CAPITOLO

10

Rette e piani nello spazio

Sul foglio due rette che non si incontrano sono parallele; nello spazio possono semplicemente ignorarsi. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Conoscere gli enti primitivi e i postulati della geometria dello spazio e i modi in cui si individua un piano.
2. Riconoscere le posizioni reciproche di due rette, di una retta e un piano, di due piani, distinguendo le rette parallele dalle sghembe.
3. Dimostrare i teoremi sul parallelismo, il criterio di perpendicolarità fra retta e piano e il teorema delle tre perpendicolari.
4. Calcolare proiezioni, distanze e angoli fra rette e piani, e l'ampiezza di un diedro mediante la sua sezione normale.
5. Rappresentare i solidi in assonometria cavaliera e risolvere gli stessi problemi in modo sintetico e con i vettori.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Punti, rette e piani nello spazio 2
10.2 Posizioni reciproche e parallelismo 5
10.3 Perpendicolarità e distanze 9
10.4 Angoli, diedri e angoloidi 14
10.5 Simmetrie dello spazio e metodo analitico 19

Matematica 4 · Parte IV · Geometria dello spazio · versione 1.0
Capitolo 10: Rette e piani nello spazio · pagine 279–304 del volume completo · estratto per lo studio

Uno sgabello a tre gambe appoggia sempre bene, anche su un pavimento irregolare; una sedia a quattro gambe, invece, a volte traballa. Una porta ruota attorno ai cardini e, mentre si apre, il suo bordo inferiore striscia sul pavimento senza mai sollevarsi. Una mensola si dice «in bolla» quando è parallela al pavimento, e un muratore controlla che un pilastro sia verticale appoggiando la livella su due lati diversi, non su uno solo. Sono osservazioni quotidiane, e ognuna nasconde un fatto di geometria dello spazio: tre punti individuano un piano, un piano e una retta possono essere perpendicolari, due piani possono essere paralleli, e per controllare una perpendicolarità due direzioni bastano, una sola no.

Finora la geometria si è svolta quasi tutta su un foglio, cioè in un piano. Questa parte del volume la porta nello spazio a tre dimensioni, come chiedono le *Indicazioni nazionali*: in questo capitolo studiamo le posizioni reciproche di rette e piani, il parallelismo e la perpendicolarità, le distanze e gli angoli; nei due capitoli successivi useremo questi strumenti per i poliedri, i solidi di rotazione, le superfici e i volumi. Il metodo è quello di Euclide: pochi enti primitivi, alcuni postulati e poi teoremi dimostrati. Molte idee sono l'estensione naturale di quelle del piano, ma lo spazio riserva anche sorprese: due rette possono non incontrarsi senza essere parallele. Useremo la trigonometria del triangolo rettangolo (capitolo 6) e, nell'ultimo paragrafo, i vettori dello spazio (vedi *Matematica 2*, cap. 13).

10.1 Punti, rette e piani nello spazio

10.1.1 Enti primitivi e postulati

Come nella geometria del piano, **punto**, **retta** e **piano** sono *enti primitivi*: non li definiamo, e le loro proprietà sono fissate da alcuni *postulati* (o *assiomi*), enunciati che si accettano senza dimostrazione. Chiamiamo **spazio** l'insieme di tutti i punti; rette e piani sono suoi sottoinsiemi. Indichiamo i punti con le lettere maiuscole (A, B, P…), le rette con le minuscole (r, s, t…) e i piani con le lettere greche α, β, γ, δ; evitiamo la lettera π, che in matematica indica già un numero.

In ogni piano valgono tutti i postulati e tutti i teoremi della geometria piana. A questi aggiungiamo alcuni postulati che riguardano il modo in cui rette e piani si dispongono nello spazio.

- **Postulato 1.** Esistono almeno quattro punti che non appartengono a uno stesso piano: lo spazio non si riduce a un piano.
- **Postulato 2.** Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
- **Postulato 3.** Se due punti distinti di una retta appartengono a un piano, tutta la retta giace nel piano.

- **Postulato 4.** Se due piani distinti hanno un punto in comune, hanno in comune una retta, che passa per quel punto.
- **Postulato 5.** Ogni piano divide i punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni, i **semispazi**: due punti dello stesso semispazio sono estremi di un segmento che non incontra il piano, due punti di semispazi diversi sono estremi di un segmento che lo incontra.

Punti che appartengono a uno stesso piano si dicono **complanari**; punti che appartengono a una stessa retta si dicono allineati. Il postulato 2 spiega lo sgabello dell'introduzione: le estremità delle tre gambe sono tre punti non allineati, e per loro passa sempre un piano, quello su cui lo sgabello si appoggia. Le estremità di quattro gambe, invece, sono quattro punti che possono non essere complanari: se il pavimento è irregolare, la sedia appoggia su tre gambe e la quarta resta sollevata. Il postulato 4 dice che due piani che si toccano non lo fanno mai in un punto isolato: due pareti di una stanza si incontrano lungo uno spigolo, il soffitto e una parete lungo un'intera linea.

10.1.2 Come si individua un piano

Dai postulati 2 e 3 discendono altri modi per individuare un piano. Consideriamo una retta r e un punto P che non le appartiene. Scegliamo su r due punti distinti A e B: i punti A, B, P non sono allineati, quindi per il postulato 2 esiste un solo piano α che li contiene, e per il postulato 3 α contiene tutta la retta r. Ogni altro piano che contenga r e P contiene anche A, B e P, quindi coincide con α. Allo stesso modo, due rette r e s che si incontrano in un punto O individuano un piano: basta prendere un punto $A \neq O$ su r e un punto $B \neq O$ su s e ragionare sui tre punti O, A, B.

IN SINTESI

Un piano è individuato da:

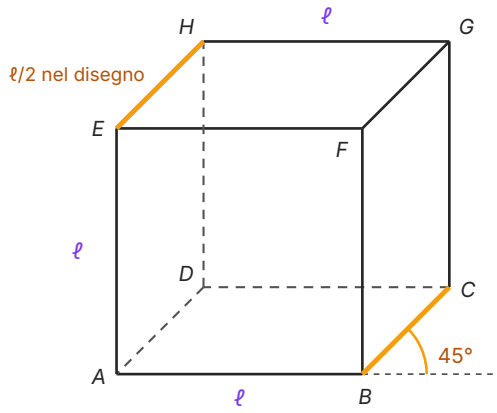
1. tre punti non allineati;
2. una retta e un punto che non le appartiene;
3. due rette incidenti;
4. due rette parallele distinte (vedremo tra poco che cosa significa «parallele» nello spazio).

10.1.3 Disegnare lo spazio: l'assonometria cavaliera

Per ragionare sullo spazio dobbiamo disegnarlo su un foglio, che ha due dimensioni soltanto. In questo volume usiamo quasi sempre l'**assonometria cavaliera**: le figure parallele al foglio (per esempio la faccia anteriore di un cubo) si disegnano in vera grandezza, mentre le rette perpendicolari al foglio, che «vanno in profondità», si disegnano inclinate di 45° e con le lunghezze dimezzate. In più adottiamo una regola che vale per ogni disegno tecnico: gli spigoli che un osservatore non vedrebbe, perché nascosti dal solido stesso, si tratteggiano. La Figura 10.1 mostra

il cubo *ABCDEFGH* che useremo in tutto il capitolo: la base è il quadrato *ABCD* e i vertici *E*, *F*, *G*, *H* stanno rispettivamente sopra *A*, *B*, *C*, *D*.

a) il cubo in assonometria cavaliera



b) un piano, una retta che lo fora, una retta che vi giace

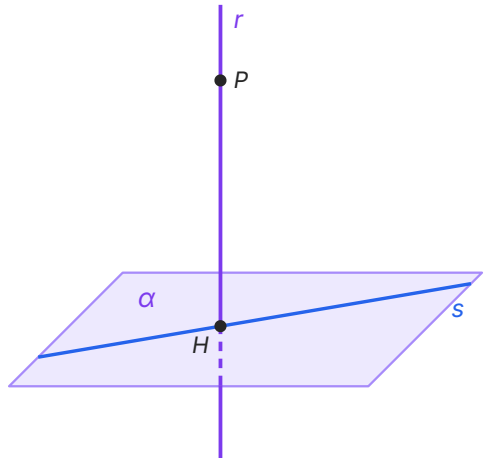


Figura 10.1 **a)** Il cubo *ABCDEFGH* in assonometria cavaliera: la faccia anteriore *ABFE* è in vera grandezza, gli spigoli in profondità (*BC*, *EH*…) sono inclinati di 45° e disegnati lunghi la metà; gli spigoli nascosti *AD*, *DC*, *DH* sono tratteggiati. **b)** Un piano orizzontale α si disegna come un parallelogramma; la retta *r* lo attraversa nel punto *H* e il tratto che passa sotto il piano è tratteggiato; la retta *s* giace in α.

Questa rappresentazione è una *proiezione parallela*: ogni punto dello spazio viene portato sul foglio lungo una direzione fissa. Per questo conserva alcune proprietà importanti: rette parallele restano parallele nel disegno, il punto medio di un segmento resta il punto medio, e il rapporto fra segmenti paralleli non cambia. Non conserva invece né le lunghezze in profondità né gli angoli: la faccia *BCGF* del cubo, che è un quadrato, appare come un parallelogramma, e l'angolo retto *ABC* è disegnato di 135°. Un piano, che è illimitato, si rappresenta con una sua porzione a forma di parallelogramma, come nella figura **b**.

ERRORE FREQUENTE

Misurare sul disegno. In assonometria un angolo retto può apparire di 45° o di 135°, e un segmento in profondità appare lungo la metà: non si ricava mai una misura con il goniometro o il righello da un disegno dello spazio. Le misure si ottengono ragionando, di solito individuando un triangolo rettangolo e disegnandolo a parte in *vera forma*.

