CAPITOLO

8

Forma trigonometrica, radici e trasformazioni del piano

Moltiplicare per i è fare un quarto di giro: nei numeri complessi l'algebra si muove, e il piano si muove con lei. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Scrivere un numero complesso in forma trigonometrica, determinandone modulo e argomento con il controllo del quadrante, e tornare alla forma algebrica.
2. Moltiplicare e dividere numeri complessi in forma trigonometrica e interpretare il prodotto come rotazione composta con un'omotetia.
3. Dimostrare per induzione la formula di De Moivre e usarla per calcolare potenze e ricavare formule goniometriche.
4. Calcolare le n radici n-esime di un numero complesso, riconoscerle come vertici di un poligono regolare e risolvere equazioni binomie.
5. Descrivere traslazioni, rotazioni, omotetie, simmetrie e similitudini come funzioni complesse, trovarne il centro, comporle e invertirle.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 La forma trigonometrica 2

8.2 Prodotto e quoziente in forma trigonometrica 5

8.3 Le potenze: la formula di De Moivre 10

8.4 Le radici n-esime di un numero complesso 13

8.5 Le trasformazioni del piano come funzioni complesse 17

Matematica 4 · Parte III · Numeri complessi ed equazioni polinomiali · versione 1.0
Capitolo 8: Forma trigonometrica, radici e trasformazioni del piano · pagine 223–248 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente abbiamo imparato a fare i conti con i numeri complessi nella forma algebrica $a + bi$ e a vederli come punti, o come vettori, del piano di Gauss. Con la forma algebrica le somme sono facilissime, perché si sommano le parti reali e le parti immaginarie; i prodotti invece richiedono di sviluppare e di ricordare che $i^2 = -1$, e le potenze alte diventano presto un incubo. Proviamo a calcolare $(1 + i)^{10}$ moltiplicando dieci volte: si arriva al risultato, ma con fatica e con molte occasioni di errore.

In questo capitolo descriviamo lo stesso punto del piano in un altro modo: invece di dire «quanto è a destra e quanto è in alto», diciamo *quanto è lontano dall'origine* e *in quale direzione si trova*. È lo stesso cambio di punto di vista che usa un radar, che localizza un aereo con una distanza e un angolo. Con questa descrizione, la *forma trigonometrica*, il prodotto di due numeri complessi diventa una regola semplicissima e piena di significato geometrico: moltiplicare vuol dire *ruotare e dilatare*. Da qui seguono in poche righe la formula di De Moivre per le potenze, le radici n-esime, che sono sempre esattamente n e formano un poligono regolare, e un nuovo linguaggio per le trasformazioni del piano che conosciamo dal biennio: traslazioni, rotazioni, omotetie e similitudini diventano semplici funzioni di una variabile complessa.

Useremo le formule di addizione del capitolo 2, il principio di induzione (vedi *Matematica 3*, cap. 4) e il linguaggio delle funzioni composte e inverse (vedi *Matematica 3*, cap. 3).

8.1 La forma trigonometrica

8.1.1 Modulo e argomento

Sia $z = a + bi$ un numero complesso diverso da 0, rappresentato nel piano di Gauss dal punto $P(a; b)$. Come nel capitolo 7, il **modulo** $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la distanza di P dall'origine O. Chiamiamo **argomento** di z ogni angolo orientato θ di cui deve ruotare il semiasse reale positivo, attorno a O, per sovrapporsi alla semiretta OP; come sempre in goniometria, gli angoli positivi sono quelli percorsi in senso antiorario.

Il punto P sta sulla circonferenza di centro O e raggio ρ, e la semiretta OP forma l'angolo θ con il semiasse positivo delle ascisse. Per la definizione stessa di seno e coseno (vedi *Matematica 2*, cap. 12), le sue coordinate sono

$$a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Sostituendo in $z = a + bi$ e raccogliendo ρ otteniamo la **forma trigonometrica** di z:

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \text{con } \rho > 0.$$

Nella Figura 8.1 il numero $z = -\sqrt{3} + i$ ha modulo $\rho = \sqrt{3+1} = 2$ e un suo argomento è $\theta = 5\pi/6$: infatti $2\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}$ e $2\,\mathrm{sen}(5\pi/6) = 1$. Quindi $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6})$.

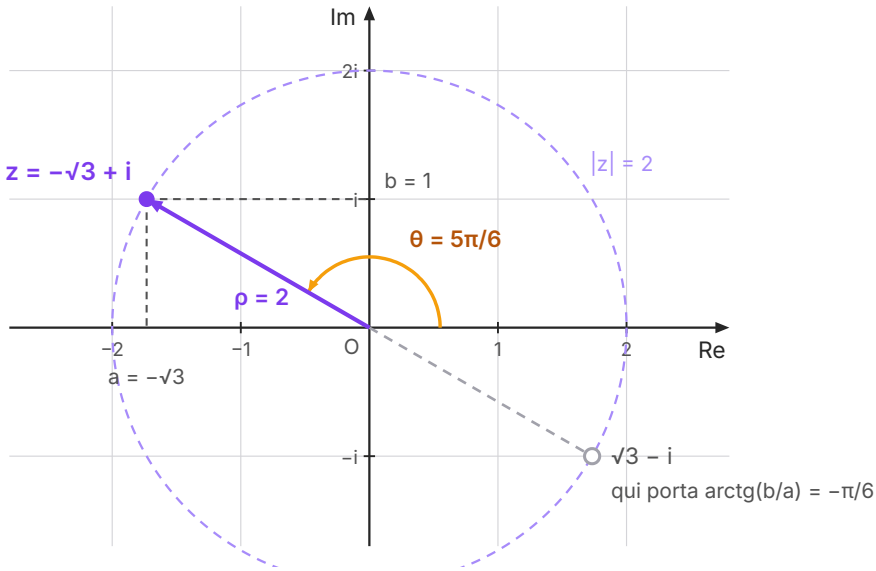


Figura 8.1 Il numero $z = -\sqrt{3} + i$ nel piano di Gauss: il modulo $\rho = 2$ è la distanza dall'origine, l'argomento $\theta = 5\pi/6$ (150°) è l'angolo che il semiasse reale positivo descrive, in senso antiorario, per raggiungere la semiretta Oz. In grigio il punto $\sqrt{3} - i$ a cui si arriverebbe usando $\arctg(b/a) = -\pi/6$ senza controllare il quadrante.

L'argomento non è unico: se θ è un argomento di z, anche $\theta + 2\pi$, $\theta - 2\pi$ e in generale $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, lo sono, perché seno e coseno hanno periodo 2π. Per avere un rappresentante preciso adottiamo in tutto il capitolo questa convenzione: l'**argomento principale** di $z \neq 0$, indicato con $\arg z$, è l'unico argomento che appartiene all'intervallo $]-\pi;\,\pi]$. Così $\arg(-\sqrt{3} + i) = 5\pi/6$, $\arg(-i) = -\pi/2$ e $\arg(-1) = \pi$. Il numero 0 ha modulo 0 ma **non ha argomento**: la semiretta OP non esiste e qualunque θ andrebbe bene, perché $0 \cdot (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$.

IN SINTESI

Ogni numero complesso $z = a + bi \neq 0$ si scrive in **forma trigonometrica** $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, dove

- $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il modulo, sempre positivo;
- θ è un argomento, determinato a meno di multipli di 2π, dalle due condizioni $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho}$;
- l'argomento principale $\arg z$ è quello compreso in $]-\pi;\,\pi]$;
- viceversa, da ρ e θ si torna alla forma algebrica con $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\,\text{sen}\,\theta$.

8.1.2 Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica

Il modulo si calcola subito. Per l'argomento servono *entrambe* le condizioni $\cos\theta = a/\rho$ e $\text{sen}\,\theta = b/\rho$: una sola non basta, perché nell'intervallo $]-\pi;\,\pi]$ ci sono in genere due angoli con lo stesso coseno (opposti tra loro) e due con lo stesso seno (supplementari). Un buon metodo è **disegnare il punto**: il segno di a e di b dice in quale quadrante cade θ, e i valori di $|a|/\rho$ o $|b|/\rho$ danno l'angolo acuto che la semiretta OP forma con l'asse reale.

Spesso si usa anche $\text{tg}\,\theta = b/a$ (con $a \neq 0$), ma con attenzione: la funzione arctg restituisce angoli di $]-\pi/2;\,\pi/2[$, cioè del primo e del quarto quadrante. Se z sta nel secondo o nel terzo quadrante ($a < 0$), il valore $\text{arctg}(b/a)$ indica la direzione *opposta* a quella di z e bisogna correggerlo di π: si somma π se $b \geq 0$ e si sottrae π se $b < 0$, per restare in $]-\pi;\,\pi]$. Se $a = 0$ il numero è immaginario puro e l'argomento è $\pi/2$ o $-\pi/2$ secondo il segno di b.

