CAPITOLO

9

Equazioni polinomiali e numero delle soluzioni

Contare le soluzioni prima di cercarle: è il modo più sicuro per non perderne nessuna. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere le radici di un polinomio e la loro molteplicità, anche sul grafico.
2. Dimostrare che un polinomio di grado n ha al più n radici e usare il principio d'identità dei polinomi.
3. Enunciare il teorema fondamentale dell'algebra e scomporre un polinomio in fattori in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}$.
4. Usare il teorema delle radici coniugate e le formule di Viète, e cercare le radici razionali di un polinomio a coefficienti interi.
5. Risolvere in $\mathbb{C}$ equazioni trinomie, biquadratiche e reciproche.
6. Stabilire il numero delle soluzioni reali di un'equazione, anche con un parametro, e approssimarle con il metodo di bisezione.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Polinomi, radici e molteplicità 2
9.2 Il teorema fondamentale dell'algebra 5
9.3 Polinomi a coefficienti reali 7
9.4 Radici e coefficienti 10
9.5 Equazioni particolari nel campo complesso 12
9.6 Il numero delle soluzioni reali 15

Matematica 4 · Parte III · Numeri complessi ed equazioni polinomiali · versione 1.0
Capitolo 9: Equazioni polinomiali e numero delle soluzioni · pagine 249–274 del volume completo · estratto per lo studio

Quante soluzioni ha un'equazione? Per le equazioni di primo e di secondo grado la risposta si conosce da tempo: al più una, al più due. L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ne ha nessuna tra i numeri reali, ma nel capitolo 7 abbiamo visto che nel campo complesso ne ha esattamente due, i e −i. Nel capitolo 8 l'equazione $z^n = w$ ci ha dato, per ogni $w \neq 0$, esattamente n soluzioni. È un caso, o c'è una regola generale?

Questo capitolo risponde alla domanda che le *Indicazioni nazionali* chiamano «il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali». La risposta ha due facce. Nel campo complesso è sorprendentemente semplice: un'equazione polinomiale di grado n ha sempre esattamente n soluzioni, purché le si conti nel modo giusto. È il **teorema fondamentale dell'algebra**. Nel campo reale le soluzioni possono essere meno, e per contarle e approssimarle servono altri strumenti: la struttura delle radici complesse, i grafici, i cambiamenti di segno.

9.1 Polinomi, radici e molteplicità

9.1.1 Un richiamo: il resto e la regola di Ruffini

Ricordiamo alcuni fatti studiati in *Matematica 2* (cap. 10). Un **polinomio** nella variabile x è un'espressione $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; se $a_n \neq 0$, il numero naturale n è il suo **grado** e a_n il suo **coefficiente direttivo**; a_0 è il **termine noto**. Un numero α è una **radice** (o *zero*) del polinomio se $p(\alpha) = 0$, cioè se è una soluzione dell'equazione $p(x) = 0$. Il polinomio i cui coefficienti sono tutti nulli si chiama **polinomio nullo**: vale 0 per ogni x e non gli si attribuisce un grado.

Dividendo $p(x)$ per il binomio $x - \alpha$ si ottengono un quoziente $q(x)$, di grado $n - 1$, e un resto costante r: $p(x) = (x - \alpha)\, q(x) + r$. Ponendo $x = \alpha$ si trova $r = p(\alpha)$: è il **teorema del resto**. Ne segue il **teorema di Ruffini**: *$p(x)$ è divisibile per $x - \alpha$ se e solo se $p(\alpha) = 0$*. Trovare una radice di un polinomio, quindi, equivale a trovarne un fattore di primo grado. La divisione per $x - \alpha$ si esegue rapidamente con la regola di Ruffini (Figura 9.1).

Nell'esempio della Figura 9.1 il resto è nullo, quindi $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$; il trinomio si scompone a sua volta in $(x + 1)(x - 3)$. Per la **legge di annullamento del prodotto**, le soluzioni dell'equazione $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ sono −1, 2 e 3: un'equazione di terzo grado con tre soluzioni.

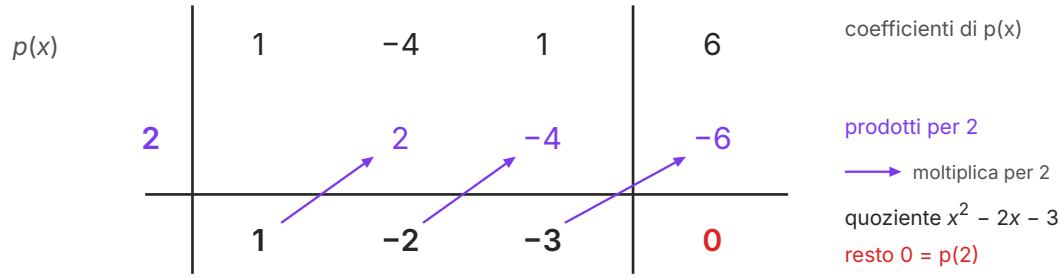


Figura 9.1 La regola di Ruffini per $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$. Si abbassa il primo coefficiente; poi, colonna per colonna, si moltiplica per 2 il numero appena scritto nell'ultima riga (frecce viola) e lo si somma al coefficiente della colonna successiva. L'ultima riga contiene i coefficienti del quoziente $x^2 - 2x - 3$ e, oltre la linea verticale, il resto 0, che è il valore $p(2)$. Nella versione interattiva puoi cambiare il divisore e osservare che il resto è sempre $p(a)$.

9.1.2 Radici semplici e radici multiple

Consideriamo ora $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Si verifica che $p(1) = 0$, e con la regola di Ruffini si ottiene $p(x) = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2 (x+2)$. Le soluzioni di $p(x) = 0$ sono soltanto 1 e −2, ma il fattore $x - 1$ compare due volte. Per tenerne conto diamo un nome a questo fenomeno.

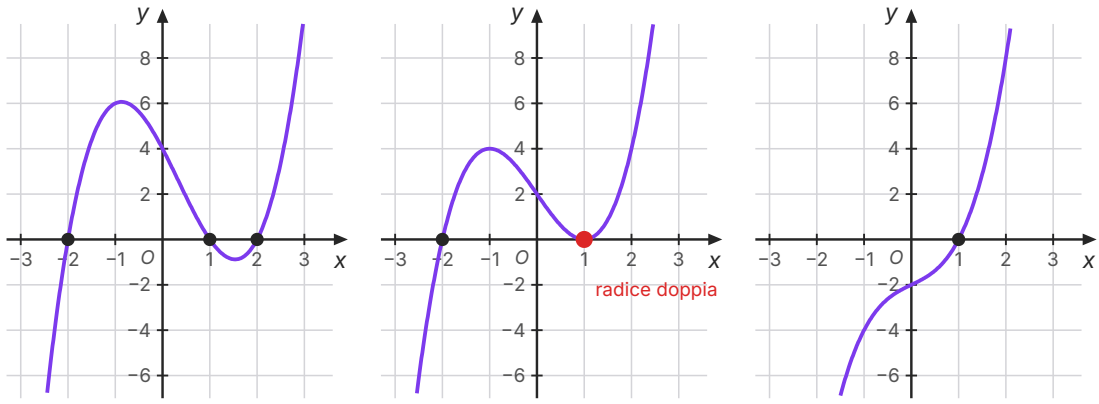
IN SINTESI

Definizione. Sia $p(x)$ un polinomio non nullo e sia $m \geq 1$ un numero naturale. Il numero α è una radice di **molteplicità** m di $p(x)$ se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$ ma non per $(x - \alpha)^{m+1}$; equivalentemente, se $p(x) = (x - \alpha)^m \, q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$.

Una radice di molteplicità 1 si dice **radice semplice**; di molteplicità 2, 3, ... si dice **radice multipla** (**radice doppia**, tripla, ...).

Così 1 è radice doppia di $x^3 - 3x + 2$ e −2 è radice semplice. Il polinomio $x^4 (x + 5)^3 (x - 2)$, di grado 8, ha la radice 0 con molteplicità 4, −5 con molteplicità 3 e 2 con molteplicità 1: la somma delle molteplicità è $4 + 3 + 1 = 8$, uguale al grado. Vedremo che non è una coincidenza.

La molteplicità si vede anche sul grafico (Figura 9.2). Vicino a una radice semplice il grafico di $y = p(x)$ *attraversa* l'asse x: il fattore $x - \alpha$ cambia segno, mentre gli altri fattori, che in α non si annullano, mantengono il segno vicino ad α. Vicino a una radice doppia il fattore $(x - \alpha)^2$ è un quadrato e non cambia segno: il grafico *tocca* l'asse x e torna indietro, restando dalla stessa parte. In generale il grafico attraversa l'asse nelle radici di molteplicità dispari e lo tocca senza attraversarlo in quelle di molteplicità pari.



a) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$
tre radici reali distinte

b) $y = x^3 - 3x + 2$
una radice doppia e una semplice

c) $y = x^3 + x - 2$
una sola radice reale

Figura 9.2 Tre polinomi di terzo grado a coefficienti reali. **a)** $y = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$: tre radici reali semplici, in cui il grafico attraversa l'asse x. **b)** $y = (x + 2)(x - 1)^2$: la radice 1 è doppia e il grafico tocca l'asse senza attraversarlo. **c)** $y = (x - 1)(x^2 + x + 2)$: il trinomio ha discriminante negativo, e c'è una sola radice reale. Grafici calcolati dalle equazioni; le unità sui due assi sono diverse.

9.1.3 Quante radici può avere un polinomio

La prima risposta al problema del numero delle soluzioni è un limite superiore, e vale in qualunque insieme numerico in cui si possa eseguire la regola di Ruffini: nei razionali, nei reali, nei complessi (in generale in ogni campo).

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $p(x)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. **Tesi:** $p(x)$ ha al più n radici distinte in quell'insieme; anzi, la somma delle molteplicità delle sue radici è al più n.

