CAPITOLO

7

I numeri complessi

Un numero che non misura nessuna lunghezza può ancora indicare una direzione. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Spiegare perché i numeri reali non bastano a risolvere tutte le equazioni e definire l'unità immaginaria e i numeri complessi.
2. Eseguire in forma algebrica somme, prodotti, quozienti e potenze di numeri complessi, usando il coniugato.
3. Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni di secondo grado con discriminante negativo e semplici equazioni in z e $\overline{z}$.
4. Rappresentare i numeri complessi nel piano di Gauss come punti e come vettori, e interpretare somma, opposto e coniugato.
5. Calcolare il modulo e usarlo per misurare distanze e descrivere luoghi geometrici.
6. Spiegare perché in $\mathbb{C}$ non si può definire un ordinamento compatibile con le operazioni.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Oltre i numeri reali 2
7.2 Le operazioni in forma algebrica 4
7.3 Equazioni nel campo complesso 8
7.4 Il piano di Gauss 10
7.5 Modulo, distanze e luoghi geometrici 14

Matematica 4 · Parte III · Numeri complessi ed equazioni polinomiali · versione 1.0
Capitolo 7: I numeri complessi · pagine 199–222 del volume completo · estratto per lo studio

Ogni volta che un'equazione semplice si è rifiutata di avere soluzione, la matematica ha risposto allargando l'insieme dei numeri. L'equazione $x + 5 = 2$ non ha soluzione tra i numeri naturali, e per risolverla servono gli interi relativi; $3x = 2$ chiede le frazioni; $x^2 = 2$ chiede un numero irrazionale, $\sqrt{2}$, e con esso i numeri reali. Ogni ampliamento è stato accolto con sospetto (i numeri negativi furono chiamati a lungo «numeri falsi»), e ogni volta i nuovi numeri si sono rivelati indispensabili.

In questo capitolo facciamo un passo in più. L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali, perché il quadrato di un numero reale non è mai negativo. Costruiremo un insieme di numeri più ampio, quello dei **numeri complessi**, in cui questa equazione ha due soluzioni, e impareremo a calcolare con i nuovi numeri seguendo le stesse regole dell'algebra che conosci. Poi daremo ai numeri complessi una forma geometrica: ciascuno di essi sarà un punto del piano, e le operazioni diventeranno movimenti, simmetrie, distanze. Questa doppia natura, algebrica e geometrica, è ciò che rende i numeri complessi così utili, in fisica e in ingegneria come nella matematica stessa; nel prossimo capitolo la completeremo con la forma trigonometrica.

7.1 Oltre i numeri reali

7.1.1 Un'equazione senza soluzioni reali

Per ogni numero reale x si ha $x^2 \geq 0$, quindi $x^2 + 1 \geq 1$: il polinomio $x^2 + 1$ non si annulla mai. Graficamente, la parabola $y = x^2 + 1$ ha il vertice in $V(0; 1)$ e la concavità verso l'alto, e non incontra l'asse x (lo vedremo nella Figura 7.3). Lo stesso accade per ogni equazione di secondo grado con discriminante negativo: nel primo biennio abbiamo detto che una tale equazione è «impossibile in $\mathbb{R}$».

Per molti secoli i matematici si sono fermati qui, e a ragione: se un problema chiede due numeri reali con certe proprietà e l'equazione risolvente non ha soluzioni reali, il problema non ha soluzione, e non c'è altro da dire. La spinta a «calcolare con l'impossibile» non venne dalle equazioni di secondo grado, ma da quelle di terzo grado, in cui le radici quadrate di numeri negativi comparivano a metà del calcolo di soluzioni perfettamente reali.

APPROFONDIMENTO · CARDANO, BOMBELLI E LE EQUAZIONI DI TERZO GRADO

Nell'*Ars Magna* (1545) Gerolamo Cardano pubblicò la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. Per le equazioni della forma $x^3 = px + q$, con p e q positivi, la formula si scrive

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 - p^3/27}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{q^2/4 - p^3/27}}$$

Nello stesso libro Cardano incontrò anche il problema di dividere 10 in due parti il cui prodotto sia 40: l'equazione risolvente $x^2 - 10x + 40 = 0$ porta a $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Cardano verificò che la somma è 10 e il prodotto 40, ma giudicò questi calcoli una sottigliezza senza utilità.

Fu Rafael Bombelli, nell'*Algebra* (1572), a mostrare che le radici di numeri negativi non si potevano evitare. Applicata a $x^3 = 15x + 4$, la formula dà $q^2/4 - p^3/27 = 4 - 125 = -121$, cioè

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

eppure l'equazione ha la soluzione reale $x = 4$, perché $4^3 = 64 = 15 \cdot 4 + 4$. Bombelli calcolò con le radici di numeri negativi secondo le regole consuete e osservò che il cubo di $2 + \sqrt{-1}$ è proprio $2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$. Le due radici cubiche valgono quindi $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$, e la loro somma è 4: le «quantità impossibili» si cancellano e lasciano la soluzione reale. Verificherai il calcolo di Bombelli, con la notazione moderna, negli esercizi di fine capitolo.

7.1.2 L'unità immaginaria

Seguiamo l'idea di Bombelli e introduciamo un nuovo numero, che indichiamo con la lettera i, con una sola proprietà caratteristica: il suo quadrato è -1. Il simbolo i fu introdotto da Eulero; il nome «immaginario» risale a Cartesio, e voleva essere poco lusinghiero. Chiediamo poi che con i si possa calcolare come con i numeri reali: sommarlo, moltiplicarlo per un numero reale, moltiplicare tra loro le espressioni che lo contengono, rispettando le proprietà commutativa, associativa e distributiva. È lo stesso principio che hai seguito in ogni ampliamento precedente: i nuovi numeri devono obbedire alle vecchie regole di calcolo.

Moltiplicando i per un numero reale b otteniamo i numeri della forma bi, che si chiamano **numeri immaginari**: per esempio 3i, -2i, 0,5i, $\sqrt{5}$ i. Sommando un numero reale e un numero immaginario si ottiene un'espressione $a + b$i che non si può semplificare ulteriormente: è un nuovo numero.

IN SINTESI

Definizioni. L'**unità immaginaria** i è un numero tale che $i^2 = -1$. Un **numero complesso** è un'espressione della forma

$$z = a + bi, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Il numero reale a è la **parte reale** di z, $\text{Re}\, z = a$; il numero reale b è la **parte immaginaria** di z, $\text{Im}\, z = b$. La scrittura $a + bi$ si chiama **forma algebrica** del numero complesso. L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

Alcuni esempi: se $z = 3 - 5i$, allora $\text{Re}\, z = 3$ e $\text{Im}\, z = -5$; se $z = -2i$, allora $\text{Re}\, z = 0$ e $\text{Im}\, z = -2$; se $z = 7$, allora $\text{Re}\, z = 7$ e $\text{Im}\, z = 0$. Osserva che la parte immaginaria è il numero reale b, *non* il prodotto bi.

Quando $b = 0$ il numero $a + 0i = a$ è un numero reale: i numeri reali sono numeri complessi particolari, e si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Quando $a = 0$ e $b \neq 0$ il numero bi si dice **immaginario puro**. Il numero 0 è reale, e non lo consideriamo immaginario puro.

APPROFONDIMENTO · I NUMERI COMPLESSI COME COPPIE DI NUMERI REALI

Che cosa «è» il numero i? Nell'Ottocento l'irlandese William Rowan Hamilton diede una risposta che elimina ogni mistero: un numero complesso è semplicemente una **coppia ordinata di numeri reali** $(a; b)$, e $\mathbb{C}$ è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con due operazioni definite così:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d), \qquad (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Le coppie della forma $(a; 0)$ si sommano e si moltiplicano esattamente come i numeri reali a: $(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0)$ e $(a; 0) \cdot (c; 0) = (ac; 0)$; per questo si identificano con essi. La coppia $(0; 1)$ ha invece una proprietà nuova: $(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 - 1; 0 + 0) = (-1; 0)$, cioè il suo quadrato è il numero reale -1. È l'unità immaginaria. Ogni coppia si scrive $(a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1)$, cioè $a + bi$. In questa costruzione nessun numero è «immaginario»: si lavora soltanto con coppie di numeri reali e con le loro operazioni, e si verifica che tutte le proprietà richieste valgono.

7.2 Le operazioni in forma algebrica

7.2.1 Uguaglianza, somma e differenza

Due numeri complessi sono **uguali** se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ e } b = d.$$

Un'uguaglianza tra numeri complessi equivale quindi a *due* uguaglianze tra numeri reali; useremo spesso questo fatto per risolvere equazioni. In particolare $a + b\mathrm{i} = 0$ se e solo se $a = 0$ e $b = 0$.