ESEMPIO SVOLTO

Scriviamo in forma trigonometrica **a)** $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; **b)** $z_2 = -3 - 3i$; **c)** $z_3 = -3 + 4i$.

a) $\rho = \sqrt{1 + 3} = 2$; $\cos\theta = 1/2$, $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{3}/2$. Il punto $(1;\,-\sqrt{3})$ sta nel quarto quadrante e l'angolo acuto con l'asse reale è $\pi/3$, quindi $\theta = -\pi/3$ e $z_1 = 2[\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(-\dfrac{\pi}{3})]$.

b) $\rho = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$; $\cos\theta = \text{sen}\,\theta = -3/(3\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$. Il punto è nel terzo quadrante: $\theta = -3\pi/4$. Si noti che $\text{arctg}(b/a) = \text{arctg}\,1 = \pi/4$ indica il primo quadrante; la correzione dà $\pi/4 - \pi = -3\pi/4$. Quindi $z_2 = 3\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\,\text{sen}(-\dfrac{3\pi}{4})]$.

c) $\rho = \sqrt{9 + 16} = 5$; $\cos\theta = -3/5$, $\text{sen}\,\theta = 4/5$: secondo quadrante, ma l'angolo non è notevole. Con la calcolatrice $\text{arctg}(4/3) \approx 0{,}9273$ è l'angolo acuto con l'asse reale, quindi $\theta = \pi - \text{arctg}\,\dfrac{4}{3} \approx 2{,}2143$ (circa $126{,}87°$) e $z_3 \approx 5(\cos 2{,}2143 + i\,\text{sen}\,2{,}2143)$. Verifica: $5\cos 2{,}2143 \approx -3{,}000$ e $5\,\text{sen}\,2{,}2143 \approx 4{,}000$.

Il passaggio inverso non presenta difficoltà. Per esempio $4(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}) = 4(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 4(\frac{\sqrt{2}}{2})i = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$. Vale la pena memorizzare quattro casi che useremo di continuo: $1 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0$, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$, $-1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi$ e $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{2})$: sono i quattro punti della circonferenza di raggio 1 sugli assi.

8.1.3 Uguaglianza, coniugato e opposto

Due numeri complessi non nulli sono uguali se e solo se corrispondono allo stesso punto, cioè se hanno **lo stesso modulo** e **argomenti che differiscono per un multiplo di** 2π:

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sarà questa la chiave per calcolare le radici. La forma trigonometrica descrive bene anche le simmetrie che abbiamo incontrato nel capitolo 7. Il coniugato $\overline{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale: ha lo stesso modulo e argomento opposto, quindi $\overline{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]$. L'opposto $-z$ è il simmetrico rispetto all'origine: stesso modulo, argomento aumentato di un angolo piatto, $-z = \rho[\cos(\theta + \pi) + i\,\text{sen}(\theta + \pi)]$.

ERRORE FREQUENTE

Calcolare l'argomento con arctg(*b*/*a*) e basta. Per $z = -1 - i$ si ha $\text{tg}\,\theta = 1$, ma $\theta = \pi/4$ è sbagliato: $\pi/4$ indica il punto $1 + i$, opposto a z. Il punto $-1 - i$ sta nel terzo quadrante e $\arg z = -3\pi/4$. Disegnare sempre il punto prima di scegliere l'angolo.

Scritture che sembrano forme trigonometriche ma non lo sono. In $2(\cos\frac{\pi}{5} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5})$ c'è un segno meno: la forma corretta è $2[\cos(-\frac{\pi}{5}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{5})]$. In $-3(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$ il fattore davanti è negativo e non può essere un modulo: il numero è $3[\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\,\text{sen}(-\frac{3\pi}{4})]$.

Nella forma trigonometrica il modulo è positivo e lo *stesso* angolo compare nel coseno e nel seno, con il segno +.

8.2 Prodotto e quoziente in forma trigonometrica

8.2.1 Il prodotto

Siano $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$. Moltiplichiamo come nella forma algebrica, ricordando che $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)].$$

Nelle due parentesi tonde riconosciamo le formule di addizione del capitolo 2: $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$ e $\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)$. Abbiamo così dimostrato il teorema seguente.

IN SINTESI

Teorema (prodotto in forma trigonometrica).

Ipotesi: $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$.

Tesi: $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]$.

Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$; un argomento del prodotto è la **somma degli argomenti**.

Se la somma degli argomenti principali esce dall'intervallo $]-\pi;\pi]$, per avere l'argomento principale del prodotto basta togliere o aggiungere 2π: per esempio, se $\theta_1=\theta_2=3\pi/4$, la somma $3\pi/2$ corrisponde all'argomento principale $-\pi/2$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ in due modi e confrontiamo i risultati.

Forma algebrica. $(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+\sqrt{3}\,i+i^2 = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$.

Forma trigonometrica. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Il prodotto ha modulo $2\sqrt{2}$ e argomento $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$, cioè $75°$: $(1+i)(\sqrt{3}+i)=2\sqrt{2}(\cos 75°+i\operatorname{sen}75°)$.

Confronto. Due numeri uguali hanno le stesse parti reali e immaginarie: $2\sqrt{2}\cos 75° = \sqrt{3}-1$ e $2\sqrt{2}\operatorname{sen}75° = \sqrt{3}+1$. Ne ricaviamo, senza usare altre formule, $\cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$ e $\operatorname{sen}75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}9659$, gli stessi valori che il capitolo 2 ottiene con le formule di addizione.

8.2.2 Il quoziente e il reciproco

Se $z=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\neq 0$, il numero $w=\frac{1}{\rho}[\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)]$ soddisfa $z\,w=\rho\cdot\frac{1}{\rho}(\cos 0+i\operatorname{sen}0)=1$: è quindi il reciproco di z. Il reciproco ha modulo inverso e argomento opposto. Dividere per z_2 significa moltiplicare per il suo reciproco; applicando la regola del prodotto otteniamo:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)],\quad z_2\neq 0.$$

I moduli si dividono, gli argomenti si sottraggono. Per esempio, poiché $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$, si ha $\frac{1}{i} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -i$, come avevamo trovato nel capitolo 7 moltiplicando per il coniugato.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ e ricaviamo il valore esatto di $\cos 15°$.

In forma trigonometrica $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3})$ e $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4})$. Il quoziente ha modulo $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ e argomento $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$: $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12})$.

In forma algebrica moltiplichiamo per il coniugato del denominatore: $\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,i$.

Uguagliando le parti reali: $\sqrt{2}\cos 15° = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, quindi $\cos 15° = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}9659$.

8.2.3 Moltiplicare è ruotare e dilatare

Fissiamo un numero $w = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e consideriamo la funzione $z \mapsto wz$ che a ogni punto del piano associa il suo prodotto per w. Per il teorema del prodotto, il punto wz ha distanza da O pari a $r \cdot |z|$ e argomento $\arg z + \alpha$. Quindi la moltiplicazione per w è la composizione di due trasformazioni che conosciamo dal biennio: una **rotazione di centro O e angolo α** e un'**omotetia di centro O e rapporto r**. Le due operazioni si possono eseguire in qualunque ordine.

Nella Figura 8.2 il triangolo di vertici 1, 3 e $1 + 2i$ è moltiplicato per $w = 1 + i$, che ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$. Il triangolo immagine ha vertici $1 + i$, $3 + 3i$ e $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$: è ruotato di 45° attorno all'origine, ha i lati più lunghi nel rapporto $\sqrt{2}$ e gli angoli uguali a quelli di partenza. La sua area è doppia, cioè $(\sqrt{2})^2$ volte quella iniziale.

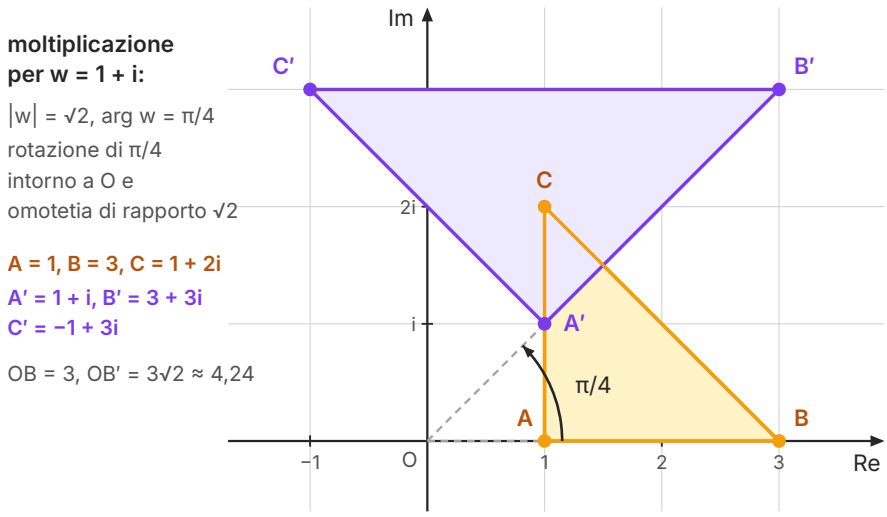


Figura 8.2 Moltiplicare per $w = 1 + i$ ruota ogni punto di π/4 attorno all'origine e ne moltiplica la distanza da O per $|w| = \sqrt{2}$. Il triangolo ABC (in arancio) diventa il triangolo simile $A'B'C'$ (in viola); per esempio $OB = 3$ e $OB' = |3 + 3i| = 3\sqrt{2}$.

DA RICORDARE

- Moltiplicare per i ruota ogni punto di 90° in senso antiorario attorno a O; per $-i$, di 90° in senso orario; per -1, di 180°: per questo $i^2 = -1$ si legge «due quarti di giro fanno mezzo giro».
- Moltiplicare per un numero di modulo 1 è una rotazione pura; per un numero reale positivo k, un'omotetia pura di rapporto k.
- $|z_1\, z_2| = |z_1||z_2|$ e $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ valgono sempre; gli argomenti si sommano e si sottraggono, ma l'argomento principale va riportato in $]-\pi;\, \pi]$.