Dimostrazione (per induzione sul grado, vedi *Matematica 3*, cap. 4). **Passo base.** Se $n = 1$, $p(x) = a_1 x + a_0$ con $a_1 \neq 0$ ha la sola radice $-a_0/a_1$, semplice. **Passo induttivo.** Supponiamo la tesi vera per i polinomi di grado $n - 1$ e sia $p(x)$ di grado n. Se $p(x)$ non ha radici, non c'è nulla da dimostrare. Se ha una radice α, per il teorema di Ruffini $p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$, con $q(x)$ di grado $n - 1$. Un numero $\beta \neq \alpha$ è radice di $p(x)$ se e solo se $(\beta - \alpha)\, q(\beta) = 0$, cioè, per la legge di annullamento del prodotto, se e solo se $q(\beta) = 0$. Dunque le radici di $p(x)$ sono α e le radici di $q(x)$, e la molteplicità di α in $p(x)$ supera di 1 quella che ha in $q(x)$ (che è 0 se $q(\alpha) \neq 0$). Per l'ipotesi induttiva le molteplicità delle radici di $q(x)$ hanno somma al più $n - 1$; aggiungendo 1 si ottiene al più n. c.v.d.

La legge di annullamento del prodotto è il punto in cui la dimostrazione usa la struttura di campo: in un insieme numerico in cui un prodotto di due fattori non nulli potesse essere nullo, il teorema cadrebbe.

9.1.4 Il principio d'identità dei polinomi

Dal teorema segue che un polinomio di grado al più n che si annulla per più di n valori distinti di x è il polinomio nullo. Applichiamo questa osservazione alla differenza di due polinomi.

IN SINTESI

Principio d'identità dei polinomi. Ipotesi: $p(x)$ e $q(x)$ hanno grado al più n e $p(x) = q(x)$ per più di n valori distinti di x. **Tesi:** $p(x)$ e $q(x)$ hanno gli stessi coefficienti, cioè sono lo stesso polinomio.

In particolare, due polinomi che assumono lo stesso valore per *ogni* numero reale x hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei termini dello stesso grado.

Dimostrazione. Il polinomio $d(x) = p(x) - q(x)$ ha grado al più n e più di n radici distinte; per il teorema precedente è il polinomio nullo, cioè tutti i coefficienti di $p(x)$ e $q(x)$ coincidono. c.v.d.

Il **principio d'identità dei polinomi** giustifica un metodo usato spesso senza dirlo, quello dei coefficienti indeterminati: per imporre che due polinomi siano uguali si eguagliano i coefficienti dei termini dello stesso grado.

ESEMPIO SVOLTO

Determiniamo a e b in modo che il polinomio $p(x) = x^3 + ax + b$ abbia 1 come radice doppia.

Se 1 è radice almeno doppia, $p(x) = (x - 1)^2 (x + c)$ per un opportuno c, perché il quoziente di un polinomio di terzo grado con coefficiente direttivo 1 per $(x - 1)^2$ è un polinomio di primo grado con coefficiente direttivo 1. Sviluppiamo: $(x - 1)^2 (x + c) = (x^2 - 2x + 1)(x + c) = x^3 + (c - 2)x^2 + (1 - 2c)x + c$.

Per il principio d'identità i coefficienti devono coincidere con quelli di $x^3 + 0\,x^2 + ax + b$: $c - 2 = 0$, $1 - 2c = a$, $c = b$. Quindi $c = 2$, $a = -3$, $b = 2$, e il polinomio è $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$, quello del paragrafo precedente. La radice 1 è esattamente doppia, e non tripla, perché il terzo fattore $x + 2$ non si annulla per $x = 1$.

9.2 Il teorema fondamentale dell'algebra

9.2.1 L'enunciato

Il teorema precedente dice che le radici non possono essere *troppe*. Ma possono essere troppo poche: $x^2 + 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$, e $x^2 - 2$ non ne ha in $\mathbb{Q}$. Ogni volta, i numeri sono stati ampliati:

da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ per avere $\sqrt{2}$, da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ per avere i. Esistono equazioni a coefficienti complessi senza soluzioni in $\mathbb{C}$, che richiederebbero numeri «ancora più nuovi»? La risposta è no.

IN SINTESI

Teorema fondamentale dell'algebra. Ipotesi: $p(x)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi (in particolare, reali). **Tesi:** esiste almeno un numero complesso z_0 tale che $p(z_0) = 0$.

Il **teorema fondamentale dell'algebra** dice che $\mathbb{C}$ è **algebricamente chiuso**: le equazioni polinomiali, risolte nel campo complesso, non costringono più ad ampliare i numeri. Le sue dimostrazioni non sono algebriche: usano proprietà dei numeri reali e delle funzioni continue che si studiano solo nel quinto anno e all'università, e per questo non la presentiamo. Il teorema, però, si può usare fin d'ora, e le sue conseguenze sono elementari.

APPROFONDIMENTO · GAUSS E IL TEOREMA FONDAMENTALE

Nel Seicento e nel Settecento molti matematici erano convinti che ogni equazione polinomiale di grado n avesse n radici, e vari tentativi di dimostrazione furono proposti da d'Alembert, Eulero, Lagrange e altri. Nel 1799 Carl Friedrich Gauss (1777–1855) presentò all'università di Helmstedt una dissertazione di laurea dedicata proprio a questo teorema: vi criticava le dimostrazioni precedenti e ne proponeva una nuova, di natura geometrica, che è considerata di solito la prima dimostrazione sostanzialmente corretta. Gauss tornò sul teorema più volte nel corso della vita e ne pubblicò altre dimostrazioni. Il nome «teorema fondamentale dell'algebra» ricorda un'epoca in cui l'algebra era soprattutto la teoria delle equazioni.

9.2.2 Esattamente n radici

Combinando il teorema fondamentale con la regola di Ruffini si ottiene il conteggio completo. Sia $p(x)$ di grado $n \geq 1$ e coefficiente direttivo a_n. Per il teorema esiste una radice z_1, e $p(x) = (x - z_1)\, q_1(x)$, con $q_1(x)$ di grado $n - 1$. Se $n - 1 \geq 1$, il teorema si applica di nuovo a $q_1(x)$: c'è una radice z_2 e $q_1(x) = (x - z_2)\, q_2(x)$. Dopo n passi (formalmente, per induzione sul grado) il quoziente è una costante, necessariamente a_n:

$$p(x) = a_n\,(x - z_1)(x - z_2)\,\dots\,(x - z_n).$$

IN SINTESI

Corollario. Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi si scompone nel prodotto del coefficiente direttivo per n fattori di primo grado $x - z_k$. Di conseguenza ha in $\mathbb{C}$ **esattamente n radici, se ciascuna è contata tante volte quanto è la sua molteplicità**: radici distinte al più n, e somma delle molteplicità uguale a n.

Per esempio $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, e le radici del trinomio sono $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$: le tre radici cubiche dell'unità del capitolo 8. Il polinomio $(x-\mathrm{i})^2\,(x+3)$ ha grado 3 e due sole radici distinte, i (doppia) e -3 (semplice): contate con molteplicità sono tre. Il corollario dà anche un criterio di uguaglianza: due polinomi di grado n con lo stesso coefficiente direttivo e le stesse radici, con le stesse molteplicità, sono lo stesso polinomio.

ERRORE FREQUENTE

«Un'equazione di grado *n* ha *n* soluzioni reali». Il teorema fondamentale parla di soluzioni *complesse*. L'equazione $x^4 + 1 = 0$ ha grado 4 e nessuna soluzione reale; $x^3 + x - 2 = 0$ ne ha una sola (Figura 9.2, c). Le soluzioni reali sono al più n, e possono mancare del tutto.

Dimenticare la molteplicità. L'equazione $x^3 - 3x + 2 = 0$ ha due soluzioni distinte, 1 e -2, e non contraddice il teorema: 1 va contata due volte. Chi dice «ha grado 3, quindi manca una soluzione» confonde le soluzioni distinte con le radici contate con molteplicità.

9.3 Polinomi a coefficienti reali

9.3.1 Le radici non reali vengono a coppie

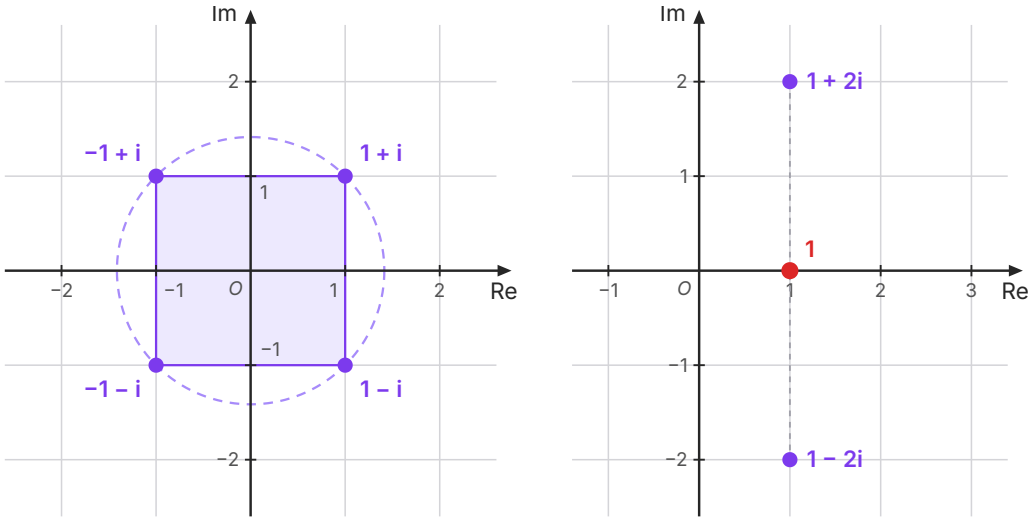
Nei problemi della scuola, della fisica e delle scienze i polinomi hanno quasi sempre coefficienti reali. Per questi polinomi le radici complesse hanno una struttura speciale, che si osserva in tutti gli esempi visti finora: $x^2 + 1$ ha le radici $\pm\mathrm{i}$, $x^3 - 1$ ha le radici $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$. Le radici non reali compaiono a coppie di numeri *coniugati*.

IN SINTESI

Teorema delle radici coniugate. Ipotesi: $p(x)$ è un polinomio a coefficienti **reali** e z è una sua radice complessa. **Tesi:** anche il coniugato $\overline{z}$ è radice di $p(x)$, con la stessa molteplicità.

