CAPITOLO

11

Poliedri e solidi di rotazione

Le facce piane contano, le superfici curve girano: ogni solido che usiamo ogni giorno è l'una o l'altra cosa, o le due insieme. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere e descrivere poliedri, prismi, piramidi e tronchi, i loro elementi e i loro sviluppi piani.
2. Calcolare diagonali, altezze, apotemi e spigoli con i triangoli rettangoli contenuti nei solidi.
3. Dimostrare che i poliedri regolari sono esattamente cinque e verificare la relazione di Eulero.
4. Descrivere cilindro, cono, tronco di cono e sfera come solidi di rotazione e studiarne le sezioni piane.
5. Calcolare le aree delle superfici dei poliedri e dei solidi di rotazione e risolvere problemi su solidi inscritti e circoscritti.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 I poliedri e i prismi 2
11.2 Piramidi e tronchi di piramide 5
11.3 I poliedri regolari 9
11.4 I solidi di rotazione 12
11.5 Le aree delle superfici 16
11.6 Solidi inscritti e circoscritti 19

Matematica 4 · Parte IV · Geometria dello spazio · versione 1.0
Capitolo 11: Poliedri e solidi di rotazione · pagine 305–332 del volume completo · estratto per lo studio

Un dado, un cristallo di sale, una scatola di scarpe, la piramide di Cheope; e poi una lattina, un cono gelato, un pallone, la cupola di una chiesa. Gli oggetti che ci circondano hanno quasi sempre una di due forme: sono delimitati da facce piane, come i primi, oppure sono «torniti» attorno a un asse, come i secondi. La geometria dello spazio dà un nome preciso a queste due famiglie: i *poliedri* e i *solidi di rotazione*.

Nel capitolo precedente abbiamo studiato i «mattoni» dello spazio: rette e piani, il parallelismo, la perpendicolarità, gli angoli diedri e gli angoloidi. In questo capitolo li usiamo per costruire e misurare i solidi. Impareremo a riconoscere le parti di un prisma e di una piramide e a trovarne le relazioni con il teorema di Pitagora; scopriremo perché i poliedri regolari sono *esattamente cinque*, un risultato che chiude il tredicesimo libro degli *Elementi* di Euclide; incontreremo la relazione di Eulero, che lega in modo sorprendente il numero di vertici, di spigoli e di facce di un poliedro convesso; infine calcoleremo le aree delle superfici dei solidi, dalla piramide alla sfera. I volumi sono il tema del capitolo 12.

Disegneremo i poliedri in assonometria cavaliera, come nel capitolo 10 (le rette che vanno in profondità sono inclinate di 45° e ridotte alla metà, gli spigoli nascosti sono tratteggiati), e i solidi di rotazione in una proiezione ortogonale leggermente dall'alto, nella quale le circonferenze orizzontali diventano ellissi.

11.1 I poliedri e i prismi

11.1.1 Che cos'è un poliedro

Un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di poligoni, disposti in modo che ogni lato di ciascun poligono sia lato anche di uno e un solo altro poligono. I poligoni sono le **facce** del poliedro; i lati delle facce sono gli **spigoli**, ciascuno comune a due facce; i vertici delle facce sono i **vertici** del poliedro. In ogni vertice concorrono almeno tre facce, che formano un angoloide (capitolo 10): le sue facce sono gli angoli delle facce del poliedro che hanno quel vertice. Un segmento che congiunge due vertici non appartenenti a una stessa faccia si chiama **diagonale** del poliedro.

Un poliedro è **convesso** se, per ogni sua faccia, il poliedro sta tutto da una stessa parte rispetto al piano di quella faccia. Il cubo è convesso; una «stella» ottenuta incollando su ogni faccia di un cubo una piramide alta quanto lo spigolo non lo è, perché il piano di una faccia di una di queste piramidi lascia dalla parte opposta il vertice di una piramide vicina. Come per i poligoni, un poliedro convesso è anche una figura convessa: il segmento che unisce due suoi punti qualsiasi è tutto contenuto nel poliedro. Salvo avviso contrario, d'ora in poi i poliedri di cui parliamo sono convessi.

11.1.2 Lo sviluppo piano

Se tagliamo un poliedro lungo alcuni spigoli e lo apriamo, facendo ruotare le facce attorno agli spigoli rimasti fino a disporle tutte in un piano senza sovrapposizioni, otteniamo una figura piana che si chiama **sviluppo piano** del poliedro. È il cartamodello con cui si costruisce una scatola: lo si ritaglia, lo si piega lungo i lati comuni e si incollano a coppie i lati del contorno. La Figura 11.1 mostra uno sviluppo del cubo. Un poliedro ha in generale molti sviluppi diversi: per il cubo, a meno di rotazioni e ribaltamenti, ce ne sono 11.

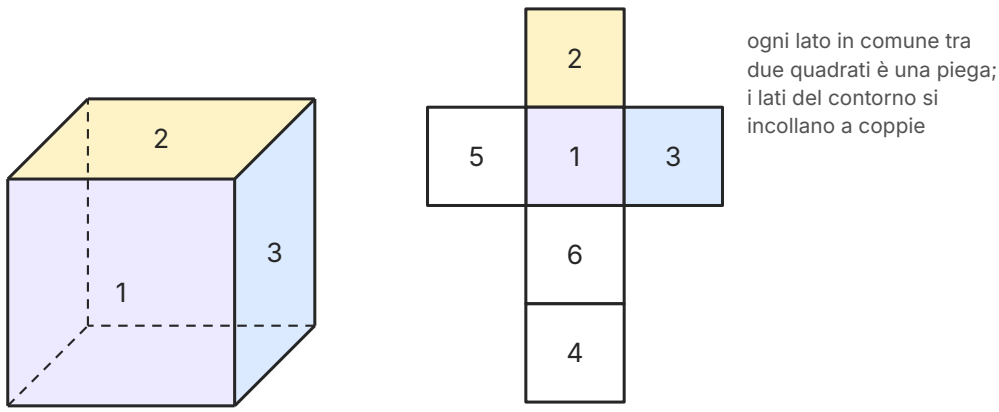


Figura 11.1 Un cubo e uno dei suoi undici sviluppi piani. Le facce con lo stesso numero si corrispondono: il quadrato 1 è la faccia anteriore, 2 quella superiore, 3 quella di destra; 4, 5 e 6, nascoste nel disegno del cubo, sono la faccia posteriore, quella di sinistra e la base.

Lo sviluppo ha la stessa area della superficie del poliedro, perché è formato dalle stesse facce. È questa l'idea che useremo nel paragrafo sulle aree: per calcolare l'**area totale** di un solido, che indichiamo con S_t, si «srotola» la sua superficie in un piano. Spesso si separa l'area delle basi dall'area delle altre facce, la **superficie laterale** S_l.

11.1.3 Prismi e parallelepipedi

Consideriamo un poligono in un piano α e un segmento AA' non parallelo ad α. Se trasliamo il poligono del vettore AA', otteniamo un poligono congruente in un piano α' parallelo ad α. Il solido formato dai due poligoni e dai parallelogrammi che uniscono i lati corrispondenti è un **prisma**. I due poligoni congruenti sono le **basi**, i parallelogrammi sono le **facce laterali**, i loro lati non appartenenti alle basi sono gli **spigoli laterali**, tutti paralleli e congruenti. L'**altezza** h del prisma è la distanza tra i piani delle basi. Un prisma si chiama triangolare, quadrangolare, pentagonale... secondo il poligono di base.

Se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, il prisma è un **prisma retto**: le facce laterali sono rettangoli e ogni spigolo laterale è uguale all'altezza. Un prisma retto la cui base è un poligono regolare è un **prisma regolare**. Un prisma le cui basi sono parallelogrammi si chiama **parallelepipedo**: tutte le sue sei facce sono parallelogrammi e le facce opposte sono congruenti e parallele, sicché ogni coppia di facce opposte può fare da coppia di basi. Un parallelepipedo retto con la base rettangolare è un **parallelepipedo rettangolo**: le sue facce sono sei rettangoli e i suoi tre spigoli uscenti da uno stesso vertice, a due a due perpendicolari, si chiamano le sue **dimensioni** a, b, c. Se le tre dimensioni sono uguali si ha il **cubo**.

11.1.4 La diagonale del parallelepipedo rettangolo

In un parallelepipedo rettangolo $ABCDEFGH$ (Figura 11.2) la diagonale AG attraversa il solido. Non possiamo misurarla direttamente su una faccia, ma possiamo trovarla con due applicazioni del teorema di Pitagora.

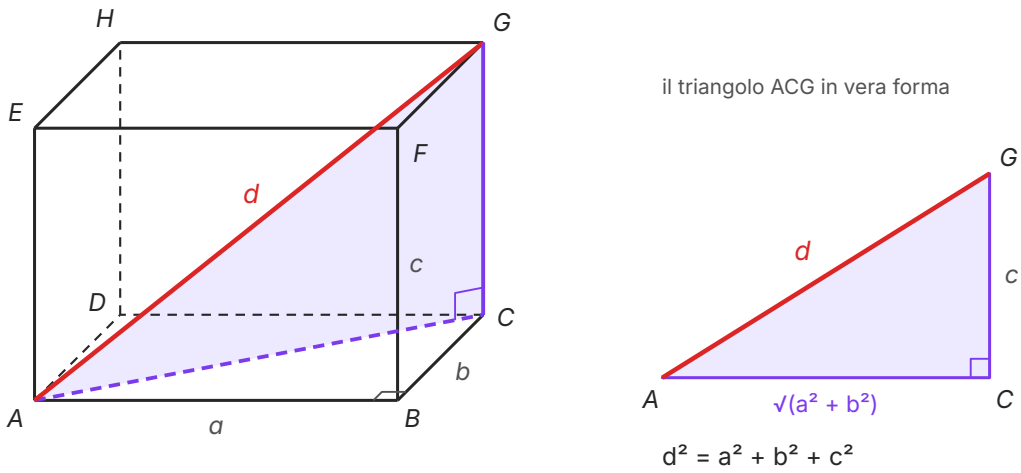


Figura 11.2 La diagonale AG di un parallelepipedo rettangolo è l'ipotenusa del triangolo ACG, retto in C, che ha per cateti la diagonale di base AC e lo spigolo CG. A destra lo stesso triangolo in vera forma.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $ABCDEFGH$ è un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $AB = a$, $BC = b$, $CG = c$. **Tesi:** la diagonale AG misura $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Dimostrazione. Il triangolo ABC è retto in B, perché la base è un rettangolo; quindi $AC^2 = a^2 + b^2$. Lo spigolo CG è perpendicolare al piano della base, e una retta perpendicolare a un piano è per-

pendicolare a tutte le rette del piano passanti per il suo piede (capitolo 10): dunque $CG \perp AC$ e anche il triangolo ACG è retto in C. Applicando di nuovo il teorema di Pitagora, $AG^2 = AC^2 + CG^2 = a^2 + b^2 + c^2$. c.v.d.