Sbagliare il tratteggio. Uno spigolo nascosto disegnato continuo (o uno visibile disegnato tratteggiato) rende il solido ambiguo: lo stesso disegno può sembrare un cubo visto dall'alto o dal basso. Prima di tracciare, chiediti quali facce vede l'osservatore: sono tratteggiati solo gli spigoli che appartengono a facce tutte nascoste.

APPROFONDIMENTO · IL LIBRO XI DEGLI ELEMENTI

Gli *Elementi* di Euclide, scritti ad Alessandria attorno al 300 a.C., dedicano alla geometria solida gli ultimi tre libri. Il libro XI si apre con una serie di definizioni: la prima afferma che il solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità, e la seconda che il suo confine è una superficie. Seguono le definizioni di retta perpendicolare a un piano, di inclinazione di una retta o di un piano rispetto a un piano, di piani paralleli e di angolo solido, cioè di angoloide.

Fra le proposizioni del libro XI c'è proprio il criterio di perpendicolarità che dimostreremo in questo capitolo: una retta perpendicolare a due rette che si tagliano, nel loro punto di intersezione, è perpendicolare anche al piano che le contiene. Il libro XII calcola volumi, per esempio quello della piramide; il libro XIII costruisce i cinque poliedri regolari. Più di duemila anni dopo, nel 1899, David Hilbert riscrisse le fondamenta della geometria euclidea, piana e dello spazio, con un sistema di assiomi rigoroso, nei *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria).

10.2 Posizioni reciproche e parallelismo

10.2.1 Due rette nello spazio

Nel piano due rette distinte o si incontrano in un punto o sono parallele. Nello spazio c'è una terza possibilità. Due rette distinte si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene entrambe; in questo caso, ragionando in quel piano, sono **incidenti** se hanno un punto in comune, **parallele** se non ne hanno nessuno. Due rette che non sono complanari si dicono **sghembe**: non si incontrano, ma non sono nemmeno parallele, perché non esiste un piano che le contenga. Come nel piano, consideriamo parallela a sé stessa anche una retta coincidente.

Il cubo offre esempi di tutti e tre i casi (Figura 10.2). Le rette AB e BG sono incidenti in B. Le rette AB e HG sono parallele: non appartengono alla stessa faccia, ma stanno nel piano del rettangolo $ABGH$, che taglia il cubo in diagonale. Le rette AB e CG sono sghembe; per convincerse-

ne, supponiamo per assurdo che esista un piano che le contiene. Questo piano conterrebbe i tre punti non allineati A, B, C, quindi sarebbe il piano della base $ABCD$; ma il punto G non sta nella base. L'ipotesi è falsa.

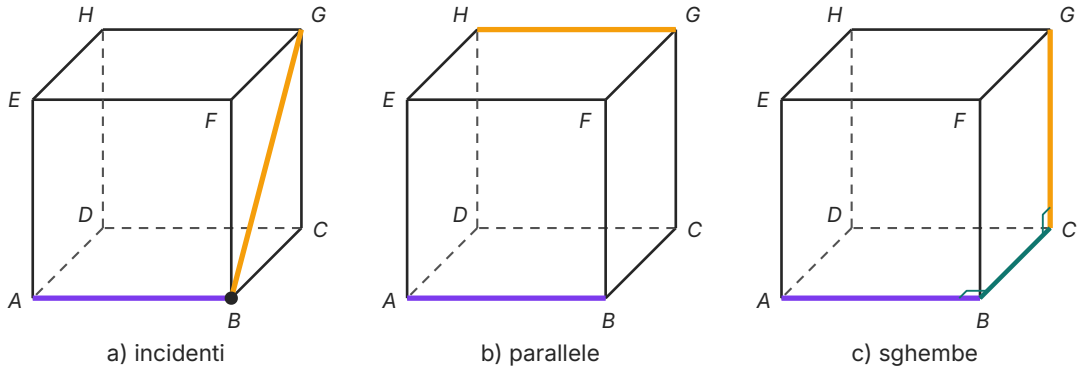


Figura 10.2 Posizioni reciproche di due rette negli spigoli e nelle diagonali di un cubo. **a)** AB e BG sono incidenti in B. **b)** AB e HG sono parallele: stanno nel piano $ABGH$. **c)** AB e CG sono sghembe; il segmento BC è perpendicolare a entrambe (angoli retti segnati in B e in C).

ERRORE FREQUENTE

«Due rette che non si incontrano sono parallele»: è vero nel piano, è falso nello spazio. Due rette senza punti in comune sono parallele **oppure sghembe**, e per decidere bisogna chiedersi se esiste un piano che le contiene entrambe. I binari di una ferrovia sono paralleli; la linea di un cavalcavia e quella dell'autostrada che passa sotto, invece, sono sghembe.

10.2.2 Una retta e un piano

Una retta r e un piano α possono avere in comune tutti i punti di r, uno solo o nessuno. Se ne hanno due, infatti, per il postulato 3 ne hanno in comune infiniti: la retta *giace* nel piano. Se ne hanno esattamente uno, la retta è *incidente* al piano e il punto comune si chiama punto di intersezione. Se non ne hanno nessuno, la retta si dice **parallela al piano**. Per comodità consideriamo parallela al piano anche una retta che vi giace.

10.2.3 Due piani

Due piani distinti che hanno un punto in comune, per il postulato 4, si tagliano lungo una retta: sono **piani incidenti**, come due pareti adiacenti di una stanza. Due piani che non hanno punti in comune si dicono **piani paralleli**, come il pavimento e il soffitto; anche qui consideriamo parallelo a sé stesso un piano coincidente. La Tabella 10.1 riassume tutte le possibilità.

Tabella 10.1 Posizioni reciproche di rette e piani distinti nello spazio.

Coppia	Posizione	Punti comuni	Esempio nel cubo
due rette	incidenti	uno	*AB* e *BG*
due rette	parallele (complanari)	nessuno	*AB* e *HG*
due rette	sghembe (non complanari)	nessuno	*AB* e *CG*
retta e piano	la retta giace nel piano	tutti i punti della retta	*AC* e la base
retta e piano	incidenti	uno	*AG* e la base
retta e piano	paralleli	nessuno	*EG* e la base
due piani	incidenti	una retta	base e faccia *ABFE*
due piani	paralleli	nessuno	base e faccia *EFGH*

10.2.4 Fasci di piani

L'insieme di tutti i piani che passano per una retta r si chiama **fascio proprio di piani**, e r è il suo *asse*: è l'immagine delle pagine di un libro aperto attorno alla costola, o delle posizioni di una porta attorno ai cardini. L'insieme di tutti i piani paralleli a un piano dato si chiama **fascio improprio di piani**: pensa ai pavimenti dei piani di un grattacielo. Per ogni punto dello spazio passa uno e un solo piano di un fascio improprio: in particolare, per un punto esterno a un piano passa uno e un solo piano parallelo a esso.

10.2.5 Rette e piani paralleli

Come si fa a riconoscere che una retta è parallela a un piano, se non possiamo controllarne tutti i punti? Il teorema seguente riduce la verifica a una sola retta del piano.

IN SINTESI

Teorema. Se una retta r non giace in un piano α ed è parallela a una retta s di α, allora r è parallela ad α.

Ipotesi: $r \not\subset \alpha$, $s \subset \alpha$, $r \parallel s$. **Tesi:** $r \parallel \alpha$.

Dimostrazione. Le rette parallele r e s individuano un piano β, che è diverso da α perché contiene r, mentre α non la contiene. I piani α e β hanno in comune la retta s, quindi, essendo distinti, hanno in comune soltanto s. Supponiamo per assurdo che r incontri α in un punto P. Allora P sta in α e, poiché sta su r, sta anche in β: dunque P appartiene alla retta comune s. Ma r e s sono parallele e distinte, quindi non hanno punti in comune: contraddizione. La retta r non incontra α, cioè è parallela ad α. c.v.d.

Per esempio, nel cubo la diagonale EG della faccia superiore è parallela alla diagonale AC della base (stanno nel rettangolo $ACGE$), quindi EG è parallela al piano della base. Un secondo teorema riguarda due piani paralleli tagliati da un terzo piano, come due ripiani di una libreria tagliati da una parete divisoria.

IN SINTESI

Teorema. Se due piani paralleli α e β sono tagliati da un piano γ, le rette di intersezione sono parallele.

Ipotesi: $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$. **Tesi:** $a \parallel b$.

Dimostrazione. Le rette a e b stanno entrambe nel piano γ, quindi sono complanari. Un punto comune ad a e a b apparterrebbe sia ad α sia a β, che sono paralleli e distinti: non esiste. Due rette complanari senza punti in comune sono parallele. c.v.d.

Ricordiamo senza dimostrazione altre due proprietà che useremo spesso. La prima è la **proprietà transitiva**: se due rette sono parallele a una terza, sono parallele tra loro, anche quando le tre rette non stanno in uno stesso piano (nel cubo, $AE \parallel BF$ e $BF \parallel CG$, quindi $AE \parallel CG$). La seconda è un criterio di parallelismo fra piani: se un piano contiene due rette incidenti, entrambe parallele a un altro piano, i due piani sono paralleli.

10.2.6 Il teorema di Talete nello spazio

IN SINTESI

Teorema. Un fascio improprio di piani taglia su due trasversali qualsiasi segmenti corrispondenti proporzionali.

Ipotesi: i piani paralleli α, β, γ tagliano la retta r in A, B, C e la retta s in A', B', C'. **Tesi:** $AB : BC = A'B' : B'C'$.