Dimostrazione (della prima parte). Sia $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ con tutti gli a_k reali e sia $p(z) = 0$, cioè $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$. Passiamo ai coniugati dei due membri. Il coniugato di 0 è 0; per le proprietà del coniugato (capitolo 7) il coniugato di una somma è la somma dei coniugati e il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati, quindi $\overline{z^k} = \overline{z}^k$. Infine $\overline{a_k} = a_k$, perché i coefficienti sono reali. Si ottiene $a_n \overline{z}^n + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$, cioè $p(\overline{z}) = 0$. c.v.d.

Per la seconda parte basta osservare che, se z non è reale, $(x-z)(x-\overline{z})$ è un polinomio a coefficienti reali (lo verifichiamo tra poco): dividendo $p(x)$ per esso si ottiene un quoziente a coefficienti reali, a cui si applica di nuovo la prima parte. Le radici non reali di un polinomio reale si possono quindi raggruppare in coppie z, $\overline{z}$ con la stessa molteplicità, simmetriche rispetto all'asse reale nel piano di Gauss (Figura 9.3).



a) $x^4 + 4 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$

Figura 9.3 Le radici di due equazioni a coefficienti reali nel piano di Gauss. **a)** Le quattro soluzioni di $x^4 + 4 = 0$, cioè le radici quarte di -4, sono $\pm 1 \pm i$: vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt{2}$. **b)** Le soluzioni di $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ sono 1 e $1 \pm 2i$. In entrambi i casi l'insieme delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale (in b il segmento tratteggiato unisce le due radici coniugate). Punti calcolati, stessa unità sui due assi.

ESEMPIO SVOLTO

Sapendo che $1 + 2i$ è una soluzione dell'equazione $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$, troviamo le altre.

Verifica. $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ e $(1 + 2i)^3 = (-3 + 4i)(1 + 2i) = -3 - 6i + 4i - 8 = -11 - 2i$. Quindi $(-11 - 2i) - 3(-3 + 4i) + 7(1 + 2i) - 5 = (-11 + 9 + 7 - 5) + (-2 - 12 + 14)i = 0$.

La radice coniugata. I coefficienti sono reali, quindi anche $1 - 2i$ è soluzione, e il polinomio è divisibile per $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = (x - 1)^2 - (2i)^2 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5$.

La terza radice. Dividendo, $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x^2 - 2x + 5)(x - 1)$: la terza soluzione è 1, reale come doveva essere (Figura 9.3, b). Le soluzioni sono 1, $1 + 2i$, $1 - 2i$.

ERRORE FREQUENTE

Applicare il teorema delle radici coniugate a un polinomio con coefficienti non reali. Il polinomio $z^2 - iz = z(z - i)$ ha le radici 0 e i, ma non $-i$: infatti $(-i)^2 - i(-i) = -1 + i^2 = -2 \neq 0$. La dimostrazione usa $\overline{a_k} = a_k$, e con il coefficiente $-i$ questo passo cade.

9.3.2 La scomposizione in fattori reali

Sia $z = a + bi$ con $b \neq 0$. Il prodotto dei due fattori coniugati è

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2),$$

un trinomio a coefficienti reali, il cui discriminante $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$ è negativo. Raggruppando a due a due i fattori complessi coniugati nella scomposizione del teorema fondamentale si ottiene allora:

IN SINTESI

Ogni polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 1$ si scompone, in $\mathbb{R}$, nel prodotto del coefficiente direttivo per fattori di primo grado $x - r$ (uno per ogni radice reale r, ripetuto secondo la molteplicità) e fattori di secondo grado $x^2 + px + q$ con $p^2 - 4q < 0$ (uno per ogni coppia di radici coniugate non reali). Questi fattori di secondo grado non si possono scomporre ulteriormente in $\mathbb{R}$: sono **polinomi irriducibili** in $\mathbb{R}$.

Il polinomio $x^4 - 1$ mostra le due scomposizioni a confronto (Figura 9.4). In $\mathbb{R}$ si arriva a $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, e il fattore $x^2 + 1$, con discriminante -4, è irriducibile. In $\mathbb{C}$ si fa un passo in più: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Le radici sono ± 1 e $\pm i$, le radici quarte dell'unità.

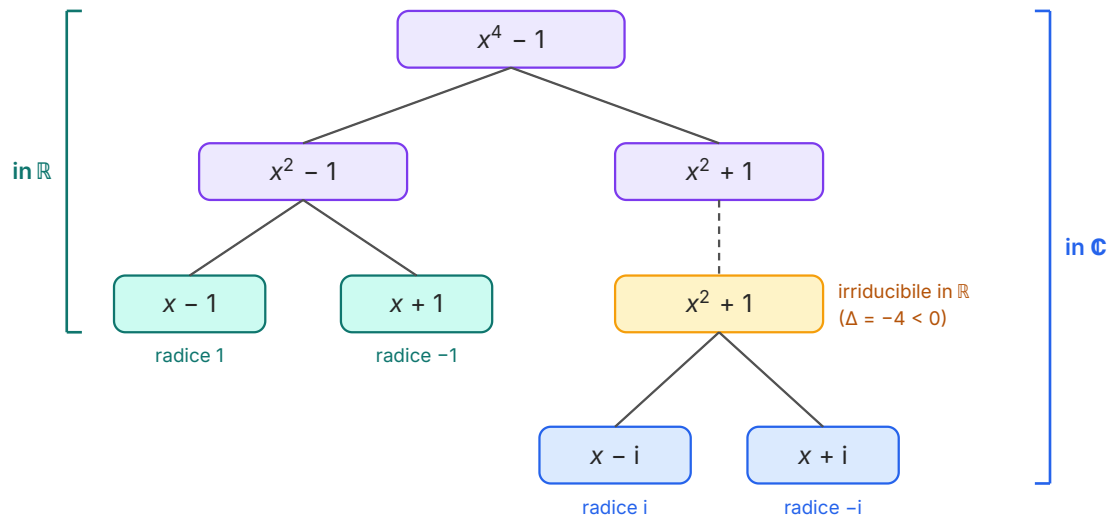


Figura 9.4 La scomposizione di $x^4 - 1$. In $\mathbb{R}$ ci si ferma a tre fattori, perché $x^2 + 1$ ha discriminante negativo; in $\mathbb{C}$ anche questo fattore si scompone, e il polinomio diventa il prodotto di quattro fattori di primo grado, uno per ogni radice.

Un esempio meno evidente è $x^4 + 4$, che non ha radici reali e quindi non ha fattori di primo grado in $\mathbb{R}$. Le sue radici sono $\pm 1 \pm i$ (Figura 9.3, a): accoppiando $1 + i$ con $1 - i$ e $-1 + i$ con $-1 - i$ si trova la scomposizione reale $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, che si può verificare sviluppando il prodotto.

9.3.3 Le equazioni di grado dispari

Il teorema delle radici coniugate ha una conseguenza che riguarda direttamente le soluzioni reali. Le radici non reali di un polinomio reale, contate con molteplicità, sono in numero pari, perché si presentano a coppie. Il numero totale delle radici, contate con molteplicità, è il grado n. Quindi il numero delle radici reali, contate con molteplicità, è n meno un numero pari: **ha la stessa parità di n**.

> **DA RICORDARE**
>
> Un polinomio a coefficienti reali di grado n ha un numero di radici reali, contate con molteplicità, uguale a n, $n - 2$, $n - 4$, ... In particolare **un'equazione a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una soluzione reale**, mentre un'equazione di grado pari può non averne nessuna.

Lo stesso fatto si intuisce dal grafico. Per $|x|$ molto grande il termine di grado massimo prevale su tutti gli altri: in $x^3 + x - 2$, per $x = 100$ il termine x^3 vale un milione e il resto vale 98. Così il segno di $p(x)$ per x grande e positivo è quello di a_n, e per x grande e negativo è quello di $a_n\,(-1)^n$. Se n è dispari i due segni sono opposti: il grafico, che non ha salti, parte da una parte dell'asse x e arriva dall'altra, quindi lo attraversa almeno una volta. Il teorema che rende rigoroso questo «non ha salti» si chiama teorema di esistenza degli zeri e si studia nel quinto anno.

9.4 Radici e coefficienti

9.4.1 Le formule di Viète

Per l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ conosciamo dal primo biennio le relazioni tra le soluzioni e i coefficienti: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1\,x_2 = \dfrac{c}{a}$. Ora sappiamo che valgono anche quando $\Delta < 0$, con le soluzioni complesse coniugate: per $x^2 - 2x + 5 = 0$ si ha $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2$ e $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$. La ragione è che $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a\,x_1\,x_2$ e, per il principio d'identità, i coefficienti dei due membri coincidono.

Lo stesso ragionamento si estende al terzo grado. Se x_1, x_2, x_3 sono le radici di $ax^3 + bx^2 + cx + d$, contate con molteplicità, allora

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

e, sviluppando il prodotto,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3];$$

eguagliando i coefficienti si ottengono le **formule di Viète** per il terzo grado.

IN SINTESI

Se x_1, x_2, x_3 sono le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$), contate con molteplicità:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Viceversa, l'equazione di terzo grado con coefficiente direttivo 1 che ha come soluzioni x_1, x_2, x_3 è $x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3 = 0$, dove s_1, s_2, s_3 sono la somma, la somma dei prodotti a due a due e il prodotto delle soluzioni.

Per esempio, l'equazione con soluzioni 1, 2 e −3 ha $s_1 = 0$, $s_2 = 2 - 3 - 6 = -7$, $s_3 = -6$: è $x^3 - 7x + 6 = 0$. Le formule permettono anche di calcolare espressioni simmetriche delle radici senza conoscerle: per esempio $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2\,s_2$, come si vede sviluppando $(x_1 + x_2 + x_3)^2$. Per $x^3 - 7x + 6$ si trova $0 + 14 = 14$, e infatti $1 + 4 + 9 = 14$.

ESEMPIO SVOLTO

Le soluzioni dell'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ sono in progressione aritmetica. Troviamole.

Scriviamo le soluzioni come $m - d$, m, $m + d$. Per la prima formula di Viète la somma è $3m = -\frac{-6}{1} = 6$, quindi $m = 2$: il numero 2 è una soluzione. Verifichiamo: $8 - 24 + 22 - 6 = 0$.

