una leva, e attribuiva a Democrito la scoperta che il cono è la terza parte del cilindro con la stessa base e la stessa altezza. Quel trattato era però andato perduto: fu ritrovato solo nel 1906, quando il filologo danese J. L. Heiberg lo lesse in un palinsesto, un codice medievale il cui testo antico era stato raschiato e coperto da un altro testo. Il metodo degli indivisibili fu criticato per la sua scarsa rigorosità, ma aprì la strada al calcolo integrale.

12.2.2 Il volume del prisma e del cilindro

Sia dato un prisma qualsiasi, retto o obliquo, con base di area B e altezza h. Accanto a lui, appoggiato sullo stesso piano α, mettiamo un parallelepipedo rettangolo con base equivalente, per esempio un rettangolo di lati B e 1, e con la stessa altezza h. Ogni piano parallelo ad α che taglia uno dei due solidi taglia anche l'altro, perché entrambi stanno fra α e il piano parallelo a distanza h. La sezione del prisma è un poligono congruente alla base, perché le sezioni di un prisma parallele alla base sono tutte congruenti (capitolo 11), quindi ha area B; la sezione del parallelepipedo è un rettangolo di area B. Per il principio di Cavalieri i due solidi sono equivalenti, e il volume del prisma è quello del parallelepipedo: $V = B \cdot h$.

Lo stesso ragionamento vale per il **cilindro**, retto od obliquo, con base un cerchio di raggio r: le sue sezioni parallele alla base sono cerchi congruenti alla base, di area πr^2. Confrontandolo con un prisma di base equivalente e uguale altezza si ottiene $V = \pi r^2 h$.

IN SINTESI

Volume del prisma e del cilindro. Un prisma, o un cilindro, retto od obliquo, con base di area B e altezza h ha volume

$$V = B \cdot h \quad \text{in particolare, per il cilindro di raggio } r\text{:} \quad V = \pi r^2 h.$$

Prismi e cilindri con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un prisma obliquo ha per base un esagono regolare di lato 2 cm; gli spigoli laterali sono lunghi 10 cm e formano con il piano della base un angolo di 60°. Calcola il volume.

Soluzione. L'esagono regolare di lato ℓ è formato da sei triangoli equilateri di lato ℓ, quindi ha area $B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2$; con $\ell = 2$ cm, $B = 6\sqrt{3}$ cm². L'altezza del prisma è la distanza fra i piani delle due basi. Da un estremo di uno spigolo laterale conduciamo la perpendicolare al piano della base: lo spigolo, la sua proiezione sul piano e la perpendicolare formano un triangolo rettangolo in cui lo spigolo è l'ipotenusa e l'angolo fra spigolo e proiezione è l'angolo fra lo spigolo e il piano (capitolo 10). Quindi

$$h = 10 \operatorname{sen} 60° = 5\sqrt{3}\ \text{cm} \quad \text{e} \quad V = B \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 90\ \text{cm}^3.$$

Controllo. Un prisma retto con la stessa base e spigoli laterali di 10 cm avrebbe volume $60\sqrt{3} \approx 103{,}9$ cm³: inclinando gli spigoli l'altezza diminuisce, e con lei il volume. A parità di *altezza*, invece, il prisma obliquo e quello retto hanno lo stesso volume.

12.3 Piramidi, coni e tronchi

12.3.1 Le sezioni di una piramide

Nel capitolo 11 abbiamo visto che un piano parallelo alla base di una piramide, a distanza d dal vertice, taglia la piramide secondo un poligono simile alla base, con rapporto di similitudine $\frac{d}{h}$, dove h è l'altezza della piramide. Se la base ha area B, la sezione ha quindi area

$$B_d = B \cdot \frac{d^2}{h^2}.$$

Prendiamo ora due piramidi con basi equivalenti, di area B, e con la stessa altezza h, appoggiate sullo stesso piano. Un piano parallelo alle basi, a distanza d dai vertici, le taglia entrambe in sezioni di area $B\,\frac{d^2}{h^2}$: le sezioni sono equivalenti a ogni altezza, anche se le basi hanno forme diverse (un triangolo e un quadrato, per esempio). Per il principio di Cavalieri:

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: due piramidi hanno basi equivalenti e altezze congruenti. **Tesi:** le due piramidi sono equivalenti.

Questo teorema riduce il problema del volume di una piramide qualsiasi al volume di *una* piramide particolare con la stessa altezza e base equivalente: per esempio una piramide a base triangolare.

12.3.2 La piramide è la terza parte del prisma

Consideriamo un prisma triangolare $ABCDEF$, con basi ABC e DEF e spigoli laterali AD, BE, CF (Figura 12.2). Tagliamolo con il piano ABF e con il piano AEF: il prisma si divide in tre piramidi a base triangolare (tre **tetraedri**):

$$T_1 = ABCF, \quad T_2 = ABEF, \quad T_3 = ADEF.$$

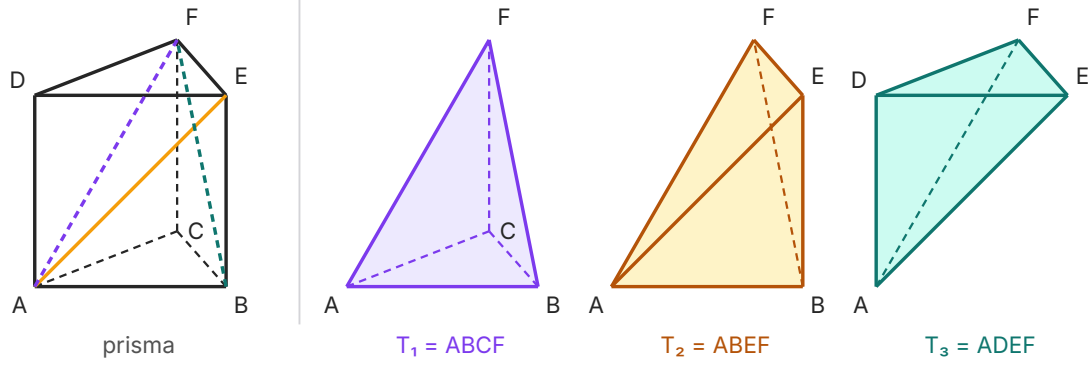


Figura 12.2 Il prisma triangolare $ABCDEF$ tagliato dai piani ABF e AEF (le diagonali AE, BF e AF sulle facce laterali) e le tre piramidi che si ottengono, disegnate separate in assonometria cavaliera; gli spigoli nascosti sono tratteggiati.

Dimostriamo che le tre piramidi sono equivalenti, usando il teorema precedente: due piramidi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti. Ricorda che una piramide triangolare si può vedere in quattro modi diversi, scegliendo come base una qualunque delle sue quattro facce e come vertice il punto opposto.

1. **T_1 e T_3.** T_1 ha base ABC e vertice F; T_3 ha base DEF e vertice A. Le basi sono le due basi del prisma, quindi sono congruenti; le altezze sono entrambe la distanza fra i piani delle basi, cioè l'altezza h del prisma. Quindi $T_1 \doteq T_3$.
2. **T_2 e T_3.** Guardiamo entrambe dal vertice F: T_2 ha base ABE e T_3 ha base ADE. I due triangoli stanno nella faccia laterale $ABED$, che è un parallelogramma, e la diagonale AE la divide in due triangoli congruenti. Le altezze sono entrambe la distanza di F dal piano $ABED$. Quindi $T_2 \doteq T_3$.

3. **T_1 e T_2.** Guardiamo entrambe dal vertice A: T_1 ha base BCF e T_2 ha base BEF, le due metà del parallelogramma $BCFE$ divise dalla diagonale BF; le altezze sono la distanza di A dal piano $BCFE$. Quindi $T_1 \doteq T_2$.