COLLEGAMENTI · FISICA: I FASORI

Un'oscillazione $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (capitolo 5) è la parte reale del numero complesso $A[\cos(\omega t + \varphi) + i\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]$, che per il teorema del prodotto è uguale a $Z \cdot (\cos \omega t + i \,\mathrm{sen}\, \omega t)$ con $Z = A(\cos \varphi + i \,\mathrm{sen}\, \varphi)$. Il numero Z, che contiene ampiezza e fase, si chiama **fasore**; il fattore $\cos \omega t + i \,\mathrm{sen}\, \omega t$ fa ruotare il fasore attorno all'origine con velocità angolare ω, e l'oscillazione è la proiezione del vettore rotante sull'asse reale.

Se due oscillazioni hanno la stessa pulsazione ω, la loro somma è la parte reale di $(Z_1 + Z_2)(\cos \omega t + i \,\mathrm{sen}\, \omega t)$: è ancora una sinusoide di pulsazione ω, con ampiezza $|Z_1 + Z_2|$ e fase $\arg(Z_1 + Z_2)$. I fasori si sommano con la regola del parallelogramma. Per esempio $3\cos \omega t + 4\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ha fasore $3 + 4i$, di modulo 5 e argomento $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} \approx 0{,}927$: la somma è $5\cos(\omega t + \varphi)$, come mostra la Figura 8.3. È lo stesso risultato del metodo dell'angolo aggiunto, ottenuto con un disegno. Gli ingegneri elettrici usano i fasori per le correnti alternate e scrivono j al posto di i, perché i indica l'intensità di corrente.

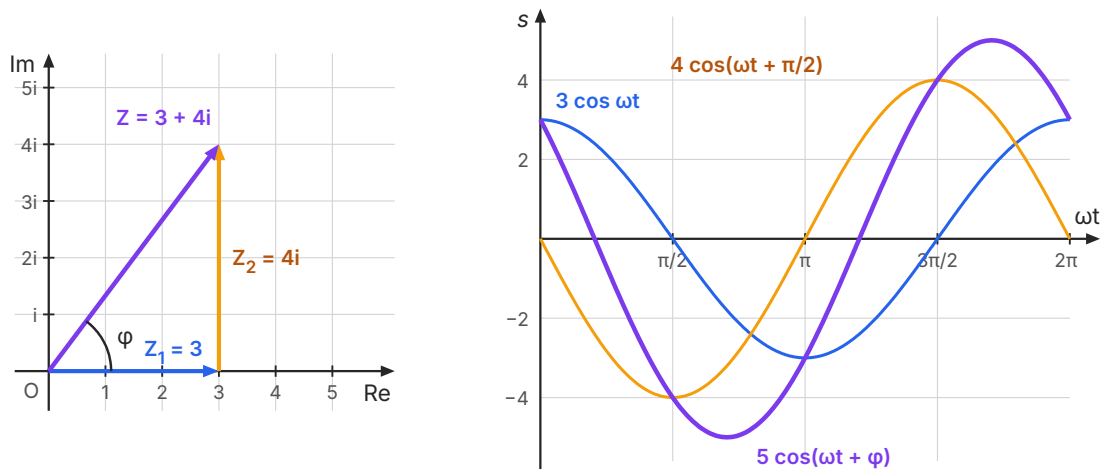


Figura 8.3 A sinistra, i fasori $Z_1 = 3$ e $Z_2 = 4i$ e la loro somma $Z = 3 + 4i$, di modulo 5 e argomento $\varphi = \mathrm{arctg}(4/3) \approx 0{,}927$. A destra, le oscillazioni corrispondenti in funzione di ωt: $3\cos \omega t$, $4\cos(\omega t + \pi/2)$ e la loro somma $5\cos(\omega t + \varphi)$, calcolata punto per punto.

8.3 Le potenze: la formula di De Moivre

8.3.1 La formula e la sua dimostrazione per induzione

Se moltiplichiamo $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ per sé stesso, il teorema del prodotto dà $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta)$; moltiplicando ancora per z, $z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta)$. Ogni nuovo fattore moltiplica il modulo per ρ e aggiunge θ all'argomento. La regola generale si dimostra per induzione.

IN SINTESI

Teorema (formula di De Moivre).

Ipotesi: $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Tesi: $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$.

Passo base. Per $n = 1$ la tesi è $z^1 = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, che è vera.

Passo induttivo. Supponiamo che la formula valga per un certo $n \geq 1$, cioè $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$, e dimostriamola per $n + 1$. Si ha $z^{n+1} = z^n \cdot z$; per l'ipotesi induttiva e il teorema del prodotto, $z^{n+1} = \rho^n \cdot \rho[\cos(n\theta + \theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta + \theta)] = \rho^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n+1)\theta]$, che è la tesi per $n + 1$. Per il principio di induzione la formula vale per ogni $n \geq 1$. c.v.d.

In parole: **per elevare alla *n* un numero complesso si eleva alla *n* il modulo e si moltiplica per *n* l'argomento**. La formula porta il nome di **formula di De Moivre**, dal matematico francese Abraham de Moivre, che visse e lavorò a Londra e ne usò casi particolari; nella forma che abbiamo scritto la si trova nell'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero (1748).

8.3.2 Esponenti negativi

Per $z \neq 0$ si pone, come per i numeri reali, $z^0 = 1$ e $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. Poiché il reciproco ha modulo inverso e argomento opposto, $z^{-n} = \dfrac{1}{\rho^n}[\cos(-n\theta) + i\,\mathrm{sen}(-n\theta)] = \rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i\,\mathrm{sen}(-n\theta)]$: la formula di De Moivre vale per ogni esponente intero $n \in \mathbb{Z}$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo **a)** $(1+i)^{10}$; **b)** $(-\sqrt{3}+i)^{-3}$.

a) $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$, quindi $(1+i)^{10}=(\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4})$. Ora $(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$ e $\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi$, quindi $(1+i)^{10}=32(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})=32i$. Con la forma algebrica si può controllare: $(1+i)^2=2i$, quindi $(1+i)^{10}=(2i)^5=32\,i^5=32i$.

b) Dalla Figura 8.1, $-\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6})$. Allora $(-\sqrt{3}+i)^{-3}=2^{-3}[\cos(-\frac{5\pi}{2})+i\,\text{sen}(-\frac{5\pi}{2})]$. Poiché $-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-2\pi$, il risultato è $\frac{1}{8}(0-i)=-\frac{i}{8}$. Controllo: $(-\sqrt{3}+i)^3=8(\cos\frac{5\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2})=8i$ e $\frac{1}{8i}=-\frac{i}{8}$.

8.3.3 De Moivre e le formule goniometriche

La formula di De Moivre è anche una fabbrica di identità goniometriche. Prendiamo $\rho=1$ e $n=3$: $(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)^3=\cos 3\theta+i\,\text{sen}\,3\theta$. Sviluppiamo il primo membro con il cubo di un binomio:

$$(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)^3=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta-3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta-i\,\text{sen}^3\theta.$$

Due numeri complessi uguali hanno parti reali uguali e parti immaginarie uguali, quindi $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$ e $\text{sen}\,3\theta=3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta-\text{sen}^3\theta$. Con la relazione fondamentale ($\text{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta$ nella prima, $\cos^2\theta=1-\text{sen}^2\theta$ nella seconda) si ottengono le **formule di triplicazione**

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\quad \text{sen}\,3\theta=3\,\text{sen}\,\theta-4\,\text{sen}^3\theta.$$

Nel capitolo 2 le abbiamo ricavate scrivendo $3\theta=2\theta+\theta$ e applicando addizione e duplicazione; qui è bastato un prodotto notevole. Con $n=2$ lo stesso ragionamento restituisce le formule di duplicazione (esercizio).

8.3.4 Potenze che girano a spirale

Che cosa succede alle potenze successive z, z^2, z^3, ... di un numero complesso? Ogni potenza ruota di θ rispetto alla precedente, e il modulo ρ^n cresce se $\rho>1$, resta costante se $\rho=1$, decresce se $\rho<1$. Nella Figura 8.4 $z=0{,}9(\cos 30°+i\,\text{sen}\,30°)$: dopo dodici passi le potenze hanno fatto un giro completo e la distanza da O si è ridotta a $0{,}9^{12}\approx 0{,}28$; i punti si avvicinano all'origine lungo una spirale. Se $\rho=1$ i punti restano sulla circonferenza unitaria e, quando θ è una frazione razionale di giro, ritornano periodicamente nelle stesse posizioni.

