CAPITOLO

6

Trigonometria: teoremi, problemi e modelli

Una sola distanza misurata con cura, e poi soltanto angoli: il resto del mondo si calcola.

OBIETTIVI

1. Discutere completamente il caso LLA, con il teorema dei seni e con il teorema del coseno.
2. Dimostrare e applicare il teorema delle proiezioni, il teorema del coseno e la formula di Erone.
3. Calcolare i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta, mediane, bisettrici e aree di quadrilateri.
4. Usare la trigonometria in geometria analitica: inclinazione, angolo fra rette, area in coordinate.
5. Impostare e risolvere problemi con un angolo incognito, con equazioni, disequazioni, massimi e discussione grafica.
6. Applicare la trigonometria a topografia, navigazione e forze, valutando la propagazione degli errori.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Risolvere un triangolo: richiamo e caso LLA 2
6.2 Altri teoremi sui triangoli 6
6.3 Quadrilateri e geometria analitica 10
6.4 Problemi con un angolo incognito 11
6.5 Misure, rotte e forze 14

Matematica 4 · Parte II · Funzioni periodiche e trigonometria · versione 1.0
Capitolo 6: Trigonometria: teoremi, problemi e modelli · pagine 171–194 del volume completo · estratto per lo studio

Un geometra deve misurare l'altezza di una collina, ma non può salirci né raggiungerne la base, perché in mezzo c'è un bosco. Un pilota deve sapere quanto è lontano dal punto di partenza dopo due tratti di volo con rotte diverse. Un ingegnere deve calcolare la forza complessiva che due cavi esercitano sul gancio di una gru. Una studentessa, al compito di matematica, deve trovare per quale angolo il perimetro di un triangolo inscritto in una semicirconferenza è massimo. Sembrano quattro problemi diversi; sono lo stesso problema: in un triangolo si conoscono alcuni lati e alcuni angoli, e si vogliono gli altri.

La **trigonometria**, cioè letteralmente la «misura dei triangoli», è lo strumento che risolve questo problema. In *Matematica 2* ne hai visto i teoremi fondamentali: i teoremi sui triangoli rettangoli, il teorema dei seni, il teorema del coseno. In questo capitolo li richiamiamo in una pagina, chiudiamo la discussione del caso più delicato, quello in cui i triangoli possibili sono due, e aggiungiamo nuovi teoremi: il teorema delle proiezioni, la formula di Erone per l'area, le formule per i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta. Poi mettiamo al lavoro tutta la goniometria dei capitoli precedenti nei **problemi con un angolo incognito**, dove una grandezza geometrica diventa una funzione dell'angolo, e chiudiamo con le applicazioni: topografia, navigazione, forze, astronomia.

In tutto il capitolo è ammessa la calcolatrice scientifica, impostata in gradi (DEG) quando gli angoli sono in gradi. I risultati approssimati si danno con tre o quattro cifre significative, e nell'ultima sezione vedremo perché non ha senso darne di più.

6.1 Risolvere un triangolo: richiamo e caso LLA

6.1.1 Che cosa sappiamo già

In un triangolo ABC indichiamo con a, b, c i lati opposti ai vertici A, B, C e con α, β, γ gli angoli in quei vertici; S è l'area e R il raggio della circonferenza circoscritta. In *Matematica 2* il raggio della circoscritta si chiamava r: da questo capitolo riserviamo r alla circonferenza inscritta. La Tabella 6.1 raccoglie gli strumenti già noti (vedi *Matematica 2*, capitolo 12).

Tabella 6.1 Gli strumenti della trigonometria già noti da *Matematica 2*.

Strumento	Enunciato	Quando serve
Triangolo rettangolo (retto in A)	$b = a \operatorname{sen}\beta = a\cos\gamma$; $b = c\operatorname{tg}\beta$	due elementi noti, almeno un lato
Area	$S = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$	due lati e l'angolo compreso
Teorema della corda	corda $= 2R\operatorname{sen}\alpha$, α angolo alla circonferenza	corde e angoli inscritti
Teorema dei seni	$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$	ALA, LAA; LLA (con cautela)
Teorema del coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	LAL; LLL (gli angoli dai lati)

Ricordiamo che un triangolo è determinato da tre lati (LLL), da due lati e dall'angolo compreso (LAL), da un lato e due angoli (ALA e LAA): sono i criteri di congruenza, e a ciascuno corrisponde un modo di risolvere il triangolo con il teorema dei seni o del coseno. Con i soli tre angoli il triangolo non è determinato, perché tutti i triangoli simili hanno gli stessi angoli. Resta un caso: due lati e un angolo non compreso fra essi, il caso **LLA**, che non è un criterio di congruenza.