Per un cubo di spigolo ℓ si ha $d = \sqrt{3\ell^2} = \ell\sqrt{3}$, mentre la diagonale di una faccia è $\ell\sqrt{2}$. La formula ha un significato che conosciamo dal biennio: se mettiamo il vertice A nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano nello spazio con gli assi lungo gli spigoli, G ha coordinate $(a; b; c)$ e d è il modulo del vettore AG (vedi *Matematica 2*, cap. 13). Le quattro diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono congruenti e si tagliano a metà in un punto, il **centro** del parallelepipedo, che è centro di simmetria del solido.

ESEMPIO SVOLTO

Una scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo con dimensioni 3 cm, 4 cm e 12 cm. Ci entra una bacchetta rigida lunga 13,5 cm? Quale angolo forma con il fondo la bacchetta più lunga che ci sta?

Soluzione. La diagonale di base è $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm e la diagonale della scatola è $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$ cm. Il segmento più lungo contenuto nella scatola è la diagonale: la bacchetta di 13,5 cm non ci entra. Disposta lungo la diagonale AG, una bacchetta lunga 13 cm forma con il fondo l'angolo $\angle GAC$, che è l'angolo tra la retta AG e la sua proiezione AC sul piano della base. Nel triangolo rettangolo ACG si ha $\text{tg}\,\angle GAC = \dfrac{CG}{AC} = \dfrac{12}{5}$, quindi $\angle GAC = \text{arctg}\,\dfrac{12}{5} \approx 67{,}38°$.

11.1.5 Sezioni di un prisma

Un piano parallelo alle basi taglia un prisma secondo un poligono congruente alle basi: il prisma è infatti generato traslando la base. Un piano che contiene due spigoli laterali non appartenenti alla stessa faccia dà una **sezione diagonale**, che in un prisma retto è un rettangolo: nel parallelepipedo della Figura 11.2 la sezione con il piano di AE e CG è il rettangolo $ACGE$, di lati $\sqrt{a^2 + b^2}$ e c. Altre sezioni sono meno prevedibili. In un cubo di spigolo ℓ, il piano che passa per i tre vertici adiacenti a uno stesso vertice taglia un triangolo equilatero di lato $\ell\sqrt{2}$, perché i suoi lati sono diagonali di facce; e il piano che passa per il centro del cubo ed è perpendicolare a una sua diagonale taglia un esagono regolare, i cui vertici sono i punti medi di sei spigoli e il cui lato è $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

11.2 Piramidi e tronchi di piramide

11.2.1 Piramidi

Siano dati un poligono in un piano α e un punto V esterno ad α. Il solido formato dal poligono e dai triangoli che hanno per vertice V e per base i lati del poligono è una **piramide**. Il poligono è

la **base**, V è il **vertice**, i triangoli sono le **facce laterali** e i segmenti che uniscono V ai vertici della base sono gli **spigoli laterali**. L'**altezza** della piramide è la distanza $h = VH$ del vertice dal piano della base, dove H è il piede della perpendicolare condotta da V ad α. Una piramide con la base triangolare si chiama anche **tetraedro**, perché ha quattro facce, e ciascuna di esse può fare da base.

Una piramide è **retta** se la sua base è circoscrivibile a una circonferenza e il piede H dell'altezza è il centro di quella circonferenza, cioè l'incentro della base. Questa definizione, che sembra artificiosa, ha una conseguenza molto concreta: le altezze delle facce laterali condotte da V sono tutte uguali. Sia infatti K il punto in cui la circonferenza inscritta nella base tocca un lato. Il raggio HK è perpendicolare al lato e VH è perpendicolare al piano della base, quindi per il teorema delle tre perpendicolari (capitolo 10) anche VK è perpendicolare a quel lato: VK è l'altezza della faccia laterale. Il triangolo VHK è retto in H, con cateti h e $HK = r$, raggio della circonferenza inscritta; perciò $VK = \sqrt{h^2 + r^2}$, lo stesso valore per tutte le facce. Questo segmento comune si chiama **apotema** della piramide e si indica con a.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: le facce laterali di una piramide hanno le altezze condotte dal vertice V tutte congruenti, e il piede H dell'altezza è interno alla base. **Tesi:** la piramide è retta, cioè il piede H dell'altezza è l'incentro della base.

Dimostrazione. Siano K_1, K_2, ... i piedi delle altezze delle facce laterali sui lati della base. Per il teorema delle tre perpendicolari, nella forma inversa, HK_1, HK_2, ... sono perpendicolari ai lati della base. I triangoli VHK_1, VHK_2, ... sono rettangoli in H, hanno il cateto VH in comune e le ipotenuse congruenti per ipotesi: sono congruenti, e quindi $HK_1 = HK_2 = ...$ Il punto H, interno alla base, è equidistante dai lati della base: è il centro di una circonferenza tangente a tutti i lati, cioè la base è circoscrivibile e H è il suo incentro. c.v.d.

Le facce laterali di una piramide retta formano angoli diedri congruenti con la base: la sezione normale di ciascun diedro è l'angolo $\angle VKH$, e $\text{tg}\,\angle VKH = \dfrac{h}{r}$ è la stessa per tutte le facce. Una piramide retta la cui base è un poligono regolare si chiama **piramide regolare**. In essa il piede dell'altezza è il centro del poligono, che è insieme incentro e circocentro: anche gli spigoli laterali sono tutti congruenti, le facce laterali sono triangoli isosceli congruenti e l'apotema cade nel punto medio di ogni lato di base.

11.2.2 Tre triangoli rettangoli

In una piramide regolare con lato di base s, altezza h, apotema a e spigolo laterale ℓ, indichiamo con r il raggio della circonferenza inscritta nella base (l'apotema del poligono di base) e con R il raggio della circonferenza circoscritta. Quasi ogni problema sulla piramide regolare si risolve in uno di tre triangoli rettangoli (Figura 11.3):

- *VHK*, retto in *H*: $a^2 = h^2 + r^2$ (l'altezza, l'apotema della base, l'apotema della piramide);
- *VHA*, retto in *H*: $\ell^2 = h^2 + R^2$ (l'altezza, il raggio circoscritto, lo spigolo laterale);
- *VKB*, retto in *K*, metà di una faccia laterale: $\ell^2 = a^2 + (\frac{s}{2})^2$.

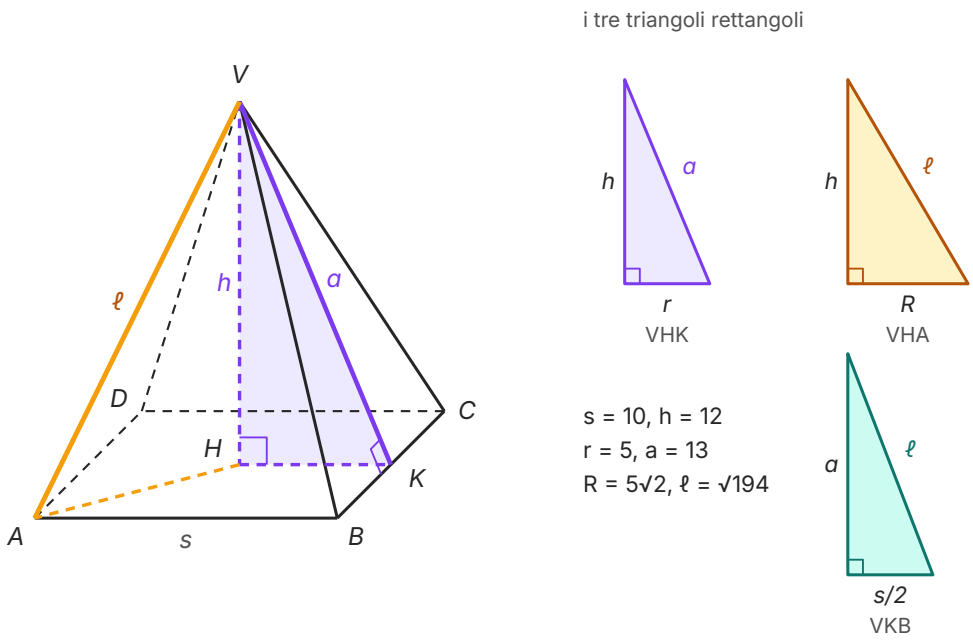


Figura 11.3 Una piramide regolare quadrangolare con lato di base $s = 10$ e altezza $h = 12$ e i suoi tre triangoli rettangoli: *VHK* (in viola), con il cateto $HK = r$ che giace nella base; *VHA* (in arancione), con il cateto $HA = R$ che è metà di una diagonale di base; *VKB*, metà della faccia laterale *VBC*. L'altezza *VH* e i segmenti nella base sono tratteggiati perché interni al solido o nascosti.

ESEMPIO SVOLTO

Una piramide regolare quadrangolare ha il lato di base $s = 10$ cm e l'altezza $h = 12$ cm. Calcola l'apotema, lo spigolo laterale e l'angolo che una faccia laterale forma con la base.

Soluzione. La base è un quadrato: il raggio della circonferenza inscritta è metà del lato, $r = 5$ cm, e il raggio della circonferenza circoscritta è metà della diagonale, $R = 5\sqrt{2}$ cm $\approx 7{,}07$ cm. Nel triangolo *VHK*: $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. Nel triangolo *VHA*: $\ell = \sqrt{144 + 50} = \sqrt{194}$ cm $\approx 13{,}93$ cm. Controllo con il terzo triangolo: $a^2 + (\frac{s}{2})^2 = 169 + 25 = 194 = \ell^2$. L'angolo tra la faccia laterale e la base è l'angolo $\angle VKH$ della sezione normale del diedro: $\text{tg}\,\angle VKH = \frac{12}{5}$, quindi $\angle VKH \approx 67{,}38°$.

ERRORE FREQUENTE

In una piramide ci sono tre segmenti «obliqui» o «verticali» che si confondono facilmente: l'**altezza** h, perpendicolare alla base e in generale interna al solido; l'**apotema** a, che sta su una faccia laterale ed è perpendicolare a un lato di base; lo **spigolo laterale** ℓ, che va dal vertice a un vertice della base. Vale sempre $h < a < \ell$, perché ciascuno è un cateto del triangolo rettangolo successivo. Inoltre «apotema» ha due significati: l'apotema del poligono di base è il raggio r della circonferenza inscritta, l'apotema della piramide è $a = \sqrt{h^2 + r^2}$. Infine l'apotema esiste solo per le piramidi rette: in una piramide obliqua le facce laterali hanno altezze diverse.