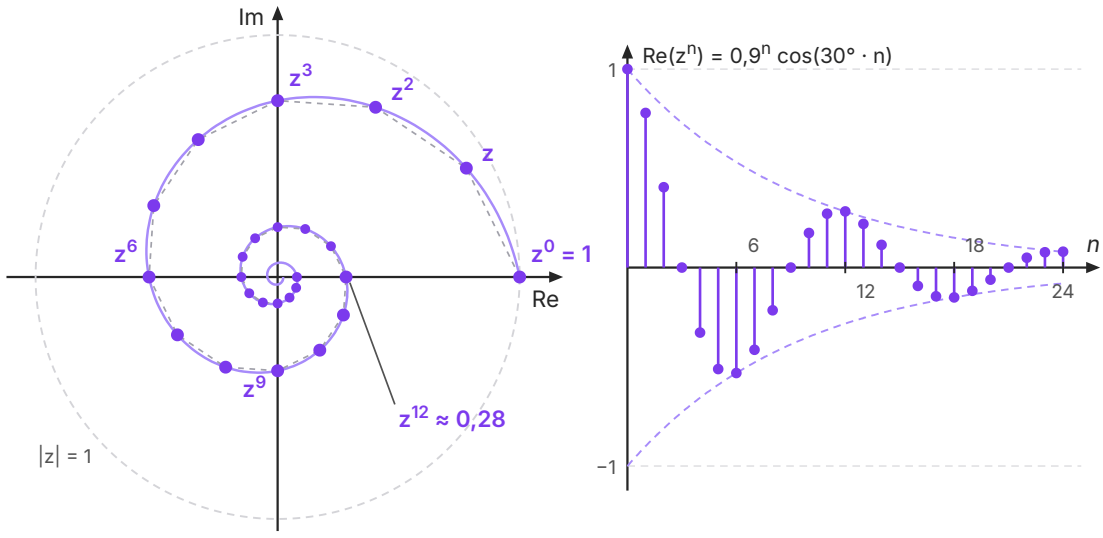


Figura 8.4 A sinistra, le potenze z^n di $z = 0{,}9(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ per $n = 0, 1, \ldots, 24$: a ogni passo il punto ruota di 30° e la sua distanza da O si moltiplica per 0,9, lungo una spirale (in viola chiaro). A destra, la parte reale $0{,}9^n \cos(30° \cdot n)$ in funzione di n: un'oscillazione discreta di periodo 12 la cui ampiezza si riduce come $0{,}9^n$ (in tratteggio).

COLLEGAMENTI · MODELLI: LE OSCILLAZIONI SMORZATE

Le parti reali delle potenze z^n, a destra nella Figura 8.4, formano una successione che oscilla con periodo 12 e ampiezza decrescente: è un modello discreto di **oscillazione smorzata**, come quella di un'altalena che nessuno spinge più o della corda di una chitarra pizzicata, registrate a intervalli regolari. Il modulo ρ regola lo smorzamento, l'argomento θ il periodo. La successione z^n è dunque un modello periodico in un contesto *discreto*, che unisce in un'unica formula la crescita o decrescita esponenziale del modulo (vedi *Matematica 3*, cap. 12) e la periodicità dell'argomento; il suo analogo *continuo*, con un tempo t reale al posto di n, è la funzione $\rho^t \cos(\theta t)$.

APPROFONDIMENTO · LA FORMA ESPONENZIALE

Nell'*Introductio in analysin infinitorum* (1748) Eulero scrisse la relazione che oggi si presenta come

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

in cui compare il numero e (vedi *Matematica 3*). Che cosa voglia dire elevare e a un esponente immaginario si può definire con precisione solo con gli strumenti dell'analisi; qui osserviamo soltanto che la scrittura è coerente con tutto ciò che abbiamo visto. Le regole delle potenze $e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ e $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ dicono esattamente che nel prodotto gli argomenti si sommano e che vale la formula di De Moivre. Ogni numero complesso non nullo si scrive allora nella **forma esponenziale** $z = \rho\, e^{i\theta}$. Ponendo $\theta = \pi$ si ottiene $e^{i\pi} = -1$, cioè $e^{i\pi} + 1 = 0$, un'uguaglianza che lega in poche lettere i numeri e, π, i, 1 e 0.

8.4 Le radici n-esime di un numero complesso

8.4.1 Quante sono le radici n-esime

Sia $n \geq 2$ un numero naturale e w un numero complesso. Si chiama **radice n-esima** di w ogni numero complesso z tale che $z^n = w$. Nei reali le cose sono irregolari: 4 ha due radici quadrate (2 e -2), -4 nessuna, 8 una sola radice cubica reale. Nei complessi, invece, la risposta è sempre la stessa.

Il caso $w = 0$ è immediato: $z^n = 0$ solo per $z = 0$. Sia allora $w = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$ e cerchiamo $z = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, con $r > 0$. Per De Moivre l'equazione $z^n = w$ diventa

$$r^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi) = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Due numeri complessi non nulli sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono di un multiplo di 2π. Quindi $r^n = \rho$, cioè $r = \sqrt[n]{\rho}$ (la radice aritmetica, reale e positiva, del numero reale positivo ρ), e $n\varphi = \theta + 2k\pi$, cioè

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Gli infiniti valori di k non danno però infiniti numeri diversi. Per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gli angoli φ_k differiscono a due a due per $\dfrac{(k-h)2\pi}{n}$, con $0 < |k-h| < n$: non è un multiplo di 2π, quindi i punti sono distinti. Per $k = n$ si ottiene $\varphi_n = \varphi_0 + 2\pi$, cioè di nuovo la prima radice, e da lì i valori si ripetono con periodo n. Le radici sono dunque esattamente n.

IN SINTESI

Teorema (radici n-esime).

Ipotesi: $w = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Tesi: w ha esattamente n radici n-esime distinte,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Le radici stanno sulla circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e, per $n \geq 3$, sono i vertici di un **poligono regolare** di n lati inscritto in essa: due radici consecutive formano con O un angolo di $\frac{2\pi}{n}$.

Il simbolo $\sqrt{\ }$ nei complessi va maneggiato con cura: un numero complesso non nullo ha due radici quadrate, tre radici cubiche e così via, e non c'è un modo naturale di sceglierne «una». Per questo, nel campo complesso, parleremo sempre delle radici n-esime al plurale, elencandole tutte.

ESEMPIO SVOLTO

Determiniamo le radici cubiche di $8i$ e rappresentiamole nel piano di Gauss.

In forma trigonometrica $8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$. Le radici hanno modulo $\sqrt[3]{8} = 2$ e argomenti $\varphi_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$:

- $k = 0$: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) = \sqrt{3} + i$;
- $k = 1$: $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$, $w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) = -\sqrt{3} + i$;
- $k = 2$: $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, $w_2 = 2(0 - i) = -2i$.

I tre punti sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 2 (Figura 8.5b). Verifica di una radice: $(-2i)^3 = -8\,i^3 = -8(-i) = 8i$.

8.4.2 Le radici dell'unità

Le radici n-esime di $1 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0$ si chiamano **radici n-esime dell'unità**:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Stanno sulla circonferenza unitaria e una di esse è sempre $\varepsilon_0 = 1$. Per $n = 2$ sono 1 e -1; per $n = 4$ sono 1, i, -1, $-i$. Per $n = 3$ otteniamo 1, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ e $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Verifichiamo che ε_1 è davvero una radice cubica di 1: $\varepsilon_1^{\,2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \varepsilon_2$, e $\varepsilon_1^{\,3} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. La somma delle tre radici cubiche dell'unità è $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})i = 0$.

La Figura 8.5a mostra le sei radici seste dell'unità, vertici di un esagono regolare: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $\varepsilon_3 = -1$, ε_4 e ε_5 coniugati di ε_2 e ε_1. Si osservi che $\varepsilon_k = \varepsilon_1^{\,k}$: tutte le radici sono potenze di ε_1, e moltiplicare per ε_1 fa ruotare l'esagono di un sesto di giro, lasciandolo sovrapposto a sé stesso.

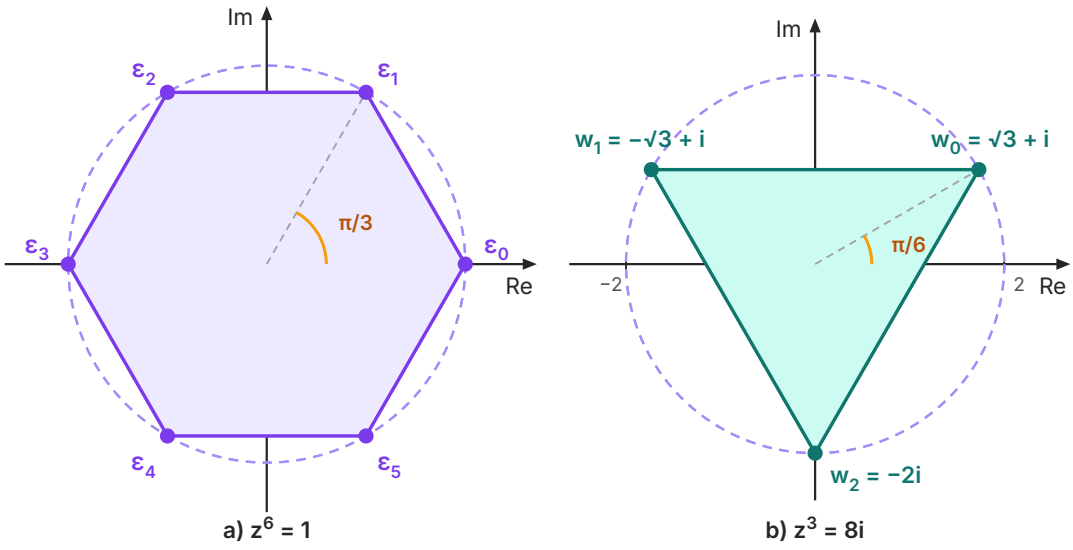


Figura 8.5 **a)** Le radici seste dell'unità $\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{3}$ sono i vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza unitaria. **b)** Le radici cubiche di 8i sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[3]{8} = 2$; la prima ha argomento $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$.