La **somma** si calcola sommando separatamente le parti reali e le parti immaginarie, come si sommano i monomi simili di un polinomio:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Per esempio $(3 + \mathrm{i}) + (1 + 2\mathrm{i}) = 4 + 3\mathrm{i}$. L'elemento neutro è 0; l'**opposto** di $z = a + b\mathrm{i}$ è $-z = -a - b\mathrm{i}$, perché $z + (-z) = 0$. La **differenza** è la somma con l'opposto: $(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$. Per esempio $(4 + \mathrm{i}) - (2 - 3\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i}$.

7.2.2 Il prodotto

Per moltiplicare due numeri complessi si applica la proprietà distributiva, come per due binomi, e poi si sostituisce i^2 con -1:

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

Non serve ricordare la formula: basta ricordare $\mathrm{i}^2 = -1$. Per esempio $(2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 8 - 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 8 + 10\mathrm{i} + 3 = 11 + 10\mathrm{i}$. Anche i prodotti notevoli restano validi: $(a + b\mathrm{i})^2 = a^2 + 2ab\mathrm{i} + b^2\mathrm{i}^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i}$, e quindi, per esempio, $(1 + \mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$. Il prodotto di un numero reale k per $a + b\mathrm{i}$ è $ka + kb\mathrm{i}$: si moltiplicano per k entrambe le parti.

7.2.3 Il coniugato

Il **coniugato** di $z = a + b\mathrm{i}$ è il numero complesso $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$, che ha la stessa parte reale e la parte immaginaria opposta. Per esempio il coniugato di $3 + 2\mathrm{i}$ è $3 - 2\mathrm{i}$, quello di $-5\mathrm{i}$ è $5\mathrm{i}$, quello di 7 è 7. Due numeri come $a + b\mathrm{i}$ e $a - b\mathrm{i}$ si dicono **complessi coniugati**.

Il coniugato è prezioso perché sommato o moltiplicato per z dà un numero reale:

$$z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = 2b\mathrm{i}, \qquad z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 - b^2\mathrm{i}^2 = a^2 + b^2.$$

Il prodotto $z\overline{z}$ è un prodotto notevole, la differenza di due quadrati, ed è sempre un numero reale maggiore o uguale a zero; vale zero solo se $a = b = 0$, cioè solo se $z = 0$.

IN SINTESI

Proprietà del coniugato. Per ogni $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ e $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \operatorname{Im} z$;
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq 0$, e $z\overline{z} = 0$ solo per $z = 0$;
- z è reale se e solo se $\overline{z} = z$; il coniugato del coniugato è z;
- il coniugato di una somma è la somma dei coniugati: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Dimostriamo l'ultima proprietà; le altre si verificano allo stesso modo (lo farai negli esercizi della sezione «Dimostrare e argomentare»). Siano $z_1 = a + b\mathrm{i}$ e $z_2 = c + d\mathrm{i}$. Abbiamo già calcolato $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$, quindi il suo coniugato è $(ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}$. D'altra parte

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) = ac - ad\mathrm{i} - bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i},$$

che è lo stesso numero. c.v.d.

7.2.4 Il quoziente

Come si divide per un numero complesso? Con lo stesso artificio che usavi per razionalizzare un denominatore come $2 + \sqrt{3}$: si moltiplicano numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, che rende reale il denominatore. Se $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$, allora

$$\frac{1}{z} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

Questo è il **reciproco** (o inverso) di z: infatti $z \cdot \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \dfrac{z\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1$. Per esempio $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$, e infatti $\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}^2 = 1$. In generale il quoziente $\dfrac{z_1}{z_2}$, con $z_2 \neq 0$, si calcola moltiplicando numeratore e denominatore per $\overline{z}_2$.

ESEMPIO SVOLTO

Le quattro operazioni. Dati $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ e $z_2 = 1 - 4\mathrm{i}$, calcola $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Somma e differenza. $z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 - 4)\mathrm{i} = 3 - \mathrm{i}$; $z_1 - z_2 = (2 - 1) + (3 + 4)\mathrm{i} = 1 + 7\mathrm{i}$.

Prodotto. $z_1 z_2 = (2 + 3\mathrm{i})(1 - 4\mathrm{i}) = 2 - 8\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 12\mathrm{i}^2 = 2 - 5\mathrm{i} + 12 = 14 - 5\mathrm{i}$.

Quoziente. Il coniugato del denominatore è $1 + 4\mathrm{i}$ e $(1 - 4\mathrm{i})(1 + 4\mathrm{i}) = 1 + 16 = 17$:

$$\frac{2 + 3\mathrm{i}}{1 - 4\mathrm{i}} = \frac{(2 + 3\mathrm{i})(1 + 4\mathrm{i})}{17} = \frac{2 + 8\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2}{17} = \frac{-10 + 11\mathrm{i}}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}\mathrm{i}.$$

Verifica. Moltiplichiamo il quoziente per z_2: $\dfrac{1}{17}(-10 + 11\mathrm{i})(1 - 4\mathrm{i}) = \dfrac{1}{17}(-10 + 40\mathrm{i} + 11\mathrm{i} - 44\mathrm{i}^2) = \dfrac{1}{17}(34 + 51\mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i}$, che è z_1.

7.2.5 Le potenze di i

Calcoliamo le prime potenze di i, ricordando che $\mathrm{i}^0 = 1$ e che ogni potenza si ottiene dalla precedente moltiplicando per i:

$$\mathrm{i}^0 = 1, \quad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1.$$

Da $i^4 = 1$ in poi i valori si ripetono: $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = -1$, e così via, con periodo 4 (Tabella 7.1). Per calcolare i^n con n naturale basta dividere n per 4: se $n = 4q + r$, con $0 \le r \le 3$, allora $i^n = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$.

Tabella 7.1 Le potenze di i si ripetono con periodo 4: i^n dipende solo dal resto r della divisione di n per 4.

Resto r di n : 4	0	1	2	3
Esponenti n	0, 4, 8, 12, …	1, 5, 9, 13, …	2, 6, 10, 14, …	3, 7, 11, 15, …
i^n	1	i	−1	−i

Per esempio, $2027 = 4 \cdot 506 + 3$, quindi $i^{2027} = i^3 = -i$; e $50 = 4 \cdot 12 + 2$, quindi $i^{50} = -1$. Anche le potenze con esponente negativo si riconducono alla tabella: $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = -i = i^3$, e in generale $i^{-n} = i^{4k-n}$ per qualunque k intero. Un'altra conseguenza: la somma di quattro potenze consecutive di i è sempre zero, perché $1 + i - 1 - i = 0$. Così $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$, che contiene 25 gruppi completi di quattro potenze consecutive, vale 0.

Le potenze di altri numeri complessi si calcolano con lo stesso spirito. Da $(1 + i)^2 = 2i$ segue $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ e $(1 + i)^8 = (-4)^2 = 16$. Nel prossimo capitolo, con la forma trigonometrica, calcolare potenze diventerà molto più rapido.

7.2.6 Un campo che non si può ordinare

Riassumiamo. In $\mathbb{C}$ la somma e il prodotto sono commutativi e associativi, il prodotto è distributivo rispetto alla somma, 0 e 1 sono gli elementi neutri, ogni numero ha l'opposto e ogni numero diverso da 0 ha il reciproco. Un insieme con due operazioni che hanno tutte queste proprietà si chiama **campo**: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi, e anche $\mathbb{C}$ è un campo. Tutte le regole del calcolo letterale che derivano da queste proprietà (prodotti notevoli, scomposizioni, legge di annullamento del prodotto, risoluzione delle equazioni di primo grado) restano valide in $\mathbb{C}$.

Una proprietà di $\mathbb{R}$, però, non sopravvive all'ampliamento: l'**ordinamento**. In $\mathbb{R}$ i numeri sono disposti in fila, e l'ordine è compatibile con le operazioni: si può sommare uno stesso numero ai due membri di una disuguaglianza, e il prodotto di due numeri positivi è positivo. Ne segue che ogni quadrato non nullo è positivo: se $x > 0$ allora $x \cdot x > 0$, se $x < 0$ allora $-x > 0$ e $x^2 = (-x)(-x) > 0$. In particolare $1 = 1^2 > 0$.

Supponiamo che esista in $\mathbb{C}$ un ordinamento con le stesse proprietà. Poiché $i \neq 0$, dovrebbe essere $i > 0$ oppure $i < 0$. In entrambi i casi il quadrato $i^2 = -1$ dovrebbe essere positivo, come abbiamo appena visto. Ma anche $1 > 0$, e sommando le due disuguaglianze si otterrebbe $-1 + 1 > 0$, cioè $0 > 0$: assurdo. Dunque **in $\mathbb{C}$ non si può definire un ordinamento compatibile con le operazioni**, e una scrittura come $2i > i$ o $3 + i < 5$ non ha significato. Si possono confrontare, invece, numeri reali associati ai numeri complessi: le parti reali, le parti immaginarie e, come vedremo, i moduli.