11.2.3 Sezioni parallele alla base e tronco di piramide

Tagliamo una piramide con un piano β parallelo alla base, a distanza x dal vertice. Il piano incontra gli spigoli laterali in punti che, per il teorema di Talete nello spazio (capitolo 10), dividono ogni spigolo nello stesso rapporto $\frac{x}{h}$: se A' è il punto di VA, si ha $\frac{VA'}{VA} = \frac{x}{h}$, e così per tutti gli spigoli. In altre parole la sezione è l'immagine della base nell'omotetia di centro V e rapporto $k = \frac{x}{h}$, che porta il piano della base nel piano β.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: una piramide di altezza h è tagliata da un piano parallelo alla base a distanza x dal vertice. **Tesi:** la sezione è un poligono simile alla base, con rapporto di similitudine $k = \frac{x}{h}$; il rapporto tra l'area b della sezione e l'area B della base è $\frac{b}{B} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$.

La parte di piramide compresa tra la base e una sezione parallela alla base si chiama **tronco di piramide**. Le sue due basi sono poligoni simili in piani paralleli, la sua altezza è la distanza tra i due piani e le facce laterali sono trapezi. Se la piramide di partenza è regolare, il tronco è regolare: le facce laterali sono trapezi isosceli congruenti e la loro altezza comune si chiama **apotema del tronco**. Nella sezione con un piano che contiene l'altezza e gli apotemi di due facce opposte si vede un trapezio isoscele: l'apotema del tronco è il suo lato obliquo, e si calcola con un triangolo rettangolo che ha per cateti l'altezza del tronco e la differenza tra i raggi delle circonferenze inscritte nelle due basi.

ESEMPIO SVOLTO

Una piramide regolare quadrangolare ha il lato di base 12 cm e l'altezza 8 cm. La si taglia con un piano parallelo alla base che passa per il punto medio dell'altezza. Descrivi la sezione e il tronco che si ottiene.

Soluzione. Il piano è a distanza $x = 4$ cm dal vertice, quindi $k = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$: la sezione è un quadrato di lato 6 cm, di area 36 cm^2, cioè un quarto dei 144 cm^2 della base, come prevede il teorema ($k^2 = \frac{1}{4}$). Il tronco ha altezza 4 cm. I raggi delle circonferenze inscritte nelle due basi sono 6 cm e 3 cm: l'apotema del tronco è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 4 cm e $6 - 3 = 3$ cm, quindi misura 5 cm. Le facce laterali sono quattro trapezi isosceli di basi 12 cm e 6 cm e altezza 5 cm.

11.3 I poliedri regolari

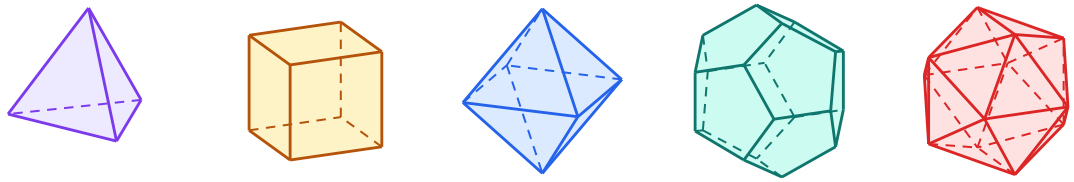
11.3.1 Quando un poliedro è regolare

Nel piano esistono infiniti poligoni regolari: per ogni $n \geq 3$ c'è un poligono con n lati e n angoli congruenti. Nello spazio la domanda analoga ha una risposta sorprendente. Chiamiamo **poliedro regolare** un poliedro convesso le cui facce sono poligoni regolari congruenti e nei cui vertici concorre sempre lo stesso numero di facce. Il cubo è regolare: sei quadrati, tre in ogni vertice. Non lo è invece un prisma retto con le basi triangoli equilateri e le facce laterali quadrate, anche se tutti i suoi spigoli sono uguali: le facce sono poligoni regolari, ma non congruenti tra loro.

11.3.2 Perché sono esattamente cinque

IN SINTESI

Teorema. Esistono esattamente cinque tipi di poliedri regolari: il **tetraedro**, il **cubo** (o esaedro), l'**ottaedro**, il **dodecaedro** e l'**icosaedro**.



Tetraedro	Cubo	Ottaedro	Dodecaedro	Icosaedro
F = 4, V = 4, S = 6	F = 6, V = 8, S = 12	F = 8, V = 6, S = 12	F = 12, V = 20, S = 30	F = 20, V = 12, S = 30

Figura 11.4 I cinque poliedri regolari, in proiezione ortogonale calcolata dalle coordinate dei vertici; gli spigoli nascosti sono tratteggiati. Sotto ciascuno, il numero di facce F, di vertici V e di spigoli S.

Dimostrazione. Supponiamo che le facce siano poligoni regolari di n lati e che in ogni vertice ne concorrano q. In un vertice si forma un angoloide con q facce: perciò $q \geq 3$, e la somma delle sue facce, cioè degli angoli dei poligoni che concorrono nel vertice, è minore di 360° (capitolo 10). L'angolo interno di un poligono regolare di n lati è $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, e cresce con n. Esaminiamo i casi.

- **Triangoli equilateri** (angolo 60°): con $q = 3, 4, 5$ la somma è 180°, 240°, 300°; con $q = 6$ sarebbe 360°, e il vertice diventerebbe piatto. Tre possibilità.
- **Quadrati** (90°): con $q = 3$ la somma è 270°; già con $q = 4$ si arriva a 360°. Una possibilità.
- **Pentagoni regolari** (108°): con $q = 3$ la somma è 324°; con $q = 4$ sarebbe 432°. Una possibilità.
- **Esagoni regolari** (120°): già con $q = 3$ la somma è 360°. Nessuna possibilità, e a maggior ragione nessuna per $n > 6$, perché l'angolo è ancora più grande.

Restano al più cinque combinazioni. Per ciascuna esiste davvero un poliedro (Figura 11.4): Euclide, nel tredicesimo libro degli *Elementi*, li costruisce tutti e cinque, e oggi possiamo descriverli con le coordinate dei vertici; per esempio $(1; 1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$ sono i vertici di un tetraedro regolare, perché distano tra loro sempre $2\sqrt{2}$. c.v.d.

I numeri delle facce F, dei vertici V e degli spigoli S si contano con un ragionamento a due mani. Ogni faccia ha n lati e ogni spigolo è comune a due facce, quindi $S = \dfrac{nF}{2}$; ogni faccia ha n vertici e ogni vertice è comune a q facce, quindi $V = \dfrac{nF}{q}$. Per il dodecaedro, con 12 facce pentagonali e tre facce per vertice: $S = \dfrac{12\cdot 5}{2} = 30$ e $V = \dfrac{12\cdot 5}{3} = 20$. La Tabella 11.1 raccoglie i dati di tutti e cinque.

Tabella 11.1 I cinque poliedri regolari: n è il numero dei lati di una faccia, q il numero di facce in un vertice.

Poliedro	Facce	n	q	Somma degli angoli in un vertice	F	V	S
Tetraedro	triangoli	3	3	180°	4	4	6
Cubo	quadrati	4	3	270°	6	8	12
Ottaedro	triangoli	3	4	240°	8	6	12
Dodecaedro	pentagoni	5	3	324°	12	20	30
Icosaedro	triangoli	3	5	300°	20	12	30

APPROFONDIMENTO · PLATONE E KEPLERO

I poliedri regolari sono detti anche *solidi platonici* perché Platone, nel dialogo *Timeo*, associa quattro di essi agli elementi della natura (il fuoco al tetraedro, l'aria all'ottaedro, l'acqua all'icosaedro, la terra al cubo) e riserva il quinto, il dodecaedro, all'ordinamento del tutto. Quasi duemila anni dopo, nel *Mysterium cosmographicum* (1596), Giovanni Keplero provò a spiegare le distanze dei sei pianeti allora noti dal Sole inserendo i cinque solidi, uno dentro l'altro, tra le sfere delle loro orbite. Il modello non regge, e le leggi che Keplero stesso scoprì negli anni successivi descrivono le orbite in tutt'altro modo; ma il tentativo di trovare una struttura matematica dietro i dati astronomici fu fecondo.

11.3.3 La relazione di Eulero

Calcoliamo $V - S + F$ per i poliedri della tabella: $4 - 6 + 4 = 2$, $8 - 12 + 6 = 2$, $6 - 12 + 8 = 2$, $20 - 30 + 12 = 2$, $12 - 30 + 20 = 2$. Proviamo con poliedri non regolari. Un prisma con la base di n lati ha $V = 2n$, $S = 3n$ e $F = n + 2$, quindi $V - S + F = 2n - 3n + n + 2 = 2$. Una piramide con la base di n lati ha $V = n + 1$, $S = 2n$ e $F = n + 1$: di nuovo $V - S + F = 2$. Il tronco di piramide quadrangolare dà $8 - 12 + 6 = 2$. Non è una coincidenza.

IN SINTESI

Relazione di Eulero. Per ogni poliedro convesso con V vertici, S spigoli e F facce vale $V - S + F = 2$.

La **relazione di Eulero** prende il nome da Leonhard Euler (Eulero), che la studiò nel Settecento. Non la dimostriamo; ne vediamo però un uso. Se in un poliedro convesso ogni faccia ha almeno tre lati e ogni vertice almeno tre spigoli, contando come sopra si ottiene $2S \geq 3F$ e $2S \geq 3V$. Da queste disuguaglianze e dalla relazione di Eulero si può dedurre, per esempio, che non esiste un poliedro convesso con 7 spigoli (lo dimostrerai negli esercizi): la relazione pone vincoli precisi su quali poliedri possono esistere.

APPROFONDIMENTO · UN POLIEDRO CON UN BUCO

La relazione di Eulero non vale per tutti i poliedri. Costruiamo una «cornice»: un prisma quadrangolare con un foro quadrato che lo attraversa da parte a parte. Per avere facce poligonali, dividiamo la faccia superiore in quattro trapezi, e così quella inferiore. Ci sono 16 vertici (8 sul contorno esterno e 8 sul foro), 16 facce (4 trapezi sopra, 4 sotto, 4 rettangoli esterni e 4 nel foro) e 32 spigoli (12 sopra, 12 sotto, 8 verticali). Allora $V - S + F = 16 - 32 + 16 = 0$. La cornice non è convessa; più precisamente, ciò che conta è il buco: la somma $V - S + F$ vale 2 per tutti i poliedri «senza buchi», anche non convessi, e diminuisce di 2 per ogni foro. Il numero $V - S + F$ è un esempio di invariante studiato dalla *topologia*, la parte della geometria che si occupa delle proprietà che non cambiano deformando una figura senza strapparla.