Le tre piramidi hanno dunque lo stesso volume, e insieme formano il prisma, di volume $B \cdot h$. Ognuna ha volume $\frac{1}{3}\,B\,h$; in particolare T_1 è una piramide con la stessa base e la stessa altezza del prisma. Una piramide qualsiasi di base B e altezza h è equivalente a una piramide triangolare con base equivalente e la stessa altezza, quindi ha anch'essa volume $\frac{1}{3}Bh$. c.v.d.

È la dimostrazione del libro XII degli *Elementi* di Euclide (proposizione 7), con una differenza: Euclide non disponeva del principio di Cavalieri e dimostrava che piramidi con basi equivalenti e uguale altezza sono equivalenti con il *metodo di esaustione*, un raffinato ragionamento per assurdo attribuito a Eudosso di Cnido.

12.3.3 Il cono

Un **cono** di raggio r e altezza h si confronta con una piramide di base equivalente (un quadrato di area πr^2, per esempio) e della stessa altezza. A distanza d dal vertice la sezione del cono è un cerchio di raggio $r\,\frac{d}{h}$, di area $\pi r^2\,\frac{d^2}{h^2}$, e la sezione della piramide ha area $\pi r^2\,\frac{d^2}{h^2}$: sono equivalenti. Per il principio di Cavalieri il cono ha volume $\frac{1}{3}\pi r^2\,h$: è la terza parte del cilindro con la stessa base e la stessa altezza, come affermava Democrito e come dimostrò Euclide (*Elementi*, XII, 10).

IN SINTESI

Volume della piramide e del cono. Una piramide o un cono, retti od obliqui, con base di area B e altezza h hanno volume

$$V = \frac{1}{3}\,B \cdot h \quad \text{in particolare, per il cono di raggio } r\text{:} \quad V = \frac{1}{3}\,\pi r^2\,h.$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un cono retto ha raggio di base 5 cm e apotema 13 cm. Calcola il volume e la superficie totale.

Soluzione. L'altezza h, il raggio r e l'apotema a formano un triangolo rettangolo in cui l'apotema è l'ipotenusa (capitolo 11):

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

Il volume è $V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314{,}16 \text{ cm}^3$. La superficie laterale è $S_l = \pi r a = 65\pi \text{ cm}^2$, la base ha area $25\pi \text{ cm}^2$, quindi $S_t = 90\pi \approx 282{,}74 \text{ cm}^2$.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare il fattore $\frac{1}{3}$. Piramidi e coni hanno volume $\frac{1}{3}Bh$, non Bh: il volume Bh è quello del prisma o del cilindro con la stessa base e la stessa altezza.

Usare l'apotema al posto dell'altezza. Nella formula del volume compare l'*altezza*, cioè la distanza del vertice dal piano della base. L'apotema, più lungo, serve per la superficie laterale. Nell'esempio precedente, usare $a = 13$ al posto di $h = 12$ darebbe $\frac{325}{3}\pi$ invece di 100π.

12.3.4 I tronchi di piramide e di cono

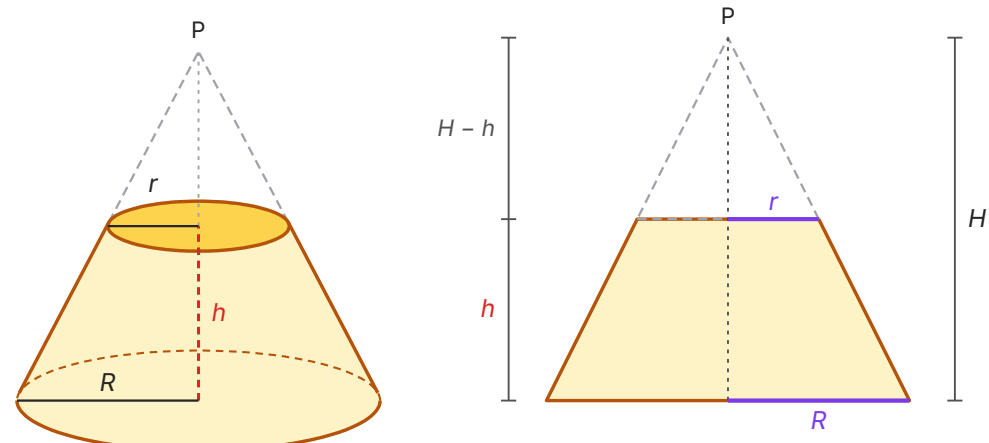
Un **tronco di piramide** è la parte di piramide compresa fra la base e un piano parallelo alla base. Siano B e b le aree della base maggiore e della base minore e h l'altezza del tronco, cioè la distanza fra i piani delle basi. Il tronco è la differenza fra la piramide intera, di altezza H, e la piramide che il piano stacca vicino al vertice, di altezza $H - h$ (Figura 12.3 mostra il caso del cono). Le due piramidi sono simili con rapporto $\frac{H-h}{H}$, quindi

$$\frac{b}{B} = \frac{(H-h)^2}{H^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} = \frac{H-h}{H}, \quad \text{da cui} \quad H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Il volume del tronco è $V = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}b(H-h)$. Poiché $H - h = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$, si ha

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la differenza di cubi $B\sqrt{B} - b\sqrt{b} = (\sqrt{B})^3 - (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{B} - \sqrt{b})(B + \sqrt{Bb} + b)$. Il risultato non dipende più da H: per calcolare il volume del tronco non serve completare la piramide. Per il **tronco di cono** di raggi R e r si ha $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ e $\sqrt{Bb} = \pi Rr$.



a) il tronco e il cono che lo completa b) la sezione assiale

Figura 12.3 a) Il tronco di cono di raggi R e r e altezza h è la parte di un cono di vertice P e altezza H (tratteggiato il piccolo cono tolto). b) Nella sezione assiale i due triangoli con vertice P sono simili: $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$; qui $R = 1{,}2$, $r = 0{,}6$, $h = 1{,}2$ e quindi $H = 2{,}4$.

IN SINTESI

Volume dei tronchi. Un tronco di piramide con basi di area B e b e un tronco di cono con raggi R e r, di altezza h, hanno volume

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) \qquad V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Con $b = 0$ si ritrova la piramide; con $b = B$ si ottiene $V = Bh$, il prisma.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un secchio ha la forma di un tronco di cono con diametro del fondo 20 cm, diametro della bocca 30 cm e altezza 30 cm (misure interne, dati inventati). Quanti litri contiene?

Soluzione. I raggi sono $R = 15$ cm e $r = 10$ cm, e $h = 30$ cm. Allora

$$V = \frac{\pi \cdot 30}{3}(225 + 150 + 100) = 10\pi \cdot 475 = 4750\pi \approx 14\,923 \text{ cm}^3.$$

Poiché 1 L = 1000 cm^3, il secchio contiene circa 14,9 L.

Controllo. Il risultato deve stare fra il volume del cilindro di raggio 10 cm, 3000π cm^3, e quello del cilindro di raggio 15 cm, 6750π cm^3, entrambi alti 30 cm: è così. Un errore comune è usare la «base media» $\frac{B+b}{2}$, che darebbe 4875π cm^3, un valore troppo grande. Con i raggi medi, invece, $r_m = 12{,}5$ cm, si otterrebbe $4687{,}5\pi$ cm^3, troppo piccolo: la formula esatta sta in mezzo.

12.4 Il volume della sfera

12.4.1 La sfera e l'anticlessidra

Per la sfera non esiste un poliedro con le stesse sezioni, ma si può costruire un solido più semplice che ha le stesse sezioni di una semisfera. Consideriamo una semisfera di raggio r appoggiata sul piano α con la faccia piana, e accanto un cilindro di raggio r e altezza r dal quale è stato tolto un cono con il vertice nel centro della base inferiore e la base coincidente con la base superiore del cilindro (Figura 12.4). Il solido che rimane si chiama, per la sua forma, **anticlessidra**: se lo si completa con il simmetrico rispetto al piano α si ottiene un cilindro alto $2r$ da cui sono stati tolti due coni opposti al vertice, cioè una «clessidra».