ERRORE FREQUENTE

Le regole dei radicali non valgono per i numeri negativi. È sbagliato scrivere $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6$. La regola $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ vale solo per $a, b \geq 0$. Se si intende $\sqrt{-4} = 2\mathrm{i}$ e $\sqrt{-9} = 3\mathrm{i}$, il prodotto è $2\mathrm{i}\cdot 3\mathrm{i} = 6\mathrm{i}^2 = -6$.

Per lo stesso motivo la scrittura «$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$» va usata con prudenza: applicando la regola dei radicali si «dimostrerebbe» che $\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$. In questo libro i è definito dalla proprietà $\mathrm{i}^2 = -1$, e non manipoliamo radici quadrate di numeri negativi.

Infine: in $\mathbb{C}$ non esiste una relazione «$z_1 < z_2$». Non confrontare mai due numeri complessi non reali con < o >.

7.3 Equazioni nel campo complesso

7.3.1 Le equazioni di secondo grado con discriminante negativo

Il caso più semplice è $x^2 = -k$, con $k > 0$. In $\mathbb{C}$ ha due soluzioni, $x = \mathrm{i}\sqrt{k}$ e $x = -\mathrm{i}\sqrt{k}$: infatti $(\pm\,\mathrm{i}\sqrt{k})^2 = \mathrm{i}^2\,k = -k$. Per esempio $x^2 = -9$ ha le soluzioni $\pm\,3\mathrm{i}$, e $x^2 + 1 = 0$ ha le soluzioni $\pm\,\mathrm{i}$. Non ce ne sono altre, perché $x^2 + k = (x - \mathrm{i}\sqrt{k})(x + \mathrm{i}\sqrt{k})$ e, per la legge di annullamento del prodotto, che vale in ogni campo, il prodotto è zero solo se è zero uno dei fattori.

Consideriamo ora un'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ a coefficienti reali, con $a \neq 0$ e discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ripetiamo il completamento del quadrato con cui, nel primo biennio, hai ricavato la formula risolutiva: moltiplicando per $4a$ e aggiungendo b^2 a entrambi i membri si ottiene

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac, \quad \text{cioè} \quad (2ax + b)^2 = \Delta.$$

Poiché $\Delta < 0$, il numero $-\Delta$ è positivo, e l'equazione $(2ax + b)^2 = -(-\Delta)$ è del tipo appena studiato: $2ax + b = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$. Ricaviamo x:

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c reali, $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. **Tesi:** l'equazione ha in $\mathbb{C}$ le due soluzioni complesse coniugate

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a};$$

la loro somma è $-b/a$, il loro prodotto è c/a, e vale la scomposizione $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Le due soluzioni hanno la stessa parte reale, $-\frac{b}{2a}$, e parti immaginarie opposte: sono coniugate. Le relazioni tra soluzioni e coefficienti che conosci continuano a valere: la somma è $2 \cdot (-\frac{b}{2a}) = -\frac{b}{a}$; il prodotto, che è un numero per il suo coniugato, è $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Così, in $\mathbb{C}$, **ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali ha due soluzioni**: reali e distinte se $\Delta > 0$, reali coincidenti se $\Delta = 0$, complesse coniugate se $\Delta < 0$. Nel capitolo 9 vedremo che questo è un caso particolare di un teorema molto più generale.

ESEMPIO SVOLTO

Un'equazione con $\Delta < 0$. Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^2 - 4x + 13 = 0$ e verifica le soluzioni.

Il discriminante è $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, quindi $\sqrt{-\Delta} = 6$ e

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6\mathrm{i}}{2} = 2 \pm 3\mathrm{i}.$$

Verifica diretta. $(2 + 3\mathrm{i})^2 = 4 + 12\mathrm{i} - 9 = -5 + 12\mathrm{i}$, quindi $(2 + 3\mathrm{i})^2 - 4(2 + 3\mathrm{i}) + 13 = -5 + 12\mathrm{i} - 8 - 12\mathrm{i} + 13 = 0$. Per $2 - 3\mathrm{i}$ il calcolo è lo stesso con il segno di i cambiato.

Verifica con somma e prodotto. $x_1 + x_2 = 4 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = (2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 4 + 9 = 13 = \frac{c}{a}$. Quindi $x^2 - 4x + 13 = (x - 2 - 3\mathrm{i})(x - 2 + 3\mathrm{i})$.

Le relazioni tra soluzioni e coefficienti servono anche al contrario. Per scrivere un'equazione a coefficienti reali con la soluzione $1 + 2\mathrm{i}$, osserviamo che l'altra soluzione deve essere $1 - 2\mathrm{i}$; somma 2 e prodotto 5 danno l'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$.

7.3.2 Equazioni di primo grado in z e nel suo coniugato

Un'equazione di primo grado $az = b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, si risolve come in $\mathbb{R}$ dividendo per a: $z = \frac{b}{a}$. Per esempio, da $(1 + \mathrm{i})z = 3 - \mathrm{i}$ si ricava

$$z = \frac{3 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{(3 - \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{2} = \frac{3 - 3\mathrm{i} - \mathrm{i} + \mathrm{i}^2}{2} = \frac{2 - 4\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i},$$

e infatti $(1 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} + 2 = 3 - \mathrm{i}$.

Se nell'equazione compare anche il coniugato $\bar{z}$, non si può «ricavare z» con i passaggi consueti. Si scrive allora l'incognita in forma algebrica, $z = x + \mathrm{i}y$ con x e y reali (quindi $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$), si separano parte reale e parte immaginaria dei due membri e si uguagliano: si ottiene un sistema di due equazioni nelle incognite reali x e y.

ESEMPIO SVOLTO

Un'equazione con z e il suo coniugato. Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z + \mathrm{i}\bar{z} = 4 + 5\mathrm{i}$.

Poniamo $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\mathrm{i}\bar{z} = \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2 y = y + \mathrm{i}x$, e il primo membro diventa

$$2x + 2\mathrm{i}y + y + \mathrm{i}x = (2x + y) + (x + 2y)\mathrm{i}.$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie dei due membri otteniamo il sistema $2x + y = 4$, $x + 2y = 5$. Sottraendo dalla seconda equazione il doppio della prima: $-3x = -3$, cioè $x = 1$, e quindi $y = 2$. La soluzione è $z = 1 + 2\mathrm{i}$.

Verifica. $2(1 + 2\mathrm{i}) + \mathrm{i}(1 - 2\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 5\mathrm{i} + 2 = 4 + 5\mathrm{i}$.

Con lo stesso metodo si affrontano equazioni non lineari, come $z\bar{z} + z = 7 + \mathrm{i}$: con $z = x + \mathrm{i}y$ diventa $x^2 + y^2 + x + \mathrm{i}y = 7 + \mathrm{i}$, da cui $y = 1$ e $x^2 + x - 6 = 0$, cioè $x = 2$ oppure $x = -3$. Le soluzioni sono $2 + \mathrm{i}$ e $-3 + \mathrm{i}$. Osserva che il sistema ottenuto ha sempre incognite *reali*: è per questo che si può risolvere con i metodi dell'algebra di $\mathbb{R}$.

7.4 Il piano di Gauss

7.4.1 I numeri complessi come punti

Un numero complesso $a + b\mathrm{i}$ è individuato da due numeri reali, la parte reale e la parte immaginaria, così come un punto del piano cartesiano è individuato dalle sue due coordinate. Associamo allora al numero $z = a + b\mathrm{i}$ il punto $P(a; b)$. Questa corrispondenza è biunivoca: a ogni numero complesso corrisponde un punto e a ogni punto un numero complesso. Il piano cartesiano, letto in questo modo, si chiama **piano di Gauss** o **piano complesso**. L'asse delle ascisse, i cui punti rappresentano i numeri reali, si chiama **asse reale** (Re); l'asse delle ordinate, i cui punti rappresentano gli immaginari puri e lo zero, si chiama **asse immaginario** (Im).

L'idea di rappresentare i numeri complessi come punti fu proposta indipendentemente da più autori tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento, tra i quali il cartografo norvegese Caspar Wessel e il ginevrino Jean-Robert Argand; fu l'autorità di Carl Friedrich Gauss a renderla di uso comune. Da allora i numeri complessi hanno smesso di sembrare «immaginari»: si vedono.