11.3.4 Poliedri duali

Uniamo i centri delle facce di un cubo che hanno uno spigolo in comune: otteniamo un ottaedro regolare. Viceversa, i centri delle facce di un ottaedro sono i vertici di un cubo. Due poliedri legati in questo modo si dicono **duali**: le facce dell'uno corrispondono ai vertici dell'altro, gli spigoli corrispondono agli spigoli. Per questo nella Tabella 11.1 cubo e ottaedro hanno F e V scambiati e lo stesso S, e lo stesso accade per dodecaedro e icosaedro; il tetraedro è duale di se stesso. Anche i numeri n e q si scambiano: il cubo ha facce quadrate e tre facce per vertice, l'ottaedro facce triangolari e quattro facce per vertice.

COLLEGAMENTI

Scienze. Molti minerali cristallizzano in forme poliedriche: il salgemma (cloruro di sodio) forma spesso cubi, la fluorite anche ottaedri, la pirite cubi e dodecaedri a facce pentagonali non regolari. Le facce piane riflettono l'ordine degli atomi nel reticolo cristallino. I capsidi di molti virus, l'involucro proteico che racchiude il materiale genetico, hanno simmetria icosaedrica. **Sport.** Il classico pallone da calcio a 12 pentagoni e 20 esagoni ricalca l'icosaedro troncato, il poliedro che si ottiene tagliando i 12 vertici dell'icosaedro: ha $F = 32$, $V = 60$, $S = 90$ e infatti $60 - 90 + 32 = 2$. **Architettura.** Le cupole geodetiche approssimano una sfera con una rete di triangoli ottenuta suddividendo le facce di un icosaedro.

11.4 I solidi di rotazione

11.4.1 Solidi generati da una rotazione

Facciamo ruotare di un giro completo una figura piana attorno a una retta del suo piano, l'**asse di rotazione**. Ogni punto della figura descrive una circonferenza che giace in un piano perpendicolare all'asse e ha il centro sull'asse; l'insieme dei punti toccati è un **solido di rotazione**. Il

tornio produce proprio solidi di questo tipo: un vaso modellato dal vasaio, una trottola, la gamba tornita di un tavolo sono esempi concreti. Tutti i solidi di rotazione hanno l'asse come asse di simmetria e tutti i piani che contengono l'asse come piani di simmetria; la loro sezione con un piano che contiene l'asse, detta **sezione assiale**, è formata dalla figura generatrice e dalla sua simmetrica rispetto all'asse.

- Un rettangolo che ruota attorno a un lato genera un **cilindro** circolare retto. Il lato sull'asse è l'altezza h, i lati perpendicolari all'asse descrivono le due basi, cerchi di raggio r, e il lato opposto all'asse, la **generatrice**, descrive la superficie laterale. Se $h = 2r$ la sezione assiale è un quadrato e il cilindro si dice **equilatero**.
- Un triangolo rettangolo che ruota attorno a un cateto genera un **cono** circolare retto (Figura 11.5a). Il cateto sull'asse è l'altezza h, l'altro cateto è il raggio r della base e l'ipotenusa, che descrive la superficie laterale, è l'**apotema** del cono: $a = \sqrt{r^2 + h^2}$. Se $a = 2r$ la sezione assiale è un triangolo equilatero e il cono si dice **equilatero**.
- Un trapezio rettangolo che ruota attorno al lato perpendicolare alle basi genera un **tronco di cono** (Figura 11.5b), con due basi circolari di raggi r_1 e r_2, altezza h e apotema $a = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$. È la parte di un cono compresa tra la base e una sezione parallela alla base.

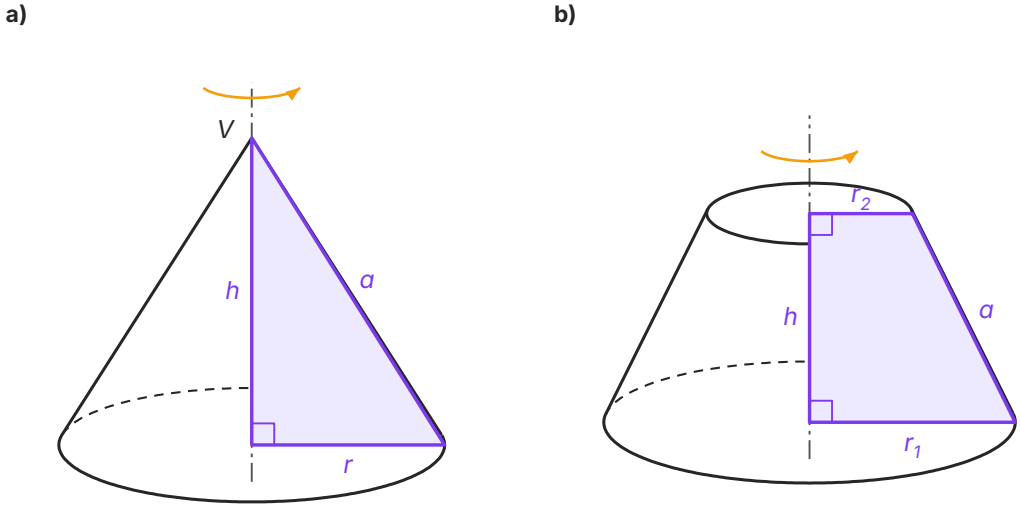


Figura 11.5 a) Il cono generato da un triangolo rettangolo che ruota attorno al cateto h; b) il tronco di cono generato da un trapezio rettangolo che ruota attorno al lato perpendicolare alle basi. La figura generatrice è colorata; la metà posteriore delle circonferenze di base, nascosta dalla superficie, è tratteggiata.

Ruotando figure più complicate si ottengono solidi composti. Un triangolo rettangolo di cateti 3 e 4 e ipotenusa 5 che ruota attorno all'ipotenusa genera due coni con la base in comune, uniti per la base: il raggio comune è l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa, $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$, e gli apotemi dei due coni sono i cateti 3 e 4. Un trapezio rettangolo con le basi di 7 e 4 e l'altezza di 4 che ruota attorno alla base maggiore genera un cilindro di raggio 4 e altezza 4 sormontato da un cono di raggio 4 e altezza $7 - 4 = 3$, il cui apotema è il lato obliquo del trapezio, 5. Un triangolo che ruota attorno a una retta che non lo attraversa genera invece un solido «con un buco», come un anello.

11.4.2 La sfera e le sue parti

Un semicerchio che ruota attorno al suo diametro genera una **sfera**; la semicirconferenza genera la **superficie sferica**. La sfera di centro O e raggio R è l'insieme dei punti dello spazio che distano da O non più di R, la superficie sferica l'insieme di quelli che distano esattamente R: è la naturale estensione allo spazio del cerchio e della circonferenza. Ogni piano per il centro taglia la sfera in un **cerchio massimo**, di raggio R. Le parti della sfera e della superficie sferica hanno nomi tradizionali:

- un piano divide la superficie sferica in due **calotte** e la sfera in due **segmenti sferici a una base**; l'**altezza** di una calotta è la distanza tra il piano e il punto della calotta più lontano da esso;
- due piani paralleli che tagliano la sfera staccano sulla superficie una **zona sferica** e nella sfera un **segmento sferico a due basi**; l'altezza della zona è la distanza tra i due piani;
- due semipiani che hanno per origine la stessa retta per il centro staccano sulla superficie un **fuso sferico** e nella sfera uno **spicchio sferico**, come uno spicchio d'arancia; l'**ampiezza** del fuso è quella del diedro formato dai due semipiani;
- un settore circolare che ruota attorno a un diametro che non lo attraversa genera un **settore sferico**; per esempio, un segmento sferico a una base unito al cono che ha il vertice nel centro e per base la base del segmento.

11.4.3 Sezioni piane dei solidi di rotazione

Un piano perpendicolare all'asse di un solido di rotazione lo taglia sempre in un cerchio, o in una corona circolare, con il centro sull'asse: è una delle circonferenze descritte dai punti della figura generatrice. Un piano che contiene l'asse dà la sezione assiale: per il cilindro un rettangolo $2r \times h$, per il cono un triangolo isoscele di base $2r$ e lati a. Gli altri piani danno curve che conosciamo da *Matematica 3*: un piano obliquo che taglia solo la superficie laterale di un cilindro dà un'ellisse, e i piani che tagliano un cono, secondo la loro inclinazione rispetto all'asse e alle generatrici, danno ellissi, parabole e iperboli, cioè le coniche, che appunto si chiamano *sezioni coniche* (vedi *Matematica 3*, sfere di Dandelin).

La sfera è il solido più simmetrico di tutti: ogni retta per il centro è un asse di rotazione. Perciò ogni sua sezione piana è un cerchio. Lo dimostriamo. Sia α un piano a distanza $d < R$ dal centro O e sia H il piede della perpendicolare condotta da O ad α, quindi $OH = d$ (Figura 11.6). Per ogni punto P della superficie sferica che sta in α, il segmento OH è perpendicolare a HP, perché HP è una retta di α passante per il piede della perpendicolare; il triangolo OHP è retto in H e

$$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Tutti i punti comuni ad α e alla superficie sferica distano quindi da H la stessa quantità $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$: stanno sulla circonferenza di centro H e raggio ρ, e la sezione della sfera è il cerchio corrispondente. Più il piano è lontano dal centro, più la sezione è piccola: per $d = 0$ è un cerchio massimo; per $d = R$ si riduce a un punto e il piano è **tangente** alla sfera, perpendicolare al raggio nel punto di contatto; per $d > R$ il piano non incontra la sfera. È la stessa discussione della posizione di una retta rispetto a una circonferenza, portata nello spazio.