Con la regola di Ruffini, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 2)(x^2 - 4x + 3) = (x - 2)(x - 1)(x - 3)$. Le soluzioni sono 1, 2, 3, effettivamente in progressione aritmetica di ragione 1. Controllo con le altre due formule: $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11$ e $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = -\frac{-6}{1}$.

9.4.2 Le radici razionali

Per applicare la regola di Ruffini a un polinomio di grado 3 o più occorre conoscerne una radice. Quando i coefficienti sono interi, c'è un modo sistematico per trovare le eventuali radici *razionali*.

IN SINTESI

Teorema delle radici razionali. Ipotesi: $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ha coefficienti interi, con $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$; la frazione $\frac{p}{q}$, ridotta ai minimi termini ($q > 0$), è una radice di $P(x)$. **Tesi:** p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n.

Dimostrazione. Da $P(\frac{p}{q}) = 0$, moltiplicando per q^n, si ottiene

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Tutti i termini tranne l'ultimo contengono il fattore p, quindi $a_0\, q^n = -p(a_n\, p^{n-1} + \ldots + a_1\, q^{n-1})$ è un multiplo di p. Poiché p e q non hanno fattori primi comuni, nemmeno p e q^n ne hanno, e quindi p divide a_0. Allo stesso modo tutti i termini tranne il primo contengono il fattore q: $a_n\, p^n$ è un multiplo di q, e q, primo con p^n, divide a_n. c.v.d.

Se il coefficiente direttivo è 1, si dice che il polinomio è **monico**; allora $q = 1$ e **le radici razionali di un polinomio monico a coefficienti interi sono numeri interi, divisori del termine noto**. È ciò che abbiamo fatto con $x^3 - 4x^2 + x + 6$: i candidati erano ±1, ±2, ±3, ±6, e tre di essi sono radici.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo l'equazione $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$.

I candidati. I divisori del termine noto 6 sono ±1, ±2, ±3, ±6; i divisori positivi del coefficiente direttivo 2 sono 1 e 2. Le possibili radici razionali sono quindi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

La ricerca. $p(1) = 2 - 3 - 11 + 6 = -6$, $p(-1) = -2 - 3 + 11 + 6 = 12$, $p(2) = 16 - 12 - 22 + 6 = -12$, $p(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$. Abbiamo trovato la radice 3.

La scomposizione. Con la regola di Ruffini, $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$, e il trinomio ha $\Delta = 9 + 16 = 25$, soluzioni $\frac{-3 \pm 5}{4}$, cioè $\frac{1}{2}$ e -2. Le soluzioni sono -2, $\frac{1}{2}$, 3, tutte nell'elenco dei candidati. Per controllo, la loro somma è $\frac{3}{2} = -\frac{-3}{2}$ e il loro prodotto è $-3 = -\frac{6}{2}$, come vogliono le formule di Viète.

Il teorema ha anche un uso «in negativo». Il polinomio $x^2 - 2$ è monico e a coefficienti interi; le sue eventuali radici razionali sarebbero divisori di 2, cioè ±1 o ±2, ma nessuno di questi ha quadrato 2. Dunque $\sqrt{2}$ non è razionale: è una nuova dimostrazione di un fatto che conosciamo dal primo biennio, e lo stesso argomento vale per $\sqrt[3]{2}$ e per ogni radice di un intero che non sia una potenza esatta. Quando invece nessun candidato è una radice, il polinomio non ha radici razionali, ma può benissimo avere radici reali irrazionali: le cercheremo nell'ultimo paragrafo.

9.5 Equazioni particolari nel campo complesso

9.5.1 Equazioni binomie, trinomie e biquadratiche

Alcune equazioni di grado alto si riconducono, con una sostituzione, a equazioni di grado più basso. Le equazioni binomie $x^n = w$ sono state risolte nel capitolo 8: in $\mathbb{C}$, per $w \neq 0$, hanno n so-

luzioni distinte, vertici di un poligono regolare. Un'equazione della forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ con $a \neq 0$ si chiama **equazione trinomia**; per $n = 2$ è l'**equazione biquadratica** $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Con la sostituzione $t = x^n$ diventa l'equazione di secondo grado $at^2 + bt + c = 0$; trovate le sue soluzioni t_1, t_2, si risolvono le due equazioni binomie $x^n = t_1$ e $x^n = t_2$.

Nell'equazione $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, per esempio, $t = x^2$ soddisfa $t^2 - 3t - 4 = 0$, cioè $t = 4$ oppure $t = -1$. Da $x^2 = 4$ si ottiene $x = \pm 2$, da $x^2 = -1$ si ottiene $x = \pm i$: due soluzioni reali e due complesse coniugate, quattro in tutto.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^4 + x^2 + 1 = 0$ e scomponiamo il polinomio in $\mathbb{R}$.

La sostituzione. Con $t = x^2$: $t^2 + t + 1 = 0$, $\Delta = -3$, $t = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. In forma trigonometrica $t_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ e $t_2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, coniugato di t_1; entrambi hanno modulo 1.

Le radici quadrate. Le radici quadrate di t_1 hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$: sono $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Le radici quadrate di t_2 sono i loro coniugati. Le quattro soluzioni sono quindi $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, nessuna reale, a coppie coniugate.

La scomposizione reale. Accoppiando le soluzioni coniugate, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ danno $x^2 - x + 1$ e $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ danno $x^2 + x + 1$: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Lo stesso risultato si ottiene con un artificio algebrico: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2$, una differenza di quadrati.

Un'osservazione. Poiché $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$, le quattro soluzioni trovate sono le radici seste dell'unità diverse da ± 1: i quattro vertici «obliqui» dell'esagono regolare del capitolo 8.

9.5.2 Equazioni reciproche

Un polinomio i cui coefficienti, letti da sinistra a destra, sono gli stessi che letti da destra a sinistra, come $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ o $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, si dice **polinomio reciproco** (di prima specie), e l'equazione $p(x) = 0$ si chiama equazione reciproca. Il nome viene da una proprietà delle soluzioni: **se α è soluzione, lo è anche $\frac{1}{\alpha}$** (lo dimostrerai nell'esercizio 25); lo zero non è mai soluzione, perché il termine noto è uguale al coefficiente direttivo.

- **Terzo grado.** Un'equazione reciproca di terzo grado, $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, ha sempre la soluzione -1: infatti $-a + b - b + a = 0$. Si abbassa di grado con la regola di Ruffini. Per esempio $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$, con le soluzioni -1 e $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

- **Quarto grado.** In $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ si divide per x^2 (lecito, perché $x \neq 0$) e si raccolgono i termini simmetrici: $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$. Con la sostituzione $y = x + \frac{1}{x}$, poiché $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, si ottiene un'equazione di secondo grado in y; per ciascuna sua soluzione si risolve $x + \frac{1}{x} = y$, cioè $x^2 - yx + 1 = 0$.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione reciproca $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dividiamo per x^2: $2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$. Con $y = x + \frac{1}{x}$: $2(y^2 - 2) - 5y + 4 = 0$, cioè $2y^2 - 5y = 0$, con le soluzioni $y = 0$ e $y = \frac{5}{2}$.

Da $x + \frac{1}{x} = 0$ si ha $x^2 + 1 = 0$, quindi $x = \pm i$. Da $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ si ha $2x^2 - 5x + 2 = 0$, con le soluzioni $x = 2$ e $x = \frac{1}{2}$.

Le soluzioni sono 2, $\frac{1}{2}$, i, $-i$: le reali sono una l'inversa dell'altra, e anche i e $-i$ lo sono, perché $\frac{1}{i} = -i$. Le soluzioni reali sono due, numero pari come il grado; le altre due sono coniugate.

APPROFONDIMENTO · LE FORMULE RISOLUTIVE E IL LORO LIMITE

Le equazioni di terzo e di quarto grado hanno una formula risolutiva, come quella di secondo grado, che usa soltanto le quattro operazioni e l'estrazione di radici. Per l'equazione di terzo grado ridotta $x^3 + px + q = 0$ la formula fu trovata nel Cinquecento da matematici italiani: Scipione del Ferro e, indipendentemente, Niccolò Tartaglia, che la confidò a Gerolamo Cardano. Cardano la pubblicò nell'*Ars Magna* (1545), insieme alla soluzione dell'equazione di quarto grado trovata dal suo allievo Ludovico Ferrari.

La formula contiene la radice quadrata di $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, che può essere negativa proprio quando l'equazione ha tre soluzioni reali. È il caso dell'equazione $x^3 = 15x + 4$, cioè $p = -15$ e $q = -4$: si ha $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - 125 = -121$, eppure la soluzione è $x = 4$, reale. Fu per uscire da questo paradosso che Rafael Bombelli, nell'*Algebra* (1572), imparò a calcolare con le radici dei numeri negativi (capitolo 7).

Per oltre due secoli si cercò invano una formula analoga per il quinto grado. Paolo Ruffini, nel 1799, sostenne con una dimostrazione lunga e in parte lacunosa che una formula generale per radicali non esiste; Niels Henrik Abel, nel 1824, ne diede una dimostrazione completa. Il teorema non dice che le soluzioni non esistano (esistono, per il teorema fondamentale), ma che non esiste una formula per radicali valida per *tutte* le equazioni di grado 5 o più.

9.6 Il numero delle soluzioni reali

9.6.1 Contare le intersezioni con l'asse x

Torniamo ai numeri reali. Le soluzioni reali dell'equazione $p(x) = 0$ sono le ascisse dei punti in cui il grafico di $y = p(x)$ incontra l'asse x. Per un polinomio di terzo grado a coefficienti reali la teoria precedente lascia solo tre possibilità, tutte visibili nella Figura 9.2: tre radici reali distinte; una radice reale doppia e una semplice (oppure una sola radice tripla, come in $(x - 1)^3$); una radice reale semplice e due complesse coniugate. Non può accadere che le radici reali siano due semplici, perché il loro numero con molteplicità deve essere dispari.