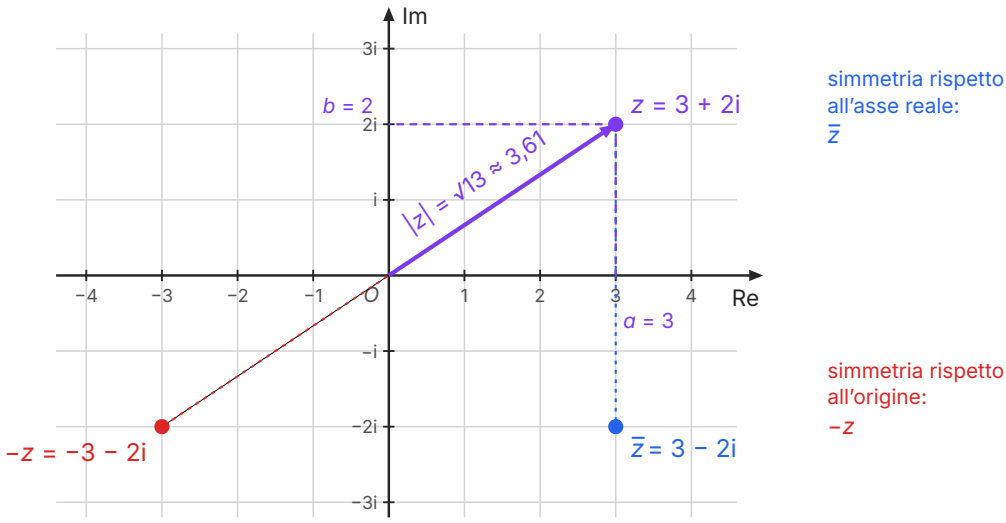
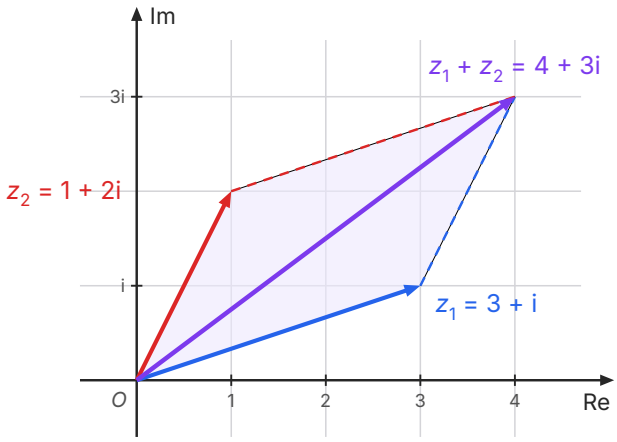


Figura 7.1 Il numero $z = 3 + 2i$ nel piano di Gauss, con il suo coniugato $\bar{z} = 3 - 2i$ e il suo opposto $-z = -3 - 2i$. La parte reale e la parte immaginaria di z sono le coordinate del punto; il segmento da O a z è lungo $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$. Le due scale sono uguali.

Nella Figura 7.1 è rappresentato $z = 3 + 2i$. Il coniugato $\bar{z} = 3 - 2i$ ha la stessa ascissa e l'ordinata opposta: **z e $\bar{z}$ sono simmetrici rispetto all'asse reale**. L'opposto $-z = -3 - 2i$ ha entrambe le coordinate opposte: **z e $-z$ sono simmetrici rispetto all'origine**. Infine $-\bar{z} = -3 + 2i$ è il simmetrico di z rispetto all'asse immaginario. Sono le simmetrie che hai studiato in *Matematica 2* (capitolo 11), con equazioni $x' = x$, $y' = -y$ (simmetria rispetto all'asse x), $x' = -x$, $y' = -y$ (simmetria centrale di centro O) e $x' = -x$, $y' = y$ (simmetria rispetto all'asse y). Ora hanno un nome algebrico: «coniugare» e «cambiare segno».

7.4.2 I numeri complessi come vettori

Possiamo anche associare al numero $z = a + bi$ il vettore che va dall'origine al punto $P(a; b)$, di componenti $(a; b)$, oppure qualunque vettore equipollente a esso (vedi *Matematica 2*, capitolo 13). Questa seconda lettura spiega la somma: sommare due numeri complessi significa sommare le loro parti reali e le loro parti immaginarie, cioè le componenti dei vettori corrispondenti. **La somma di due numeri complessi è rappresentata dal vettore somma**, che si costruisce con la regola del parallelogramma (Figura 7.2).



Si sommano le parti reali e le parti immaginarie:

$(3 + i) + (1 + 2i) =$
$= (3 + 1) + (1 + 2)i =$
$= 4 + 3i$

È la regola del parallelogramma per i vettori.

Figura 7.2 La somma di $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$. Il punto $z_1 + z_2 = 4 + 3i$ è il quarto vertice del parallelogramma che ha per lati i vettori che rappresentano z_1 e z_2. Nella versione interattiva puoi modificare le componenti dei due vettori.

Anche la differenza ha un significato geometrico. Poiché $z_1 = z_2 + (z_1 - z_2)$, il numero $z_1 - z_2$ è rappresentato dal vettore che va dal punto z_2 al punto z_1 (portato, se si vuole, con la coda nell'origine). Il prodotto per un numero reale k moltiplica entrambe le componenti per k: il vettore si allunga o si accorcia di un fattore $|k|$, e cambia verso se $k < 0$. È un'omotetia di centro O e rapporto k.

E il prodotto di due numeri complessi? Il caso più semplice è il prodotto per i: $i(a + bi) = -b + ai$, quindi il punto $(a; b)$ va nel punto $(-b; a)$. È la **rotazione di 90° in senso antiorario** intorno all'origine, con equazioni $x' = -y$, $y' = x$. Nel prossimo capitolo scopriremo che moltiplicare per un qualunque numero complesso significa ruotare e dilatare, e questo darà un significato geometrico a ogni prodotto.

7.4.3 Che cosa vediamo nel piano di Gauss

Torniamo all'equazione da cui siamo partiti. Nel piano cartesiano la parabola $y = x^2 + 1$ non incontra l'asse x, perché le soluzioni reali sono i punti dell'asse x in cui $y = 0$, e non ce ne sono. Le due soluzioni complesse $\pm i$ esistono, ma non stanno sulla retta dei numeri reali: stanno sull'asse immaginario, simmetriche rispetto all'asse reale (Figura 7.3). Attenzione a non confondere i due piani: nel piano cartesiano a sinistra ogni punto rappresenta una coppia $(x; y)$ di numeri reali legati dall'equazione; nel piano di Gauss a destra ogni punto rappresenta un solo numero complesso.

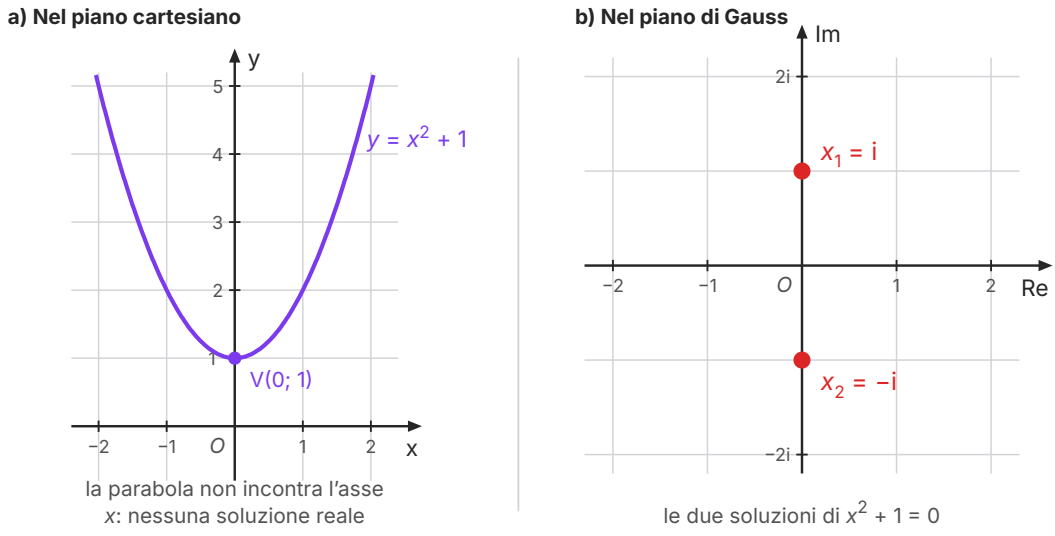


Figura 7.3 a) La parabola $y = x^2 + 1$ ha il vertice in $V(0; 1)$ e non incontra l'asse x: l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali. b) Nel piano di Gauss le due soluzioni complesse $x_1 = i$ e $x_2 = -i$ sono coniugate, quindi simmetriche rispetto all'asse reale. In entrambi i pannelli le scale sui due assi sono uguali.

La Figura 7.4 mostra infine le potenze di i. Moltiplicare per i significa ruotare di 90°: partendo da $1 = i^0$ si arriva a i, poi a −1, a −i e, dopo quattro rotazioni, si torna a 1. I quattro punti sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro O e raggio 1. La periodicità delle potenze di i, che avevamo trovato con il calcolo, qui si vede: quattro rotazioni di 90° fanno un giro completo.