Tagliamo i due solidi con un piano γ parallelo ad α, a distanza t da α, con $0 \le t \le r$.

- **Semisfera.** La sezione è un cerchio. Il suo raggio ρ, il segmento lungo t che congiunge il centro della semisfera al centro del cerchio e un raggio r della sfera formano un triangolo rettangolo, quindi $\rho^2 = r^2 - t^2$ (capitolo 11) e l'area della sezione è $\pi(r^2 - t^2)$.
- **Anticlessidra.** La sezione è una corona circolare. Il cerchio esterno è la sezione del cilindro, di raggio r. Il cerchio interno è la sezione del cono, il cui raggio cresce in proporzione alla distanza dal vertice: alla distanza r è uguale a r, quindi alla distanza t è uguale a t. L'area della corona è $\pi r^2 - \pi t^2 = \pi(r^2 - t^2)$.

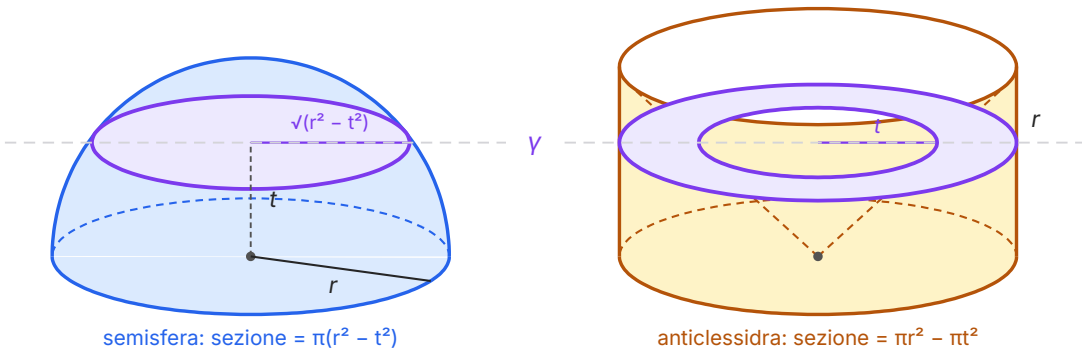


Figura 12.4 La semisfera di raggio r e metà dell'anticlessidra (cilindro di raggio r e altezza r meno un cono), tagliate dallo stesso piano γ a distanza t dal piano della base. Qui $r = 1$ e $t = 0{,}6$: le due sezioni hanno la stessa area $\pi(1 - 0{,}36) = 0{,}64\pi$.

Le sezioni sono equivalenti a ogni altezza, quindi per il principio di Cavalieri la semisfera è equivalente alla metà dell'anticlessidra, e la sfera all'anticlessidra intera. Il volume dell'anticlessidra è quello del cilindro di raggio r e altezza $2r$ meno quello di due coni di raggio r e altezza r:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

IN SINTESI

Volume della sfera. Una sfera di raggio r ha volume e superficie (capitolo 11)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad S = 4\pi r^2.$$

Il volume della sfera è i $\frac{2}{3}$ del volume del cilindro circoscritto ($2\pi r^3$); anche la superficie della sfera è i $\frac{2}{3}$ della superficie totale del cilindro circoscritto ($2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$).

APPROFONDIMENTO · LA SCODELLA DI GALILEO

Nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, pubblicati a Leida nel 1638, Galileo propone un confronto molto vicino al nostro. Da un cilindro si toglie la semisfera inscritta: resta un solido a forma di *scodella*. Accanto si considera un cono con la stessa base e la stessa altezza del cilindro. Galileo mostra che, tagliando i due solidi con piani paralleli alla base, le sezioni della scodella (corone circolari) e quelle del cono (cerchi) sono sempre equivalenti, e che quindi la scodella e il cono hanno lo stesso volume. Ne trae poi un paradosso che fa discutere i suoi personaggi: avvicinando il piano all'orlo, la corona si riduce a una circonferenza e il cerchio a un punto, e sembra che una circonferenza possa essere «uguale» a un punto. Il paradosso mostra quanto fosse delicato ragionare con gli indivisibili.

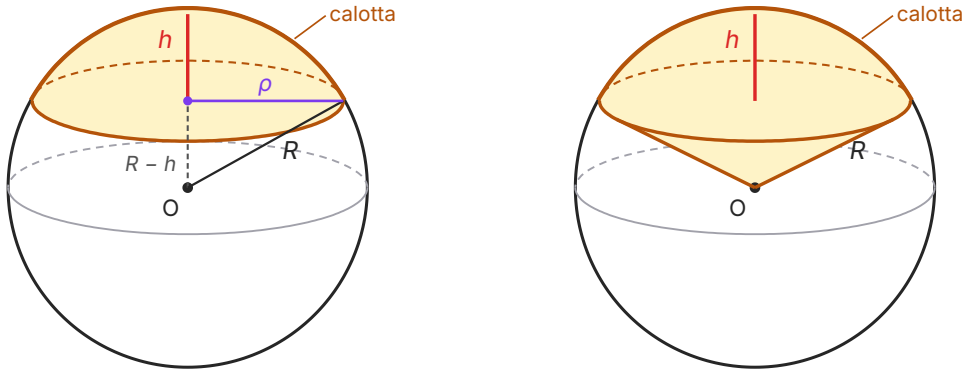
La scodella di Galileo è il confronto «complementare» del nostro: lì si toglie dal cilindro la semisfera e resta un solido equivalente al cono, qui si toglie il cono e resta un solido equivalente alla semisfera. Il calcolo è lo stesso: $\pi r^2 - \pi(r^2 - t^2) = \pi t^2$.

APPROFONDIMENTO · ARCHIMEDE, LA SFERA E IL CILINDRO

Nel trattato *Sulla sfera e sul cilindro* Archimede di Siracusa (III secolo a.C.) dimostrò che la sfera è i due terzi del cilindro circoscritto, sia nel volume sia nella superficie. Secondo la tradizione considerava questo il suo risultato più bello: Plutarco, nella *Vita di Marcello*, racconta che chiese di porre sulla sua tomba un cilindro con una sfera inscritta e il rapporto fra i due solidi. Cicerone, nelle *Tusculanae disputationes*, narra che durante il suo incarico in Sicilia ritrovò la tomba, dimenticata dai Siracusani e nascosta dai rovi, riconoscendola proprio dalla figura della sfera e del cilindro.

12.4.2 Segmento sferico e settore sferico

Un piano che taglia una sfera di raggio R la divide in due **segmenti sferici a una base**; la parte di superficie sferica che delimita ciascuno di essi è una *calotta* (capitolo 11). L'**altezza** h del segmento è la distanza fra il piano e il punto della sfera più lontano da esso (Figura 12.5 a). Per calcolarne il volume usiamo ancora l'anticlessidra, questa volta intera, con il piano α per il centro della sfera e la variabile t che misura la distanza da α.



a) segmento sferico a una base

b) settore sferico

Figura 12.5 a) Il segmento sferico a una base di altezza h in una sfera di raggio R: il cerchio di base ha raggio $\rho = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$. b) Il settore sferico: il segmento sferico insieme al cono con il vertice nel centro O e la stessa base. Qui $R = 1$ e $h = 0{,}5$.

Il segmento di altezza h è la parte di sfera con $R - h \le t \le R$. La parte di anticlessidra fra le stesse altezze ha le stesse sezioni, quindi lo stesso volume: è un cilindro di raggio R e altezza h, di volume $\pi R^2 h$, meno un tronco di cono di raggi R e $R - h$ e altezza h, che è la differenza fra un cono di raggio e altezza R e un cono di raggio e altezza $R - h$. Quindi

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}[R^3 - (R-h)^3] = \pi R^2 h - \frac{\pi}{3}(3R^2 h - 3Rh^2 + h^3) = \pi R h^2 - \frac{\pi}{3}h^3.$$

Il **settore sferico** che consideriamo è il solido generato dalla rotazione di un settore circolare attorno a una retta che contiene uno dei suoi raggi: nella Figura 12.5 b è l'unione del segmento sferico e del cono che ha il vertice nel centro O e la stessa base del segmento. Il suo volume è $\frac{2}{3}\pi R^2 h$, dove h è l'altezza della calotta; lo verifichiamo per la semisfera, che è un settore con $h = R$: $\frac{2}{3}\pi R^3$, cioè metà di $\frac{4}{3}\pi R^3$. Negli esercizi lo dimostrerai in generale, sommando il volume del segmento e quello del cono.