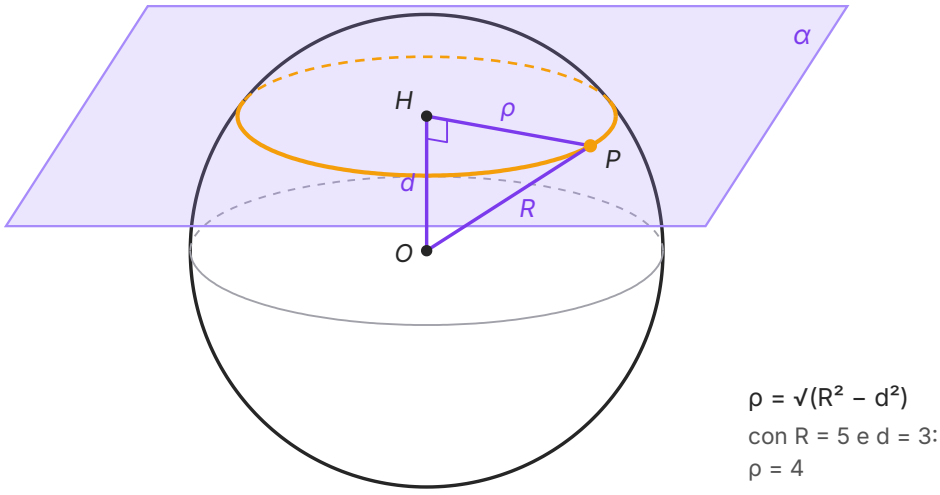


Figura 11.6 La sezione di una sfera di raggio R con un piano α a distanza d dal centro è un cerchio di centro H e raggio $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$, perché il triangolo OHP è retto in H. Con $R = 5$ e $d = 3$ si ha $\rho = 4$. Il tratto posteriore della circonferenza di sezione, nascosto dalla calotta superiore, è tratteggiato.

11.5 Le aree delle superfici

11.5.1 Prismi e piramidi

La superficie di un poliedro è formata da poligoni, quindi la sua area è la somma delle aree delle facce, cioè l'area di uno sviluppo piano. Per i solidi più regolari la somma si raccoglie in una formula. Indichiamo con $2p$ il perimetro di base, con p il semiperimetro e con B l'area di base.

- In un **prisma retto** le facce laterali sono rettangoli che hanno tutti altezza h e per basi i lati del poligono di base: sommandone le aree si ottiene $S_l = 2p \cdot h$. Lo sviluppo della superficie laterale è un unico rettangolo di base $2p$ e altezza h. L'area totale è $S_t = S_l + 2B$.
- In una **piramide retta** le facce laterali sono triangoli che hanno per basi i lati del poligono di base e per altezza comune l'apotema a: sommandone le aree si ottiene $S_l = \dfrac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$. L'area totale è $S_t = S_l + B$.
- In un **tronco di piramide retta**, con perimetri di base $2p$ e $2p'$ e apotema a, le facce laterali sono trapezi di altezza a: $S_l = \dfrac{(2p + 2p') \cdot a}{2} = (p + p') \cdot a$, e $S_t = S_l + B + b$.

Per la piramide regolare quadrangolare dell'esempio precedente (s = 10 cm, a = 13 cm) si ha p = 20 cm, quindi $S_l = 20 \cdot 13 = 260$ cm^2 e $S_t = 260 + 100 = 360$ cm^2. Per il tronco ottenuto tagliando la piramide di lato 12 cm a metà altezza (p = 24 cm, p' = 12 cm, a = 5 cm): $S_l = (24 + 12) \cdot 5 = 180$ cm^2 e $S_t = 180 + 144 + 36 = 360$ cm^2.

Se due solidi sono **simili** con rapporto di similitudine k, cioè uno si ottiene dall'altro moltiplicando tutte le lunghezze per k, le loro facce sono poligoni simili con lo stesso rapporto, e ciascuna area è moltiplicata per k^2: le aree delle superfici di due solidi simili stanno nel rapporto k^2. È la stessa regola delle sezioni parallele alla base di una piramide, e vale anche per i solidi di rotazione: raddoppiando raggio e altezza di un cono, la sua superficie quadruplica.

11.5.2 Cilindro e cono

La superficie laterale del cilindro, tagliata lungo una generatrice e srotolata, è un rettangolo con un lato uguale all'altezza h e l'altro uguale alla circonferenza di base $2\pi r$. Perciò

$$S_l = 2\pi rh, \quad S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

La superficie laterale del cono, tagliata lungo una generatrice, si srotola invece in un **settore circolare** (Figura 11.7): il suo raggio è l'apotema a, perché tutti i punti della circonferenza di base distano a dal vertice, e il suo arco è lungo quanto la circonferenza di base, $2\pi r$. L'area di un settore circolare è proporzionale al suo arco: il cerchio intero di raggio a ha area πa^2 e arco $2\pi a$,

quindi il settore ha area $\pi a^2 \cdot \dfrac{2\pi r}{2\pi a} = \pi r a$. Allo stesso modo l'angolo al centro del settore è la frazione $\dfrac{r}{a}$ dell'angolo giro:

$$S_l = \pi r a, \quad S_t = \pi r a + \pi r^2 = \pi r(a + r), \quad \text{angolo del settore} = 360° \cdot \frac{r}{a}.$$

Si può ricordare la formula come quella della piramide retta: «semiperimetro di base per apotema», con $p = \pi r$. Il cono è, in un certo senso, una piramide con infiniti lati.

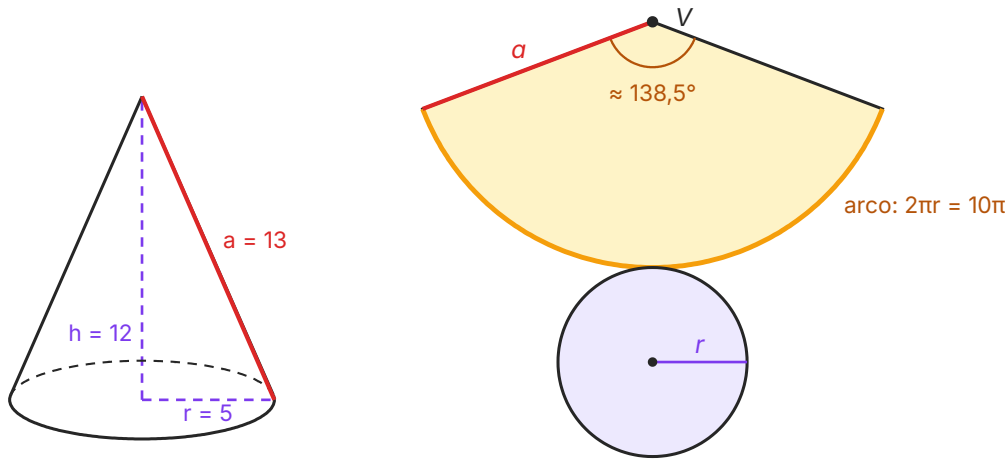


Figura 11.7 Il cono di raggio $r = 5$, altezza $h = 12$ e apotema $a = 13$ e il suo sviluppo: un settore circolare di raggio a e arco $2\pi r = 10\pi$, il cui angolo è $360° \cdot \dfrac{5}{13} \approx 138{,}5°$, più il cerchio di base.

ESEMPIO SVOLTO

Un cono ha raggio di base $r = 5$ cm e altezza $h = 12$ cm. Calcola l'area laterale, l'area totale e l'angolo del settore circolare che si ottiene sviluppando la superficie laterale.

Soluzione. L'apotema è $a = \sqrt{25 + 144} = 13$ cm. Quindi $S_l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ cm$^2 \approx 204{,}2$ cm^2 e $S_t = 65\pi + 25\pi = 90\pi$ cm$^2 \approx 282{,}7$ cm^2. L'angolo del settore è $360° \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{1800°}{13} \approx 138{,}46°$. Controllo: il settore ha area $\pi \cdot 13^2 \cdot \dfrac{138{,}46°}{360°} \approx 204{,}2$ cm^2, la stessa di S_l.

11.5.3 Il tronco di cono

La superficie laterale di un tronco di cono, con raggi $r_1 > r_2$ e apotema a, è la differenza tra le superfici laterali di due coni: quello completo, con raggio r_1 e apotema A, e quello che è stato tolto, con raggio r_2 e apotema $A - a$. I due coni sono simili, perché le loro sezioni assiali sono triangoli simili: quindi $\frac{A-a}{A} = \frac{r_2}{r_1}$, cioè $A\,r_2 = A\,r_1 - a\,r_1$, da cui $A(r_1 - r_2) = a\,r_1$. Allora

$$S_l = \pi r_1 A - \pi r_2\,(A - a) = \pi[A(r_1 - r_2) + a r_2] = \pi(a r_1 + a r_2) = \pi(r_1 + r_2)a.$$

Anche questa ricorda il tronco di piramide: $(p + p') \cdot a$ con $p = \pi r_1$ e $p' = \pi r_2$. L'area totale è $S_t = \pi(r_1 + r_2)a + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$.

ESEMPIO SVOLTO

Un vaso da fiori ha la forma di un tronco di cono, senza la base superiore, con raggi 7 cm e 4 cm e altezza 4 cm. Quanto materiale serve per costruirlo? E quanto per un tronco chiuso da entrambe le parti?

Soluzione. L'apotema è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti l'altezza e la differenza dei raggi: $a = \sqrt{4^2 + (7-4)^2} = 5$ cm. La superficie laterale è $S_l = \pi(7 + 4) \cdot 5 = 55\pi$ cm^2. Il vaso ha anche il fondo, che è la base minore (il vaso è appoggiato sulla base piccola): $55\pi + 16\pi = 71\pi$ cm$^2 \approx 223{,}1$ cm^2. Il tronco chiuso ha $S_t = 55\pi + 49\pi + 16\pi = 120\pi$ cm$^2 \approx 377{,}0$ cm^2.

11.5.4 La superficie sferica

La superficie sferica non si può sviluppare in un piano senza deformarla: è il motivo per cui ogni carta geografica deforma qualcosa. La sua area si ricava in modo semplice con i metodi dell'analisi del quinto anno; qui la enunciamo. La superficie sferica di raggio R ha area

$$S = 4\pi R^2,$$

cioè quattro volte l'area di un suo cerchio massimo. Il risultato è di Archimede, che lo dimostrò nell'opera *Sulla sfera e il cilindro*. Ne segue che la superficie sferica è equivalente alla superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera, cioè del cilindro equilatero di raggio R e altezza $2R$: infatti $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$; Archimede osservò anche che la superficie totale di quel cilindro, basi comprese, è i $\frac{3}{2}$ della superficie sferica. Dai suoi risultati sulle calotte segue un fatto più fine: tagliando la sfera e il cilindro circoscritto con due piani perpendicolari all'asse, la zona sferica e la striscia di cilindro comprese tra i due piani hanno la stessa area, che dipende solo dalla distanza h tra i piani. Quindi

area di una zona sferica o di una calotta di altezza h: $2\pi R h$.