Dimostrazione. Le rette r e s possono anche essere sghembe; il trucco è ricondursi al teorema di Talete del piano. Per A tracciamo la retta s' parallela a s: essa taglia β e γ nei punti B'' e C''. Le rette r e s' sono incidenti in A e individuano un piano, che taglia β e γ lungo le rette BB'' e CC''; per il teorema precedente queste rette sono parallele, quindi, per il teorema di Talete nel piano, $AB : BC = AB'' : B''C''$. Le rette s e s' sono parallele e individuano un altro piano, che taglia α, β, γ lungo le rette parallele AA', $B''B'$, $C''C'$. I quadrilateri $AA'B'B''$ e $B''B'C'C''$ hanno quindi i lati opposti paralleli: sono parallelogrammi, e $AB'' = A'B'$, $B''C'' = B'C'$. Sostituendo, $AB : BC = A'B' : B'C'$. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

In un edificio i solai di tre piani consecutivi sono piani paralleli. Un cavo rettilineo li attraversa nei punti A, B, C, con $AB = 4{,}2$ m e $BC = 3{,}5$ m; una fune tesa, sghemba rispetto al cavo, attraversa gli stessi solai in A', B', C', con $A'C' = 8{,}8$ m. Quanto misurano $A'B'$ e $B'C'$?

Per il teorema di Talete nello spazio $A'B' : B'C' = 4{,}2 : 3{,}5 = 6 : 5$. Dividiamo $A'C' = 8{,}8$ m in $6 + 5 = 11$ parti uguali di 0,8 m: $A'B' = 6 \cdot 0{,}8 = 4{,}8$ m e $B'C' = 5 \cdot 0{,}8 = 4{,}0$ m. Controllo: $4{,}8 : 4 = 1{,}2 = 4{,}2 : 3{,}5$.

10.3 Perpendicolarità e distanze

10.3.1 Retta perpendicolare a un piano

Pensiamo di nuovo alla porta. Mentre ruota, il suo bordo inferiore descrive sul pavimento tutte le semirette che escono dal piede dell'asse dei cardini, e forma sempre un angolo retto con l'asse: l'asse è perpendicolare a tutte le rette del pavimento che passano per il suo piede. Questa è proprio la definizione. Una retta r che incontra il piano α nel punto H è **perpendicolare al piano** α se è perpendicolare a tutte le rette di α che passano per H; il punto H si chiama **piede della perpendicolare**. Si scrive $r \perp \alpha$.

Controllare infinite rette è impossibile. Il teorema seguente, il *criterio di perpendicolarità*, dice che ne bastano due, purché siano incidenti nel piede: è il motivo per cui il muratore appoggia la livella su due facce del pilastro.

IN SINTESI

Teorema. Se una retta r, che incontra il piano α nel punto H, è perpendicolare a due rette distinte a e b di α passanti per H, allora r è perpendicolare ad α.

Ipotesi: $r \cap \alpha = \{H\}$; $a, b \subset \alpha$ distinte e passanti per H; $r \perp a$, $r \perp b$. **Tesi:** $r \perp \alpha$.

Dimostrazione (Figura 10.3). Sia c una qualsiasi altra retta di α passante per H: dobbiamo dimostrare che $r \perp c$. Su r prendiamo due punti P e P', da parti opposte rispetto ad α, con $HP = HP'$. Nel piano α tracciamo una retta t che non passa per H e che taglia a, b e c nei punti A, B e C, con C compreso fra A e B (basta scegliere A e B da parti opposte rispetto a c).

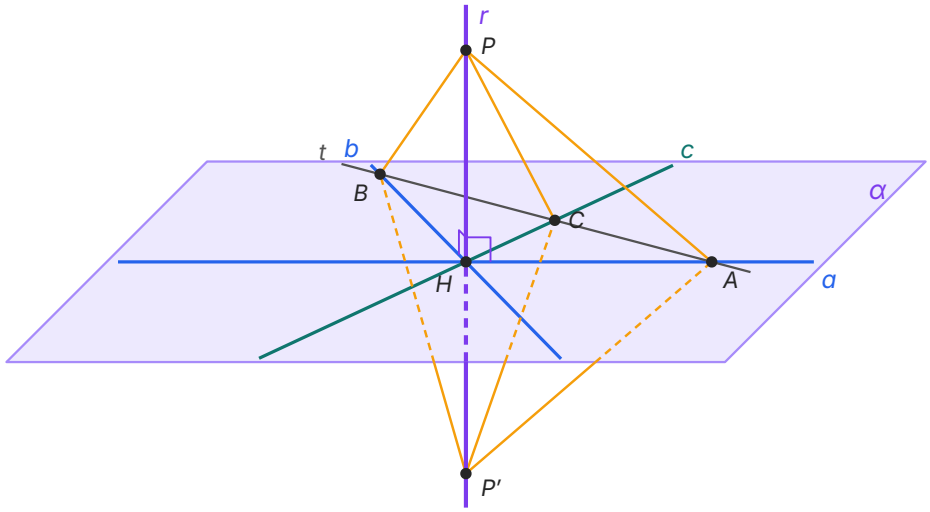


Figura 10.3 Il criterio di perpendicolarità. La retta r è perpendicolare alle rette a e b del piano α nel punto H, e $HP = HP'$. I triangoli costruiti sulla trasversale t mostrano che $PC = P'C$, quindi anche la retta c è perpendicolare a r. I segmenti che passano sotto il piano sono tratteggiati.

Nel piano individuato da r e da a, la retta a è perpendicolare al segmento PP' nel suo punto medio H: è il suo asse, quindi $PA = P'A$. Allo stesso modo $PB = P'B$. I triangoli PAB e $P'AB$ hanno i tre lati ordinatamente congruenti (AB in comune), quindi sono congruenti per il terzo criterio, e in particolare gli angoli PAB e $P'AB$ sono congruenti. Ora i triangoli PAC e $P'AC$ hanno $PA = P'A$, il lato AC in comune e gli angoli compresi PAC e $P'AC$ congruenti (sono gli angoli appena visti, perché C sta sul segmento AB): per il primo criterio sono congruenti, e $PC = P'C$. Allora, nel piano individuato da r e da c, il punto C è equidistante dagli estremi di PP' e sta sul suo asse; poiché anche H, punto medio di PP', sta sull'asse, l'asse è la retta $CH = c$. Dunque $c \perp r$. c.v.d.

Dal criterio si ricavano altre proprietà che ammettiamo senza dimostrazione. Per un punto qualsiasi passa **una e una sola** retta perpendicolare a un piano dato, e uno e un solo piano perpendicolare a una retta data; questo piano contiene tutte le rette perpendicolari alla retta data in quel punto. Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele, e due piani perpendicolari a una stessa retta sono paralleli. Infine, il piano perpendicolare a un segmento nel suo punto medio, detto *piano assiale* del segmento, è formato da tutti e soli i punti equidistanti dagli estremi: è l'analogo, nello spazio, dell'asse di un segmento.

ERRORE FREQUENTE

Una retta perpendicolare a **una sola** retta di un piano non è necessariamente perpendicolare al piano. Nel cubo, la diagonale di faccia EB è perpendicolare allo spigolo BC della base (perché BC è perpendicolare a tutta la faccia $ABFE$), eppure EB forma con la base un angolo di 45°. Non bastano neppure due rette del piano, se sono parallele: EB forma un angolo retto anche con AD, parallela a BC. Le due rette del criterio devono essere **incidenti**, e incidenti proprio nel piede.

COLLEGAMENTI · IL FILO A PIOMBO E LA SQUADRA

Il filo a piombo indica la direzione verticale, cioè la direzione perpendicolare al piano orizzontale del luogo. Per controllare che un palo o un pilastro sia verticale, chi lavora in un cantiere lo osserva o lo misura con la squadra da due direzioni diverse, per esempio da due lati che formano un angolo retto: un palo che sembra dritto guardandolo da sud può essere inclinato verso est. È esattamente il criterio di perpendicolarità: due direzioni incidenti bastano, una sola no.

10.3.2 Il teorema delle tre perpendicolari

Il teorema seguente collega tre perpendicolarità ed è lo strumento più usato per calcolare distanze e angoli nei solidi.

IN SINTESI

Teorema. Se dal punto P si conduce la perpendicolare PH al piano α e dal piede H si conduce la perpendicolare HK a una retta r di α, allora PK è perpendicolare a r.

Ipotesi: $PH \perp \alpha$; $r \subset \alpha$, $H \notin r$; $K \in r$ e $HK \perp r$. **Tesi:** $PK \perp r$.

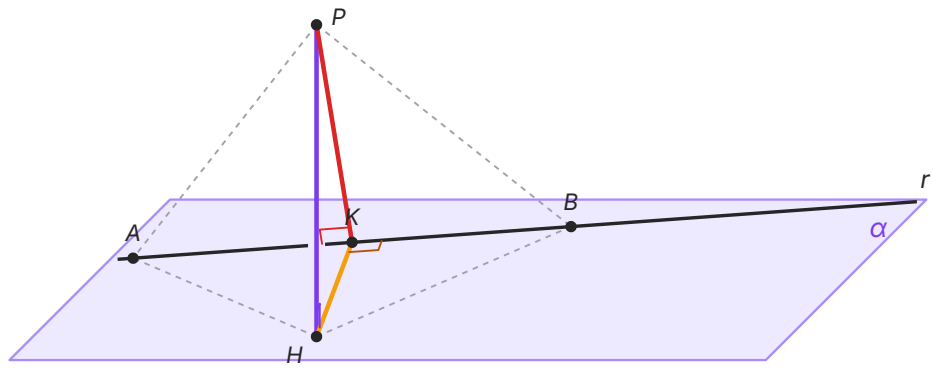


Figura 10.4 Il teorema delle tre perpendicolari: $PH \perp \alpha$ e $HK \perp r$ implicano $PK \perp r$. I punti A e B, simmetrici rispetto a K, servono per la dimostrazione: $HA = HB$ e quindi $PA = PB$.