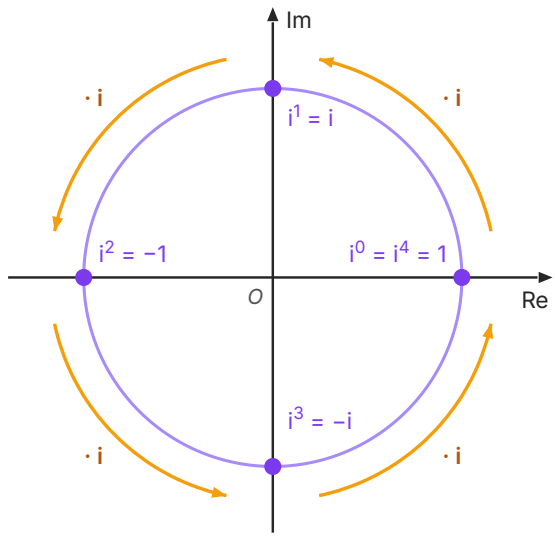


Figura 7.4 Le potenze di i nel piano di Gauss. Ogni moltiplicazione per i ruota il punto di 90° in senso antiorario intorno a O, sulla circonferenza di raggio 1: dopo quattro moltiplicazioni si torna al punto di partenza, perciò $i^4 = 1$.

7.5 Modulo, distanze e luoghi geometrici

7.5.1 Il modulo di un numero complesso

Nella Figura 7.1 il segmento da O al punto $P(3; 2)$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 3 e 2; per il teorema di Pitagora è lungo $\sqrt{13}$. In generale si chiama **modulo** del numero complesso $z = a + bi$ il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

che è la distanza dall'origine del punto che rappresenta z, cioè la lunghezza del vettore corrispondente. Per esempio $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $|-2i| = 2$, $|1 - i| = \sqrt{2}$. Se $z = a$ è reale, $|z| = \sqrt{a^2}$ è il valore assoluto di a: il modulo estende ai numeri complessi il valore assoluto, ed è per questo che si usa lo stesso simbolo.

Dalle proprietà del coniugato segue subito che $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$, che $|z| = 0$ solo per $z = 0$ e che z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$ hanno lo stesso modulo, come si vede anche dalla Figura 7.1: sono quattro punti simmetrici, alla stessa distanza da O. La formula del quoziente si può riscrivere così: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ e $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Il modulo si comporta molto bene rispetto al prodotto.

IN SINTESI

Teorema (modulo del prodotto). **Ipotesi:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. **Tesi:** $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Teorema (disuguaglianza triangolare). **Ipotesi:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. **Tesi:** $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Dimostrazione del primo teorema. Usiamo $|z|^2 = z\bar{z}$ e la proprietà del coniugato di un prodotto:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Poiché i moduli sono numeri reali non negativi, dall'uguaglianza dei quadrati segue l'uguaglianza dei moduli. c.v.d. Ne seguono $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ per $z_2 \neq 0$ e, per induzione su n, $|z^n| = |z|^n$. Per esempio $|(3 + 4\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})| = 5\sqrt{2}$, senza bisogno di calcolare il prodotto, e $|(1 + \mathrm{i})^8| = (\sqrt{2})^8 = 16$, in accordo con il calcolo diretto $(1 + \mathrm{i})^8 = 16$.

Il secondo teorema ha una lettura geometrica immediata nella Figura 7.2. I punti O, z_1 e $z_1 + z_2$ sono i vertici di un triangolo i cui lati sono lunghi $|z_1|$, $|z_2|$ (il lato opposto a O è un vettore equipollente a quello di z_2) e $|z_1 + z_2|$; in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due. L'uguaglianza vale solo quando il triangolo degenera, cioè quando i due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso (o uno dei due è nullo). Nell'esempio della figura $|z_1| = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ e $|z_2| = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, mentre $|z_1 + z_2| = |4 + 3\mathrm{i}| = 5$, che è minore di 5,40. Il modulo della somma, dunque, *non* è la somma dei moduli.

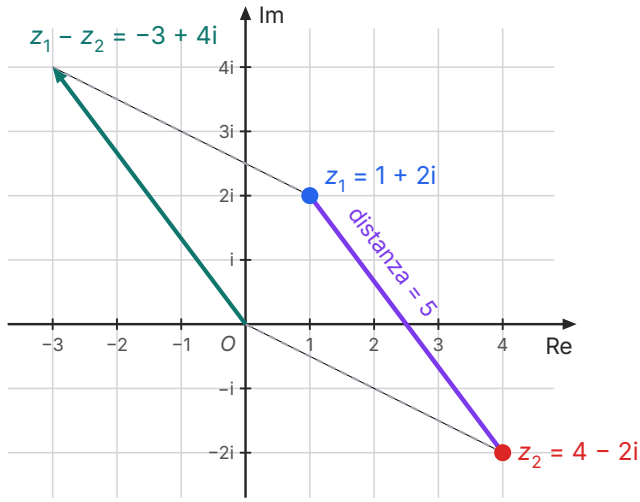
Attenzione. La parte immaginaria di $3 - 5\mathrm{i}$ è -5, non $-5\mathrm{i}$: è sempre un numero reale. Il modulo di $a + b\mathrm{i}$ è $\sqrt{a^2 + b^2}$, non $a + b$, né $\sqrt{a^2 - b^2}$, né $\sqrt{a^2 + (b\mathrm{i})^2}$: per esempio $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, e non 2 né 0. Infine $|z_1 + z_2|$ in generale è diverso da $|z_1| + |z_2|$, mentre $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ vale sempre.

7.5.2 La distanza tra due punti

Se $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ e $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, il numero $z_1 - z_2$ è rappresentato dal vettore che va da z_2 a z_1, quindi il suo modulo è la **distanza tra i punti** che rappresentano z_1 e z_2:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

È la formula della distanza tra due punti della geometria analitica, scritta in una sola espressione. Per esempio la distanza tra $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ e $z_2 = 4 - 2\mathrm{i}$ è $|z_1 - z_2| = |-3 + 4\mathrm{i}| = 5$ (Figura 7.5). Il punto medio del segmento è $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{5}{2}$, cioè il punto $(\frac{5}{2}; 0)$: anche la formula del punto medio si scrive con un solo numero complesso.



$|z_1 - z_2| = |-3 + 4i|$
$= \sqrt{(9 + 16)} = 5$

Il vettore $z_1 - z_2$ è il segmento che va da z_2 a z_1, trasportato nell'origine.

Figura 7.5 La distanza tra $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 - 2i$ è il modulo della differenza $z_1 - z_2 = -3 + 4i$. Il vettore che rappresenta $z_1 - z_2$ (con la coda in O) è equipollente al segmento orientato che va da z_2 a z_1: insieme formano un parallelogramma.

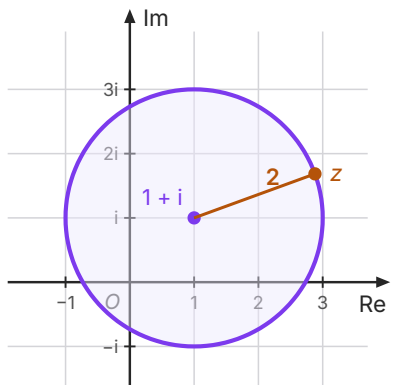
7.5.3 Luoghi geometrici nel piano complesso

Il modulo permette di descrivere in modo compatto molti luoghi geometrici, che in *Matematica 3* hai studiato con le coordinate. Basta tradurre la condizione su z in una condizione sul punto: «$|z - z_0| = r$» significa «il punto z dista r dal punto z_0».

- **Circonferenza.** Se $r > 0$, il luogo dei punti z tali che $|z - z_0| = r$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r. La disuguaglianza $|z - z_0| < r$ descrive il cerchio senza il suo contorno, $|z - z_0| > r$ i punti esterni.
- **Asse di un segmento.** Se $z_1 \neq z_2$, il luogo dei punti z tali che $|z - z_1| = |z - z_2|$ è l'insieme dei punti equidistanti da z_1 e z_2, cioè l'asse del segmento di estremi z_1 e z_2.
- **Rette e semipiani.** Re $z = 2$ è la retta $x = 2$, parallela all'asse immaginario; Im $z = -1$ è la retta $y = -1$; Re $z > 0$ è il semipiano a destra dell'asse immaginario; Re z = Im z è la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Per esempio, ponendo $z = x + iy$, la condizione $|z - (1 + i)| = 2$ diventa $|(x - 1) + (y - 1)i| = 2$, cioè $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$: è la circonferenza di centro (1; 1) e raggio 2 (Figura 7.6a). La condizione $|z - 1| = |z - i|$, elevata al quadrato, diventa $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2$, cioè $-2x = -2y$: è la retta $y = x$, asse del segmento che congiunge i punti 1 e i (Figura 7.6b).

a) $|z - (1 + i)| = 2$



b) $|z - 1| = |z - i|$

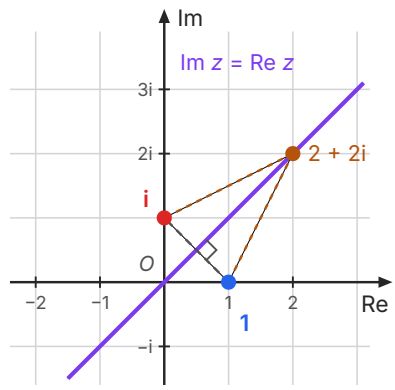


Figura 7.6 a) Il luogo $|z - (1 + i)| = 2$ è la circonferenza di centro $1 + i$ e raggio 2: ogni suo punto z dista 2 dal centro. b) Il luogo $|z - 1| = |z - i|$ è l'asse del segmento di estremi 1 e i, cioè la retta Im z = Re z; il punto $2 + 2i$ dista $\sqrt{5}$ da entrambi gli estremi.