Per $h = 2R$ si ritrova tutta la superficie sferica, per $h = R$ la semisfera, $2\pi R^2$. Il fuso sferico di ampiezza α è una frazione $\dfrac{\alpha}{360°}$ della superficie: la sua area è $4\pi R^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$.

DA RICORDARE

Sfera e cilindro circoscritto: la superficie sferica $4\pi R^2$ è uguale alla superficie laterale del cilindro equilatero circoscritto, e ogni zona sferica ha la stessa area della striscia di cilindro che le sta di fronte, $2\pi Rh$. Una calotta alta la metà di un'altra ha metà della sua area, anche se ha una forma diversa.

ESEMPIO SVOLTO

Una sfera di raggio 5 cm è tagliata da un piano a distanza 3 cm dal centro. Calcola l'area della sezione e le aree delle due calotte.

Soluzione. La sezione è un cerchio di raggio $\rho = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm e area 16π cm$^2 \approx 50{,}3$ cm^2 (Figura 11.6). La calotta minore ha altezza $5 - 3 = 2$ cm e area $2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 20\pi$ cm$^2 \approx 62{,}8$ cm^2; la maggiore ha altezza $5 + 3 = 8$ cm e area $2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$ cm$^2 \approx 251{,}3$ cm^2. Controllo: $20\pi + 80\pi = 100\pi = 4\pi \cdot 5^2$.

Tabella 11.2 Le aree delle superfici ($2p$, $2p'$ perimetri di base, p, p' semiperimetri, a apotema, h altezza).

Solido	Superficie laterale S_l	Superficie totale S_t
Prisma retto	$2p \cdot h$	$S_l + 2B$
Piramide retta	$p \cdot a$	$S_l + B$
Tronco di piramide retta	$(p + p') \cdot a$	$S_l + B + b$
Cilindro	$2\pi rh$	$2\pi r(h + r)$
Cono	πra, con $a = \sqrt{r^2 + h^2}$	$\pi r(a + r)$
Tronco di cono	$\pi(r_1 + r_2)a$	$S_l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$
Sfera	—	$4\pi R^2$; calotta e zona: $2\pi Rh$

11.6 Solidi inscritti e circoscritti

11.6.1 Sfere, cubi e cilindri

Un solido è **inscritto** in una sfera se tutti i suoi vertici, o le circonferenze delle sue basi, stanno sulla superficie sferica; una sfera è inscritta in un solido se è tangente a tutte le sue facce, o alla sua superficie laterale e alle basi. Questi problemi si risolvono quasi sempre in una sezione ben

scelta, che porta il problema nel piano, dove si usano i teoremi sui triangoli e la trigonometria del capitolo 6.

- **Sfera inscritta in un cubo** di spigolo ℓ: la sfera tocca le facce nei loro centri e il suo diametro è la distanza tra due facce opposte, quindi $r = \dfrac{\ell}{2}$.
- **Cubo inscritto in una sfera**: il centro della sfera è il centro del cubo e i vertici distano da esso metà della diagonale, quindi $R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Il rapporto tra le superfici delle due sfere, circoscritta e inscritta, è $(\sqrt{3})^2 = 3$.
- **Sfera inscritta in un cilindro**: il cilindro deve essere equilatero, con $h = 2r$; è la figura che, secondo la tradizione, Archimede volle sulla propria tomba.

ERRORE FREQUENTE

Nei problemi sui solidi inscritti l'errore più comune è lavorare sul disegno in prospettiva invece che su una sezione: nel disegno gli angoli retti non sembrano retti e i segmenti in profondità sono accorciati, quindi non si possono «leggere» le relazioni. Si sceglie un piano di sezione che contenga gli elementi del problema (di solito l'asse), lo si disegna in vera forma e solo lì si applicano Pitagora, Euclide o la trigonometria. Altro errore tipico: usare h al posto dell'apotema a nella formula πra, o viceversa.

11.6.2 Coni e sfere

Un cono è inscritto in una sfera quando il vertice e la circonferenza di base stanno sulla superficie sferica. Nella sezione assiale (Figura 11.8a) il cono diventa un triangolo isoscele VAB inscritto in un cerchio massimo. Sia W il punto della sfera diametralmente opposto a V: il triangolo VBW è inscritto in una semicirconferenza, quindi è retto in B, e BH è la sua altezza relativa all'ipotenusa $VW = 2R$. Per il secondo teorema di Euclide

$$r^2 = BH^2 = VH \cdot HW = h(2R - h).$$

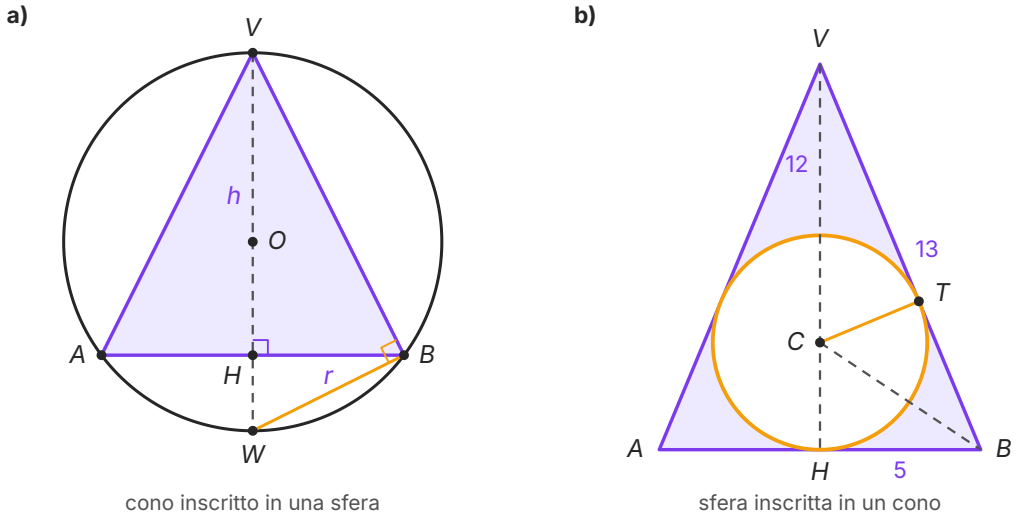
ESEMPIO SVOLTO

Un cono alto 8 cm è inscritto in una sfera di raggio 5 cm. Calcola il raggio di base, l'apotema e la superficie laterale del cono.

Soluzione. Con $h = 8$ e $2R = 10$: $r^2 = 8 \cdot (10 - 8) = 16$, quindi $r = 4$ cm. L'apotema si trova con il primo teorema di Euclide nel triangolo VBW, $a^2 = VB^2 = VH \cdot VW = 8 \cdot 10 = 80$, oppure con il teorema di Pitagora, $a = \sqrt{16 + 64}$: in entrambi i casi $a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm. Infine $S_l = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}\pi$ cm$^2 \approx 112{,}4$ cm^2.

Lo stesso problema si può impostare con un angolo. Se x è l'angolo che l'apotema forma con l'asse, cioè $x = \angle BVW$, nel triangolo rettangolo VBW si ha $a = VB = 2R \cos x$; proiettando l'apotema sull'asse e sulla base, $h = a \cos x = 2R \cos^2 x$ e $r = a \operatorname{sen} x = 2R \operatorname{sen} x \cos x = R \operatorname{sen} 2x$. Tutte le grandezze del cono diventano funzioni di x, con $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, e si possono porre condizioni su di esse con le equazioni e le disequazioni goniometriche (capitoli 3, 4 e 6). Per esempio, il raggio di base è massimo, ed è uguale a R, per $x = \dfrac{\pi}{4}$: il cono ha allora il vertice a distanza R dal piano di base, che passa per il centro della sfera.

Viceversa, una sfera è inscritta in un cono quando è tangente alla base e alla superficie laterale. Nella sezione assiale (Figura 11.8b) la sfera diventa il cerchio inscritto nel triangolo isoscele VAB: il suo raggio è il raggio della circonferenza inscritta, che dal capitolo 6 sappiamo calcolare come $\dfrac{S}{p}$, area diviso semiperimetro.



cono inscritto in una sfera

sfera inscritta in un cono

Figura 11.8 Sezioni assiali. a) Il cono di altezza $h = 8$ inscritto nella sfera di raggio $R = 5$: il triangolo VBW è retto in B e $r = 4$. b) La sfera inscritta nel cono di raggio 5 e altezza 12: il suo centro C sta sull'asse e sulla bisettrice dell'angolo $\angle VBA$, e il raggio $CT = CH = \dfrac{10}{3}$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola il raggio della sfera inscritta in un cono di raggio 5 cm e altezza 12 cm, e l'area della sua superficie.

Soluzione. La sezione assiale è il triangolo isoscele con base 10 cm e lati obliqui uguali all'apotema, 13 cm. La sua area è $S = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60\ \text{cm}^2$ e il semiperimetro è $p = \frac{10 + 13 + 13}{2} = 18\ \text{cm}$, quindi il raggio della sfera è $r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}\ \text{cm} \approx 3{,}33\ \text{cm}$.

Con la trigonometria. Il centro C sta sulla bisettrice dell'angolo alla base $\beta = \angle VBA$, quindi nel triangolo rettangolo CHB si ha $CH = HB \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Poiché $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$ e $\cos\beta = \frac{5}{13}$, la formula di bisezione del capitolo 2 dà $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1 + \cos\beta} = \frac{12/13}{18/13} = \frac{2}{3}$, e infatti $CH = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. La superficie della sfera è $4\pi\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{400}{9}\pi\ \text{cm}^2 \approx 139{,}6\ \text{cm}^2$.