DA RICORDARE

Per $n \geq 2$ la somma delle radici n-esime dell'unità è 0. Poiché $\varepsilon_k = \varepsilon_1^{\,k}$, la somma è quella di una progressione geometrica di ragione $\varepsilon_1 \neq 1$ (vedi *Matematica 3*, cap. 4): $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{\,2} + \ldots + \varepsilon_1^{\,n-1} = \dfrac{1-\varepsilon_1^{\,n}}{1-\varepsilon_1} = \dfrac{1-1}{1-\varepsilon_1} = 0$. Geometricamente: il baricentro dei vertici di un poligono regolare è il suo centro.

8.4.3 Equazioni binomie

Un'equazione della forma $z^n = w$, o che si riconduce a essa, si chiama **equazione binomia**. Nel campo complesso, per quanto abbiamo dimostrato, un'equazione binomia con $w \neq 0$ ha sempre esattamente n soluzioni distinte. Per esempio $z^3 = 8$ ha nei reali la sola soluzione 2; nei complessi le soluzioni sono $2\varepsilon_0 = 2$, $2\varepsilon_1 = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ e $2\varepsilon_2 = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$: le radici n-esime di un numero si ottengono da una qualsiasi di esse moltiplicandola per le radici n-esime dell'unità. Nel capitolo 9 vedremo che contare così le soluzioni è un caso particolare di un teorema generale sulle equazioni polinomiali.

ESEMPIO SVOLTO

a) Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 + 16 = 0$. **b)** Troviamo le radici quadrate di $-5 + 12\mathrm{i}$.

a) L'equazione equivale a $z^4 = -16 = 16(\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi)$. Le soluzioni hanno modulo $\sqrt[4]{16} = 2$ e argomenti $\dfrac{\pi + 2k\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$: cioè $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$. In forma algebrica $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$: i vertici di un quadrato. Verifica: $(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i})^2 = 2 + 4\mathrm{i} - 2 = 4\mathrm{i}$ e $(4\mathrm{i})^2 = -16$.

b) Il numero $-5 + 12\mathrm{i}$ ha modulo 13 ma un argomento non notevole. Per le radici quadrate conviene allora il **metodo algebrico**: cerchiamo $z = x + y\mathrm{i}$, con x, y reali, tale che $(x + y\mathrm{i})^2 = -5 + 12\mathrm{i}$, cioè $x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -5 + 12\mathrm{i}$. Uguagliando parti reali e immaginarie: $x^2 - y^2 = -5$ e $xy = 6$. Sostituendo $y = 6/x$ nella prima si ha $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$, da cui $x^2 = 4$ (l'altra soluzione, $x^2 = -9$, non è accettabile per x reale). Quindi $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ con lo stesso segno: le radici sono $2 + 3\mathrm{i}$ e $-2 - 3\mathrm{i}$. Verifica: $(2 + 3\mathrm{i})^2 = 4 + 12\mathrm{i} - 9 = -5 + 12\mathrm{i}$.

ERRORE FREQUENTE

Dividere per n soltanto l'argomento iniziale. Gli argomenti delle radici sono $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$, non $\frac{\theta}{n} + 2k\pi$: con la seconda scrittura si trova una sola radice, ripetuta infinite volte.

Credere che la radice «con $k = 0$» sia quella reale. Le radici cubiche di $-8 = 8(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$ hanno argomenti $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$: la radice reale -2 è quella con $k = 1$, mentre per $k = 0$ si ottiene $1 + \sqrt{3}\,i$.

Usare $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ con radicandi negativi: come abbiamo visto nel capitolo 7, la regola vale solo per $a, b \geq 0$.

8.5 Le trasformazioni del piano come funzioni complesse

Identifichiamo ogni punto $P(x; y)$ del piano con il numero complesso $z = x + yi$. Allora una trasformazione del piano, che a ogni punto associa un punto, diventa una funzione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, che a ogni numero complesso z associa il numero complesso $z' = f(z)$. In *Matematica 2* (cap. 11) abbiamo scritto le isometrie e le omotetie con coppie di equazioni in x e y; ora le scriveremo con una sola equazione in z, e vedremo che le operazioni dei numeri complessi corrispondono esattamente a queste trasformazioni.

8.5.1 Traslazioni, rotazioni e omotetie

- **Traslazione.** La funzione $z \mapsto z + b$, con $b = p + qi$, aggiunge a ogni punto il vettore $(p; q)$: è la **traslazione** di vettore b. In coordinate, $x' = x + p$, $y' = y + q$.
- **Rotazione attorno all'origine.** Se $a = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ ha modulo 1, la funzione $z \mapsto az$ è la **rotazione** di centro O e angolo α. Sviluppando $(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(x + yi)$ si ottengono le sue equazioni in coordinate: $x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$.
- **Omotetia di centro O.** Se k è un numero reale non nullo, $z \mapsto kz$ è l'**omotetia** di centro O e rapporto k: $x' = kx$, $y' = ky$. Per $k = -1$ è la simmetria centrale rispetto a O, cioè la rotazione di π.

Per esempio, la rotazione di 60° attorno a O è $z \mapsto (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)z$ e porta il punto 2 nel punto $1 + \sqrt{3}\,i$. Le equazioni in coordinate della rotazione, che nel biennio avevamo scritto solo per angoli particolari, qui sono venute fuori da un prodotto.

8.5.2 Le similitudini z ↦ az + b

Componiamo ora una moltiplicazione e una traslazione: $f(z) = az + b$, con a e b complessi e $a \neq 0$. Per $a = 1$ è una traslazione. Se $a \neq 1$ cerchiamo un **punto fisso** (o punto unito), cioè un z_0 tale che $f(z_0) = z_0$:

$$az_0 + b = z_0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{b}{1-a}.$$

Sottraendo membro a membro $z_0 = az_0 + b$ da $f(z) = az + b$ otteniamo

$$f(z) - z_0 = a(z - z_0).$$

Questa uguaglianza ha una lettura geometrica immediata: il vettore che va dal punto fisso z_0 all'immagine $f(z)$ si ottiene dal vettore che va da z_0 a z moltiplicandolo per a, cioè ruotandolo dell'angolo arg a e moltiplicandone la lunghezza per $|a|$. Dunque f è la composizione di una rotazione di centro z_0 e angolo arg a e di un'omotetia di centro z_0 e rapporto $|a|$. Una trasformazione di questo tipo si chiama **similitudine diretta**; z_0 è il suo **centro** e $|a|$ il suo **rapporto di similitudine**. Le similitudini dirette conservano gli angoli, anche nel verso, e moltiplicano tutte le lunghezze per $|a|$ e tutte le aree per $|a|^2$.

IN SINTESI

Ogni funzione $f(z) = az + b$ con $a \neq 0$ è una **similitudine diretta**:

- se $a = 1$, è la traslazione di vettore b;
- se $a \neq 1$, ha un solo punto fisso $z_0 = \frac{b}{1-a}$ ed è la composizione della rotazione di centro z_0 e angolo arg a con l'omotetia di centro z_0 e rapporto $|a|$;
- è un'isometria se e solo se $|a| = 1$; per $|a| = 1$ e $a \neq 1$ è una rotazione di centro z_0.
- La rotazione di centro C e angolo α è $f(z) = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(z - C) + C$.

ESEMPIO SVOLTO

Studiamo la trasformazione $f(z) = (1 + i)z + 2$ e applichiamola al quadrato di vertici 0, 1, $1 + i$, i (Figura 8.6).

Il coefficiente $a = 1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$. Il punto fisso è $z_0 = \dfrac{2}{1 - (1 + i)} = \dfrac{2}{-i} = 2i$, perché $\dfrac{1}{-i} = i$. Controllo: $f(2i) = (1 + i)2i + 2 = 2i - 2 + 2 = 2i$. Quindi f ruota il piano di $\pi/4$ attorno a $F = 2i$ e lo dilata di $\sqrt{2}$ rispetto allo stesso centro.

Le immagini dei vertici sono $f(0) = 2$, $f(1) = 3 + i$, $f(1 + i) = (1 + i)^2 + 2 = 2 + 2i$, $f(i) = i - 1 + 2 = 1 + i$. Il quadrato immagine ha lato $|3 + i - 2| = |1 + i| = \sqrt{2}$ e area 2, doppia di quella iniziale. Si noti che $f(i) = 1 + i$ è un vertice del quadrato di partenza: un punto può avere come immagine un altro punto della stessa figura.

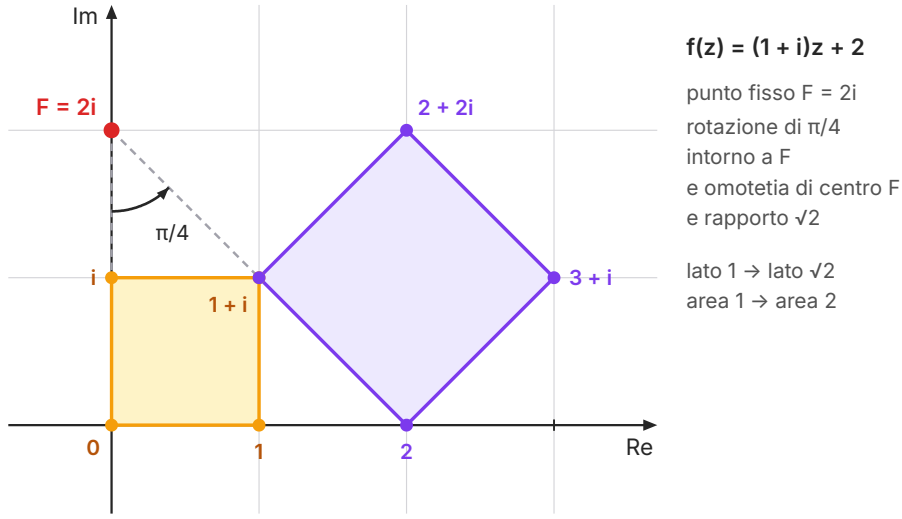


Figura 8.6 La similitudine $f(z) = (1 + i)z + 2$ trasforma il quadrato di vertici 0, 1, $1 + i$, i (in arancio) nel quadrato di vertici 2, $3 + i$, $2 + 2i$, $1 + i$ (in viola). Il centro è il punto fisso $F = 2i$: il segmento da F a 0, lungo 2, diventa il segmento da F a 2, lungo $2\sqrt{2}$ e ruotato di $\pi/4$.