9.6.2 Un'equazione con un parametro

Studiamo, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^3 - 3x = k.$$

Il metodo grafico. Le soluzioni sono le ascisse delle intersezioni della curva $y = x^3 - 3x$ con la retta orizzontale $y = k$ (Figura 9.5). La curva passa per $(-2; -2)$, $(-1; 2)$, $(1; -2)$, $(2; 2)$ e per l'origine: sale fino all'ordinata 2, scende fino a -2 e poi risale. Si intuisce che le rette con $|k| < 2$ taglia-

no la curva tre volte, quelle con $|k| > 2$ una volta sola. Il grafico, però, non prova che 2 e −2 siano proprio il valore più alto e il più basso del tratto centrale: lo prova l'algebra.

Quando c'è una radice doppia. Cerchiamo i valori di k per cui $x^3 - 3x - k$ ha una radice doppia α, cioè è uguale a $(x-\alpha)^2\,(x-\beta)$. Sviluppando, $(x-\alpha)^2\,(x-\beta) = x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (\alpha^2+2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta$, e per il principio d'identità: $2\alpha+\beta = 0$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta = -3$, $\alpha^2\beta = k$. Dalla prima $\beta = -2\alpha$; la seconda diventa $-3\alpha^2 = -3$, cioè $\alpha = \pm 1$; la terza dà $k = -2\alpha^3$. Per $\alpha = 1$ si ha $k = -2$ e $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2\,(x+2)$; per $\alpha = -1$ si ha $k = 2$ e $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2\,(x-2)$. Per $|k| = 2$, dunque, le soluzioni reali distinte sono due, una doppia e una semplice.

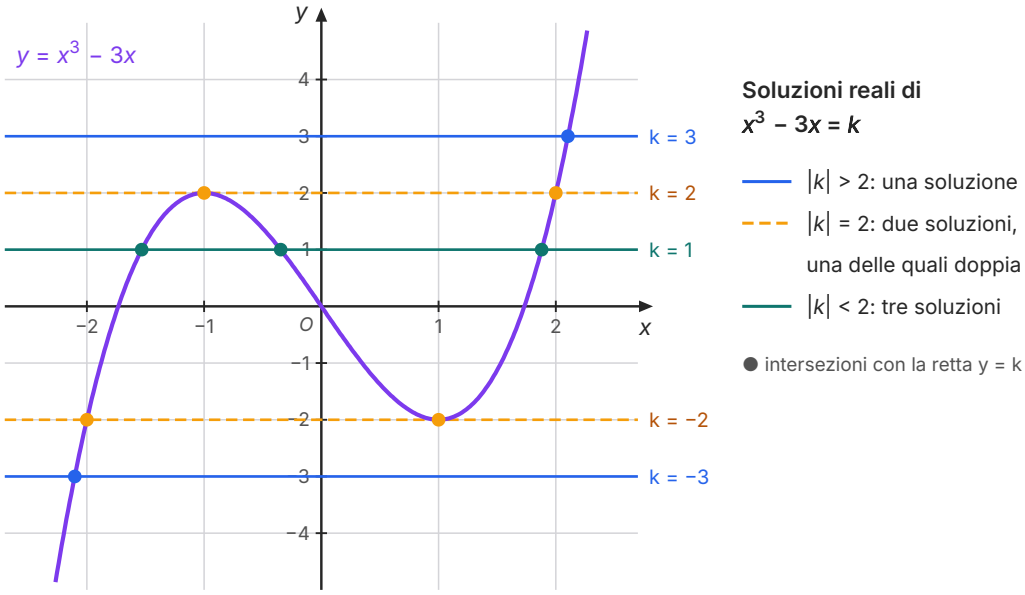


Figura 9.5 Il grafico di $y = x^3 - 3x$ e alcune rette $y = k$. Le rette $y = \pm 3$ (blu) incontrano la curva in un solo punto; le rette $y = \pm 2$ (tratteggiate) sono tangenti alla curva in $(-1; 2)$ e in $(1; -2)$, e la incontrano in un secondo punto, di ascissa 2 o −2; la retta $y = 1$ (verde) la incontra in tre punti. Curva calcolata dall'equazione; le unità sui due assi sono diverse.

Quando $k > 2$. Scriviamo $x^3 - 3x - k = (x+1)^2\,(x-2) - (k-2)$. Per $x \le 2$ il prodotto $(x+1)^2\,(x-2)$ è minore o uguale a zero, mentre $k - 2 > 0$: nessuna soluzione. Per $x > 2$ i fattori $(x+1)^2$ e $x-2$ sono positivi e crescono al crescere di x, quindi il loro prodotto è crescente, parte da 0 e supera qualsiasi numero: assume il valore $k-2$ una e una sola volta. C'è una sola soluzione reale (e quindi due complesse coniugate). Il caso $k < -2$ è simmetrico: se x è soluzione dell'equazione con k, allora $-x$ è soluzione dell'equazione con $-k$, perché $(-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x)$.

Quando $|k| < 2$. Calcoliamo $p(x) = x^3 - 3x - k$ in quattro punti: $p(-2) = -2 - k < 0$, $p(-1) = 2 - k > 0$, $p(1) = -2 - k < 0$, $p(2) = 2 - k > 0$. Il polinomio cambia segno in ciascuno degli in-

tervalli $]-2;-1[$, $]-1;1[$, $]1;2[$, e il suo grafico, che non ha salti, attraversa l'asse x in ognuno di essi: tre soluzioni reali distinte, e non possono essercene di più.

Tabella 9.1 Il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 3x = k$ al variare di k.

Valori di k	Soluzioni reali distinte	Struttura delle radici in $\mathbb{C}$
$k < -2$ oppure $k > 2$	1	una reale semplice e due complesse coniugate
$k = -2$ oppure $k = 2$	2	una reale doppia e una reale semplice
$-2 < k < 2$	3	tre reali semplici

DA RICORDARE

La frontiera tra «tre soluzioni» e «una soluzione» è formata dai valori del parametro per cui c'è una radice multipla. Si può verificare che il discriminante del polinomio di terzo grado $x^3 - 3x - k$ è $108 - 27k^2 = 27(4 - k^2)$: positivo per $|k| < 2$, nullo per $|k| = 2$, negativo per $|k| > 2$, proprio come il discriminante di secondo grado separa due soluzioni reali, una doppia e nessuna. Nella formula di Cardano compare invece la quantità $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{k^2}{4} - 1$, negativa proprio quando le soluzioni reali sono tre: il «caso irriducibile» che costrinse Bombelli a usare i numeri complessi.

9.6.3 Separare le radici

Quando un polinomio non ha radici razionali e nessuna formula pratica lo risolve, si possono comunque *localizzare* le sue soluzioni reali. L'idea è quella appena usata: se $p(a)$ e $p(b)$ hanno segni opposti, il grafico di $y = p(x)$, che non ha salti, attraversa l'asse x in almeno un punto tra a e b. Un intervallo $[a; b]$ che contiene una e una sola soluzione è, come nel capitolo 3, un *intervallo di separazione* di quella soluzione.

Prendiamo l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$. I candidati razionali sono ± 1 e ± 5, e nessuno è una soluzione: $p(1) = -6$, $p(-1) = -4$, $p(5) = 110$, $p(-5) = -120$. Calcoliamo $p(x)$ negli interi da -2 a 3:

$$p(-2) = -9, \quad p(-1) = -4, \quad p(0) = -5, \quad p(1) = -6, \quad p(2) = -1, \quad p(3) = 16.$$

C'è un solo cambiamento di segno, tra 2 e 3: in $]2; 3[$ c'è una soluzione x_0. Ci sono altre soluzioni reali? Dividiamo con la regola di Ruffini per $x - x_0$, tenendo conto che $x_0^3 - 2x_0 - 5 = 0$: si ottiene $p(x) = (x - x_0)(x^2 + x_0\, x + x_0^2 - 2)$. Il trinomio ha discriminante $x_0^2 - 4(x_0^2 - 2) = 8 - 3x_0^2$, negativo perché $x_0 > 2$ implica $x_0^2 > 4$. Le altre due soluzioni sono quindi complesse coniugate, e l'equazione ha una sola soluzione reale, nell'intervallo $]2; 3[$ (Figura 9.6).

APPROFONDIMENTO · LA REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO

René Descartes (Cartesio) enunciò nella *Géométrie* una regola per stimare il numero delle soluzioni positive. Si scrivono i coefficienti non nulli del polinomio in ordine di grado decrescente e si conta quante volte due coefficienti consecutivi hanno segni opposti (le *variazioni* di segno). **Regola:** il numero delle radici reali positive, contate con molteplicità, è uguale al numero delle variazioni oppure è minore di esso di un numero pari. Applicata a $p(-x)$, la regola stima allo stesso modo le radici negative.

Per $x^3 - 2x - 5$ i segni sono +, −, −: una variazione, quindi esattamente una radice positiva. Per $p(-x) = -x^3 + 2x - 5$ i segni sono −, +, −: due variazioni, quindi due radici negative oppure nessuna (sappiamo che sono zero). La regola non si dimostra in questo corso.

9.6.4 Il metodo di bisezione

Per approssimare la soluzione di $x^3 - 2x - 5 = 0$ usiamo il metodo di bisezione del capitolo 3: a ogni passo si calcola p nel punto medio m dell'intervallo di separazione e si tiene la metà agli estremi della quale p ha segni opposti. Poiché $p(2) < 0$ e $p(3) > 0$, si tiene $[m; b]$ se $p(m) < 0$ e $[a; m]$ se $p(m) > 0$. La Tabella 9.2 riporta i primi dieci passi.

Tabella 9.2 Bisezione per $x^3 - 2x - 5 = 0$ a partire da $[2; 3]$. I valori di $p(m)$ sono arrotondati a quattro cifre decimali.