SINTESI

- Un poliedro è un solido delimitato da un numero finito di poligoni, le facce; ogni lato è comune a due facce (spigolo). Un poliedro è convesso se sta tutto da una parte del piano di ciascuna faccia. Lo sviluppo piano ha la stessa area della superficie.
- Prisma: due basi congruenti in piani paralleli e facce laterali parallelogrammi; retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi; regolare se è retto con base regolare. La diagonale di un parallelepipedo rettangolo è $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; quella del cubo $\ell\sqrt{3}$.
- Una piramide è retta se il piede dell'altezza è l'incentro della base: allora le facce laterali hanno la stessa altezza, l'apotema $a = \sqrt{h^2 + r^2}$. Nella piramide regolare valgono anche $\ell^2 = h^2 + R^2$ e $\ell^2 = a^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$.
- Una sezione parallela alla base a distanza x dal vertice è simile alla base con rapporto $\frac{x}{h}$; le aree stanno nel rapporto $\left(\frac{x}{h}\right)^2$. Il tronco di piramide è la parte tra la base e la sezione.
- I poliedri regolari sono esattamente cinque, perché in un vertice concorrono almeno tre facce e la somma dei loro angoli deve essere minore di 360°: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.
- Relazione di Eulero: $V - S + F = 2$ per ogni poliedro convesso; non vale per un poliedro con un buco. Cubo e ottaedro, dodecaedro e icosaedro sono duali; il tetraedro è duale di se stesso.
- Cilindro, cono, tronco di cono e sfera sono generati dalla rotazione di un rettangolo, un triangolo rettangolo, un trapezio rettangolo e un semicerchio. Apotema del cono: $a = \sqrt{r^2 + h^2}$.
- Ogni sezione piana di una sfera è un cerchio di raggio $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$; un piano a distanza R dal centro è tangente. Le sezioni oblique di un cilindro sono ellissi; quelle di un cono possono essere ellissi, parabole e iperboli.
- Aree laterali: prisma retto $2p \cdot h$, piramide retta $p \cdot a$, tronco $(p + p') \cdot a$, cilindro $2\pi rh$, cono πra (sviluppo: settore di angolo $360° \cdot \frac{r}{a}$), tronco di cono $\pi(r_1 + r_2)a$.
- Superficie sferica $4\pi R^2$, uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto (Archimede); calotta e zona sferica $2\pi Rh$.
- I problemi su solidi inscritti e circoscritti si risolvono in una sezione assiale in vera forma: cono inscritto in una sfera $r^2 = h(2R - h)$; sfera inscritta in un cono: raggio $\frac{S}{p}$ del triangolo della sezione.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un poliedro convesso ha 8 facce triangolari e 6 vertici. Quanti spigoli ha?
   A. 10
   B. 12
   C. 14
   D. 24

2. ● L'apotema di una piramide retta è
   A. il segmento che unisce il vertice al centro della base
   B. lo spigolo laterale
   C. l'altezza di una faccia laterale condotta dal vertice
   D. il raggio della circonferenza inscritta nella base

3. ● Quale di questi solidi **non** è un poliedro regolare?
   A. Un prisma retto con base quadrata e altezza doppia del lato di base
   B. L'ottaedro regolare
   C. L'icosaedro regolare
   D. Il tetraedro regolare

4. ●● Un cono ha raggio 6 e apotema 10. L'angolo del settore circolare del suo sviluppo laterale è
   A. 108°
   B. 180°
   C. 270°
   D. 216°

5. ● Una sfera di raggio 10 è tagliata da un piano a distanza 6 dal centro. Il raggio della sezione è
   A. 6
   B. 4
   C. $\sqrt{136}$
   D. 8

6. ●● La diagonale di un cubo misura 6 cm. Lo spigolo misura
   A. 2 cm
   B. $3\sqrt{2}$ cm
   C. $2\sqrt{3}$ cm
   D. $6\sqrt{3}$ cm

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** Ogni sezione piana di un cilindro è un cerchio o un rettangolo. **b)** In una piramide regolare gli spigoli laterali sono tutti congruenti. **c)** La relazione di Eulero vale per ogni poliedro. **d)** Un prisma retto con le basi triangoli equilateri e le facce laterali quadrate è un poliedro regolare. **e)** L'area di una superficie sferica è quattro volte l'area di un suo cerchio massimo.

8. ● Completa. Il cono è generato dalla rotazione di un _____ attorno a _____ ; il tronco di cono dalla rotazione di un _____ attorno al _____ ; la sfera dalla rotazione di un _____ attorno al suo _____ . Un piano che dista dal centro di una sfera quanto il raggio si dice _____ alla sfera.

9. ●● Quanti vertici, spigoli e facce ha un prisma con la base ottagonale? E una piramide con la base ottagonale? Verifica in entrambi i casi la relazione di Eulero.

Calcolare

10. ● Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni 2 cm, 3 cm e 6 cm. Calcola la diagonale e l'area totale.

11. ● Un cubo ha lo spigolo di 4 cm. Calcola la diagonale di una faccia, la diagonale del cubo e l'area totale.

12. ●● Un prisma regolare esagonale ha lo spigolo di base di 4 cm e l'altezza di 10 cm. Calcola l'area laterale e l'area totale.

13. ●● Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 6 cm e lo spigolo laterale di 5 cm. Calcola l'apotema, l'altezza, l'area laterale e l'area totale.

14. ●● Una piramide regolare triangolare ha la base di lato 6 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola l'apotema, lo spigolo laterale e l'area totale (approssima a 0,01 cm^2).

15. ●● Un tronco di piramide regolare quadrangolare ha i lati delle basi di 10 cm e 4 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola l'apotema, l'area laterale e l'area totale.

16. ● Un cilindro ha raggio 3 cm e altezza 8 cm. Calcola l'area laterale e l'area totale.

17. ●● Un cono ha raggio di base 3 cm e area laterale 15π cm^2. Calcola l'apotema, l'altezza, l'area totale e l'angolo del settore del suo sviluppo laterale.

18. ●● Un tronco di cono ha i raggi di base di 5 cm e 2 cm e l'altezza di 4 cm. Calcola l'apotema, l'area laterale e l'area totale.

19. ● Una superficie sferica ha area 100π cm^2. Calcola il raggio e l'area della sezione con un piano a distanza 4 cm dal centro.

20. ●● Un triangolo rettangolo con i cateti di 6 cm e 8 cm ruota di un giro completo attorno all'ipotenusa. Descrivi il solido generato e calcolane l'area della superficie.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che le quattro diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono congruenti e si tagliano a metà in uno stesso punto.

22. ●● Dimostra che se le facce laterali di una piramide formano con la base diedri tutti congruenti, il piede dell'altezza è equidistante dai lati della base, cioè la piramide è retta.

23. ●● Dimostra che la superficie laterale di un cono equilatero è doppia dell'area della sua base e che il settore del suo sviluppo è un semicerchio.

24. ●●● Dimostra che non esiste un poliedro convesso con 7 spigoli. *Suggerimento:* usa la relazione di Eulero e le disuguaglianze $2S \geq 3F$, $2S \geq 3V$.

25. ●● Spiega perché non esiste un poliedro regolare con le facce esagonali, e perché non ne esiste uno con quattro pentagoni in ogni vertice.

Problemi

26. ●● Una tenda ha la forma di una piramide regolare quadrangolare con il lato di base di 2,4 m e l'altezza di 1,6 m. Quanti metri quadrati di tela servono per le pareti? E per il pavimento?

27. ●● Un barattolo cilindrico ha raggio 4 cm e altezza 11 cm. Calcola l'area dell'etichetta che ricopre esattamente la superficie laterale e l'area della lamiera necessaria per l'intero barattolo, coperchio compreso.

28. ●● La cialda di un cono gelato ha la forma della superficie laterale di un cono con apotema 12 cm e raggio di base 3 cm. Calcola l'area della cialda e l'angolo del settore circolare da cui si ricava.

29. ●● La cupola di un edificio è una calotta sferica alta 8 m, ricavata da una sfera di raggio 13 m. Calcola il raggio della circonferenza di base della cupola e l'area da impermeabilizzare. Confronta con una cupola emisferica di raggio 10 m.

30. ●●● Un cono è inscritto in una sfera di raggio R e l'apotema forma con l'asse l'angolo x. Esprimi in funzione di R e x l'apotema, l'altezza e il raggio del cono; poi calcola la superficie laterale per $R = 5$ e $x = 30°$, e verifica il risultato con la relazione $r^2 = h(2R - h)$.

Verso la verifica

31. ●● Una piramide regolare esagonale ha lo spigolo di base di 6 cm e l'altezza di 8 cm. Calcola lo spigolo laterale, l'apotema, l'area totale e l'angolo che ogni faccia laterale forma con la base.

32. ●● Un cubo ha lo spigolo di 6 cm. Calcola i raggi della sfera inscritta e della sfera circoscritta e il rapporto tra le aree delle due superfici sferiche.

33. ●●● **Sfida.** Dimostra che i centri delle sei facce di un cubo di spigolo ℓ sono i vertici di un ottaedro regolare e calcola lo spigolo e l'area totale dell'ottaedro. Spiega, con la dualità, perché cubo e ottaedro hanno lo stesso numero di spigoli.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Gli Elementi*: il libro XI per le definizioni dei solidi e il libro XIII, che costruisce i cinque poliedri regolari e conclude che non ce ne sono altri.
- [ARC] Archimede, *Opere*: il trattato *Sulla sfera e sul cilindro*, con l'area della superficie sferica e delle calotte confrontate con il cilindro circoscritto.
- [HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*: i capitoli sui poliedri regolari e sulla topologia, dove la relazione di Eulero è inserita in un quadro più ampio.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sulla topologia, con una dimostrazione della formula di Eulero per i poliedri.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i solidi platonici da Platone a Euclide, Archimede e il cosmo poliedrico di Keplero.

Glossario del capitolo

Apotema di un cono
Il segmento che unisce il vertice a un punto della circonferenza di base: $a = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Apotema di una piramide retta
L'altezza, uguale per tutte, delle facce laterali condotta dal vertice: $a = \sqrt{h^2 + r^2}$, con r raggio della circonferenza inscritta nella base.

Calotta sferica
Ciascuna delle due parti in cui un piano divide una superficie sferica; se è alta h, ha area $2\pi Rh$.

Cilindro
Solido generato da un rettangolo che ruota attorno a un suo lato.

Cono
Solido generato da un triangolo rettangolo che ruota attorno a un cateto.

Fuso sferico
Parte di superficie sferica compresa tra due semipiani con l'origine sulla stessa retta per il centro.

Parallelepipedo rettangolo
Prisma retto con la base rettangolare; la sua diagonale è $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Piramide retta
Piramide con la base circoscrivibile a una circonferenza e il piede dell'altezza nel suo centro; è regolare se la base è un poligono regolare.

Poliedri duali
Coppie di poliedri in cui le facce dell'uno corrispondono ai vertici dell'altro, come cubo e ottaedro.

Poliedro
Solido delimitato da un numero finito di poligoni (facce), ciascun lato dei quali è comune a due facce.

Poliedro convesso
Poliedro che sta tutto da una stessa parte rispetto al piano di ciascuna delle sue facce.

Poliedro regolare
Poliedro convesso con facce poligoni regolari congruenti e lo stesso numero di facce in ogni vertice; ce ne sono cinque.