Dimostrazione (Figura 10.4). Sulla retta r prendiamo due punti A e B simmetrici rispetto a K, cioè con $KA = KB$. Nel piano α la retta HK è perpendicolare ad AB nel suo punto medio, quindi ne è l'asse e $HA = HB$. Poiché $PH \perp \alpha$, i triangoli PHA e PHB sono rettangoli in H; hanno il cateto PH in comune e i cateti HA e HB congruenti, quindi sono congruenti e $PA = PB$. Il triangolo PAB è dunque isoscele sulla base AB, e la sua mediana PK è anche altezza: $PK \perp AB$, cioè $PK \perp r$. c.v.d.

Con lo stesso ragionamento, scambiando i ruoli, si dimostra anche il teorema inverso: se $PH \perp \alpha$ e $PK \perp r$, allora $HK \perp r$ (è un esercizio alla fine del capitolo). Nella pratica il teorema dice come trovare la distanza di un punto P da una retta r di un piano quando conosciamo la distanza di P dal piano: il segmento PK è l'ipotenusa del triangolo rettangolo PHK, quindi $PK^2 = PH^2 + HK^2$.

ESEMPIO SVOLTO

Un lampione verticale è alto 6 m e la sua base H dista 8 m dal bordo rettilineo r di una strada, sullo stesso piano orizzontale. Quanto dista la lampada P, in cima al lampione, dal bordo della strada? Quale angolo forma con il terreno il segmento che realizza questa distanza?

Sia K il piede della perpendicolare da H a r, quindi $HK = 8$ m. Poiché PH è perpendicolare al terreno, per il teorema delle tre perpendicolari $PK \perp r$: la distanza cercata è PK. Il triangolo PHK è rettangolo in H, quindi $PK = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ m. L'angolo φ che PK forma con il terreno è l'angolo PKH: $\text{tg}\,\varphi = PH/HK = 6/8 = 0{,}75$, quindi $\varphi = \text{arctg}\,0{,}75 \approx 36{,}87°$.

10.3.3 Proiezioni ortogonali

La **proiezione ortogonale** di un punto P su un piano α è il piede H della perpendicolare condotta da P ad α; se P sta in α, la sua proiezione è P stesso. La proiezione ortogonale di una figura è

l'insieme delle proiezioni dei suoi punti. È quello che succede, con buona approssimazione, all'ombra di un oggetto su un terreno piano quando i raggi del Sole sono perpendicolari al terreno, come accade a mezzogiorno in alcuni giorni dell'anno nelle regioni tropicali.

La proiezione di un segmento AB è un segmento $A'B'$, oppure un punto se AB è perpendicolare al piano (Figura 10.5a). Le perpendicolari AA' e BB' sono parallele, quindi stanno in uno stesso piano e, se A e B sono nello stesso semispazio, il quadrilatero $AA'B'B$ è un trapezio rettangolo; in ogni caso, tracciando da A la parallela ad $A'B'$ si ottiene un triangolo rettangolo con ipotenusa AB e un cateto congruente ad $A'B'$. Ne segue che $A'B' \le AB$, con l'uguaglianza solo quando AB è parallelo al piano. Se φ è l'angolo che AB forma con il piano (lo definiremo nel prossimo paragrafo), vale

$$A'B' = AB \cdot \cos \varphi$$

mentre la differenza fra le distanze degli estremi dal piano, se A e B stanno nello stesso semispazio, è $AB \cdot \operatorname{sen} \varphi$.

a) proiezione ortogonale di un segmento

b) angolo fra la retta r e il piano α

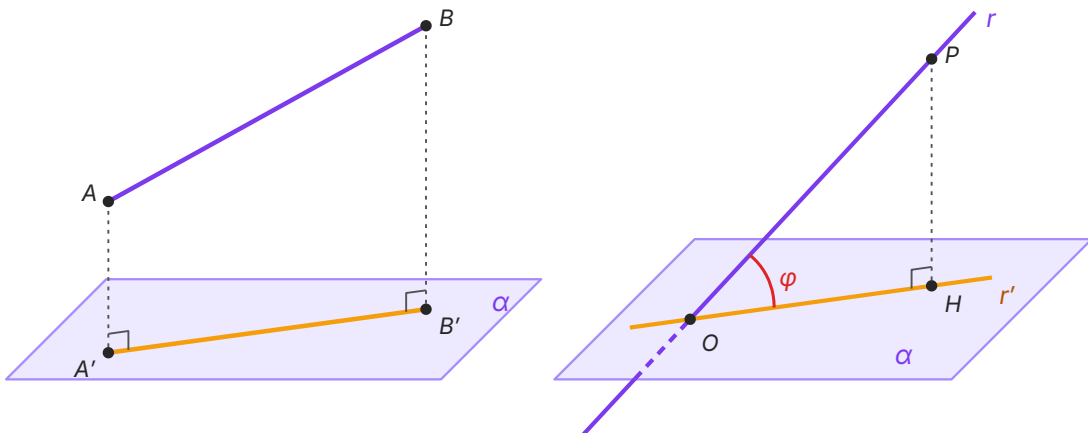


Figura 10.5 **a)** La proiezione ortogonale $A'B'$ del segmento AB sul piano α: le proiettanti AA' e BB' sono perpendicolari al piano. **b)** L'angolo φ fra la retta r e il piano α è l'angolo fra r e la sua proiezione r'; H è la proiezione del punto P di r.

10.3.4 Distanze

Se H è la proiezione di P sul piano α e Q è un altro punto qualsiasi di α, il triangolo PHQ è rettangolo in H e PQ è la sua ipotenusa, quindi $PQ > PH$: il segmento di perpendicolare è il più corto fra i segmenti che congiungono P con i punti del piano. La sua lunghezza si chiama **distanza del punto dal piano**. Tutti i punti di una retta parallela a un piano hanno la stessa distanza dal piano, che si chiama distanza della retta dal piano; tutti i punti di un piano hanno la stessa di-

stanza da un piano parallelo, e questa è la *distanza fra i due piani* (la misura, per esempio, l'altezza di una stanza).

Più interessante è il caso di due rette sghembe. Si dimostra, ma noi lo ammettiamo, che due rette sghembe r e s hanno **una e una sola perpendicolare comune**, cioè una retta che le incontra entrambe ed è perpendicolare a entrambe. Il segmento di questa retta compreso fra r e s è il più corto fra tutti i segmenti con un estremo su r e l'altro su s, e la sua lunghezza si chiama **distanza fra le rette sghembe**. Nel cubo della Figura 10.2c, le rette sghembe AB e CG hanno come perpendicolare comune lo spigolo BC: infatti $BC \perp AB$ nella base, e $BC \perp CG$ perché CG è perpendicolare alla base. La loro distanza è lo spigolo del cubo.

ESEMPIO SVOLTO

In un cubo di spigolo 6 cm, calcoliamo la distanza fra la retta AE e la retta BD, diagonale della base.

Le due rette sono sghembe: AE incontra il piano della base solo in A, che non sta su BD. Sia O il centro della base, cioè il punto di incontro delle sue diagonali. Il segmento AO è perpendicolare a BD, perché le diagonali di un quadrato sono perpendicolari; ed è perpendicolare ad AE, perché AE è perpendicolare a tutte le rette della base che passano per A. Quindi la retta AO è la perpendicolare comune, e la distanza cercata è $AO = \frac{1}{2}\,AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm.

Osserva il metodo: non si cerca la perpendicolare comune «a caso», ma un segmento che si vede subito perpendicolare a entrambe le rette, spesso grazie a una retta perpendicolare a un piano.

10.4 Angoli, diedri e angoloidi

10.4.1 L'angolo fra due rette sghembe

Due rette sghembe non si incontrano, quindi non formano un angolo nel senso del piano. Si definisce allora **angolo fra due rette sghembe** r e s l'angolo acuto o retto formato da due rette incidenti, condotte per un punto qualsiasi O parallelamente a r e a s. Il risultato non dipende dalla scelta di O, perché angoli con i lati paralleli e ugualmente orientati sono congruenti anche nello spazio. Due rette sghembe che formano un angolo retto si dicono **ortogonali**: per esempio, nel cubo, gli spigoli AB e CG.

ESEMPIO SVOLTO

Nel cubo $ABCDEFGH$ calcoliamo l'angolo fra le rette sghembe **a)** AB e CH; **b)** AC e BG.

a) Spostiamo CH per parallelismo fino a farla passare per B. Il rettangolo $BCHE$ ha i lati opposti paralleli, quindi $CH \parallel BE$, e l'angolo cercato è l'angolo ABE della faccia quadrata $ABFE$, formato da uno spigolo e da una diagonale: **45°**.

b) Nel rettangolo $ABGH$ i lati BG e AH sono paralleli, quindi l'angolo cercato è l'angolo CAH. Il triangolo ACH ha per lati tre diagonali di faccia, tutte lunghe $\ell\sqrt{2}$: è equilatero, e l'angolo misura **60°**. Un disegno ingannerebbe: in assonometria l'angolo CAH non appare affatto di 60°.

10.4.2 L'angolo fra una retta e un piano

Sia r una retta che incontra il piano α nel punto O senza essergli perpendicolare. Proiettando su α un punto P di r si ottiene il punto H, e la retta $r' = OH$ è la proiezione di r su α. Si chiama **angolo fra la retta e il piano** l'angolo acuto φ formato da r e dalla sua proiezione r' (Figura 10.5b). Si può dimostrare che è il più piccolo fra gli angoli che r forma con le rette di α passanti per O. Per completezza, una retta perpendicolare al piano forma con esso un angolo di 90°, una retta parallela un angolo di 0°. Per calcolare φ si usa il triangolo rettangolo POH: $\operatorname{sen}\varphi = PH/OP$, $\cos\varphi = OH/OP$, $\operatorname{tg}\varphi = PH/OH$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo l'angolo che una diagonale di un cubo di spigolo ℓ forma con una faccia, per esempio la diagonale CE con la base $ABCD$ (Figura 10.6).