Passo	a	b	punto medio m	$p(m)$
1	2	3	2,5	+5,6250
2	2	2,5	2,25	+1,8906
3	2	2,25	2,125	+0,3457
4	2	2,125	2,0625	−0,3513
5	2,0625	2,125	2,09375	−0,0089
6	2,09375	2,125	2,109375	+0,1668
7	2,09375	2,109375	2,1015625	+0,0786
8	2,09375	2,1015625	2,0976563	+0,0347
9	2,09375	2,0976563	2,0957031	+0,0129
10	2,09375	2,0957031	2,0947266	+0,0020

Dopo n passi l'intervallo è lungo $\frac{1}{2^n}$; dopo dieci passi la soluzione sta in [2,09375; 2,0947266], un intervallo di ampiezza $\frac{1}{1024}$, e il suo punto medio 2,0942 la approssima con un errore minore di $\frac{1}{2048} < 0{,}0005$. Proseguendo si trova

$$x \approx 2{,}0946.$$

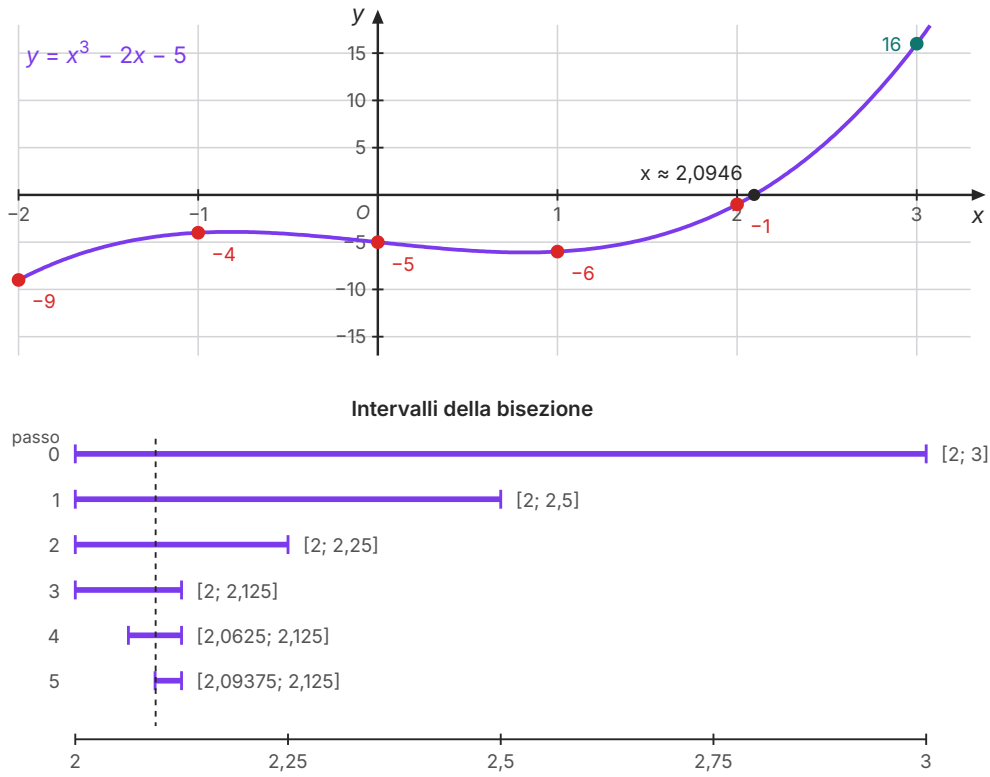


Figura 9.6 In alto, il grafico di $y = x^3 - 2x - 5$ con i valori del polinomio negli interi da −2 a 3: l'unico cambiamento di segno è tra 2 e 3, dove il grafico attraversa l'asse x in $x \approx 2{,}0946$. In basso, gli intervalli dei primi cinque passi della bisezione a partire da [2; 3] (passo 0): ciascuno è la metà del precedente e contiene sempre la soluzione (linea tratteggiata). Grafico calcolato dall'equazione.

Il metodo di bisezione è lento, perché guadagna una cifra decimale ogni tre o quattro passi ($2^{10} = 1024$), ma ha un pregio decisivo: funziona sempre, purché si parta da un intervallo agli estremi del quale il polinomio ha segni opposti, e a ogni passo si conosce esattamente il massimo errore commesso. Si programma facilmente con un foglio di calcolo (esercizio 31).

COLLEGAMENTI · ECONOMIA: IL TASSO DI RENDIMENTO

Un investimento costa 100 euro oggi e restituisce 50 euro tra un anno e 60 euro tra due anni (dati inventati). Il suo tasso di rendimento è il tasso annuo r per cui il valore attuale dei rimborsi è uguale alla spesa: $\frac{50}{1+r} + \frac{60}{(1+r)^2} = 100$. Con $x = \frac{1}{1+r}$ si ottiene l'equazione polinomiale $60x^2 + 50x - 100 = 0$, cioè $6x^2 + 5x - 10 = 0$, che ha una sola soluzione positiva, $x = \frac{-5+\sqrt{265}}{12} \approx 0{,}93990$; quindi $r = \frac{1}{x} - 1 \approx 0{,}0639$, cioè circa il 6,4% annuo.

Con n anni di rimborsi l'equazione ha grado n: i fogli di calcolo la risolvono con metodi numerici simili alla bisezione. Quando tutti i rimborsi sono positivi la soluzione positiva è unica (esercizio 28).

SINTESI

- Un numero α è radice del polinomio $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$; per il teorema di Ruffini ciò accade se e solo se $p(x)$ è divisibile per $x - \alpha$.
- α è radice di molteplicità m se $p(x) = (x - \alpha)^m \, q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$. Nelle radici reali di molteplicità dispari il grafico attraversa l'asse x, in quelle di molteplicità pari lo tocca.
- Un polinomio di grado $n \geq 1$ ha al più n radici, anche contate con molteplicità, in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. Ne segue il principio d'identità: due polinomi di grado al più n che coincidono per più di n valori hanno gli stessi coefficienti.
- Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Quindi si scompone in n fattori di primo grado e ha esattamente n radici contate con molteplicità.
- Se un polinomio ha coefficienti reali, le sue radici non reali si presentano a coppie di coniugati con la stessa molteplicità. Il teorema è falso per coefficienti non reali.
- In $\mathbb{R}$ ogni polinomio si scompone in fattori di primo grado e fattori di secondo grado con discriminante negativo, irriducibili.
- Il numero delle radici reali di un polinomio reale di grado n, contate con molteplicità, ha la parità di n: un'equazione reale di grado dispari ha almeno una soluzione reale.
- Formule di Viète per il terzo grado: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$, $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$; valgono anche con radici complesse.
- Se $\frac{p}{q}$ ridotta è radice di un polinomio a coefficienti interi, p divide il termine noto e q il coefficiente direttivo.
- Le equazioni trinomie e biquadratiche si risolvono con $t = x^n$; le reciproche di quarto grado con $y = x + \frac{1}{x}$, e quelle di terzo grado hanno la soluzione -1.
- Il numero delle soluzioni reali si studia con i grafici, con i cambiamenti di segno e con il principio d'identità: $x^3 - 3x = k$ ha tre soluzioni reali per $|k| < 2$, due per $|k| = 2$, una per $|k| > 2$.
- Un cambiamento di segno di $p(x)$ in $[a; b]$ segnala una soluzione nell'intervallo; il metodo di bisezione la approssima dimezzando l'intervallo a ogni passo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un polinomio di grado 5 a coefficienti reali ha in $\mathbb{C}$, contando ciascuna radice con la sua molteplicità,
   - **A.** esattamente 5 radici, tutte reali
   - **B.** al più 5 radici, tutte reali
   - **C.** esattamente 5 radici, di cui almeno una reale
   - **D.** almeno 6 radici

2. ● Nel polinomio $p(x) = (x-2)^3\,(x+1)$ il numero 2 è una radice di molteplicità
   - **A.** 3
   - **B.** 1
   - **C.** 4
   - **D.** 2

3. ● Il numero $2 - 3i$ è radice di un polinomio a coefficienti reali. Allora è certamente radice anche
   - **A.** $-2 + 3i$
   - **B.** $2 + 3i$
   - **C.** $-2 - 3i$
   - **D.** $3 - 2i$

4. ●● Le possibili radici razionali di $3x^3 - x + 2$ sono
   - **A.** $\pm 1, \pm 2, \pm 3$
   - **B.** $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$
   - **C.** soltanto $\pm \frac{1}{3}$ e $\pm \frac{2}{3}$
   - **D.** $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$

5. ●● Le soluzioni dell'equazione $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ hanno
   - **A.** somma 2 e prodotto -6
   - **B.** somma -2 e prodotto -6
   - **C.** somma -2 e prodotto 6
   - **D.** somma 2 e prodotto 6

6. ●● Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 3x = 1$?
   - **A.** una
   - **B.** tre
   - **C.** due
   - **D.** nessuna

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Un polinomio di grado 4 a coefficienti reali può avere esattamente tre radici reali distinte. b) Un'equazione di terzo grado a coefficienti reali può non avere soluzioni reali. c) Un polinomio di grado al più 3 che si annulla per quattro valori distinti di x è il polinomio nullo. d) Le radici del polinomio $z^2 - iz$ sono coniugate.

8. ● Completa. Il numero α è radice di molteplicità m del polinomio $p(x)$ se $p(x)$ è divisibile per _____ ma non per _____. Per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado $n \geq 1$ ha in $\mathbb{C}$ esattamente _____ radici, se ciascuna è contata _____. Se i coefficienti sono reali, le radici non reali si presentano a coppie di numeri _____.

9. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) L'equazione $x^4 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{C}$. b) Ogni polinomio a coefficienti reali di grado 6 si scompone in $\mathbb{R}$ in fattori di primo e di secondo grado. c) Se la frazione ridotta $\frac{p}{q}$ è radice di $2x^3 + x^2 - 5x + 3$, allora p divide 2 e q divide 3. d) Un polinomio reale di grado 5 che ha soltanto tre radici reali, tutte semplici, ha anche due radici complesse coniugate.

Calcolare

10. ● Trova le radici e le loro molteplicità. a) $x^3 (x - 1)^2 (x + 4)$; b) $(x^2 - 4)^2 (x + 2)$; c) $x^4 - 2x^2 + 1$.

11. ● Trova le radici razionali e scomponi in fattori: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

12. ●● Risolvi l'equazione $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$.

13. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$ e scomponi il polinomio in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$: a) $x^3 + 8 = 0$; b) $x^4 - 16 = 0$.

14. ●● Verifica che $2 + i$ è soluzione dell'equazione $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ e trova le altre soluzioni.

15. ●● Sapendo che $1 - i$ è soluzione di $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$, trova tutte le soluzioni.

16. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$: a) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

17. ●● Risolvi le equazioni reciproche: a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

18. ●● Scrivi un'equazione di terzo grado a coefficienti interi che abbia le soluzioni indicate. a) 1, −2, 4; b) 2, 1 + i, 1 − i.

19. ●● Siano x_1, x_2, x_3 le soluzioni di $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Senza risolvere l'equazione, calcola a) $x_1 + x_2 + x_3$; b) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$; c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Controlla poi i risultati con le soluzioni −1, 2, 3 trovate all'inizio del capitolo.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che, se z è un numero complesso non reale, il polinomio $(x - z)(x - \bar{z})$ ha coefficienti reali e discriminante negativo.

21. ●● Trova l'errore. «L'equazione $x^3 - 2x^2 + x = 0$ ha grado 3, quindi ha tre soluzioni reali distinte: $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.»

22. ●● Dimostra con il principio d'identità che, se un polinomio $p(x)$ soddisfa $p(-x) = p(x)$ per ogni x reale, i coefficienti delle potenze dispari di x sono tutti nulli.

23. ●●● Usa il teorema delle radici razionali per dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{6}$ sono irrazionali.

24. ●● Spiega perché un'equazione di quarto grado a coefficienti reali non può avere una sola soluzione reale, semplice. Può avere una sola soluzione reale distinta?

25. ●●● Dimostra che, se α è soluzione dell'equazione reciproca $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (con $a \neq 0$), allora $\alpha \neq 0$ e anche $\dfrac{1}{\alpha}$ è soluzione.

Problemi

26. ●● Un parallelepipedo a base quadrata ha l'altezza che supera di 2 cm il lato di base, e il volume di 45 cm^3. Trova il lato di base e spiega perché il problema ha una sola soluzione.

27. ●● Da un cartoncino rettangolare di 20 cm per 12 cm si ritagliano ai quattro angoli quattro quadrati di lato x e si piegano i bordi per formare una scatola senza coperchio. Per quali valori di x il volume della scatola è 192 cm^3?

28. ●● Economia (dati inventati). Un investimento costa 1000 euro e restituisce 300 euro dopo un anno, 400 dopo due e 500 dopo tre. a) Posto $x = \dfrac{1}{1+r}$, mostra che il tasso di rendimento r soddisfa $5x^3 + 4x^2 + 3x - 10 = 0$. b) Spiega perché questa equazione ha una sola soluzione positiva. c) Verifica che la soluzione sta tra 0,9 e 0,95 e, con alcuni passi di bisezione, stima r al punto percentuale.

29. ●●● Un serbatoio sferico di raggio 3 m contiene un liquido che raggiunge l'altezza h dal fondo. Il volume del liquido è $V = \pi h^2 \left(3 - \dfrac{h}{3}\right)$ (formula del segmento sferico, che studierai nel capitolo 12). a) Mostra che il serbatoio è pieno per un quarto quando $h^3 - 9h^2 + 27 = 0$. b) Separa le soluzioni reali dell'equazione con i cambiamenti di segno negli interi da -2 a 9 e spiega quale è accettabile. c) Approssimala al centimetro.

30. ●● Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è 210. Trova i numeri e dimostra che non ci sono altre soluzioni, neppure tra i numeri reali.

Con il computer

31. ●● Con un foglio di calcolo, applica il metodo di bisezione all'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ nell'intervallo $[0; 1]$. Organizza le colonne come nella Tabella 9.2 (passo, a, b, punto medio, valore del polinomio nel punto medio) e scrivi le formule in modo che ogni riga calcoli il nuovo intervallo dalla precedente. Dopo quanti passi l'errore è sicuramente minore di 0,001? Qual è l'approssimazione ottenuta? Spiega poi perché l'equazione ha una sola soluzione reale.

Verso la verifica

32. ●● Considera il polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$. a) Verifica che $2i$ è una sua radice. b) Trova tutte le radici e scomponi $p(x)$ in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. c) Controlla che la somma delle radici è uguale all'opposto del coefficiente di x^3 e rappresenta le radici nel piano di Gauss.

33. ●● Discuti, al variare del parametro reale k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 12x = k$, e risolvila per $k = 16$.

34. ●●● Sfida. a) Determina i numeri reali a e b per i quali $1 + 2i$ è radice di $x^3 + ax^2 + bx + 10$, e trova le altre radici. b) Esistono a e b reali per cui lo stesso polinomio ha come radici sia $1 + 2i$ sia $3i$? Motiva la risposta.

PER APPROFONDIRE

- NAH — la storia delle equazioni di terzo grado, da Cardano e Bombelli fino al teorema fondamentale dell'algebra.
- CR — il capitolo sui numeri complessi presenta il teorema fondamentale dell'algebra e ne discute una dimostrazione.
- BOY — per Tartaglia, Cardano, Ferrari, Ruffini, Abel e la dissertazione di Gauss del 1799.
- NEE — le radici dei polinomi nel piano di Gauss e il loro significato geometrico.

Glossario del capitolo

Algebricamente chiuso
Si dice di un campo in cui ogni polinomio di grado $n \geq 1$ ha almeno una radice; per il teorema fondamentale dell'algebra, $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, $\mathbb{R}$ no.

Coefficiente direttivo
Il coefficiente $a_n \neq 0$ del termine di grado massimo di un polinomio di grado n.

Equazione biquadratica
Equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$; con $t = x^2$ diventa di secondo grado.

Equazione reciproca
Equazione $p(x) = 0$ in cui i coefficienti di $p(x)$ sono gli stessi letti nei due versi; se α è soluzione, lo è anche $\frac{1}{\alpha}$.

Equazione trinomia
Equazione $ax^{2n} + bx^n + c = 0$; con $t = x^n$ si riconduce a un'equazione di secondo grado e a due equazioni binomie.

Formule di Viète
Relazioni tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici: per $ax^3 + bx^2 + cx + d$, somma $-\frac{b}{a}$, somma dei prodotti a due a due $\frac{c}{a}$, prodotto $-\frac{d}{a}$.

Molteplicità di una radice
Il numero m tale che $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$ ma non per $(x - \alpha)^{m+1}$.

Polinomio irriducibile in $\mathbb{R}$
Polinomio a coefficienti reali che non si scompone nel prodotto di polinomi reali di grado minore; in $\mathbb{R}$ sono irriducibili i polinomi di primo grado e quelli di secondo grado con discriminante negativo.

Polinomio monico
Polinomio con coefficiente direttivo uguale a 1.

Polinomio nullo
Il polinomio con tutti i coefficienti nulli; vale 0 per ogni x e non ha grado.

Principio d'identità dei polinomi
Due polinomi di grado al più n che coincidono per più di n valori della variabile hanno gli stessi coefficienti.

Radice di un polinomio
Numero α tale che $p(\alpha) = 0$; per il teorema di Ruffini, $p(x)$ è allora divisibile per $x - \alpha$.

Radice multipla
Radice di molteplicità maggiore di 1 (doppia, tripla, ...).

Radice semplice
Radice di molteplicità 1.

Radici coniugate, teorema delle
Se un polinomio ha coefficienti reali, il coniugato di una sua radice è ancora una radice, con la stessa molteplicità.

Radici razionali, teorema delle
Se la frazione ridotta $\frac{p}{q}$ è radice di un polinomio a coefficienti interi, p divide il termine noto e q il coefficiente direttivo.

Teorema fondamentale dell'algebra
Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ha almeno una radice in $\mathbb{C}$; quindi ne ha esattamente n, contate con molteplicità.

Soluzioni

1. C. Per il teorema fondamentale le radici contate con molteplicità sono esattamente 5; le non reali vengono a coppie, quindi le reali sono 5, 3 o 1: almeno una.

2. A. $p(x)$ è divisibile per $(x-2)^3$ e il quoziente $x+1$ non si annulla per $x=2$.

3. B. Il coniugato di $2-3\mathrm{i}$ è $2+3\mathrm{i}$.

4. D. Il numeratore divide il termine noto 2 ($\pm1, \pm2$), il denominatore divide il coefficiente direttivo 3 (1 o 3).

5. C. Per le formule di Viète la somma è $-\frac{2}{1} = -2$ e il prodotto è $-\frac{-6}{1} = 6$. Infatti le soluzioni sono -3, -1, 2.

6. B. Il parametro $k=1$ soddisfa $|k|<2$ (Tabella 9.1): tre soluzioni reali distinte.

7. a) V: per esempio $(x-1)^2(x-2)(x-3)$, con una radice doppia; contate con molteplicità le radici reali sono 4, numero pari. b) F: un'equazione reale di grado dispari ha almeno una soluzione reale. c) V: è il teorema «al più n radici» applicato con $n=3$. d) F: le radici sono 0 e i; il teorema delle radici coniugate richiede coefficienti reali.

8. $(x-\alpha)^m$; $(x-\alpha)^{m+1}$; n; tante volte quanto è la sua molteplicità; complessi coniugati (con la stessa molteplicità).

9. a) F: ha quattro soluzioni complesse, le radici quarte di -1. b) V. c) F: è il contrario, p divide il termine noto 3 e q divide il coefficiente direttivo 2. d) V: contate con molteplicità le radici sono 5; le radici reali sono soltanto le tre date, semplici, quindi le due restanti non sono reali e formano una coppia di numeri coniugati.

10. a) 0 tripla, 1 doppia, -4 semplice (grado $6=3+2+1$). b) $(x-2)^2(x+2)^3$: 2 doppia, -2 tripla. c) $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$: 1 e -1 doppie.

11. Candidati $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. $p(1)=0$; con la regola di Ruffini $p(x) = (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x+2)$. Radici 1, 3, -2.

12. Candidati $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$. $p(2) = 16+4-26+6 = 0$; $p(x) = (x-2)(2x^2+5x-3) = (x-2)(2x-1)(x+3)$. Soluzioni 2, $\frac{1}{2}$, -3.

13. a) $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$; soluzioni -2, $1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. In $\mathbb{C}$: $(x+2)(x-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})(x-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$. b) $x^4-16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ in $\mathbb{R}$, $(x-2)(x+2)(x-2\mathrm{i})(x+2\mathrm{i})$ in $\mathbb{C}$; soluzioni $\pm2, \pm2\mathrm{i}$.