Prisma
Poliedro con due facce poligonali congruenti in piani paralleli (basi) e facce laterali parallelogrammi.

Relazione di Eulero
$V - S + F = 2$ tra vertici, spigoli e facce di un poliedro convesso.

Sfera
Insieme dei punti dello spazio che distano da un punto O non più di R; la superficie sferica ha area $4\pi R^2$.

Solido di rotazione
Solido generato da una figura piana che ruota di un giro attorno a una retta del suo piano.

Sviluppo piano
Figura piana ottenuta aprendo la superficie di un solido lungo alcuni spigoli o linee, senza sovrapposizioni.

Tronco di piramide
Parte di una piramide compresa tra la base e una sezione parallela alla base.

Zona sferica
Parte di superficie sferica compresa tra due piani paralleli; se la loro distanza è h, ha area $2\pi Rh$.

Soluzioni

1. B. Ogni faccia ha 3 lati e ogni spigolo è comune a due facce: $S = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$. Controllo con Eulero: $6 - 12 + 8 = 2$ (è l'ottaedro).

2. C. L'apotema è l'altezza, uguale per tutte, delle facce laterali condotta dal vertice; la D è l'apotema del poligono di base.

3. A. Le sue facce sono due quadrati e quattro rettangoli non quadrati: non sono poligoni regolari congruenti.

4. D. $360° \cdot \frac{6}{10} = 216°$.

5. D. $\rho = \sqrt{100 - 36} = 8$.

6. C. $\ell\sqrt{3} = 6$, quindi $\ell = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm $\approx 3{,}46$ cm.

7. a) Falso: un piano obliquo che taglia solo la superficie laterale dà un'ellisse. b) Vero. c) Falso: vale per i poliedri convessi (più in generale per quelli senza buchi); per la cornice dell'Approfondimento $V - S + F = 0$. d) Falso: le facce sono regolari ma non congruenti (triangoli e quadrati). e) Vero: $4\pi R^2 = 4 \cdot \pi R^2$.

8. Triangolo rettangolo, un cateto; trapezio rettangolo, lato perpendicolare alle basi; semicerchio, diametro (si accetta anche: cerchio, diametro); tangente.

9. Prisma: $V = 16$, $S = 24$, $F = 10$ e $16 - 24 + 10 = 2$. Piramide: $V = 9$, $S = 16$, $F = 9$ e $9 - 16 + 9 = 2$.

10. $d = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ cm; $S_t = 2(6 + 18 + 12) = 72$ cm^2.

11. Diagonale di faccia $4\sqrt{2}$ cm $\approx 5{,}66$ cm; diagonale del cubo $4\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}93$ cm; $S_t = 6 \cdot 16 = 96$ cm^2.

12. $S_l = 6 \cdot 4 \cdot 10 = 240$ cm^2. L'esagono regolare di lato 4 è formato da sei triangoli equilateri: $B = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 = 24\sqrt{3}$ cm^2. $S_t = 240 + 48\sqrt{3} \approx 323{,}14$ cm^2.

13. Nel triangolo VKB: $a = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm. Nel triangolo VHK, con $r = 3$: $h = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ cm $\approx 2{,}65$ cm. $S_l = p \cdot a = 12 \cdot 4 = 48$ cm^2; $S_t = 48 + 36 = 84$ cm^2.

14. Il raggio inscritto nel triangolo equilatero di lato 6 è $r = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, quello circoscritto $R = 2\sqrt{3}$. Apotema $a = \sqrt{16 + 3} = \sqrt{19} \approx 4{,}36$ cm; spigolo laterale $\ell = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7} \approx 5{,}29$ cm. $S_l = p \cdot a = 9\sqrt{19} \approx 39{,}23$ cm^2, $B = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ cm^2, $S_t \approx 54{,}82$ cm^2.

15. I raggi inscritti delle basi sono 5 e 2: $a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm. $S_l = (20 + 8) \cdot 5 = 140$ cm^2; $S_t = 140 + 100 + 16 = 256$ cm^2.

16. $S_l = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$ cm$^2 \approx 150{,}8$ cm^2; $S_t = 48\pi + 18\pi = 66\pi$ cm$^2 \approx 207{,}3$ cm^2.

17. $\pi ra = 15\pi$ con $r = 3$ dà $a = 5$ cm; $h = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm; $S_t = 15\pi + 9\pi = 24\pi$ cm$^2 \approx 75{,}4$ cm^2; angolo $360° \cdot \frac{3}{5} = 216°$.

18. $a = \sqrt{16 + 9} = 5$ cm; $S_l = \pi(5 + 2) \cdot 5 = 35\pi$ cm$^2 \approx 110{,}0$ cm^2; $S_t = 35\pi + 25\pi + 4\pi = 64\pi$ cm$^2 \approx 201{,}1$ cm^2.

19. $4\pi R^2 = 100\pi$ dà $R = 5$ cm; $\rho = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm, area 9π cm$^2 \approx 28{,}3$ cm^2.

20. L'ipotenusa è 10 cm. Il solido è formato da due coni con la base in comune, di raggio uguale all'altezza relativa all'ipotenusa, $\frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ cm, e apotemi 6 cm e 8 cm. Area: $\pi \cdot 4{,}8 \cdot (6 + 8) = 67{,}2\pi$ cm$^2 \approx 211{,}1$ cm^2.

21. *Traccia.* Le diagonali AG e CE sono le diagonali del rettangolo $ACGE$ (sezione diagonale): sono congruenti e si tagliano a metà. Lo stesso vale per BH e DF nel rettangolo $BDHF$, e per AG e BH nel rettangolo $ABGH$. Quindi le quattro diagonali hanno lo stesso punto medio e tutte misurano $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

22. *Traccia.* Per ogni lato di base si conduce da H la perpendicolare HK al lato; per il teorema delle tre perpendicolari VK è perpendicolare al lato, quindi $\angle VKH$ è la sezione normale del diedro. I triangoli VHK sono rettangoli in H, hanno il cateto VH in comune e gli angoli in K congruenti per ipotesi: sono

congruenti, quindi i segmenti HK sono tutti uguali ($HK = \dfrac{h}{\operatorname{tg} \angle VKH}$). H è equidistante dai lati. Inoltre H è interno alla base: se fosse esterno, il diedro relativo a un lato che separa H dalla base sarebbe ottuso e quello relativo a un lato che non la separa sarebbe acuto, contro l'ipotesi.

23. Nel cono equilatero $a = 2r$: $S_l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$, doppio dell'area di base πr^2. L'angolo del settore è $360° \cdot \dfrac{r}{2r} = 180°$: un semicerchio di raggio $2r$.

24. Se $S = 7$, da $2S \geq 3F$ si ha $F \leq \dfrac{14}{3}$, cioè $F \leq 4$, e allo stesso modo $V \leq 4$; quindi $V + F \leq 8$. Ma per Eulero $V + F = S + 2 = 9$: contraddizione. (Le due disuguaglianze valgono perché ogni faccia ha almeno 3 lati e in ogni vertice concorrono almeno 3 spigoli, e ogni spigolo ha due facce e due estremi.)

25. Tre esagoni regolari in un vertice danno $3 \cdot 120° = 360°$: l'angoloide sarebbe piatto, mentre la somma delle facce di un angoloide convesso è minore di 360°; con più facce o più lati la somma cresce. Quattro pentagoni danno $4 \cdot 108° = 432° > 360°$.

26. Il raggio inscritto della base è 1,2 m; l'apotema è $\sqrt{1{,}6^2 + 1{,}2^2} = 2$ m. Pareti: $S_l = p \cdot a = 4{,}8 \cdot 2 = 9{,}6$ m^2; pavimento: $2{,}4^2 = 5{,}76$ m^2.

27. Etichetta: $2\pi \cdot 4 \cdot 11 = 88\pi$ cm$^2 \approx 276{,}5$ cm^2. Barattolo: $88\pi + 2 \cdot 16\pi = 120\pi$ cm$^2 \approx 377{,}0$ cm^2.

28. $S_l = \pi \cdot 3 \cdot 12 = 36\pi$ cm$^2 \approx 113{,}1$ cm^2; angolo $360° \cdot \dfrac{3}{12} = 90°$: un quarto di cerchio di raggio 12 cm.

29. Il piano di base dista $13 - 8 = 5$ m dal centro: raggio di base $\sqrt{169 - 25} = 12$ m. Area: $2\pi \cdot 13 \cdot 8 = 208\pi \approx 653{,}5$ m^2. La cupola emisferica di raggio 10 m ha area $2\pi \cdot 100 = 200\pi \approx 628{,}3$ m^2, poco meno; ma copre un cerchio di raggio 10 m invece di 12 m: la cupola ribassata copre una pianta più grande con quasi la stessa superficie.

30. Nel triangolo VBW, retto in B: $a = 2R \cos x$; $h = a \cos x = 2R \cos^2 x$; $r = a \operatorname{sen} x = R \operatorname{sen} 2x$. Per $R = 5$, $x = 30°$: $a = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$, $h = 7{,}5$, $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33$; $S_l = \pi r a = \dfrac{75}{2}\pi \approx 117{,}8$. Verifica: $r^2 = \dfrac{75}{4} = 18{,}75$ e $h(2R - h) = 7{,}5 \cdot 2{,}5 = 18{,}75$.

31. Il raggio circoscritto dell'esagono è uguale al lato, 6; il raggio inscritto è $3\sqrt{3}$. Spigolo laterale $\sqrt{64 + 36} = 10$ cm; apotema $\sqrt{64 + 27} = \sqrt{91} \approx 9{,}54$ cm. $S_l = 18\sqrt{91} \approx 171{,}71$ cm^2, $B = 54\sqrt{3} \approx 93{,}53$ cm^2, $S_t \approx 265{,}24$ cm^2. Angolo: $\operatorname{arctg} \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \approx 57{,}0°$.

32. $r = 3$ cm, $R = 3\sqrt{3}$ cm $\approx 5{,}20$ cm; il rapporto tra le aree è $\dfrac{R^2}{r^2} = 3$.

33. *Traccia.* Due centri di facce adiacenti distano $\sqrt{\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$, e i centri di facce opposte distano ℓ: i sei punti formano otto triangoli equilateri di lato $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$, uno per ogni vertice del cubo, quattro in ogni vertice; l'ottaedro è regolare. Area totale: $8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\ell^2}{2} = \sqrt{3}\ell^2$. Ogni spigolo dell'ottaedro unisce i centri di due facce del cubo che hanno uno spigolo in comune, e attraversa quello spigolo: gli spigoli si corrispondono uno a uno, e sono 12 per entrambi.