Il vertice E si proietta sulla base nel punto A, perché lo spigolo AE è perpendicolare alla base; il vertice C sta già nella base. Quindi la proiezione di CE è la diagonale di faccia CA, e l'angolo cercato è $\varphi = \angle ECA$. Il triangolo CAE è rettangolo in A, con $CA = \ell\sqrt{2}$ e $AE = \ell$; per il teorema di Pitagora $CE = \sqrt{2\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{3}$. Allora

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AE}{CA} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35{,}26°.$$

Il risultato non dipende dallo spigolo: tutti i cubi hanno la stessa forma. Equivalentemente $\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

a) la diagonale CE e la sua proiezione CA

b) il triangolo CAE in vera forma

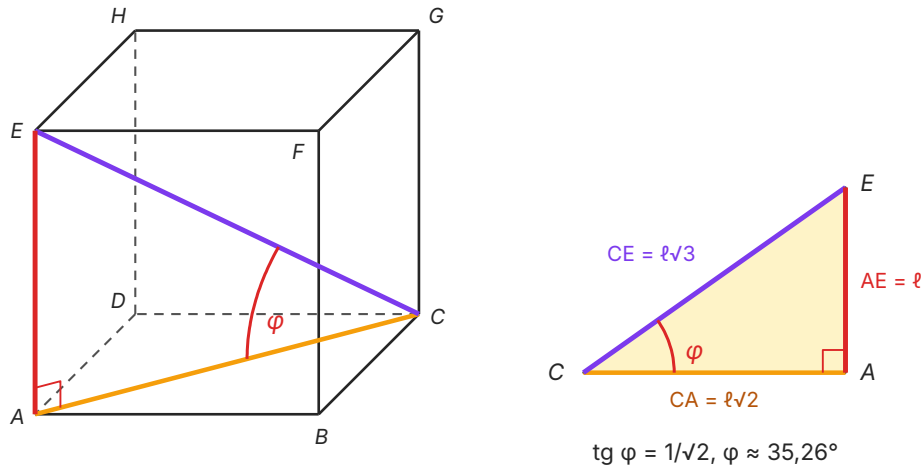


Figura 10.6 **a)** L'angolo φ fra la diagonale *CE* del cubo e la base: la proiezione di *CE* sulla base è la diagonale di faccia *CA*, perché *EA* è perpendicolare alla base. **b)** Il triangolo *CAE*, rettangolo in *A*, disegnato in vera forma: tg φ = 1/√2 e φ ≈ 35,26°. I segmenti costruiti all'interno del cubo sono in colore.

10.4.3 I diedri

Due semipiani che hanno in comune la retta origine dividono lo spazio in due parti: ciascuna, insieme ai due semipiani, si chiama **diedro**. La retta comune è lo **spigolo** del diedro e i due semipiani sono le sue *facce*. Una porta socchiusa e la parete in cui è montata formano un diedro, il cui spigolo è l'asse dei cardini; anche un libro aperto, o il tetto a due falde di una casa, suggeriscono l'idea di diedro.

Per misurare un diedro si taglia con un piano perpendicolare allo spigolo: la sezione è un angolo che si chiama **sezione normale** del diedro (Figura 10.7). In pratica, da un punto *O* dello spigolo si conducono, in ciascuna faccia, le semirette *OA* e *OB* perpendicolari allo spigolo. Due sezioni normali dello stesso diedro sono congruenti, perché hanno i lati paralleli e ugualmente orientati; perciò si definisce **ampiezza del diedro** l'ampiezza di una sua sezione normale. Un diedro è retto, acuto, ottuso o piatto se lo è la sua sezione normale. Una sezione obliqua, invece, non serve: il suo angolo cambia a seconda di come è inclinato il piano che taglia.

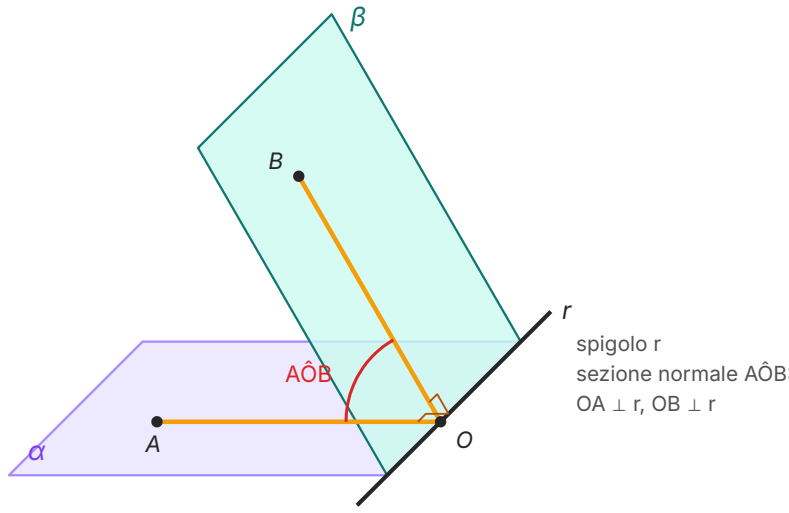


Figura 10.7 Il diedro di spigolo *r* e facce α e β. La sezione normale AÔB si ottiene conducendo da un punto *O* dello spigolo le semirette *OA* e *OB* perpendicolari a *r*, una in ciascuna faccia; la sua ampiezza è l'ampiezza del diedro.

Due piani incidenti formano quattro diedri; se uno di essi è retto lo sono tutti, e i piani si dicono **piani perpendicolari**, come il pavimento e una parete. Vale questo criterio: **se un piano contiene una retta perpendicolare a un altro piano, i due piani sono perpendicolari**. Infatti, se $r \perp \alpha$ in H e β contiene r, la retta comune $s = \alpha \cap \beta$ passa per H; conducendo in α la perpendicolare t a s per H, la sezione normale del diedro è l'angolo fra r e t, che è retto perché r è perpendicolare a tutte le rette di α per H. Per questo la porta, che contiene l'asse verticale dei cardini, resta sempre perpendicolare al pavimento, in qualunque posizione.

ESEMPIO SVOLTO

Nel cubo di spigolo ℓ, calcoliamo l'ampiezza θ del diedro formato dal piano del triangolo BDE con il piano della base, cioè del diedro di spigolo BD (Figura 10.8).

Cerchiamo una sezione normale con vertice nel centro O della base, punto medio di BD. Nella base, $AO \perp BD$ perché le diagonali del quadrato sono perpendicolari. Nel piano BDE, $EO \perp BD$: lo garantisce il teorema delle tre perpendicolari, perché EA è perpendicolare alla base e $AO \perp BD$ (lo conferma anche il fatto che il triangolo BDE è isoscele, con $EB = ED = \ell\sqrt{2}$, e EO è la sua mediana). Quindi l'angolo $\theta = \angle EOA$ è la sezione normale.

Il triangolo EAO è rettangolo in A, con $EA = \ell$ e $AO = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{EA}{AO} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}74°.$$

Curiosità: $35{,}26° + 54{,}74° = 90°$. Non è un caso: la diagonale AG è perpendicolare al piano BDE, quindi l'angolo fra quel piano e la base è il complementare dell'angolo fra AG e la base. Nel prossimo paragrafo verificheremo con i vettori che AG è ortogonale a BD; la dimostrazione completa è l'ultimo esercizio del capitolo.

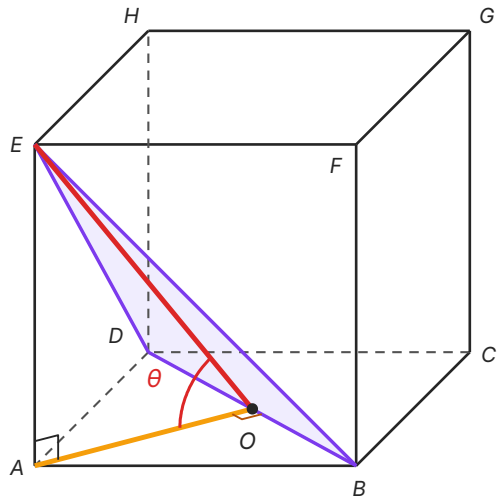


Figura 10.8 Il diedro fra il piano BDE e la base del cubo ha spigolo BD. La sua sezione normale è l'angolo $\theta = \angle EOA$, con O centro della base: $AO \perp BD$ nella base e, per il teorema delle tre perpendicolari, $EO \perp BD$. Si trova $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{2}$, $\theta \approx 54{,}74°$.

10.4.4 Angoloidi e triedri

Consideriamo $n \geq 3$ semirette con la stessa origine V, prese in un certo ordine, tali che tre consecutive non stiano mai in uno stesso piano. Gli angoli formati da due semirette consecutive (e dall'ultima con la prima) delimitano una regione dello spazio che, insieme a essi, si chiama **angoloide**; V è il vertice, le semirette sono gli spigoli e gli angoli sono le *facce*. Un angoloide con tre facce si chiama **triedro**. L'angoloide è *convesso* se sta tutto da una stessa parte rispetto al piano di ciascuna faccia. Ogni vertice di un cubo è il vertice di un triedro con tre facce di 90°, detto triedro trirettangolo: è l'angolo di una stanza, dove si incontrano due pareti e il pavimento.

IN SINTESI

Teorema. In ogni triedro ciascuna faccia è minore della somma delle altre due.

Teorema. In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di un angolo giro (360°).

Ammettiamo entrambi senza dimostrazione.