14. $(2+\mathrm{i})^2 = 3+4\mathrm{i}$, $(2+\mathrm{i})^3 = 2+11\mathrm{i}$; $(2+11\mathrm{i}) - 5(3+4\mathrm{i}) + 9(2+\mathrm{i}) - 5 = 0$. Anche $2-\mathrm{i}$ è soluzione; $(x-2-\mathrm{i})(x-2+\mathrm{i}) = x^2-4x+5$ e $x^3-5x^2+9x-5 = (x^2-4x+5)(x-1)$. Soluzioni $2\pm\mathrm{i}$ e 1.

15. Anche $1+\mathrm{i}$ è soluzione; $(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i}) = x^2-2x+2$, e dividendo $x^4-2x^3+3x^2-2x+2 = (x^2-2x+2)(x^2+1)$. Soluzioni $1\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$.

16. a) $t=x^2$: $t^2+5t+4=0$, $t=-1$ o $t=-4$; $x=\pm\mathrm{i}, \pm2\mathrm{i}$. b) $t=x^3$: $t^2-7t-8=0$, $t=8$ o $t=-1$. Da $x^3=8$: 2, $-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$; da $x^3=-1$: -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$. Sei soluzioni, due reali.

17. a) -1 è soluzione; $(x+1)(x^2-4x+1)=0$; soluzioni -1, $2\pm\sqrt{3}$ (l'una inversa dell'altra: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$). b) Dividendo per x^2 e ponendo $y = x+\frac{1}{x}$: $y^2-3y+2=0$, $y=1$ o $y=2$. $y=2$: $x^2-2x+1=0$, $x=1$ doppia; $y=1$: $x^2-x+1=0$, $x = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$.

18. a) $s_1=3$, $s_2=-2+4-8=-6$, $s_3=-8$: $x^3-3x^2-6x+8=0$. b) $s_1=4$, $s_2 = 2(1+\mathrm{i})+2(1-\mathrm{i})+2 = 6$, $s_3=4$: $x^3-4x^2+6x-4=0$.

19. $s_1=4$, $s_2=1$, $s_3=-6$. a) 4. b) $s_1^2-2s_2 = 16-2 = 14$. c) $\frac{s_2}{s_3} = -\frac{1}{6}$. Con le soluzioni -1, 2, 3: 4;

$1 + 4 + 9 = 14$; $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

20. Sviluppando, $x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2(\text{Re } z)x + |z|^2$: coefficienti reali. Il discriminante è $4(\text{Re } z)^2 - 4|z|^2 = -4(\text{Im } z)^2$, negativo perché Im $z \neq 0$.

21. $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$: le soluzioni sono 0 (semplice) e 1 (doppia), tre contate con molteplicità ma due distinte. −1 non è soluzione: $-1 - 2 - 1 = -4$. Il grado dà il numero delle radici complesse contate con molteplicità, non quello delle soluzioni reali distinte.

22. Se $p(x) = \Sigma\, a_k\, x^k$, allora $p(-x) = \Sigma\, (-1)^k\, a_k\, x^k$. I due polinomi coincidono per infiniti valori, quindi hanno gli stessi coefficienti: $(-1)^k\, a_k = a_k$, e per k dispari $-a_k = a_k$, cioè $a_k = 0$.

23. $\sqrt[3]{2}$ è radice di $x^3 - 2$, monico a coefficienti interi: le radici razionali sarebbero intere e divisori di 2, cioè ±1, ±2, ma i loro cubi sono ±1, ±8. Quindi $x^3 - 2$ non ha radici razionali e $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale. Allo stesso modo $\sqrt{6}$ è radice di $x^2 - 6$, e nessuno dei divisori ±1, ±2, ±3, ±6 ha quadrato 6.

24. Le radici non reali, contate con molteplicità, sono in numero pari; se la sola radice reale fosse semplice, le non reali sarebbero 3, numero dispari: impossibile. Una sola soluzione reale distinta è invece possibile se ha molteplicità pari: per esempio $(x-1)^2\,(x^2+1)$ (radice doppia) oppure $(x-1)^4$.

25. $\alpha \neq 0$ perché $p(0) = a \neq 0$. Dividendo $a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ per α^4 si ottiene $a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha^3} + \frac{a}{\alpha^4} = 0$, che riordinata è $a(\frac{1}{\alpha})^4 + b(\frac{1}{\alpha})^3 + c(\frac{1}{\alpha})^2 + b\,\frac{1}{\alpha} + a = 0$, cioè $p(\frac{1}{\alpha}) = 0$.

26. Con x il lato: $x^2\,(x+2) = 45$, cioè $x^3 + 2x^2 - 45 = 0$. Candidati interi divisori di 45: $x = 3$ è soluzione $(27 + 18 = 45)$. $x^3 + 2x^2 - 45 = (x-3)(x^2 + 5x + 15)$ e il trinomio ha $\Delta = 25 - 60 < 0$: nessun'altra soluzione reale. Lato 3 cm, altezza 5 cm.

27. $V = x(20 - 2x)(12 - 2x)$ con $0 < x < 6$. $V = 192$ dà $4x^3 - 64x^2 + 240x - 192 = 0$, cioè $x^3 - 16x^2 + 60x - 48 = 0$. $x = 4$ è soluzione $(64 - 256 + 240 - 48 = 0)$; il quoziente $x^2 - 12x + 12$ ha soluzioni $6 \pm 2\sqrt{6}$. È accettabile $6 - 2\sqrt{6} \approx 1{,}10$, non $6 + 2\sqrt{6} \approx 10{,}90$. Due scatole: $x = 4$ cm oppure $x \approx 1{,}10$ cm.

28. a) $300x + 400x^2 + 500x^3 = 1000$, e si divide per 100. b) Per $x > 0$ il primo membro è somma di termini crescenti, quindi è crescente: assume il valore 0 al più una volta (anche la regola di Cartesio dà una sola variazione di segno). Lo assume davvero, perché $p(0) = -10 < 0$ e $p(1) = 2 > 0$. c) $p(0{,}9) = -0{,}415 < 0$, $p(0{,}95) \approx 0{,}747 > 0$. Bisezione: $p(0{,}925) \approx 0{,}155 > 0$, $p(0{,}9125) \approx -0{,}133 < 0$, $p(0{,}91875) \approx 0{,}010 > 0$, quindi $0{,}9125 < x < 0{,}91875$ e $r = \frac{1}{x} - 1$ è tra 8,8% e 9,6%: circa 9%. (Il valore preciso è $x \approx 0{,}91830$, $r \approx 8{,}9\%$.)

29. a) Il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$; un quarto è 9π. $\pi\, h^2\,(3 - \frac{h}{3}) = 9\pi$ dà $9h^2 - h^3 = 27$. b) Valori: $p(-2) = -17$, $p(-1) = 17$, $p(1) = 19$, $p(2) = -1$, $p(8) = -37$, $p(9) = 27$. Tre soluzioni reali, in $]-2;-1[$, $]1;2[$, $]8;9[$; deve essere $0 \le h \le 6$, quindi è accettabile solo quella in $]1;2[$. c) Per bisezione $h \approx 1{,}958$ m, cioè circa 1,96 m.

30. $n(n+1)(n+2) = 210$, cioè $n^3 + 3n^2 + 2n - 210 = 0$. $n = 5$: $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$. Il quoziente $n^2 + 8n + 42$ ha $\Delta = 64 - 168 < 0$: nessun'altra soluzione reale. I numeri sono 5, 6, 7.

31. Se nella riga 2 ci sono a in B2 e b in C2, il punto medio è =(B2+C2)/2 in D2 e il valore =D2^3+D2−1 in E2; nella riga 3, a è =SE(E2<0;D2;B2) e b è =SE(E2<0;C2;D2). L'errore del punto medio dopo n passi è al più $\frac{1}{2^{n+1}}$, minore di 0,001 per $n \ge 9$. Dopo 9 passi l'intervallo è [0,6816406; 0,6835938], il punto medio 0,6826 (la soluzione è $x \approx 0{,}6823$). La soluzione reale è unica perché $x^3 + x - 1$ è crescente (somma di funzioni crescenti).

32. a) $(2i)^4 = 16$, $(2i)^3 = -8i$, $(2i)^2 = -4$: $16 + 16i - 24 - 16i + 8 = 0$. b) Anche $-2i$ è radice; $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$ e $p(x) = (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$. Radici $\pm 2i$, $1 \pm i$. In $\mathbb{C}$: $(x - 2i)(x + 2i)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$. c) Somma $2i - 2i + (1 + i) + (1 - i) = 2$, opposto di -2. I quattro punti sono simmetrici rispetto all'asse reale.

33. Radice doppia: $x^3 - 12x - k = (x - \alpha)^2 (x + 2\alpha)$ con $-3\alpha^2 = -12$, $\alpha = \pm 2$, $k = -2\alpha^3 = \mp 16$. Tre soluzioni per $|k| < 16$, due (una doppia) per $|k| = 16$, una per $|k| > 16$, come nel caso $x^3 - 3x = k$. Infatti, posto $p(x) = x^3 - 12x - k$, per $|k| < 16$ si ha $p(-4) = -16 - k < 0$, $p(-2) = 16 - k > 0$, $p(2) = -16 - k < 0$, $p(4) = 16 - k > 0$: tre cambiamenti di segno. Per $k > 16$, $p(x) = (x + 2)^2 (x - 4) - (k - 16)$, e come nel testo il prodotto è ≤ 0 per $x \leq 4$ e crescente per $x > 4$: una sola soluzione; il caso $k < -16$ è simmetrico. Per $k = 16$: $x^3 - 12x - 16 = (x + 2)^2 (x - 4)$, soluzioni -2 (doppia) e 4.

34. a) Con coefficienti reali anche $1 - 2i$ è radice, quindi il polinomio è $(x^2 - 2x + 5)(x + c)$; il termine noto dà $5c = 10$, $c = 2$. Sviluppando, $x^3 + 0\,x^2 + x + 10$: $a = 0$, $b = 1$, radici $1 \pm 2i$ e -2. b) No: con coefficienti reali sarebbero radici anche $1 - 2i$ e $-3i$, quattro radici distinte per un polinomio di grado 3, contro il teorema «al più n radici».