ESEMPIO SVOLTO

Un luogo da riconoscere. Determina il luogo dei punti z del piano di Gauss tali che $|z - 2i| = |z + 4|$, scrivi la sua equazione cartesiana e controlla il risultato con la geometria.

Lettura geometrica. Poiché $|z + 4| = |z - (-4)|$, la condizione dice che z è equidistante dai punti $A(0; 2)$, che rappresenta $2i$, e $B(-4; 0)$, che rappresenta -4. Il luogo è quindi l'asse del segmento AB.

Calcolo. Con $z = x + iy$: $|x + (y - 2)i|^2 = |(x + 4) + iy|^2$, cioè $x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 8x + 16 + y^2$. Semplificando: $-4y = 8x + 12$, ossia $y = -2x - 3$.

Controllo. Il punto medio di AB è $M(-2; 1)$, e infatti $-2 \cdot (-2) - 3 = 1$. Il segmento AB ha coefficiente angolare $\dfrac{2 - 0}{0 - (-4)} = \dfrac{1}{2}$, e la retta trovata ha coefficiente angolare -2: il prodotto è -1, quindi la retta è perpendicolare ad AB nel suo punto medio, come deve essere.

COLLEGAMENTI

I numeri complessi nei circuiti elettrici. Nei circuiti percorsi da corrente alternata gli ingegneri elettrotecnici rappresentano resistori, condensatori e induttori con numeri complessi chiamati **impedenze**, della forma $Z = R + jX$: la parte reale R è la resistenza, la parte immaginaria X (la reattanza) descrive l'effetto di condensatori e induttori, e tutte e due si misurano in ohm. In elettrotecnica l'unità immaginaria si indica con j, perché la lettera i è già usata per l'intensità di corrente.

Le impedenze di elementi collegati in serie si sommano come numeri complessi, e il modulo $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ è il rapporto tra l'ampiezza della tensione e quella della corrente. Con $R = 30\ \Omega$ e $X = 40\ \Omega$, per esempio, si ha $|Z| = 50\ \Omega$. In fisica, come vedrai nel prossimo capitolo, lo stesso linguaggio descrive le oscillazioni studiate nel capitolo 5: una grandezza sinusoidale si rappresenta con un numero complesso che ruota nel piano di Gauss.

SINTESI

- L'unità immaginaria i è un numero tale che $i^2 = -1$. Un numero complesso è $z = a + bi$, con $a = \text{Re}\, z$ e $b = \text{Im}\, z$ reali; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguali parti reali e uguali parti immaginarie.
- Somma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Prodotto: si applica la proprietà distributiva e si sostituisce $i^2 = -1$: $(ac - bd) + (ad + bc)i$.
- Il coniugato di $z = a + bi$ è $\overline{z} = a - bi$; $z + \overline{z} = 2a$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$; il coniugato di una somma (di un prodotto) è la somma (il prodotto) dei coniugati.
- Per dividere si moltiplicano numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore: $1/z = \overline{z}/|z|^2$.
- Le potenze di i si ripetono con periodo 4: $i^n = i^r$, con r resto della divisione di n per 4.
- $\mathbb{C}$ è un campo, ma non è ordinato: nessun ordinamento compatibile con le operazioni è possibile, perché renderebbe positivo sia 1 sia $i^2 = -1$.
- Se $\Delta < 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ a coefficienti reali ha in $\mathbb{C}$ le soluzioni coniugate $(-b \pm i\sqrt{-\Delta})/(2a)$, con somma $-b/a$ e prodotto c/a.
- Le equazioni in cui compare $\overline{z}$ si risolvono ponendo $z = x + iy$ e uguagliando parti reali e parti immaginarie.
- Nel piano di Gauss $a + bi$ è il punto $(a; b)$ o il vettore di componenti $(a; b)$: la somma segue la regola del parallelogramma, $\overline{z}$ e $-z$ sono i simmetrici di z rispetto all'asse reale e all'origine, il prodotto per i è una rotazione di 90°.
- Il modulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la distanza di z da O; $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.
- $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra due punti: $|z - z_0| = r$ è una circonferenza, $|z - z_1| = |z - z_2|$ l'asse di un segmento.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Qual è la parte immaginaria del numero complesso $z = 4 - 7i$?

   A. $-7i$

   B. 7

   C. -7

   D. 4

2. ● Quanto vale i^{23}?
   - **A.** 1
   - **B.** i
   - **C.** −1
   - **D.** −i

3. ● Il coniugato di $-2 + 5i$ è:
   - **A.** $2 - 5i$
   - **B.** $-2 - 5i$
   - **C.** $2 + 5i$
   - **D.** $-5 + 2i$

4. ●● Il prodotto $(1 + 2i)(1 - 2i)$ vale:
   - **A.** 5
   - **B.** −3
   - **C.** $1 - 4i$
   - **D.** $-3 + 4i$

5. ●● Nel piano di Gauss il punto che rappresenta $-\bar{z}$ è il simmetrico del punto che rappresenta z rispetto:
   - **A.** all'asse reale
   - **B.** all'origine
   - **C.** alla bisettrice del primo e terzo quadrante
   - **D.** all'asse immaginario

6. ●● Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $x^2 + 6x + 10 = 0$ sono:
   - **A.** $-3 \pm i$
   - **B.** $3 \pm i$
   - **C.** $-3 \pm 2i$
   - **D.** non ne ha, nemmeno in $\mathbb{C}$

7. ●● Il luogo dei punti z del piano di Gauss tali che $|z - 2| = |z + 2|$ è:
   - **A.** la circonferenza di centro O e raggio 2
   - **B.** l'asse immaginario
   - **C.** l'asse reale
   - **D.** la retta $\mathrm{Re}\, z = 2$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Ogni numero reale è un numero complesso.
   b) $i^2 = 1$.
   c) Il coniugato di un numero reale è il numero stesso.
   d) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ il prodotto $z\bar{z}$ è un numero reale non negativo.
   e) In $\mathbb{C}$ vale $2i > i$.
   f) Per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

9. ● Completa.
   a) Il numero complesso $a + bi$ si dice immaginario puro se _____ .
   b) La parte immaginaria di $a + bi$ è il numero _____ .
   c) Il modulo di $z = a + bi$ è _____ , e nel piano di Gauss rappresenta _____ .
   d) Due numeri complessi sono uguali se e solo se _____ .
   e) Se $r > 0$, il luogo dei punti z tali che $|z - z_0| = r$ è _____ .

Calcolare

10. ● Calcola in forma algebrica.
    a) $(3 - 2i) + (-1 + 5i)$
    b) $(4 + i) - (2 - 3i)$
    c) $(2 - i)(3 + 4i)$
    d) $(1 + 3i)^2$

11. ● Calcola.
    a) i^{14}
    b) i^{101}
    c) i^{-3}
    d) i^{4k+2}, con $k \in \mathbb{N}$

12. ●● Calcola in forma algebrica.
    a) $\dfrac{5 + i}{1 - i}$
    b) $\dfrac{1}{3 + 4i}$
    c) $\dfrac{2 - 3i}{i}$

13. ●● Dati $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 3 + i$, calcola $z_1\bar{z}_2$, il coniugato di $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ e $|z_1 - z_2|$.

14. ●● a) Calcola $(1 + i)^4$ e $(1 + i)^{10}$.
    b) Verifica il calcolo di Bombelli: $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ e $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.

15. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$.
    a) $x^2 + 16 = 0$
    b) $x^2 - 2x + 5 = 0$
    c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$
    d) $x^2 + x + 1 = 0$

16. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$.
    a) $(2 - i)z = 5$
    b) $iz + 3 = 2i - z$

17. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$ ponendo $z = x + iy$.
    a) $z + 2\overline{z} = 6 - i$
    b) $z\overline{z} + z = 7 + i$
    c) $\overline{z} + iz = 0$

18. ●● Scrivi un'equazione di secondo grado a coefficienti reali che abbia tra le sue soluzioni $3 - 2i$. Qual è l'altra soluzione?