Il primo teorema è l'analogo della disuguaglianza triangolare: come in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, in un triedro una faccia è minore della somma delle altre due. Il secondo si può «sperimentare» con un foglio di carta. Disegniamo attorno a un punto alcuni angoli consecutivi, ritagliamo e pieghiamo lungo i lati fino a far combaciare il primo e l'ultimo: si forma un angoloide solo se gli angoli, insieme, non coprono tutto il giro. Se la somma è 360°, il foglio resta piatto e non si forma nessun vertice. Per esempio, tre facce di 50°, 60° e 120° non formano un triedro, perché $120° > 50° + 60°$; tre facce di 100°, 120° e 150° nemmeno, perché la loro somma è 370°. Nel prossimo capitolo useremo il secondo teorema per dimostrare che i poliedri regolari sono soltanto cinque: attorno a un vertice possono incontrarsi tre, quattro o cinque triangoli equilateri (180°, 240°, 300°), ma non sei (360°).

10.5 Simmetrie dello spazio e metodo analitico

10.5.1 Simmetrie rispetto a un punto, a una retta, a un piano

Le isometrie del piano hanno un analogo nello spazio. Fissato un punto O, la *simmetria centrale* di centro O associa a ogni punto P il punto P' tale che O sia il punto medio di PP'. Fissata una retta a, la *simmetria assiale* di asse a associa a P il punto P' tale che a sia perpendicolare a PP' e passi per il suo punto medio; nello spazio questa trasformazione coincide con una rotazione di 180° attorno ad a. Fissato un piano α, la **simmetria rispetto a un piano** associa a P il punto P' tale che α sia il piano assiale del segmento PP': è la trasformazione che realizza uno specchio

piano. Tutte e tre sono isometrie: conservano le distanze, e quindi gli angoli, il parallelismo e la perpendicolarità.

C'è però una differenza importante. Una rotazione si può realizzare con un movimento continuo nello spazio; la simmetria rispetto a un piano no: trasforma una mano destra in una mano sinistra, e nessun movimento porta una mano destra a sovrapporsi esattamente a una sinistra. Anche la simmetria centrale nello spazio, a differenza di quella del piano, scambia la destra con la sinistra.

Un piano α è un **piano di simmetria** di un solido se la simmetria rispetto ad α trasforma il solido in sé stesso. Il cubo ha nove piani di simmetria: tre sono paralleli a due facce opposte e passano per il centro, sei passano per due spigoli opposti (come il piano $ACGE$). Il cubo ha anche un centro di simmetria, il punto di incontro delle sue diagonali, mentre il tetraedro regolare non ne ha. Riprenderemo queste osservazioni nel prossimo capitolo, studiando i poliedri regolari.

COLLEGAMENTI · CHIMICA: MOLECOLE DESTRE E SINISTRE

Alcune molecole non sono sovrapponibili alla propria immagine speculare, come le nostre mani: si chiamano *chirali*, dal greco *chéir*, «mano», e le due forme speculari si chiamano *enantiomeri*. Hanno la stessa formula e le stesse distanze fra gli atomi, perché la simmetria rispetto a un piano è un'isometria, ma possono comportarsi in modo diverso negli organismi viventi, i cui recettori distinguono la forma «destra» da quella «sinistra». Riconoscere se una molecola ha un piano di simmetria è proprio una domanda di geometria dello spazio.

10.5.2 Sintetico e analitico: le distanze nel cubo

Finora abbiamo ragionato in modo *sintetico*, come Euclide: individuando triangoli rettangoli e applicando i teoremi. Lo stesso problema si può affrontare in modo *analitico*, con le coordinate e i vettori dello spazio (vedi *Matematica 2*, cap. 13). Mettiamo il cubo di spigolo ℓ in un sistema di riferimento con l'origine in A e gli assi lungo AB, AD, AE:

$$A(0;0;0),\ B(\ell;0;0),\ C(\ell;\ell;0),\ D(0;\ell;0),\ E(0;0;\ell),\ F(\ell;0;\ell),\ G(\ell;\ell;\ell),\ H(0;\ell;\ell).$$

Ricordiamo che un vettore $\mathbf{v}(x;y;z)$ ha modulo $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e che il prodotto scalare di due vettori è $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\gamma$, dove γ è l'angolo fra i due vettori. La diagonale AG corrisponde al vettore $(\ell;\ell;\ell)$, di modulo $\sqrt{3\ell^2} = \ell\sqrt{3}$: lo stesso risultato che si ottiene in modo sintetico applicando due volte il teorema di Pitagora. Il prodotto scalare risolve senza fatica anche gli angoli: per esempio i vettori $\mathbf{AG}(\ell;\ell;\ell)$ e $\mathbf{BD}(-\ell;\ell;0)$ hanno prodotto scalare $-\ell^2+\ell^2+0=0$, quindi la diagonale del cubo è ortogonale alla diagonale di faccia BD.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo in due modi la distanza del vertice B dalla diagonale AG di un cubo di spigolo ℓ.

Metodo sintetico. Lo spigolo AB è perpendicolare alla faccia $BCGF$, quindi è perpendicolare alla diagonale BG di quella faccia: il triangolo ABG è rettangolo in B, con cateti $AB = \ell$ e $BG = \ell\sqrt{2}$ e ipotenusa $AG = \ell\sqrt{3}$. La distanza cercata è l'altezza relativa all'ipotenusa, che si ottiene uguagliando due espressioni del doppio dell'area: $d \cdot AG = AB \cdot BG$, quindi

$$d = \frac{\ell \cdot \ell\sqrt{2}}{\ell\sqrt{3}} = \ell\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}.$$

Metodo analitico. La proiezione del vettore $\mathbf{AB}(\ell; 0; 0)$ sulla direzione di AG ha lunghezza $\frac{\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AG}}{|\mathbf{AG}|} = \frac{\ell^2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$. Per il teorema di Pitagora $d^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{3} = \frac{2\ell^2}{3}$, e di nuovo $d = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$. Per $\ell = 3$ cm si ha $d = \sqrt{6} \approx 2{,}45$ cm.

Il metodo sintetico richiede un'idea, riconoscere il triangolo rettangolo ABG; quello analitico è un calcolo che si può fare sempre, anche quando l'idea non viene. I due approcci si completano: il primo fa capire *perché* un risultato è vero, il secondo è uno strumento generale. La geometria analitica dello spazio, con le equazioni di rette, piani e sfere, sarà studiata nel quinto anno.

SINTESI

- Punto, retta e piano sono enti primitivi. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano; una retta con due punti in un piano vi giace; due piani distinti con un punto comune si tagliano lungo una retta; ogni piano divide lo spazio in due semispazi.
- Un piano è individuato da tre punti non allineati, da una retta e un punto esterno, da due rette incidenti o da due rette parallele distinte.
- Due rette distinte sono incidenti o parallele (se complanari) oppure sghembe (se non esiste un piano che le contenga). Una retta e un piano sono incidenti, paralleli, oppure la retta giace nel piano; due piani distinti sono incidenti o paralleli.
- Una retta esterna a un piano e parallela a una sua retta è parallela al piano; due piani paralleli tagliati da un terzo hanno intersezioni parallele; un fascio di piani paralleli taglia su due trasversali segmenti proporzionali (Talete).
- Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a tutte le sue rette per il piede; basta che lo sia a due rette **incidenti** del piano passanti per il piede.
- Teorema delle tre perpendicolari: se $PH \perp \alpha$ e $HK \perp r$, con $r \subset \alpha$, allora $PK \perp r$, e $PK^2 = PH^2 + HK^2$.
- La distanza di un punto da un piano è la lunghezza del segmento di perpendicolare; due rette sghembe hanno una sola perpendicolare comune, e il suo segmento ne misura la distanza.
- L'angolo fra due rette sghembe si misura su due parallele incidenti; l'angolo fra una retta e un piano è l'angolo fra la retta e la sua proiezione ortogonale; un diedro si misura con la sua sezione normale.
- Nel cubo di spigolo ℓ la diagonale è $\ell\sqrt{3}$ e forma con ogni faccia un angolo $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) \approx 35{,}26°$.
- In un triedro ogni faccia è minore della somma delle altre due; in un angoloide convesso la somma delle facce è minore di 360°.
- Nell'assonometria cavaliera le rette in profondità sono a 45° e dimezzate, gli spigoli nascosti sono tratteggiati; si conserva il parallelismo, non gli angoli né le lunghezze in profondità.
- Le simmetrie rispetto a un punto, a una retta e a un piano sono isometrie dello spazio; la simmetria rispetto a un piano scambia destra e sinistra. Le stesse distanze si calcolano in modo sintetico o con i vettori.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Due rette dello spazio che non hanno punti in comune
   - **A.** sono sempre parallele
   - **B.** sono sempre sghembe
   - **C.** sono parallele se sono complanari, sghembe se non lo sono
   - **D.** sono sempre perpendicolari

2. ● Quale delle seguenti coppie **non** individua un piano?
   - **A.** due rette sghembe
   - **B.** tre punti non allineati
   - **C.** una retta e un punto che non le appartiene
   - **D.** due rette incidenti

3. ● Una retta r incontra il piano α nel punto H ed è perpendicolare a due rette distinte di α passanti per H. Allora
   - **A.** r giace in α
   - **B.** r è perpendicolare ad α
   - **C.** r è parallela ad α
   - **D.** non si può concludere nulla

4. ● Nel cubo $ABCDEFGH$ le rette AE e CD sono
   - **A.** incidenti
   - **B.** parallele
   - **C.** sghembe ma non ortogonali
   - **D.** sghembe e ortogonali

5. ● L'ampiezza di un diedro è
   - **A.** l'ampiezza di una sua sezione normale
   - **B.** l'angolo fra due rette qualsiasi delle due facce
   - **C.** l'angolo fra lo spigolo e una delle facce
   - **D.** sempre uguale a 90°

6. ● Tre angoli possono essere le facce di un triedro se misurano
   - **A.** 30°, 40° e 80°
   - **B.** 90°, 100° e 170°
   - **C.** 60°, 70° e 110°
   - **D.** 120°, 130° e 140°

7. ● In un disegno in assonometria cavaliera si conserva
   - **A.** l'ampiezza degli angoli
   - **B.** il parallelismo delle rette
   - **C.** la lunghezza di ogni spigolo
   - **D.** la perpendicolarità delle rette

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** Se due piani hanno in comune tre punti non allineati, coincidono. **b)** Se una retta è parallela a un piano, è parallela a ogni retta del piano. **c)** Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele. **d)** Se due piani sono paralleli, ogni retta del primo è parallela a ogni retta del secondo. **e)** La proiezione ortogonale di un segmento su un piano non è mai più lunga del segmento.