IN SINTESI

Parti della sfera. In una sfera di raggio R, il segmento sferico a una base di altezza h e il settore sferico la cui calotta ha altezza h hanno volume

$$V_{\text{seg}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \quad V_{\text{set}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Con $h = R$ il segmento è la semisfera: $\pi R^2 \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^3$. Con $h = 2R$ è la sfera intera: $4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una ciotola emisferica ha raggio interno 12 cm. Si versa acqua fino a 4 cm di profondità. Quanta acqua contiene la ciotola? Che frazione della sua capacità è occupata?

Soluzione. L'acqua forma un segmento sferico a una base con $R = 12$ cm e $h = 4$ cm (la base è la superficie dell'acqua, il punto più lontano è il fondo della ciotola):

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \left(12 - \frac{4}{3}\right) = 16\pi \cdot \frac{32}{3} = \frac{512}{3}\pi \approx 536{,}2 \text{ cm}^3.$$

La capacità della ciotola è $\frac{2}{3}\pi \cdot 12^3 = 1152\pi$ cm^3, quindi la frazione occupata è $\frac{512}{3 \cdot 1152} = \frac{4}{27} \approx 0{,}148$: un terzo della profondità, ma meno del 15% della capacità, perché la ciotola è stretta sul fondo. Il raggio della superficie dell'acqua è $\rho = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ cm.

Tabella 12.1 I volumi dei solidi studiati nel capitolo.

Solido	Dati	Volume
prisma, cilindro (retti od obliqui)	base B, altezza h	$V = Bh$; cilindro $\pi r^2 h$
parallelepipedo rettangolo, cubo	dimensioni a, b, c; spigolo ℓ	$V = abc$; $V = \ell^3$
piramide, cono	base B, altezza h	$V = \frac{1}{3}Bh$; cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
tronco di piramide	basi B, b, altezza h	$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$
tronco di cono	raggi R, r, altezza h	$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$
sfera	raggio r	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
segmento sferico a una base	raggio R, altezza h	$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$
settore sferico	raggio R, altezza della calotta h	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

12.5 Problemi sui volumi

12.5.1 Capacità, densità e massa

In fisica e in chimica il volume compare quasi sempre insieme alla massa. La **densità** di una sostanza omogenea è il rapporto fra la massa m di un suo campione e il volume V del campione, $d = \frac{m}{V}$; si misura in kg/m^3 o in g/cm^3 (1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3). Nota la densità, il volume dà la massa: $m = d \cdot V$. L'acqua ha densità di circa 1 g/cm^3, quindi un litro d'acqua ha massa di circa 1 kg.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una sfera di acciaio ha diametro 4 cm e l'acciaio ha densità 7,8 g/cm^3. Calcola la massa della sfera. Se la sfera viene fusa e il metallo è usato per fare sferette di diametro 1 cm, quante sferette si ottengono, trascurando le perdite?

Soluzione. Il raggio è 2 cm, quindi $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$ cm^3 e $m = 7{,}8 \cdot 33{,}51 \approx 261$ g. Le sferette sono simili alla sfera con rapporto $k = \frac{1}{4}$, quindi ognuna ha volume $\frac{1}{64}$ di quello della sfera: si ottengono 64 sferette. Non serve calcolare il volume: basta il fattore k^3.

COLLEGAMENTI

Fisica. Il principio di Archimede dice che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale al peso del fluido spostato, cioè al prodotto della densità del fluido per il volume immerso e per l'accelerazione di gravità. Calcolare un volume è quindi il primo passo per sapere se un oggetto galleggia: un corpo omogeneo galleggia nell'acqua se la sua densità è minore di quella dell'acqua. La leggenda racconta che Archimede avrebbe usato l'acqua spostata per misurare il volume della corona del re Gerone, irregolare e impossibile da misurare con le formule; è un aneddoto riferito molto tempo dopo da Vitruvio, e non sappiamo se sia vero, ma il metodo funziona: il volume di un oggetto irregolare è il volume d'acqua che sposta.

12.5.2 Solidi composti e solidi di rotazione

Molti oggetti si possono scomporre in solidi elementari: un silo è un cilindro sormontato da un cono, una capsula è un cilindro con due semisfere alle estremità. Per l'additività il volume è la somma dei volumi delle parti; quando invece un solido è ottenuto *togliendo* una parte, si sottrae.

I **solidi di rotazione** generati da poligoni sono un caso importante. Facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a un cateto si ottiene un cono; facendolo ruotare attorno all'ipotenusa si ottengono *due* coni con la base in comune, il cui raggio è l'altezza relativa all'ipotenusa. Un trapezio rettangolo che ruota attorno al lato perpendicolare alle basi genera un tronco di cono; ruotando attorno alla base maggiore genera un cilindro sormontato da un cono.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo rettangolo ha cateti di 3 cm e 4 cm. Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa, e confrontalo con i volumi ottenuti facendolo ruotare attorno a ciascun cateto.

Soluzione. L'ipotenusa misura 5 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa è $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ cm. Il piede H dell'altezza divide l'ipotenusa in due segmenti h_1 e h_2, con $h_1 + h_2 = 5$; il solido è formato da due coni di raggio $\frac{12}{5}$ e altezze h_1 e h_2, quindi

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{48}{5}\pi \approx 30{,}16 \text{ cm}^3.$$

Non è servito calcolare h_1 e h_2, ma solo la loro somma. Ruotando attorno al cateto di 4 cm si ottiene un cono di raggio 3 cm e altezza 4 cm, di volume 12π cm^3; attorno al cateto di 3 cm, un cono di raggio 4 cm e altezza 3 cm, di volume 16π cm^3. Il volume è minimo nella rotazione attorno all'ipotenusa, perché i punti del triangolo sono, in media, più vicini all'asse di rotazione: è il contenuto del teorema di Pappo-Guldino.

APPROFONDIMENTO · IL TEOREMA DI PAPPO-GULDINO

Pappo di Alessandria, matematico del IV secolo d.C., enunciò nella sua *Collezione matematica* una regola ritrovata e studiata nel Seicento dal gesuita svizzero Paul Guldin (Guldino): *il volume del solido generato dalla rotazione di una figura piana attorno a una retta del suo piano che non la attraversa è uguale al prodotto dell'area della figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro*,

$$V = A \cdot 2\pi d,$$

dove A è l'area e d la distanza del baricentro dall'asse. Verifichiamola sul cono: il triangolo rettangolo di cateti r e h ruota attorno al cateto h; il suo baricentro dista $\frac{r}{3}$ dall'asse (il baricentro di un triangolo ha per coordinate le medie delle coordinate dei vertici), quindi $V = \frac{rh}{2} \cdot 2\pi \frac{r}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Un cerchio di raggio r che ruota attorno a una retta distante $R > r$ dal centro genera un **toro**, la forma di una ciambella: il suo volume è $\pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$. La dimostrazione del teorema richiede il calcolo integrale.

12.5.3 Problemi di massimo e di minimo

In molti problemi una forma non è assegnata del tutto: dipende da una grandezza che possiamo scegliere, e cerchiamo la scelta che rende massima o minima un'altra grandezza. Senza il calcolo differenziale, che studierai il prossimo anno, sappiamo già risolvere i casi in cui la grandezza da ottimizzare è una funzione di secondo grado (il massimo o il minimo è nel vertice della parabola) o una funzione sinusoidale (il massimo di $\operatorname{sen} x$ è 1).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In un cono di raggio R e altezza H si inscrive un cilindro, con una base sulla base del cono e la circonferenza dell'altra base sulla superficie laterale del cono. Fra tutti questi cilindri, trova quello che ha la superficie laterale massima.