ESEMPIO SVOLTO

Scriviamo la rotazione di centro $C = 1 + 2\mathrm{i}$ e angolo $\pi/2$ e troviamo l'immagine dell'origine.

Per la formula del riquadro, con $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$: $f(z) = \mathrm{i}(z - C) + C = \mathrm{i}z + C(1 - \mathrm{i}) = \mathrm{i}z + (1 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = \mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i}$. L'immagine di O è $f(0) = 3 + \mathrm{i}$. Controllo geometrico: $|0 - C| = |-1 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ e $|f(0) - C| = |2 - \mathrm{i}| = \sqrt{5}$; il vettore $f(0) - C = 2 - \mathrm{i}$ è uguale a $\mathrm{i}(-1 - 2\mathrm{i})$, cioè al vettore $0 - C$ ruotato di 90°.

8.5.3 Simmetrie e coniugato

La funzione $z \mapsto \overline{z}$, che cambia segno alla parte immaginaria, è la **simmetria assiale** rispetto all'asse reale: $x' = x$, $y' = -y$. Componendola con le precedenti si ottengono tutte le altre simmetrie assiali: per esempio $z \mapsto -\overline{z}$ è la simmetria rispetto all'asse immaginario. A differenza delle rotazioni, la simmetria assiale **inverte il verso** degli angoli: un triangolo percorso in senso antiorario diventa un triangolo percorso in senso orario. Per questo le funzioni del tipo $z \mapsto a\overline{z} + b$ si chiamano similitudini *inverse*, e non si possono scrivere nella forma $az + b$.

8.5.4 Comporre e invertire

Comporre due trasformazioni significa comporre due funzioni (vedi *Matematica 3*, cap. 3). Se $f(z) = a_1 z + b_1$ e $g(z) = a_2 z + b_2$, allora

$$(g \circ f)(z) = a_2(a_1 z + b_1) + b_2 = a_1 a_2 z + (a_2 b_1 + b_2):$$

la composizione di due similitudini dirette è ancora una similitudine diretta, con rapporto $|a_1 a_2| = |a_1||a_2|$ e angolo $\arg a_1 + \arg a_2$. In particolare la composizione di due rotazioni è una rotazione (o una traslazione, se gli angoli hanno somma multipla di 2π), e gli angoli si sommano. Il calcolo mostra anche che in generale $g \circ f \neq f \circ g$: per esempio, con $f(z) = \mathrm{i}z$ e $g(z) = z + 1$ si ha $(g \circ f)(z) = \mathrm{i}z + 1$, mentre $(f \circ g)(z) = \mathrm{i}(z + 1) = \mathrm{i}z + \mathrm{i}$.

Ogni similitudine diretta è invertibile: da $z' = az + b$ si ricava $z = \frac{z' - b}{a}$, quindi la **trasformazione inversa** è $f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$, ancora una similitudine diretta, con lo stesso centro, angolo $-\arg a$ e rapporto $\frac{1}{|a|}$. Per la similitudine della Figura 8.6 $f^{-1}(z) = \frac{z - 2}{1 + \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}(z - 2)$: ruota di $-\pi/4$ attorno a $2\mathrm{i}$ e dilata di $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.5.5 Due linguaggi per la stessa geometria

Le trasformazioni di questa sezione sono le stesse del biennio: è cambiato il linguaggio. Nel metodo **sintetico** una rotazione si costruisce con riga, compasso e goniometro a partire dal centro

e dall'angolo, e si ragiona sulle proprietà che conserva: lunghezze, angoli, parallelismo. Questo approccio mostra *perché* due figure sono congruenti o simili e si adatta a dimostrazioni generali senza coordinate. Nel metodo **analitico**, e in particolare con i numeri complessi, la trasformazione è una formula: le immagini si calcolano, il centro si trova risolvendo un'equazione, la composizione di due trasformazioni è un semplice prodotto. Il prezzo è la perdita di immediatezza visiva, e il fatto che il risultato dipende dal riferimento scelto. Un buon matematico usa i due punti di vista insieme: per esempio, il teorema «la composizione di due rotazioni di centri diversi è una rotazione, se la somma degli angoli non è un multiplo di 2π» richiede nel metodo sintetico una costruzione con due simmetrie assiali, mentre con i complessi è la riga di calcolo che abbiamo appena scritto.

APPROFONDIMENTO · LE AFFINITÀ E LE LORO MATRICI

Le similitudini conservano la forma delle figure. Una classe più ampia di trasformazioni è quella delle **affinità** (di centro O), che in coordinate si scrivono

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad \text{con } \det = ad - bc \neq 0,$$

cioè con una matrice 2×2 invertibile (vedi *Matematica 2*, cap. 13). Un'affinità trasforma rette in rette e conserva il parallelismo, ma in generale non conserva né le lunghezze né gli angoli; il quadrato di vertici O, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 1)$ diventa il parallelogramma costruito sui vettori $(a; c)$ e $(b; d)$, la cui area è $|ad - bc|$. In generale **ogni area viene moltiplicata per** $|\det|$.

Un esempio importante è $x' = x$, $y' = \frac{b}{a}\, y$ (qui a, b sono numeri positivi), una dilatazione nella sola direzione verticale con determinante $\frac{b}{a}$. Se $(x; y)$ sta sulla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$, allora $y = \frac{a}{b}\, y'$ e quindi $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$: l'immagine della circonferenza è un'ellisse di semiassi a e b (vedi *Matematica 3*, cap. 9). L'area del cerchio, πa^2, viene moltiplicata per $\frac{b}{a}$: l'ellisse ha area πab. Le affinità che non sono similitudini non si possono scrivere nella forma $z \mapsto az + b$: nel linguaggio complesso richiedono anche il coniugato $\bar{z}$.

SINTESI

- Ogni $z = a + bi \neq 0$ si scrive in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, con $\rho = |z| > 0$ e θ argomento, definito a meno di $2k\pi$; l'argomento principale $\arg z$ sta in $]-\pi; \pi]$. Il numero 0 non ha argomento.
- L'argomento si trova da $\cos\theta = a/\rho$ e $\text{sen}\,\theta = b/\rho$ insieme; $\text{arctg}(b/a)$ va corretto di π nel secondo e nel terzo quadrante, e non si usa se $a = 0$.
- Due numeri non nulli sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono di $2k\pi$.
- Nel prodotto i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano; nel quoziente i moduli si dividono e gli argomenti si sottraggono. La dimostrazione usa le formule di addizione.
- Moltiplicare per $w = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ è una rotazione di centro O e angolo α composta con un'omotetia di centro O e rapporto r; moltiplicare per i è una rotazione di 90°.
- Formula di De Moivre, dimostrata per induzione e valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$: $[\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$. Fornisce le formule di duplicazione e di triplicazione.
- Le potenze z^n ruotano di θ a ogni passo e si avvicinano a O lungo una spirale se $\rho < 1$: un modello di oscillazione smorzata.
- Ogni $w \neq 0$ ha esattamente n radici n-esime, $\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$ con $k = 0, \ldots, n-1$, vertici di un poligono regolare di centro O.
- Le radici n-esime dell'unità sono le potenze di $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$; la loro somma è 0. Le radici cubiche di 1 sono 1 e $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$.
- Traslazioni $(z + b)$, rotazioni attorno a O $(az$ con $|a| = 1)$, omotetie (kz) e simmetria rispetto all'asse reale $(\bar{z})$ sono funzioni complesse elementari.
- $f(z) = az + b$ con $a \neq 0, 1$ è una similitudine diretta di centro $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$, angolo $\arg a$ e rapporto $|a|$; la composizione di similitudini dirette è una similitudine diretta, in generale non commutativa, e l'inversa è $\dfrac{z-b}{a}$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La forma trigonometrica di $-2i$ è

   A. $2(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

   B. $2[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})]$

   C. $-2(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$

   D. $2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

2. ● L'argomento principale di $-1 - i$ è

   A. $\frac{\pi}{4}$

   B. $\frac{3\pi}{4}$

   C. $-\frac{3\pi}{4}$

   D. $\frac{5\pi}{4}$

3. ● Se $|z_1| = 3$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, $|z_2| = 2$ e $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$, il prodotto $z_1 z_2$ è

   A. $6i$

   B. $5i$

   C. 6

   D. $6(\cos \frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{18})$

4. ● Moltiplicare un numero complesso per $-i$ corrisponde, nel piano di Gauss, a

   A. la simmetria rispetto all'asse reale

   B. una rotazione di 90° in senso antiorario attorno a O

   C. un'omotetia di centro O e rapporto -1

   D. una rotazione di 90° in senso orario attorno a O

5. ●● Le radici quarte di -16 in $\mathbb{C}$ sono

   A. 2, sulla circonferenza di raggio 4

   B. 4, sulla circonferenza di raggio 2

   C. 4, sulla circonferenza di raggio 4

   D. nessuna, perché -16 è negativo

6. ●● La trasformazione $f(z) = iz + 2$ è

   A. una traslazione

   B. una rotazione di 90° attorno all'origine

   C. una rotazione di 90° attorno al punto 1 + i

   D. una simmetria assiale

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** Ogni numero complesso ha uno e un solo argomento. **b)** $|z^n| = |z|^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. **c)** La somma delle radici cubiche di 1 è 1. **d)** $\bar{z}$ si ottiene da z con la simmetria rispetto all'asse reale.