9. ● Completa. Una retta r che incontra il piano α in H è perpendicolare ad α se è perpendicolare a _____ le rette di α passanti per H; per verificarlo basta che sia perpendicolare a _____ rette _____ di α passanti per H. Il punto H si chiama _____ . L'angolo fra una retta e un piano è l'angolo fra la retta e la sua _____ sul piano; un diedro si misura con la sua _____ .

Calcolare

10. ● Un cubo ha lo spigolo di 5 cm. Calcola la diagonale di una faccia, la diagonale del cubo e l'angolo che la diagonale del cubo forma con una faccia.

11. ● Tre piani paralleli α, β, γ tagliano la retta r nei punti A, B, C e la retta s nei punti A', B', C'. Sapendo che $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm e $A'B' = 8$ cm, calcola $B'C'$ e $A'C'$.

12. ●● Un punto P dista 12 cm dal piano α e H è la sua proiezione su α. Una retta r di α dista 5 cm da H. Calcola la distanza di P da r e l'angolo che il segmento che la realizza forma con il piano α.

13. ●● Un parallelepipedo rettangolo ha gli spigoli di 2 cm, 3 cm e 6 cm. Calcola la sua diagonale e l'angolo che essa forma con la faccia di spigoli 2 cm e 3 cm.

14. ●● Nel cubo $ABCDEFGH$ determina l'angolo fra le rette: **a)** AB e EG; **b)** AF e CH; **c)** AH e BG; **d)** AC e FH. Indica anche se le rette sono incidenti, parallele o sghembe.

15. ●● In un cubo di spigolo 6 cm calcola la distanza fra le rette: **a)** AB e CG; **b)** AE e BD; **c)** AB e EH. Per ciascuna coppia indica la perpendicolare comune.

16. ●● Nel cubo $ABCDEFGH$ calcola l'ampiezza del diedro formato: **a)** dal piano $ABGH$ con la base $ABCD$; **b)** dal piano $ACGE$ con la base; **c)** dal piano $ABGH$ con la faccia $BCGF$.

17. ●● Due facce di un triedro misurano 70° e 85°. Quali valori può assumere l'ampiezza x della terza faccia?

18. ●● Gli estremi di un segmento PQ stanno nello stesso semispazio rispetto al piano α, a distanze di 3 cm e 7 cm dal piano; la proiezione ortogonale di PQ su α misura 3 cm. Calcola PQ e l'angolo che forma con α.

19. ●● Con il metodo analitico (cubo di spigolo ℓ con A nell'origine e gli assi lungo AB, AD, AE), calcola l'angolo fra le diagonali AG e BH del cubo.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che due piani perpendicolari a una stessa retta r sono paralleli.

21. ● Spiega perché uno sgabello a tre gambe non traballa mai, mentre una sedia a quattro gambe può traballare. Quale postulato usi?

22. ●● Le rette r e s sono sghembe. Dimostra che esiste un piano che contiene r ed è parallelo a s. (*Suggerimento*: per un punto di r conduci la parallela a s.)

23. ●● Trova l'errore. «Nel cubo il diedro fra il piano BDE e la base misura 45°, perché l'angolo EBA fra la retta EB e la base è di 45°.»

24. ●●● Dimostra che il luogo dei punti dello spazio equidistanti dagli estremi di un segmento AB è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio M.

25. ●● Spiega perché in un vertice di un poliedro convesso possono incontrarsi tre, quattro o cinque triangoli equilateri, ma non sei. E quanti quadrati?

26. ●●● Dimostra l'inverso del teorema delle tre perpendicolari: se $PH \perp \alpha$, r è una retta di α che non passa per H, $K \in r$ e $PK \perp r$, allora $HK \perp r$.

Problemi

27. ● Un'antenna verticale alta 15 m è tenuta da tre cavi tesi dalla cima al suolo; ciascun cavo è ancorato a 8 m dalla base dell'antenna, sul terreno orizzontale. Calcola la lunghezza di un cavo e l'angolo che forma con il terreno.

28. ●● La falda di un tetto è un rettangolo che, lungo la linea di massima pendenza, misura 5 m; il colmo è 2 m più in alto della gronda, che è orizzontale. Calcola l'inclinazione della falda, cioè l'ampiezza del diedro che forma con il piano orizzontale, e la sua pendenza in percentuale (rapporto fra dislivello e spostamento orizzontale). *(Dati inventati.)*

29. ●● Una stanza ha la forma di un parallelepipedo rettangolo di 5 m × 4 m × 3 m (altezza). Calcola la distanza fra un angolo del pavimento e l'angolo opposto del soffitto, e l'angolo che questo segmento forma con il pavimento.

30. ●● In un edificio i solai sono piani paralleli e equidistanti, a 3,0 m l'uno dall'altro. Un cavo teso in linea retta misura 4,5 m fra il pavimento del piano terra e il primo solaio. Quanto è lungo il tratto di cavo fra il pavimento del piano terra e il quarto solaio? Quale angolo forma il cavo con i solai?

31. ●● Un'asta lunga 2 m ha un estremo appoggiato al suolo orizzontale e forma con il suolo un angolo di 40°. Immagina che i raggi del Sole siano perpendicolari al suolo. Quanto è lunga l'ombra dell'asta? A che altezza si trova l'altro estremo?

32. ●●● Una porta larga 0,90 m ruota attorno all'asse verticale dei cardini e viene aperta di 60°. Spiega perché l'angolo di 60°, misurato sul pavimento, è l'ampiezza del diedro formato dalla porta con il piano della parete, e calcola di quanto si è spostato, sul pavimento, lo spigolo verticale libero della porta rispetto alla posizione di chiusura.

Verso la verifica

33. ●● Un cubo ha lo spigolo di 6 cm. Calcola: **a)** la diagonale AG; **b)** l'angolo che AG forma con la faccia $ABCD$; **c)** la distanza del vertice B dalla retta AG.

34. ●● Nel cubo di spigolo 6 cm, M è il punto medio dello spigolo AE e O è il centro della base. **a)** Dimostra che $MO \perp BD$. **b)** Calcola l'ampiezza del diedro fra il piano MBD e la base. **c)** Calcola la distanza di M dalla retta BD.

35. ●●● *Sfida.* Nel cubo di spigolo 6 cm: **a)** dimostra che la diagonale AG è perpendicolare alle rette BD e BE, e quindi al piano BDE; **b)** calcola la distanza del vertice A dal piano BDE; **c)** verifica che il piano BDE taglia la diagonale AG in un punto T tale che $AT = \frac{1}{3}\,AG$.

PER APPROFONDIRE

- EUC — il libro XI degli *Elementi* contiene le definizioni della geometria solida e i teoremi su rette e piani perpendicolari e paralleli; i libri XII e XIII proseguono con i volumi e i poliedri regolari.
- HCV — un classico che allena l'intuizione dello spazio con moltissime figure: poliedri, simmetrie, superfici.
- BOY — per Euclide e per la rifondazione assiomatica della geometria di Hilbert.

Glossario del capitolo

Angolo fra due rette sghembe
Angolo acuto o retto formato da due rette incidenti condotte per un punto parallelamente alle due rette.

Angolo fra una retta e un piano
Angolo acuto fra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano.

Angoloide
Regione dello spazio delimitata da almeno tre angoli consecutivi con lo stesso vertice (le facce); se convesso, la somma delle facce è minore di 360°.

Assonometria cavaliera
Rappresentazione in cui le figure parallele al foglio sono in vera grandezza e le rette in profondità sono inclinate di 45° e dimezzate.

Diedro
Ciascuna delle due parti di spazio delimitate da due semipiani con la stessa retta origine, lo spigolo.

Distanza fra rette sghembe
Lunghezza del segmento della perpendicolare comune compreso fra le due rette.

Fascio di piani
Proprio: tutti i piani che passano per una retta (l'asse). Improprio: tutti i piani paralleli a un piano dato.

Piani paralleli
Piani privi di punti comuni (o coincidenti).

Piani perpendicolari
Piani incidenti che formano diedri retti.

Piano di simmetria
Piano rispetto al quale la simmetria trasforma un solido in sé stesso.

Proiezione ortogonale
Di un punto su un piano: il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano.

Retta perpendicolare a un piano
Retta incidente al piano e perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il piede; basta che lo sia a due di esse.

Rette complanari
Rette contenute in uno stesso piano: incidenti o parallele.

Rette sghembe
Rette che non stanno in nessun piano comune; non hanno punti in comune ma non sono parallele.

Semispazio
Ciascuna delle due parti in cui un piano divide lo spazio.

Sezione normale
Angolo intersezione di un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo; la sua ampiezza è l'ampiezza del diedro.

Teorema delle tre perpendicolari
Se $PH \perp \alpha$ e HK è perpendicolare a una retta r di α, allora $PK \perp r$.

Triedro
Angoloide con tre facce; ogni faccia è minore della somma delle altre due.

Soluzioni

1. C. Se le due rette stanno in uno stesso piano sono parallele, altrimenti sono sghembe (per esempio AB e CG nel cubo).

2. A. Due rette sghembe, per definizione, non stanno in nessun piano.

3. B. È il criterio di perpendicolarità.

4. D. AE incontra la base solo in A, che non sta su CD: sono sghembe. Poiché $CD \parallel AB$ e $AB \perp AE$, l'angolo fra le due rette è retto.