19. ● Calcola il modulo.
    a) $5 - 12i$
    b) $-3i$
    c) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$
    d) $(2 + i)(2 - 3i)$, senza calcolare il prodotto

20. ●● Rappresenta nel piano di Gauss $z = -2 + 3i$, $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$ e iz. Che quadrilatero ha per vertici i primi quattro punti? Calcolane l'area.

21. ●● Descrivi e rappresenta nel piano di Gauss i luoghi, scrivendone l'equazione o la disequazione cartesiana.
    a) $|z - 3i| = 1$
    b) $|z + 1 - i| \leq 2$
    c) $\text{Im}\, z = -2$
    d) $|z - 2| = |z - 4i|$

Dimostrare e argomentare

22. ●● Dimostra che, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, il coniugato di $z_1 + z_2$ è $\overline{z}_1 + \overline{z}_2$, e che $z - \overline{z} = 2i\, \text{Im}\, z$.

23. ●● Dimostra che un numero complesso z è reale se e solo se $\overline{z} = z$, e che $\overline{z} = -z$ se e solo se z è immaginario puro oppure nullo.

24. ●● Trova l'errore nella seguente «dimostrazione» che $1 = -1$: «$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$».

25. ●● Spiega perché in $\mathbb{C}$ non si può definire un ordinamento compatibile con le operazioni, esaminando separatamente le ipotesi $i > 0$ e $i < 0$.

26. ●●● Sia $z \neq 0$. Dimostra che $z + \dfrac{1}{z}$ è un numero reale se e solo se z è reale oppure $|z| = 1$. *Suggerimento:* un numero è reale se e solo se è uguale al proprio coniugato.

27. ●●● Dimostra che, se la somma $s = z_1 + z_2$ e il prodotto $p = z_1 z_2$ di due numeri complessi sono entrambi reali, allora z_1 e z_2 sono entrambi reali oppure sono complessi coniugati. *Suggerimento:* di quale equazione di secondo grado sono soluzioni z_1 e z_2?

Problemi

28. ●● *(dati di esempio)* Due elementi di un circuito in corrente alternata, collegati in serie, hanno impedenze $Z_1 = 40 + 30\text{j}\ \Omega$ e $Z_2 = 20 - 110\text{j}\ \Omega$. In serie le impedenze si sommano. Calcola l'impedenza totale e il suo modulo. Se la tensione applicata ha ampiezza 230 V, qual è l'ampiezza della corrente?

29. ●● I numeri $1 + \text{i}$, $4 + 2\text{i}$ e $3 + 5\text{i}$ sono i vertici A, B, C di un triangolo. Usando i moduli, dimostra che il triangolo è rettangolo e isoscele e calcolane l'area. Verifica che $C - B = \text{i}(B - A)$ e spiega il significato geometrico di questa uguaglianza.

30. ●● I punti $A = 1 + 2\text{i}$ e $B = 4 + 3\text{i}$ sono due vertici consecutivi del quadrato $ABCD$, con i vertici in senso antiorario. Usando il fatto che la moltiplicazione per i ruota di 90° in senso antiorario, determina C e D e calcola l'area del quadrato.

31. ●● Determina i numeri complessi che distano 5 dall'origine e $\sqrt{10}$ dal punto $2 + \text{i}$. Interpreta geometricamente il problema.

32. ●● Un drone parte dall'origine e compie tre spostamenti rettilinei, rappresentati in ettometri dai numeri complessi $z_1 = 3 + 4\text{i}$, $z_2 = -1 + 2\text{i}$ e $z_3 = 6 - 3\text{i}$ (l'asse reale punta a est, quello immaginario a nord). Dove si trova alla fine? Quanto dista dal punto di partenza? Quanta strada ha percorso? Quale teorema giustifica il confronto tra gli ultimi due numeri?

Verso la verifica

33. ●● Dati $z = 2 - \text{i}$ e $w = 1 + 3\text{i}$, calcola in forma algebrica il quoziente $(z^2 + w) : \overline{z}$ e il suo modulo.

34. ●● Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^3 + 8 = 0$, scomponendo il primo membro. Rappresenta le soluzioni nel piano di Gauss e verifica che hanno tutte modulo 2. Che figura formano?

35. ●●● **Sfida.** Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 = \overline{z}$. Dimostra che le soluzioni diverse da 0 hanno modulo 1 e sono i vertici di un triangolo equilatero.

PER APPROFONDIRE

- [NAH] Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$: la lunga storia dei numeri immaginari, da Cardano e Bombelli fino alle applicazioni in fisica e ingegneria.
- [NEE] Needham, *Visual Complex Analysis*: i primi capitoli mostrano come leggere geometricamente ogni operazione sui numeri complessi.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sui sistemi numerici, con la costruzione dei numeri complessi e la loro rappresentazione nel piano.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: gli algebristi italiani del Cinquecento e la rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Glossario del capitolo

Asse immaginario
L'asse delle ordinate del piano di Gauss, i cui punti rappresentano gli immaginari puri e lo zero.

Asse reale
L'asse delle ascisse del piano di Gauss, i cui punti rappresentano i numeri reali.

Campo
Un insieme con due operazioni commutative e associative, con elementi neutri, opposti e reciproci (dei numeri diversi da 0) e la proprietà distributiva; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi.

Coniugato
Il numero $z = a - b\mathrm{i}$, che ha la stessa parte reale di $z = a + b\mathrm{i}$ e parte immaginaria opposta.

Disuguaglianza triangolare
La relazione $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, valida per ogni coppia di numeri complessi.

Forma algebrica
La scrittura $a + b\mathrm{i}$ di un numero complesso.

Immaginario puro
Un numero complesso $b\mathrm{i}$ con parte reale nulla e $b \neq 0$.

Impedenza
In elettrotecnica, il numero complesso $Z = R + \mathrm{j}X$ che descrive un elemento di un circuito in corrente alternata.

Modulo di un numero complesso
Il numero reale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, distanza dall'origine del punto che rappresenta $z = a + b\mathrm{i}$.

Numeri complessi coniugati
Due numeri della forma $a + b\mathrm{i}$ e $a - b\mathrm{i}$; le due soluzioni di un'equazione di secondo grado a coefficienti reali con $\Delta < 0$ sono complessi coniugati.

Numero complesso
Un numero della forma $a + b\mathrm{i}$, con a e b reali; l'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

Numero immaginario
Il prodotto $b\mathrm{i}$ di un numero reale b per l'unità immaginaria.

Parte immaginaria
Il numero reale b (non $b\mathrm{i}$) nel numero complesso $z = a + b\mathrm{i}$; si scrive $\mathrm{Im}\, z$.

Parte reale
Il numero reale a nel numero complesso $z = a + b\mathrm{i}$; si scrive $\mathrm{Re}\, z$.

Piano di Gauss
Il piano cartesiano in cui il punto $(a; b)$ rappresenta il numero complesso $a + b\mathrm{i}$; detto anche piano complesso.

Reciproco di un numero complesso
Per $z \neq 0$, il numero $\frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2}$, il cui prodotto per z è 1.

Unità immaginaria
Il numero i tale che $\mathrm{i}^2 = -1$.

Soluzioni

1. C. La parte immaginaria è il numero reale −7, non −7i.

2. D. $23 = 4 \cdot 5 + 3$, quindi $i^{23} = i^3 = -i$.

3. B. Si cambia segno alla sola parte immaginaria.

4. A. È il prodotto di un numero per il suo coniugato: $1^2 + 2^2 = 5$.

5. D. $-\overline{z} = -a + bi$: ascissa opposta, stessa ordinata.

6. A. $\Delta = 36 - 40 = -4$, $x = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$.

7. B. È l'asse del segmento di estremi 2 e −2, cioè la retta $\mathrm{Re}\, z = 0$.

8. a) V. b) F: $i^2 = -1$. c) V. d) V: $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$. e) F: $\mathbb{C}$ non è ordinato, la scrittura non ha significato. f) F: in generale vale solo $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; per esempio $|1 + (-1)| = 0 \neq 2$.

9. a) $a = 0$ e $b \neq 0$. b) reale b. c) $\sqrt{a^2 + b^2}$; la distanza del punto $(a; b)$ dall'origine. d) hanno uguali parti reali e uguali parti immaginarie. e) la circonferenza di centro z_0 e raggio r.

10. a) $2 + 3i$. b) $2 + 4i$. c) $6 + 8i - 3i - 4i^2 = 10 + 5i$. d) $1 + 6i + 9i^2 = -8 + 6i$.

11. a) $14 = 4 \cdot 3 + 2$: −1. b) $101 = 4 \cdot 25 + 1$: i. c) $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} = i$. d) $i^{4k+2} = i^2 = -1$.

12. a) $\dfrac{(5 + i)(1 + i)}{2} = \dfrac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$. b) $\dfrac{3 - 4i}{25} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$. c) $(2 - 3i)(-i) = -2i + 3i^2 = -3 - 2i$.