Soluzione. Sia x il raggio del cilindro, con $0 < x < R$, e y la sua altezza. Nella sezione assiale il cilindro è un rettangolo inscritto nel triangolo isoscele del cono; il triangolo che sta sopra il rettangolo è simile al triangolo intero, e da $\frac{x}{R} = \frac{H-y}{H}$ si ricava $y = H(1 - \frac{x}{R})$. La superficie laterale è

$$S_l(x) = 2\pi xy = 2\pi H(x - \frac{x^2}{R}).$$

È una funzione di secondo grado in x con coefficiente di x^2 negativo: il suo grafico è una parabola rivolta verso il basso, che si annulla in $x = 0$ e $x = R$. Il massimo è nel vertice, a metà fra le due radici: $x = \frac{R}{2}$. Allora $y = \frac{H}{2}$ e $S_l = 2\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi RH}{2}$. Il cilindro cercato ha raggio e altezza uguali alla metà di quelli del cono, qualunque sia la forma del cono.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Fra i cilindri inscritti in una sfera di raggio R trova quello di superficie laterale massima.

Soluzione. Nella sezione assiale il cilindro è un rettangolo inscritto nel cerchio massimo: il raggio R che va dal centro O a un vertice del rettangolo forma con il piano della base un angolo x, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (come nella Figura 12.6, a sinistra). Il raggio del cilindro e la metà della sua altezza sono i cateti del triangolo rettangolo di ipotenusa R: $r = R \cos x$ e $\frac{h}{2} = R \operatorname{sen} x$. Quindi

$$S_l = 2\pi r \cdot h = 2\pi R \cos x \cdot 2R \operatorname{sen} x = 2\pi R^2 \operatorname{sen} 2x,$$

per la formula di duplicazione del capitolo 2. Il massimo di sen $2x$ è 1, per $2x = \frac{\pi}{2}$, cioè $x = \frac{\pi}{4}$: il cilindro ha $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $h = R\sqrt{2}$ e $S_l = 2\pi R^2$, la metà della superficie della sfera. La sezione assiale del cilindro ottimo è un rettangolo con $h = 2r$, cioè un quadrato: il cilindro è **equilatero**.

12.5.4 Con il computer: il cilindro più capiente

Cerchiamo ora, fra i cilindri inscritti in una sfera di raggio $R = 10$ cm, quello di *volume* massimo. Usiamo come variabile l'altezza h del cilindro, con $0 < h < 20$. Per il teorema di Pitagora nella se-

zione assiale, $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, quindi

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi(100 - \frac{h^2}{4})h.$$

È una funzione di terzo grado: il metodo del vertice della parabola non si applica, ma con un foglio di calcolo possiamo esplorarla numericamente. In una colonna scriviamo i valori di h da 0 a 20 con passo 2, nella successiva r^2 e nella terza V (la formula da copiare in basso è del tipo **=PI.GRECO()*(100-A2^2/4)*A2**). La Tabella 12.2 riporta alcuni di questi valori, arrotondati.

Tabella 12.2 Il volume $V(h)$ del cilindro inscritto in una sfera di raggio 10 cm, al variare dell'altezza h (valori arrotondati al decimo).

h (cm)	0	4	8	10	12	14	16	20
r^2 (cm²)	100	96	84	75	64	51	36	0
V (cm³)	0	1206,4	2111,2	2356,2	2412,7	2243,1	1809,6	0

Il volume cresce fino a un valore di h compreso fra 10 e 14 e poi decresce. Ripetendo la tabella fra 10 e 14 con passo 0,1 si trova il massimo vicino a $h = 11{,}5$ cm, con $V \approx 2418$ cm³ (Figura 12.6). Con il calcolo differenziale si dimostra che il massimo esatto è per $h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \approx 11{,}547$ cm, con volume $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \approx 2418{,}4$ cm³: circa il 58% del volume della sfera, che è $\frac{4000}{3}\pi \approx 4188{,}8$ cm³. Nota che il cilindro di volume massimo *non* è quello di superficie laterale massima trovato prima, che ha $h = R\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm: ottimizzare due grandezze diverse porta in generale a forme diverse.

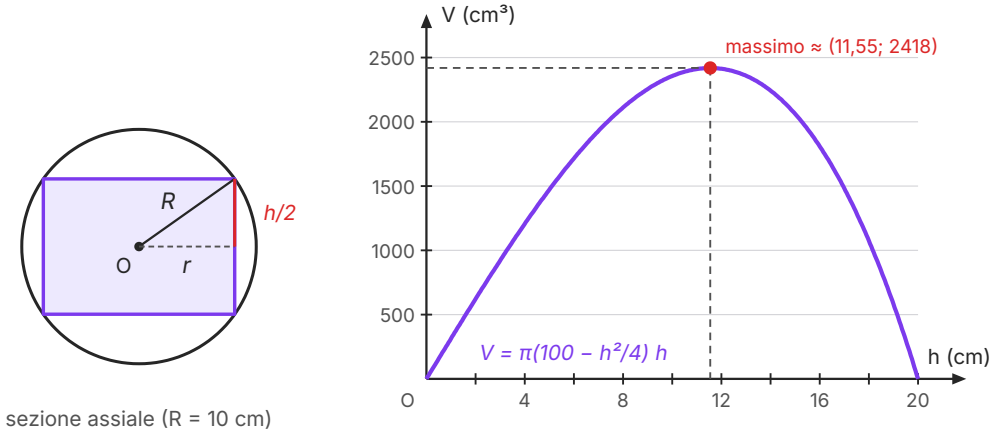


Figura 12.6 A sinistra, la sezione assiale di un cilindro inscritto in una sfera di raggio $R = 10$ cm. A destra, il grafico del volume $V(h) = \pi(100 - \frac{h^2}{4})h$ per $0 \le h \le 20$, calcolato dalla formula: il massimo è per $h \approx 11{,}55$ cm, con $V \approx 2418$ cm³.

APPROFONDIMENTO · LA LATTINA PIÙ ECONOMICA

Un'industria vuole produrre lattine cilindriche di volume assegnato V usando la minor quantità possibile di lamiera, cioè con la superficie totale minima. Da $V = \pi r^2 h$ si ricava $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, e la superficie totale diventa una funzione del solo raggio:

$$S_t(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Con un foglio di calcolo, per $V = 330$ cm³, si trova che S_t è minima per $r \approx 3{,}74$ cm, a cui corrisponde $h \approx 7{,}49$ cm: l'altezza è uguale al diametro. Con le derivate si dimostra che è sempre così: *la lattina più economica ha $h = 2r$*, cioè è un cilindro equilatero. Le lattine reali sono più alte e più strette, perché il costo dipende anche da altri fattori, come lo spessore del fondo, la facilità di impugnatura e lo spazio sugli scaffali.