8. ● Completa. Nella forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ il numero ρ è _____ di z ed è sempre _____ ; θ è _____ , determinato a meno di _____ . Se $z = a + bi \neq 0$, $\cos\theta =$ _____ e $\operatorname{sen}\theta =$ _____ .

9. ●● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. **a)** $2(\cos\frac{\pi}{5} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5})$ è scritto in forma trigonometrica. **b)** $-3(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ ha modulo 3 e argomento $\frac{\pi}{4}$. **c)** Moltiplicare per un numero di modulo 1 non cambia il modulo. **d)** La trasformazione $z \mapsto 2z + 1$ ha come punto fisso −1.

Calcolare

10. ● Scrivi in forma trigonometrica, con l'argomento principale: **a)** $3 + 3i$; **b)** $-\sqrt{3} - i$; **c)** -5; **d)** $4i$.

11. ● Scrivi in forma algebrica: **a)** $4(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3})$; **b)** $\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4})]$; **c)** $6[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})]$; **d)** $3(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})$.

12. ●● Con la calcolatrice, scrivi in forma trigonometrica (argomento principale in gradi, arrotondato al centesimo): **a)** $-4 + 3i$; **b)** $2 - 5i$.

13. ●● Calcola in forma trigonometrica e scrivi il risultato in forma algebrica: **a)** $2(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}) \cdot 3(\cos\frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8})$; **b)** $\dfrac{12(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6})}{4(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})}$; **c)** $(\cos\frac{2\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{9})(\cos\frac{7\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{9})$.

14. ●● Calcola con la formula di De Moivre: **a)** $(1 - i)^8$; **b)** $(\sqrt{3} + i)^6$; **c)** $(-1 + \sqrt{3}\,i)^5$; **d)** $(1 + i)^{-4}$.

15. ●● Calcola $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)^{2026}$.

16. ●● Determina le radici quadrate di **a)** -9; **b)** $2i$; **c)** $3 - 4i$ (con il metodo algebrico).

17. ●● Determina le radici cubiche e rappresentale nel piano di Gauss: **a)** di -8; **b)** di $-27i$.

18. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$: **a)** $z^4 = 81$; **b)** $z^3 + 1 = 0$; **c)** $z^6 + 64 = 0$.

19. ●● Determina le radici quarte di $-8 + 8\sqrt{3}\,i$ in forma algebrica.

20. ●● Data $f(z) = iz + 1 - i$, trova l'immagine del triangolo di vertici 0, 2, 2i, il punto fisso di f e descrivi la trasformazione.

21. ●●● Scrivi la funzione complessa della rotazione di centro $C = 2 + i$ e angolo $\frac{\pi}{3}$ e calcola l'immagine dell'origine (valori esatti e approssimati al millesimo).

Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra che, se $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, allora $\overline{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]$; usa poi il teorema del prodotto per ritrovare l'uguaglianza $z\overline{z} = |z|^2$.

23. ●● Ricava le formule di duplicazione di seno e coseno dalla formula di De Moivre con $n = 2$.

24. ●●● Dimostra che, per ogni $n \geq 2$, la somma delle radici n-esime dell'unità è 0, e spiega il significato geometrico del risultato.

25. ●● Trova l'errore. «Scriviamo $z = -1 - i$ in forma trigonometrica: $\rho = \sqrt{2}$, $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{-1} = 1$, quindi $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$.»

26. ●●● Siano $f(z) = az + b$ e $g(z) = cz + d$ due similitudini dirette. Dimostra che $g \circ f$ è una similitudine diretta e trova la condizione su a, b, c, d perché $g \circ f = f \circ g$. Che cosa dice la condizione per due rotazioni attorno all'origine?

Problemi

27. ●● Il braccio di un robot industriale ha la base nell'origine di un riferimento con unità in decimetri; la pinza è nel punto $3 + 4i$. Il controllore fa ruotare il braccio di 30° in senso antiorario e lo allunga del 20%. Calcola la nuova posizione della pinza (valori esatti e approssimati al millesimo) e la sua distanza dalla base.

28. ●● Un esagono regolare ha il centro nell'origine e un vertice in $2 + 2i$. Determina gli altri vertici in forma algebrica esatta e calcola l'area dell'esagono.

29. ●● *Fisica.* Due sorgenti producono nello stesso punto le oscillazioni $s_1 = 2\cos\omega t$ e $s_2 = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$. Usando i fasori, scrivi la somma nella forma $A\cos(\omega t + \varphi)$.

30. ●●● In un videogioco una sonda parte dal punto $z_0 = 10$ e ogni secondo la sua posizione viene moltiplicata per $w = 0{,}8(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$. **a)** Dopo quanti secondi la sonda torna per la prima volta sul semiasse reale positivo, e a che distanza da O? **b)** Dopo quanti secondi la sua distanza da O diventa per la prima volta minore di 1?

31. ●● Le radici quinte dell'unità sono i vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza unitaria. Calcola la lunghezza del lato e il perimetro del pentagono (al millesimo) e verifica che $\mathrm{Re}\ \varepsilon_1 = \cos 72°$ è uguale a $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Verso la verifica

32. ●● Dati $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ e $z_2 = 1 - \mathrm{i}$: **a)** scrivili in forma trigonometrica; **b)** calcola $z_1^{\,3}\, z_2^{\,2}$; **c)** calcola $\frac{z_1}{z_2}$ in forma trigonometrica e in forma algebrica e ricava il valore esatto di $\cos \frac{7\pi}{12}$.

33. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$, scrivi le soluzioni in forma algebrica esatta e calcola l'area del triangolo che ha per vertici le soluzioni.

34. ●●● *Sfida.* Trova tutti i numeri complessi z tali che $\bar{z} = z^3$.

PER APPROFONDIRE

- NEE — il primo capitolo mostra con moltissime figure il significato geometrico di prodotto, potenze e radici, e le trasformazioni del piano come funzioni complesse.
- NAH — la storia di $\sqrt{-1}$, da Bombelli a Eulero, con un capitolo sulla formula di De Moivre e sulla forma esponenziale.
- CR — il capitolo sui numeri complessi tratta le radici dell'unità e i poligoni regolari.
- BOY — per la vita e le opere di De Moivre e di Eulero.

Glossario del capitolo

Affinità
Trasformazione $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ con $ad - bc \neq 0$; conserva rette e parallelismo e moltiplica le aree per $|ad - bc|$.

Argomento di un numero complesso
Ogni angolo orientato θ dal semiasse reale positivo alla semiretta Oz; per $z \neq 0$ è definito a meno di $2k\pi$.

Argomento principale
L'unico argomento di $z \neq 0$ compreso nell'intervallo $]-\pi; \pi]$; si indica con $\arg z$.

Equazione binomia
Equazione del tipo $z^n = w$; in $\mathbb{C}$, con $w \neq 0$, ha esattamente n soluzioni distinte.

Fasore
Il numero complesso $A(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ che rappresenta l'oscillazione $A\cos(\omega t + \varphi)$.

Forma esponenziale
La scrittura $z = \rho e^{i\theta}$, con $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (Eulero).

Forma trigonometrica
La scrittura $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ di un numero complesso non nullo, con $\rho = |z| > 0$ e θ argomento.

Formula di De Moivre
$[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Omotetia (nel piano complesso)
Di centro O e rapporto reale $k \neq 0$: la funzione $z \mapsto kz$.

Punto fisso
Punto z_0 tale che $f(z_0) = z_0$; per $f(z) = az + b$ con $a \neq 1$ è $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$.

Radice n-esima
Ogni numero complesso z tale che $z^n = w$; un numero $w \neq 0$ ne ha esattamente n.

Radici n-esime dell'unità
Le soluzioni di $z^n = 1$: $\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$; la loro somma è 0 per $n \geq 2$.

Rotazione (nel piano complesso)
Di centro C e angolo α: $z \mapsto (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(z - C) + C$; attorno a O è la moltiplicazione per un numero di modulo 1.

Similitudine diretta
Trasformazione $z \mapsto az + b$ con $a \neq 0$: rotazione e omotetia con lo stesso centro, oppure traslazione; conserva gli angoli e il loro verso.

Simmetria assiale (nel piano complesso)
Rispetto all'asse reale è $z \mapsto \bar{z}$; inverte il verso degli angoli.

Trasformazione inversa
Per $f(z) = az + b$ è $f^{-1}(z) = \dfrac{z-b}{a}$.

Traslazione (nel piano complesso)
La funzione $z \mapsto z + b$, che sposta ogni punto del vettore b.

Soluzioni

1. B. $|-2i| = 2$ e il punto $(0; -2)$ sta sul semiasse immaginario negativo: $\theta = -\pi/2$. La C non è una forma trigonometrica (fattore negativo).

2. C. Il punto $(-1; -1)$ è nel terzo quadrante: $\pi/4 - \pi = -3\pi/4$. $5\pi/4$ è un argomento, ma non è in $]-\pi; \pi]$.