13. $z_1\overline{z_2} = (1 - 2i)(3 - i) = 1 - 7i$; $z_1 z_2 = 5 - 5i$, il cui coniugato è $5 + 5i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{1 - 7i}{10}$; $z_1 - z_2 = -2 - 3i$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{13}$.

14. a) $(1 + i)^2 = 2i$, quindi $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ e $(1 + i)^{10} = (2i)^5 = 32i^5 = 32i$. b) $(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$; per $(2 - i)^3$ basta coniugare: $2 - 11i$. Le due radici cubiche di Bombelli sommano a $(2 + i) + (2 - i) = 4$.

15. a) $\pm 4i$. b) $\dfrac{\Delta}{4} = 1 - 5 = -4$: $x = 1 \pm 2i$. c) $\Delta = 16 - 80 = -64$: $x = \dfrac{-4 \pm 8i}{8} = -\dfrac{1}{2} \pm i$. d) $\Delta = -3$: $x = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

16. a) $z = \dfrac{5}{2 - i} = \dfrac{5(2 + i)}{5} = 2 + i$. b) $(1 + i)z = -3 + 2i$, $z = \dfrac{(-3 + 2i)(1 - i)}{2} = \dfrac{-1 + 5i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

17. a) $3x - iy = 6 - i$: $x = 2$, $y = 1$, $z = 2 + i$. b) $x^2 + y^2 + x + iy = 7 + i$: $y = 1$, $x^2 + x - 6 = 0$, $z = 2 + i$ oppure $z = -3 + i$. c) $x - iy + ix - y = (x - y) + (x - y)i = 0$: $x = y$; le soluzioni sono infinite, $z = t + ti$ con $t \in \mathbb{R}$ (la bisettrice del primo e terzo quadrante).

18. L'altra soluzione è $3 + 2i$; somma 6, prodotto $9 + 4 = 13$: $x^2 - 6x + 13 = 0$ (o un suo multiplo).

19. a) $\sqrt{25 + 144} = 13$. b) 3. c) $\dfrac{|1 + i|}{|1 - i|} = 1$ (infatti il quoziente è i). d) $|2 + i| \cdot |2 - 3i| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{65}$.

20. $\overline{z} = -2 - 3i$, $-z = 2 - 3i$, $-\overline{z} = 2 + 3i$, $iz = -3 - 2i$. I primi quattro punti $(\pm 2; \pm 3)$ sono i vertici di un rettangolo con i lati paralleli agli assi, lunghi 4 e 6: area 24. Il punto iz si ottiene ruotando z di 90° in senso antiorario intorno a O.

21. a) Circonferenza di centro 3i, cioè (0; 3), e raggio 1: $x^2 + (y - 3)^2 = 1$. b) $|z - (-1 + i)| \leq 2$: cerchio (contorno compreso) di centro $(-1; 1)$ e raggio 2: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$. c) La retta $y = -2$. d) Asse del segmento di estremi (2; 0) e (0; 4): $(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 4)^2$, cioè $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ (passa per il punto medio (1; 2)).

22. Con $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, il cui coniugato è $(a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Inoltre $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\, z$.

23. Con $z = a + b\mathrm{i}$: $\overline{z} = z \Leftrightarrow a - b\mathrm{i} = a + b\mathrm{i} \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z$ reale. $z = -z \Leftrightarrow a - b\mathrm{i} = -a - b\mathrm{i} \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z = b\mathrm{i}$, immaginario puro se $b \neq 0$, nullo se $b = 0$.

24. Il passaggio sbagliato è $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$: la regola $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ vale solo per $a, b \geq 0$. I primi due passaggi e gli ultimi sono corretti.

25. Traccia. In un ordinamento compatibile con le operazioni il prodotto di due positivi è positivo e $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$. Se $\mathrm{i} > 0$, allora $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 > 0$. Se $\mathrm{i} < 0$, allora $-\mathrm{i} > 0$ e $(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 = -1 > 0$. In entrambi i casi $-1 > 0$; ma anche $1 = 1 \cdot 1 > 0$ (oppure $1 = (-1)(-1) > 0$), e sommando si ottiene $0 > 0$, assurdo.

26. Poiché $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, il numero $w = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ha coniugato $\overline{w} = \overline{z} + \frac{z}{|z|^2}$. Allora $w - \overline{w} = (z - \overline{z}) - \frac{z - z}{|z|^2} = (z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)$, e w è reale se e solo se questo prodotto è 0. Per la legge di annullamento del prodotto: $z = \overline{z}$, cioè z reale, oppure $|z|^2 = 1$, cioè $|z| = 1$. Per esempio $z = \mathrm{i}$ dà $\mathrm{i} + \frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} - \mathrm{i} = 0$, reale.

27. $(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - sx + p$, quindi z_1 e z_2 sono le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $x^2 - sx + p = 0$, che ha coefficienti reali. Se $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$ le soluzioni sono reali; se $\Delta < 0$ sono complesse coniugate, per il teorema sulle equazioni con discriminante negativo. Poiché un'equazione di secondo grado non ha altre soluzioni oltre a queste due (legge di annullamento del prodotto), z_1 e z_2 sono proprio quelle.

28. $Z = Z_1 + Z_2 = 60 - 80\mathrm{j}\ \Omega$; $|Z| = \sqrt{3600 + 6400} = 100\ \Omega$. L'ampiezza della corrente è $\frac{230}{100} = 2{,}3$ A.

29. $B - A = 3 + \mathrm{i}$, $C - B = -1 + 3\mathrm{i}$, $C - A = 2 + 4\mathrm{i}$: $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{20}$. Poiché $AB^2 + BC^2 = 20 = AC^2$, il triangolo è rettangolo in B (Pitagora inverso) e isoscele. Area $\frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$. $\mathrm{i}(B - A) = \mathrm{i}(3 + \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i} = C - B$: il vettore BC si ottiene ruotando di 90° il vettore AB, quindi i due lati sono perpendicolari e lunghi uguali.

30. $B - A = 3 + \mathrm{i}$; ruotandolo di 90°: $\mathrm{i}(3 + \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$. Allora $C = B + (-1 + 3\mathrm{i}) = 3 + 6\mathrm{i}$ e $D = A + (-1 + 3\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}$. Area $= |B - A|^2 = 10$. (Verifica: $D - C = -3 - \mathrm{i} = -(B - A)$.)

31. Con $z = x + \mathrm{i}y$: $x^2 + y^2 = 25$ e $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Sottraendo: $4x + 2y - 5 = 15$, cioè $y = 10 - 2x$; sostituendo, $5x^2 - 40x + 75 = 0$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x = 3$ oppure $x = 5$. Le soluzioni sono $3 + 4\mathrm{i}$ e 5. Geometricamente sono i punti di intersezione della circonferenza di centro O e raggio 5 con quella di centro $2 + \mathrm{i}$ e raggio $\sqrt{10}$.

32. Posizione finale: $z_1 + z_2 + z_3 = 8 + 3\mathrm{i}$, cioè 8 hm a est e 3 hm a nord. Distanza dalla partenza: $|8 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{73} \approx 8{,}54$ hm. Strada percorsa: $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 5 + \sqrt{5} + \sqrt{45} \approx 5 + 2{,}24 + 6{,}71 = 13{,}94$ hm. La distanza è minore della strada per la disuguaglianza triangolare (applicata due volte).

33. $z^2 = 4 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 3 - 4\mathrm{i}$; $z^2 + w = 4 - \mathrm{i}$; $\overline{z} = 2 + \mathrm{i}$; $\frac{4 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \frac{(4 - \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{5} = \frac{7 - 6\mathrm{i}}{5} = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}$. Modulo: $\frac{|4 - \mathrm{i}|}{|2 + \mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{85}}{5} \approx 1{,}84$.

34. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; $x = -2$ oppure $x^2 - 2x + 4 = 0$, con $\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 = -3$: $x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Moduli: $|-2| = 2$, $|1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$. I tre punti stanno sulla circonferenza di centro O e raggio 2 e sono i vertici di un triangolo equilatero: le distanze reciproche valgono tutte $2\sqrt{3}$ (per esempio $|(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})| = 2\sqrt{3}$ e $|(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) + 2| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$).

35. Con $z = x + \mathrm{i}y$: $x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = x - \mathrm{i}y$, quindi $x^2 - y^2 = x$ e $2xy = -y$, cioè $y(2x + 1) = 0$. Se $y = 0$: $x^2 = x$, $x = 0$ oppure $x = 1$. Se $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, $y^2 = \frac{3}{4}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soluzioni: 0, 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Le tre non nulle hanno modulo 1, perché $|z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ (e 1 ha modulo 1); le distanze reciproche valgono tutte $\sqrt{3}$: per esempio $|1 - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})| = |\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|$, il cui quadrato è $\frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$, e i due punti coniugati distano $\sqrt{3}$ tra loro. Il triangolo è equilatero.