SINTESI

- Due solidi sono **equivalenti** se hanno la stessa estensione; il **volume** è la misura dell'estensione, con il cubo di spigolo 1 come unità. 1 dm^3 = 1 L, 1 cm^3 = 1 mL, 1 m^3 = 1000 L.
- Il parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c ha volume abc, il cubo di spigolo ℓ ha volume ℓ^3.
- Due solidi simili con rapporto k hanno superfici nel rapporto k^2 e volumi nel rapporto k^3.
- **Principio di Cavalieri:** se ogni piano parallelo a un piano dato taglia due solidi in sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti.
- Prismi e cilindri, retti od obliqui, hanno volume Bh; il cilindro di raggio r ha volume $\pi r^2 h$.
- Un prisma triangolare si scompone in tre piramidi equivalenti: la piramide ha volume $\frac{1}{3}Bh$, il cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- I tronchi si ottengono come differenza di due piramidi o di due coni simili: $V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$ e $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.
- La semisfera ha le stesse sezioni della metà di un'**anticlessidra** (cilindro meno cono): la sfera ha volume $\frac{4}{3}\pi r^3$, i due terzi del cilindro circoscritto (Archimede).
- Il segmento sferico a una base ha volume $\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, il settore sferico $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.
- La massa di un corpo omogeneo è $m = d \cdot V$; il volume di un solido composto è la somma (o la differenza) dei volumi delle parti.
- Il teorema di Pappo-Guldino dà il volume di un solido di rotazione: area della figura per il cammino del baricentro.
- Nei problemi di massimo e di minimo si esprime la grandezza come funzione di una variabile: una parabola (vertice), una funzione sinusoidale (massimo 1) oppure, numericamente, una tabella con il foglio di calcolo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se si raddoppiano tutte le dimensioni di un solido, il suo volume:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** diventa 4 volte
   - **C.** diventa 8 volte
   - **D.** diventa 6 volte

2. ● Un cono e un cilindro hanno basi congruenti e la stessa altezza. Il volume del cono è:

   A. la metà del volume del cilindro

   B. un terzo del volume del cilindro

   C. due terzi del volume del cilindro

   D. uguale al volume del cilindro

3. ● Quale enunciato esprime il principio di Cavalieri?

   A. se ogni piano parallelo a un piano dato taglia due solidi in sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti

   B. due solidi con la stessa altezza e basi equivalenti sono sempre equivalenti

   C. due solidi con superfici totali equivalenti sono equivalenti

   D. se un piano taglia due solidi in sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti

4. ● Il rapporto fra il volume di una sfera e il volume del cilindro circoscritto è:

   A. $\frac{1}{2}$

   B. $\frac{3}{4}$

   C. $\frac{4}{3}$

   D. $\frac{2}{3}$

5. ● Un decimetro cubo d'acqua corrisponde a:

   A. 1 mL

   B. 1 L

   C. 10 L

   D. 1000 L

6. ●● Un tronco di piramide ha basi di area 9 cm^2 e 4 cm^2 e altezza 6 cm. Il suo volume è:

   A. 26 cm^3

   B. 39 cm^3

   C. 38 cm^3

   D. 114 cm^3

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Due prismi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

   b) Due solidi equivalenti hanno la stessa superficie totale.

   c) Il volume di un cono si calcola moltiplicando l'area di base per l'apotema e dividendo per 3.

   d) Se il raggio di una sfera triplica, la superficie diventa 9 volte e il volume 27 volte.

   e) Un prisma obliquo ha volume minore di un prisma retto con la stessa base e la stessa altezza.

8. ● Completa.
   a) Due solidi che hanno lo stesso volume si dicono _____ .
   b) Il volume di una piramide è _____ del volume del prisma con la stessa base e la stessa altezza.
   c) In una sfera di raggio R il segmento sferico a una base di altezza h ha volume _____ .
   d) 1 m^3 = _____ L e 1 L = _____ cm^3.

Calcolare

9. ● Calcola il volume: a) del parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3 cm, 4 cm e 12 cm, e la lunghezza della sua diagonale; b) del cubo che ha la diagonale di $6\sqrt{3}$ cm; c) del prisma retto che ha per base un triangolo equilatero di lato 4 cm e altezza 10 cm.

10. ● a) Calcola il volume di un cilindro di raggio 5 cm e altezza 8 cm. b) Un cilindro equilatero (con l'altezza uguale al diametro di base) ha volume 128π cm^3: calcola il raggio, l'altezza e la superficie totale.

11. ● Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 10 cm e l'apotema di 13 cm. Calcola l'altezza, il volume e la superficie totale.

12. ●● a) Un cono ha raggio di base 8 cm e apotema 17 cm: calcolane il volume. b) Un cono ha volume 96π cm^3 e altezza 8 cm: calcolane il raggio, l'apotema e la superficie laterale.

13. ●● Un tronco di cono ha i raggi delle basi di 6 cm e 3 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola il volume con la formula del tronco e controllalo come differenza di due coni; calcola poi l'apotema e la superficie laterale.

14. ●● Un tronco di piramide regolare quadrangolare ha gli spigoli delle basi di 12 cm e 6 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola il volume, l'apotema del tronco e la superficie totale.

15. ● a) Calcola il volume e la superficie di una sfera di raggio 3 cm. b) Una sfera ha superficie 100π cm^2: calcolane il volume. c) Una sfera ha volume 288π cm^3: calcolane il raggio.

16. ●● In una sfera di raggio 10 cm un piano stacca un segmento sferico a una base di altezza 4 cm. Calcola il volume del segmento, il raggio del suo cerchio di base e l'area della calotta.

17. ●● Calcola il volume del settore sferico di una sfera di raggio 9 cm la cui calotta ha altezza 3 cm, prima con la formula del settore e poi come somma del segmento sferico e del cono con il vertice nel centro.

18. ●● a) Due bottiglie hanno forme simili e sono alte 20 cm e 30 cm; la più piccola contiene 0,5 L. Quanto contiene la più grande? Quante volte è più grande l'area della sua etichetta, se le etichette sono simili? b) Il modellino di un edificio in scala 1 : 50 ha un volume di 2,4 dm^3. Qual è il volume dell'edificio in m^3?

Dimostrare e argomentare

19. ● Dimostra, con il principio di Cavalieri, che un cilindro obliquo ha lo stesso volume del cilindro retto con la stessa base e la stessa altezza.

20. ●● Ricava la formula del volume del tronco di cono $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ come differenza di due coni, senza usare la formula del tronco di piramide.

21. ●● Dimostra che il settore sferico ha volume $\frac{2}{3}\pi R^2 h$, sommando il volume del segmento sferico di altezza h e quello del cono con il vertice nel centro della sfera e la stessa base del segmento.

22. ●● Trova l'errore. «Un cono ha raggio 3 cm e apotema 5 cm, quindi il suo volume è $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 5 = 15\pi$ cm^3.» Correggi il calcolo.

23. ●●● Un cubo $ABCDEFGH$ di spigolo ℓ (con $ABCD$ una base e AE, BF, CG, DH spigoli laterali) si scompone in tre piramidi a base quadrata con il vertice comune in G. Quali sono le loro basi? Dimostra che le tre piramidi sono congruenti e deduci, senza usare la formula della piramide, che ciascuna ha volume $\frac{\ell^3}{3}$.

Problemi

24. ●● Una lattina cilindrica ha diametro interno 6,6 cm e altezza interna 11,5 cm (dati inventati). Calcola la capacità in centilitri. Se contiene 33 cL di bibita, che percentuale del volume interno è occupata?

25. ●● Un serbatoio per il gas ha la forma di un cilindro lungo 4 m con due semisfere alle estremità; il raggio del cilindro e delle semisfere è 1 m. Calcola il volume in m^3 e in litri e la superficie esterna.

26. ●● Un triangolo rettangolo ha i cateti di 5 cm e 12 cm. Calcola il volume e la superficie totale del solido generato dalla rotazione completa attorno all'ipotenusa, e confronta il volume con quelli ottenuti dalla rotazione attorno a ciascun cateto.

27. ●● Un trapezio rettangolo ha le basi di 5 cm e 2 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola il volume del solido generato dalla sua rotazione completa attorno alla base maggiore e attorno al lato perpendicolare alle basi.

28. ●● Un cono gelato (con il vertice in basso) ha raggio interno 3 cm e altezza interna 10 cm, ed è riempito di gelato fino all'orlo e sormontato da una semisfera di gelato dello stesso raggio. Quanto gelato contiene, in cm^3? Se il gelato ha densità 0,6 g/cm^3 (dato inventato), qual è la sua massa?

29. ●●● Un cono ha raggio 6 cm e altezza 12 cm. Fra i cilindri inscritti nel cono (con una base sulla base del cono) trova quello di superficie laterale massima; calcola il suo volume e il rapporto fra questo volume e quello del cono.