5. A. La sezione normale si ottiene con un piano perpendicolare allo spigolo; ogni sezione normale ha la stessa ampiezza.

6. C. In A: $80° > 30° + 40°$. In B la somma è 360°, in D è 390°, e la somma deve essere minore di 360°. In C: $110° < 130°$ e la somma 240° è minore di 360°.

7. B. È una proiezione parallela: conserva il parallelismo, non gli angoli né le lunghezze in profondità.

8. a) V (postulato 2). **b)** F: è parallela ad alcune rette del piano, ma può essere sghemba con altre; nel cubo EG è parallela alla base ma sghemba con BD. **c)** V. **d)** F: due rette di piani paralleli sono parallele oppure sghembe, per esempio AB ed EH. **e)** V: $A'B' = AB \cos \varphi \leq AB$.

9. tutte; due; incidenti (distinte); piede della perpendicolare; proiezione ortogonale; sezione normale.

10. Diagonale di faccia $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm; diagonale del cubo $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm; angolo $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) \approx 35{,}26°$.

11. $B'C' = 8 \cdot \frac{9}{6} = 12$ cm; $A'C' = 8 + 12 = 20$ cm.

12. Detto K il piede della perpendicolare da H a r, per il teorema delle tre perpendicolari $PK \perp r$: $PK = \sqrt{144 + 25} = 13$ cm. La proiezione di PK su α è HK, quindi l'angolo è PKH: $\operatorname{tg} \varphi = 12/5$, $\varphi \approx 67{,}38°$ (è anche l'ampiezza del diedro fra il piano di P e r e il piano α).

13. $d = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ cm. La proiezione della diagonale sulla faccia 2×3 è la diagonale della faccia, $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ cm, e il terzo spigolo (6 cm) è perpendicolare alla faccia: $\operatorname{sen} \varphi = 6/7$, $\varphi \approx 59{,}00°$.

14. a) $EG \parallel AC$, quindi l'angolo è $BAC = 45°$; rette sghembe. **b)** $CH \parallel BE$ e nella faccia $ABFE$ le diagonali AF e BE sono perpendicolari: 90°, rette sghembe (ortogonali). **c)** Parallele (lati opposti del rettangolo $ABGH$): angolo di 0°. **d)** $FH \parallel BD$ e $BD \perp AC$: 90°, rette sghembe.

15. a) 6 cm, perpendicolare comune BC. **b)** $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm, perpendicolare comune AO, con O centro della base. **c)** 6 cm, perpendicolare comune AE ($AE \perp AB$ e $AE \perp EH$).

16. a) Spigolo AB: $BC \perp AB$ nella base e $BG \perp AB$ nel piano $ABGH$ (perché $AB \perp$ faccia $BCGF$); la sezione normale CBG misura 45°. **b)** 90°: il piano $ACGE$ contiene AE, perpendicolare alla base. **c)** 90°: il piano $ABGH$ contiene AB, perpendicolare alla faccia $BCGF$.

17. $85° < 70° + x$ dà $x > 15°$; $x < 70° + 85° = 155°$; la somma $155° + x < 360°$ dà $x < 205°$, già soddisfatta. Quindi $15° < x < 155°$.

18. Il trapezio rettangolo $PP'Q'Q$ (con P', Q' proiezioni) dà, tracciando da P la parallela a $P'Q'$, un triangolo rettangolo di cateti 3 cm e $7 - 3 = 4$ cm: $PQ = 5$ cm; $\operatorname{tg} \varphi = 4/3$, $\varphi \approx 53{,}13°$.

19. **AG**$(\ell; \ell; \ell)$, **BH**$(-\ell; \ell; \ell)$; prodotto scalare $-\ell^2 + \ell^2 + \ell^2 = \ell^2$; $\cos \gamma = \frac{\ell^2}{\ell\sqrt{3} \cdot \ell\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, $\gamma = \arccos \frac{1}{3} \approx 70{,}53°$.

20. Se i due piani avessero un punto Q in comune, per Q passerebbero due piani distinti perpendicolari a r, contro l'unicità del piano perpendicolare a una retta per un punto. Quindi non hanno punti comuni: sono paralleli.

21. Le estremità delle tre gambe sono tre punti non allineati: per il postulato 2 esiste sempre un piano

che li contiene, e lo sgabello vi si appoggia. Quattro punti in generale non sono complanari: se il pavimento non è piano, la sedia appoggia su tre gambe e oscilla sulla quarta.

22. Sia $A \in r$ e sia s' la parallela a s per A. Le rette incidenti r e s' individuano un piano α. La retta s non giace in α (altrimenti r e s sarebbero complanari) ed è parallela alla retta s' di α: per il teorema del paragrafo sulle rette e i piani paralleli, $s \parallel \alpha$.

23. L'angolo EBA non è una sezione normale del diedro di spigolo BD, perché BA non è perpendicolare a BD (l'angolo ABD è di 45°). La sezione normale è EOA, con O centro della base, e misura $\text{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}74°$. Del resto 45° è l'angolo fra la retta EB e la base, che è un'altra cosa.

24. Se $PA = PB$ e $P \notin AB$, il triangolo PAB è isoscele e la mediana PM è anche altezza: $PM \perp AB$, quindi PM sta nel piano perpendicolare ad AB in M (che contiene tutte le perpendicolari ad AB in M); se $P \in AB$, $P = M$. Viceversa, se P sta in quel piano e $P \neq M$, i triangoli PMA e PMB sono rettangoli in M con PM in comune e $MA = MB$: sono congruenti e $PA = PB$.

25. In un angoloide convesso la somma delle facce è minore di 360°. Gli angoli di un triangolo equilatero misurano 60°: tre, quattro o cinque danno 180°, 240°, 300°; sei darebbero 360° e resterebbero in un piano. Con i quadrati (90°) ne possono incontrarsi solo tre (270°): quattro darebbero 360°.

26. Prendiamo su r due punti A, B con $KA = KB$. Poiché $PK \perp r$ nel punto medio di AB, il triangolo PAB è isoscele: $PA = PB$. I triangoli PHA e PHB sono rettangoli in H, con PH in comune e ipotenuse congruenti, quindi $HA = HB$. Allora H sta sull'asse di AB nel piano α, che è la perpendicolare ad AB per K: $HK \perp r$.

27. Cavo $\sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ m; angolo con il terreno $\text{arctg}(15/8) \approx 61{,}93°$.

28. La sezione normale del diedro è un triangolo rettangolo di ipotenusa 5 m e cateto verticale 2 m: $\text{sen}\,\theta = 2/5$, $\theta \approx 23{,}58°$. Spostamento orizzontale $\sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ m; pendenza $2/4{,}58 \approx 0{,}436$, circa 43,6%.

29. $d = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ m. La proiezione sul pavimento è la diagonale del pavimento, $\sqrt{41} \approx 6{,}40$ m: $\text{tg}\,\varphi = 3/\sqrt{41}$, $\varphi \approx 25{,}10°$.

30. Per il teorema di Talete nello spazio, piani equidistanti tagliano sul cavo segmenti uguali: $4 \cdot 4{,}5 = 18$ m. Angolo: $\text{sen}\,\varphi = 3{,}0/4{,}5 = 2/3$, $\varphi \approx 41{,}81°$.

31. L'ombra è la proiezione ortogonale dell'asta: $2 \cos 40° \approx 1{,}53$ m. L'altro estremo è a $2 \text{ sen } 40° \approx 1{,}29$ m dal suolo.

32. L'asse dei cardini è perpendicolare al pavimento, quindi il pavimento è perpendicolare allo spigolo del diedro e lo taglia in una sezione normale: l'angolo misurato sul pavimento è l'ampiezza del diedro. Lo spigolo libero descrive un arco di raggio 0,90 m; la corda sottesa a 60° forma un triangolo equilatero con i due raggi, quindi lo spostamento è $2 \cdot 0{,}90 \cdot \text{sen } 30° = 0{,}90$ m.

33. a) $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm. **b)** La proiezione di AG è $AC = 6\sqrt{2}$ cm e $CG = 6$ cm: $\text{tg}\,\varphi = 1/\sqrt{2}$, $\varphi \approx 35{,}26°$. **c)** Il triangolo ABG è rettangolo in B: $d = \dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$ cm.

34. a) $MA \perp$ base e $AO \perp BD$ (diagonali del quadrato): per il teorema delle tre perpendicolari $MO \perp BD$. **b)** La sezione normale è MOA: $\text{tg}\,\theta = MA/AO = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, $\theta \approx 35{,}26°$. **c)** $MO = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ cm.

35. a) $BD \perp AC$ e $BD \perp AE$, quindi BD è perpendicolare al piano $ACGE$, che contiene AG: $AG \perp BD$. Allo stesso modo $BE \perp AF$ (diagonali della faccia $ABFE$) e $BE \perp AD$ (perché $AD \perp$ faccia $ABFE$), quindi $BE \perp$ piano $ADGF$, che contiene AG: $AG \perp BE$. Sia T il punto in cui AG incontra il piano BDE: le parallele a BD e a BE condotte per T stanno nel piano BDE, sono incidenti in T e perpendicolari ad AG; per il criterio, $AG \perp$ piano BDE. (Verifica analitica: $\mathbf{AG} \cdot \mathbf{BD} = 0$ e $\mathbf{AG} \cdot \mathbf{BE} = -36 + 0 + 36 = 0$.) **b)** T è la proiezione di A sul piano, e sta sulla retta EO; nel triangolo EAO, rettangolo in A, AT è l'altezza relativa all'ipotenusa: $EO = \sqrt{36 + 18} = 3\sqrt{6}$, $AT = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ cm. **c)** $AG = 6\sqrt{3}$ e $AT = 2\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\,AG$.