3. A. Modulo $3 \cdot 2 = 6$, argomento $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$: $6(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 6i$.

4. D. $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{2})$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/2$.

5. B. Le radici quarte di un numero non nullo sono 4, di modulo $\sqrt[4]{16} = 2$: sono $\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)$.

6. C. $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$; il punto fisso è $z_0 = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$. Verifica: $f(1+i) = i - 1 + 2 = 1 + i$.

7. a) F: l'argomento è determinato a meno di $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e 0 non ha argomento; è unico l'argomento principale. b) V, per De Moivre. c) F: la somma è 0. d) V.

8. il modulo; positivo (per $z \neq 0$); un argomento di z; multipli di 2π (cioè $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$); $\frac{a}{\rho}$; $\frac{b}{\rho}$.

9. a) F: la forma corretta è $2[\cos(-\frac{\pi}{5}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{5})]$. b) F: il modulo è 3, ma l'argomento è $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$. c) V: $|wz| = |w||z| = |z|$. d) V: $z_0 = \frac{1}{1-2} = -1$, e infatti $2(-1) + 1 = -1$.

10. a) $3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$; b) $\rho = 2$, terzo quadrante: $2[\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\,\text{sen}(-\frac{5\pi}{6})]$; c) $5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$; d) $4(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$.

11. a) $4(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$; b) $1 - i$; c) $-6i$; d) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$.

12. a) $\rho = 5$; secondo quadrante, $\theta = 180° - \text{arctg}\,\frac{3}{4} \approx 143{,}13°$: $-4 + 3i \approx 5(\cos 143{,}13° + i\,\text{sen}\,143{,}13°)$. b) $\rho = \sqrt{29} \approx 5{,}385$; quarto quadrante, $\theta = -\text{arctg}\,\frac{5}{2} \approx -68{,}20°$: $2 - 5i \approx \sqrt{29}[\cos(-68{,}20°) + i\,\text{sen}(-68{,}20°)]$.

13. a) $6(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 6i$; b) $3(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 3i$; c) $\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$.

14. a) $1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{4})]$: $(\sqrt{2})^8[\cos(-2\pi) + i\,\text{sen}(-2\pi)] = 16$. b) $2^6(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = -64$. c) $-1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3})$: $32(\cos\frac{10\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{3}) = 32(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}) = -16 - 16\sqrt{3}\,i$. d) $(\sqrt{2})^{-4}[\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)] = -\frac{1}{4}$.

15. Il numero è $\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$; $\frac{2026\pi}{3} = 337 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ (perché $2026 = 6 \cdot 337 + 4$), quindi il risultato è $\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

16. a) $\pm 3i$; b) $2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$: radici $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}) = 1 + i$ e $-1 - i$; c) $x^2 - y^2 = 3$, $xy = -2$: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$; radici $2 - i$ e $-2 + i$. Verifica: $(2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

17. a) $-8 = 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$; modulo 2, argomenti $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$: $1 + \sqrt{3}\,i$, -2, $1 - \sqrt{3}\,i$ (triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 2). b) $-27i$

$= 27[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})]$; modulo 3, argomenti $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$: $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$ i, 3i, $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$ i.

18. a) ±3, ±3i. b) $z^3 = -1$: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ i, −1, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ i. c) $z^6 = -64 = 64(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$; modulo 2, argomenti $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$: $\sqrt{3} + i$, 2i, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, −2i, $\sqrt{3} - i$.

19. $-8 + 8\sqrt{3}\,i = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3})$. Modulo $\sqrt[4]{16} = 2$, argomenti $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$: $\sqrt{3} + i$, $-1 + \sqrt{3}\,i$, $-\sqrt{3} - i$, $1 - \sqrt{3}\,i$ (vertici di un quadrato).

20. $f(0) = 1 - i$, $f(2) = 1 + i$, $f(2i) = -1 - i$. Punto fisso: $z_0 = \frac{1-i}{1-i} = 1$. Poiché $f(z) - 1 = i(z - 1)$, f è la rotazione di 90° in senso antiorario attorno al punto 1.

21. $f(z) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)(z - 2 - i) + 2 + i$. $f(0) = (2 + i)(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} - \sqrt{3})i \approx 1{,}866 - 1{,}232i$. Controllo: $|f(0) - C| = |C| = \sqrt{5}$.

22. $\bar{z} = \rho\cos\theta - i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$; poiché $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$, si ha $\bar{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)]$. Allora $z\bar{z} = \rho^2[\cos(\theta - \theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta - \theta)] = \rho^2(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = \rho^2 = |z|^2$.

23. $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ e, per De Moivre, è uguale a $\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta$. Uguagliando parti reali e immaginarie:
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$, $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$.

24. Le radici sono $\varepsilon_k = \varepsilon_1^{\,k}$, $k = 0, \ldots, n-1$, con $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} \neq 1$ (perché $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi$). La somma di una progressione geometrica di ragione $\varepsilon_1 \neq 1$ dà $\frac{1 - \varepsilon_1^{\,n}}{1 - \varepsilon_1}$, e $\varepsilon_1^{\,n} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi = 1$: la somma è 0. Significato: i vertici del poligono regolare, visti come vettori applicati nel centro, hanno risultante nulla; il baricentro dei vertici coincide con il centro.

25. $\mathrm{tg}\,\theta = 1$ ha in $]-\pi; \pi]$ due soluzioni, $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{3\pi}{4}$; il punto $(-1; -1)$ è nel terzo quadrante, quindi $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ e $z = \sqrt{2}[\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{3\pi}{4})]$. Il numero scritto nel testo è $1 + i$.

26. $(g \circ f)(z) = c(az + b) + d = acz + (bc + d)$, con $ac \neq 0$: è una similitudine diretta. $(f \circ g)(z) = acz + (ad + b)$. Le due coincidono se e solo se $bc + d = ad + b$, cioè $b(c - 1) = d(a - 1)$. Per due rotazioni attorno all'origine $b = d = 0$ e la condizione è sempre vera: le rotazioni con lo stesso centro commutano. In generale, invece, due rotazioni con centri diversi non commutano.

27. Nuova posizione $1{,}2(\cos 30° + i\,\mathrm{sen}\,30°)(3 + 4i) = 1{,}2[(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2) + (\frac{3}{2} + 2\sqrt{3})i] = (1{,}8\sqrt{3} - 2{,}4) + (1{,}8 + 2{,}4\sqrt{3})i \approx 0{,}718 + 5{,}957i$. Distanza $1{,}2 \cdot |3 + 4i| = 1{,}2 \cdot 5 = 6$ dm.

28. I vertici sono $(2 + 2i)\varepsilon_1^{\,k}$, con $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ i: $2 + 2i$; $(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$; $-(1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i$; $-2 - 2i$; $(\sqrt{3} - 1) - (1 + \sqrt{3})i$; $(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$. Il lato è uguale al raggio, $\ell = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$; area $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 = 12\sqrt{3} \approx 20{,}78$.

29. Fasori $Z_1 = 2$, $Z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}\,i$; $Z = 3 + \sqrt{3}\,i$, $|Z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\arg Z = \frac{\pi}{6}$ (perché $\cos\varphi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Somma: $2\sqrt{3}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$.

30. Dopo n secondi la posizione è $10 \cdot 0{,}8^n(\cos 45°n + i\,\mathrm{sen}\,45°n)$. a) Serve $45° \cdot n$ multiplo di 360°: $n = 8$; distanza $10 \cdot 0{,}8^8 \approx 1{,}68$. b) $10 \cdot 0{,}8^n < 1 \Leftrightarrow n > \frac{ln\,0{,}1}{ln\,0{,}8} \approx 10{,}32$: dopo 11 secondi ($10 \cdot 0{,}8^{10} \approx 1{,}07$, $10 \cdot 0{,}8^{11} \approx 0{,}86$).

31. Lato $|\varepsilon_1 - 1|$: il triangolo $O\varepsilon_0\varepsilon_1$ è isoscele con angolo al vertice 72°, quindi $\ell = 2\,\mathrm{sen}\,36° \approx 1{,}176$; perimetro ≈ 5,878. Re $\varepsilon_1 = \cos 72° \approx 0{,}3090$ e $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0{,}3090$ (è il valore esatto di $\mathrm{sen}\,18° = \cos 72°$ ricavato nel capitolo 2 dal pentagono regolare).

32. a) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3})$, $z_2 = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{4})]$. b) $z_1^{\,3} = 8(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -8$, $z_2^{\,2} =$

$2[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(-\frac{\pi}{2})] = -2i$: $z_1^3 z_2^2 = 16i$. c) $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12})$; algebricamente $\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,i$. Quindi $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \approx -0{,}2588$.

33. $4\sqrt{2}(1+i) = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$. Modulo 2, argomenti $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{12}$: $z_0 = 2(\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\,i$; $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; $z_2 = 2(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\,i$. Il triangolo è equilatero, inscritto nella circonferenza di raggio 2: lato $2\sqrt{3}$, area $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 3\sqrt{3} \approx 5{,}196$.

34. Passando ai moduli, $|z| = |z|^3$, quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. $z = 0$ è soluzione. Se $|z| = 1$, allora $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$ e l'equazione diventa $\frac{1}{z} = z^3$, cioè $z^4 = 1$: $z = \pm 1, \pm i$, che sono effettivamente soluzioni (per esempio $\bar{i} = -i = i^3$). Le soluzioni sono cinque: 0, 1, −1, i, −i.