Con il computer

30. ●● Con un foglio di calcolo costruisci la tabella del volume $V(h) = \pi(100 - \frac{h^2}{4})h$ dei cilindri inscritti in una sfera di raggio 10 cm, per h da 0 a 20 con passo 0,5; poi infittisci la tabella vicino al massimo con passo 0,01. Per quale h il volume è massimo, al centesimo? Confronta con il valore esatto $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

31. ●● Una lattina deve contenere 330 cm^3. Con un foglio di calcolo tabula la superficie totale $S_t(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$ per r da 2 cm a 6 cm con passo 0,1 cm. Per quale raggio è minima? Calcola l'altezza corrispondente e confrontala con il diametro.

Verso la verifica

32. ●● Da un cubo di spigolo 6 cm si taglia via un angolo con il piano che passa per i tre vertici adiacenti a uno stesso vertice. Calcola il volume della piramide asportata, quello del solido che resta e la distanza del vertice dal piano del taglio.

33. ●● Un cono equilatero (la cui sezione assiale è un triangolo equilatero) ha raggio di base 6 cm. Calcola il volume del cono, il raggio della sfera inscritta e il rapporto fra il volume della sfera e quello del cono.

34. ●● Una sfera di raggio 6 cm è inscritta in un cilindro. Calcola il volume dello spazio compreso fra il cilindro e la sfera e verifica che è uguale al volume del cono con la stessa base e la stessa altezza del cilindro.

35. ●●● *Sfida.* Un bicchiere conico, con il vertice in basso, è alto 12 cm e ha la bocca di raggio 4 cm. a) Se lo si riempie d'acqua fino a metà altezza, che frazione della capacità contiene? b) Fino a quale altezza bisogna riempirlo perché contenga metà della sua capacità? Dai il risultato in forma esatta e al decimo di millimetro.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Gli Elementi*: il libro XII, con la scomposizione del prisma in tre piramidi (prop. 7), il cono come terza parte del cilindro (prop. 10) e il metodo di esaustione.
- [ARC] Archimede, *Opere*: il trattato *Sulla sfera e sul cilindro* e *Il metodo*, dove le figure sono pensate come formate da sezioni sottilissime.
- [HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*: un classico per allenare l'intuizione dello spazio, dai poliedri alle superfici.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: molti esempi di problemi sui solidi, tra cui il tronco di piramide, risolti cercando un problema più semplice già noto.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Eudosso e l'esaustione, Archimede, Cavalieri e gli indivisibili.

Glossario del capitolo

Anticlessidra
Solido ottenuto togliendo da un cilindro di raggio r e altezza $2r$ i due coni con il vertice nel centro del cilindro e le basi coincidenti con le basi del cilindro; ha le stesse sezioni della sfera di raggio r e quindi lo stesso volume.

Capacità
Volume della cavità interna di un recipiente; si misura di solito in litri.

Cubo unitario
Cubo di spigolo 1, assunto come unità di misura dei volumi.

Densità
Rapporto fra la massa e il volume di un corpo omogeneo, $d = \frac{m}{V}$.

Equiscomponibili
Detto di due solidi che si possono dividere in un ugual numero di parti rispettivamente congruenti; due solidi equiscomponibili sono equivalenti.

Estensione
Grandezza che esprime quanto spazio occupa un solido; la sua misura è il volume.

Litro
Unità di capacità uguale a 1 dm^3; 1 mL = 1 cm^3.

Principio di Cavalieri
Se ogni piano parallelo a un piano dato taglia due solidi in sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti.

Rapporto di similitudine
Numero $k > 0$ per cui si moltiplicano tutte le distanze passando da un solido a un solido simile; le aree si moltiplicano per k^2, i volumi per k^3.

Segmento sferico a una base
Ciascuna delle due parti in cui un piano divide una sfera; con altezza h in una sfera di raggio R ha volume $\pi h^2(R - \frac{h}{3})$.

Settore sferico
Solido formato da un segmento sferico a una base e dal cono che ha il vertice nel centro della sfera e la stessa base; ha volume $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Solidi equivalenti
Detto di due solidi che hanno la stessa estensione, cioè lo stesso volume (si dicono anche equiestesi).

Teorema di Pappo-Guldino
Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della figura che ruota per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.

Toro
Solido generato dalla rotazione di un cerchio attorno a una retta del suo piano che non lo interseca; con raggi r e R ha volume $2\pi^2 R r^2$.

Tronco di cono
Parte di un cono compresa fra la base e un piano parallelo alla base; con raggi R, r e altezza h ha volume $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Volume
Misura dell'estensione di un solido rispetto al cubo unitario.

Soluzioni

1. C. Tutte le lunghezze si moltiplicano per $k = 2$, il volume per $k^3 = 8$.

2. B. Il cono ha volume $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, il cilindro $\pi r^2 h$.

3. A. B vale solo per solidi dello stesso tipo (due prismi o cilindri, oppure due piramidi o coni): un prisma e una piramide con basi equivalenti e la stessa altezza non sono equivalenti; D non basta: le sezioni devono essere equivalenti per *ogni* piano parallelo.

4. D. $\frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{2}{3}$.

5. B. Il litro è per definizione 1 dm^3.

6. C. $V = \frac{6}{3}(9 + 4 + \sqrt{36}) = 2 \cdot 19 = 38$ cm^3. A trascura $\sqrt{Bb}$, B usa la base media, D dimentica il fattore $\frac{1}{3}$.

7. a) V. b) F: un cubo di spigolo 2 e un parallelepipedo $1 \times 1 \times 8$ hanno entrambi volume 8, ma superfici 24 e 34. c) F: si usa l'altezza, non l'apotema. d) V: $3^2 = 9$, $3^3 = 27$. e) F: a parità di base e di *altezza* i volumi sono uguali (principio di Cavalieri).

8. a) equivalenti (o equiestesi); b) un terzo; c) $\pi h^2(R - \frac{h}{3})$; d) 1000; 1000.

9. a) $V = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$ cm^3; $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ cm. b) $\ell\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, quindi $\ell = 6$ cm e $V = 216$ cm^3. c) $B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 = 4\sqrt{3}$ cm^2, $V = 40\sqrt{3} \approx 69{,}28$ cm^3.

10. a) $V = \pi \cdot 25 \cdot 8 = 200\pi \approx 628{,}32$ cm^3. b) $h = 2r$, quindi $V = 2\pi r^3 = 128\pi$, $r^3 = 64$, $r = 4$ cm, $h = 8$ cm; $S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 64\pi + 32\pi = 96\pi \approx 301{,}59$ cm^2.

11. $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm; $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$ cm^3; $S_l = 20 \cdot 13 = 260$ cm^2 (semiperimetro per apotema), $S_t = 260 + 100 = 360$ cm^2.

12. a) $h = \sqrt{289 - 64} = 15$ cm, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 15 = 320\pi \approx 1005{,}31$ cm^3. b) $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 8 = 96\pi$, $r^2 = 36$, $r = 6$ cm; $a = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm; $S_l = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \approx 188{,}50$ cm^2.

13. $V = \frac{4\pi}{3}(36 + 18 + 9) = 84\pi \approx 263{,}89$ cm^3. Controllo: da $\frac{3}{6} = \frac{H - 4}{H}$ si ha $H = 8$ cm; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 8 - \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 96\pi - 12\pi = 84\pi$. Apotema $a = \sqrt{16 + 9} = 5$ cm; $S_l = \pi(6 + 3) \cdot 5 = 45\pi \approx 141{,}37$ cm^2.

14. $B = 144$, $b = 36$, $\sqrt{Bb} = 72$: $V = \frac{4}{3}(144 + 36 + 72) = 336$ cm^3. L'apotema del tronco è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti 4 e $\frac{12 - 6}{2} = 3$: $a = 5$ cm. $S_l = 4 \cdot \frac{12 + 6}{2} \cdot 5 = 180$ cm^2, $S_t = 180 + 144 + 36 = 360$ cm^2.

15. a) $V = 36\pi \approx 113{,}10$ cm^3, $S = 36\pi \approx 113{,}10$ cm^2. b) $4\pi r^2 = 100\pi$, $r = 5$ cm, $V = \frac{500}{3}\pi \approx 523{,}60$ cm^3. c) $\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$, $r^3 = 216$, $r = 6$ cm.

16. $V = \pi \cdot 16 \cdot (10 - \frac{4}{3}) = \frac{416}{3}\pi \approx 435{,}63$ cm^3; $\rho = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm; calotta $2\pi Rh = 80\pi \approx 251{,}33$ cm^2.

17. $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 81 \cdot 3 = 162\pi \approx 508{,}94$ cm^3. Segmento: $\pi \cdot 9 \cdot (9 - 1) = 72\pi$; cono: raggio $\rho^2 = 81 - 36 = 45$, altezza $9 - 3 = 6$, volume $\frac{1}{3}\pi \cdot 45 \cdot 6 = 90\pi$; somma 162π.

18. a) $k = 1{,}5$: la grande contiene $0{,}5 \cdot 1{,}5^3 = 1{,}6875$ L $\approx 1{,}69$ L; l'etichetta è $1{,}5^2 = 2{,}25$ volte più grande. b) $k = 50$: $2{,}4 \cdot 50^3 = 300\,000$ dm$^3 = 300$ m^3.

19. *Traccia.* Si appoggiano i due cilindri sullo stesso piano α. Ogni piano parallelo ad α che taglia uno dei due, con distanza da α fra 0 e h, taglia anche l'altro, e le sezioni sono cerchi congruenti alla base (la

sezione del cilindro obliquo è la traslata della base lungo l'asse). Le sezioni sono equivalenti, quindi i cilindri sono equivalenti.

20. *Traccia.* Si completa il tronco con un cono di altezza $H - h$; dalla similitudine $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$ si ha $H = \frac{hR}{R-r}$ e $H - h = \frac{hr}{R-r}$. Allora $V = \frac{\pi}{3}[R^2H - r^2(H-h)] = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

21. *Traccia.* La base del segmento dista $R - h$ dal centro e ha raggio ρ con $\rho^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$. Cono: $\frac{\pi}{3}(2Rh - h^2)(R-h) = \frac{\pi}{3}(2R^2h - 3Rh^2 + h^3)$. Segmento: $\pi Rh^2 - \frac{\pi}{3}h^3$. Somma: $\frac{\pi}{3}(2R^2h - 3Rh^2 + h^3 + 3Rh^2 - h^3) = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

22. Nella formula va l'altezza, non l'apotema: $h = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm e $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$ cm^3.

23. *Traccia.* Le basi sono le tre facce che non contengono G: $ABCD$, $ABFE$ e $ADHE$, che si incontrano in A. Ogni piramide ha per base un quadrato di lato ℓ e lo spigolo laterale che parte da G e cade in un vertice della base (GC, GF, GH) è perpendicolare alla base: per esempio GC è perpendicolare al piano $ABCD$. Le tre piramidi si sovrappongono con le rotazioni di 120° attorno alla diagonale AG, quindi sono congruenti; insieme riempiono il cubo senza punti interni comuni (ogni punto interno del cubo sta in una sola di esse). Quindi ciascuna ha volume $\frac{\ell^3}{3}$, in accordo con $\frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\ell^2 \cdot \ell$.

24. $V = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 11{,}5 = 125{,}235\pi \approx 393{,}4$ cm$^3 \approx 39{,}3$ cL. Percentuale occupata: $\frac{330}{393{,}4} \approx 0{,}84$, cioè circa l'84%.

25. $V = \pi \cdot 1 \cdot 4 + \frac{4}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi \approx 16{,}76$ m$^3 \approx 16\,755$ L. Superficie: $2\pi \cdot 1 \cdot 4 + 4\pi = 12\pi \approx 37{,}70$ m^2.

26. Ipotenusa 13 cm, altezza relativa $\frac{60}{13}$ cm. $V = \frac{1}{3}\pi(\frac{60}{13})^2 \cdot 13 = \frac{1200}{13}\pi \approx 289{,}99$ cm^3; $S = \pi \cdot \frac{60}{13}(5 + 12) = \frac{1020}{13}\pi \approx 246{,}49$ cm^2. Attorno al cateto di 12 cm: cono di raggio 5, $V = 100\pi \approx 314{,}16$ cm^3; attorno al cateto di 5 cm: cono di raggio 12, $V = 240\pi \approx 753{,}98$ cm^3. Il volume minore è quello della rotazione attorno all'ipotenusa.

27. Attorno alla base maggiore: cilindro di raggio 4 e altezza 2 (32π) più cono di raggio 4 e altezza 3 (16π), $V = 48\pi \approx 150{,}80$ cm^3. Attorno al lato perpendicolare alle basi: tronco di cono di raggi 5 e 2 e altezza 4, $V = \frac{4\pi}{3}(25 + 10 + 4) = 52\pi \approx 163{,}36$ cm^3.

28. Cono: $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 = 30\pi$; semisfera: $\frac{2}{3}\pi \cdot 27 = 18\pi$; totale $48\pi \approx 150{,}80$ cm^3. Massa: $0{,}6 \cdot 150{,}80 \approx 90{,}5$ g.

29. Raggio x, altezza $y = 12 - 2x$ (da $\frac{x}{6} = \frac{12-y}{12}$); $S_l = 2\pi x(12 - 2x) = 4\pi(6x - x^2)$, massima nel vertice $x = 3$ cm: $y = 6$ cm e $S_l = 36\pi \approx 113{,}10$ cm^2. Volume del cilindro $\pi \cdot 9 \cdot 6 = 54\pi$; volume del cono $\frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 12 = 144\pi$; rapporto $\frac{54}{144} = \frac{3}{8}$.

30. Il massimo è per $h \approx 11{,}55$ cm ($V \approx 2418{,}40$ cm^3). Valore esatto $\frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}547$ cm, volume $\frac{4000\pi}{3\sqrt{3}} \approx 2418{,}40$ cm^3.

31. Il minimo della tabella è per $r = 3{,}7$ cm ($S_t \approx 264{,}4$ cm^2); il valore esatto è $r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}745$ cm, con $h = \frac{330}{\pi r^2} \approx 7{,}49$ cm: l'altezza è uguale al diametro, $h = 2r$.

32. La piramide ha per base il triangolo rettangolo isoscele di cateti 6 (metà di una faccia) e altezza 6: $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ cm^3; resta $216 - 36 = 180$ cm^3. Il taglio è un triangolo equilatero di lato $6\sqrt{2}$, di area $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 72 = 18\sqrt{3}$ cm^2; la distanza è $\frac{3V}{\text{area}} = \frac{108}{18\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm (un terzo della diagonale del cubo).

33. Apotema 12 cm, altezza $6\sqrt{3}$ cm: $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi \approx 391{,}78$ cm^3. La sfera inscritta ha per raggio il raggio del cerchio inscritto nel triangolo

equilatero di lato 12: $r = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm. $V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\pi$; rapporto $\frac{32}{72} = \frac{4}{9}$.

34. Cilindro: raggio 6, altezza 12, $V = 432\pi$; sfera: 288π; differenza $144\pi \approx 452{,}39$ cm^3. Cono con la stessa base e altezza: $\frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 12 = 144\pi$. Coincidono: è la scodella di Galileo.

35. a) L'acqua forma un cono simile al bicchiere con $k = \frac{1}{2}$: contiene $\frac{1}{8}$ della capacità. b) Serve $k^3 = \frac{1}{2}$, cioè $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$: altezza $\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = 6^3\sqrt{4} \approx 9{,}524$ cm, cioè 95,2 mm al decimo di millimetro (quasi i quattro quinti dell'altezza).