6.1.2 Il caso LLA discusso completamente

Supponiamo noti l'angolo α, il lato $b = AC$ adiacente ad α e il lato $a = BC$ opposto ad α. Il vertice C è fissato sull'uno dei lati dell'angolo, a distanza b dal vertice A; il vertice B deve stare sull'altro lato dell'angolo e a distanza a da C, cioè sulla circonferenza di centro C e raggio a. Il numero dei triangoli è il numero dei punti in cui questa circonferenza taglia il lato dell'angolo, esclusa l'origine A (Figura 6.1). Tutto dipende dalla distanza di C dalla retta su cui cerchiamo B, cioè dall'altezza

$$h = b\operatorname{sen}\alpha.$$

Se α è acuto, la circonferenza non raggiunge la retta quando $a < h$; la tocca in un punto quando $a = h$, e il triangolo è rettangolo in B; la taglia in due punti, entrambi sul lato dell'angolo, quando $h < a < b$; quando $a \geq b$ la taglia ancora in due punti, ma uno dei due cade dalla parte opposta di A o coincide con A, e il triangolo è uno solo. Se α è retto od ottuso, l'angolo in B deve essere acuto e il lato opposto ad α è il più lungo del triangolo: c'è un triangolo se $a > b$, nessuno se $a \leq b$. La Tabella 6.2 riassume la **discussione del caso LLA**.

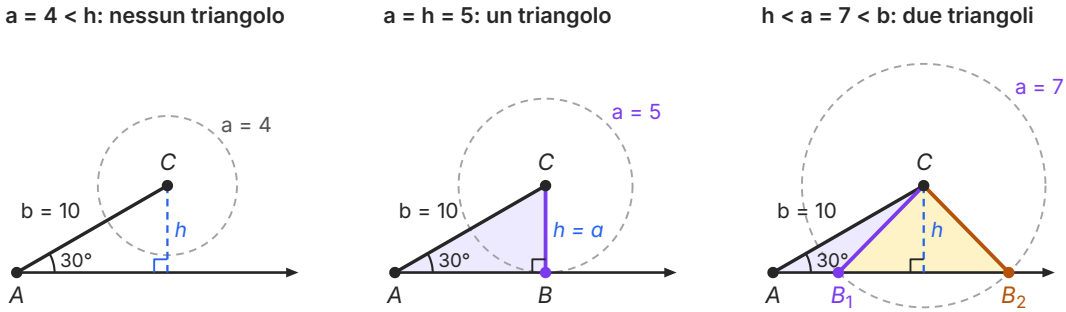


Figura 6.1 Il caso LLA con $\alpha = 30°$ e $b = 10$, quindi $h = 5$. La circonferenza di centro C e raggio a non incontra il lato orizzontale dell'angolo se $a = 4$, lo tocca nel piede dell'altezza se $a = 5$, lo taglia in due punti B_1 e B_2 se $a = 7$: i due triangoli AB_1C e AB_2C hanno gli stessi dati e forme diverse.

Tabella 6.2 Quanti triangoli hanno due lati a, b e l'angolo α opposto ad a; $h = b \operatorname{sen} \alpha$.

Angolo α	Condizione	Triangoli	Sen $\beta = b \operatorname{sen} \alpha / a$
acuto	$a < h$	0	sen $\beta > 1$: impossibile
acuto	$a = h$	1	sen $\beta = 1$, $\beta = 90°$
acuto	$h < a < b$	2	β acuto e $\beta' = 180° - \beta$, entrambi accettabili
acuto	$a \geq b$	1	solo β acuto ($\beta \leq \alpha$)
retto od ottuso	$a \leq b$	0	nessun β con $\alpha + \beta < 180°$
retto od ottuso	$a > b$	1	solo β acuto

6.1.3 L'ambiguità come equazione goniometrica

Con il teorema dei seni il caso LLA diventa un'equazione goniometrica elementare (capitolo 3). Dalla proporzione $a : \operatorname{sen} \alpha = b : \operatorname{sen} \beta$ si ricava

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} = k, \qquad \text{con } 0 < \beta < \pi - \alpha.$$

L'incognita β è un angolo di un triangolo, quindi va cercata nell'intervallo $]0; \pi[$, e anzi in $]0; \pi - \alpha[$, perché la somma $\alpha + \beta$ deve lasciare spazio al terzo angolo. Nell'intervallo $]0; \pi[$ l'equazione $\operatorname{sen} \beta = k$ ha due soluzioni se $0 < k < 1$, cioè $\beta_1 = \arcsen k$ e $\beta_2 = \pi - \arcsen k$, una sola se $k = 1$ e nessuna se $k > 1$. Poi si scartano le soluzioni che non rispettano $\beta < \pi - \alpha$. Ecco perché la calcolatrice, che dà soltanto $\arcsen k$, non basta: la seconda soluzione deve venire da noi.

C'è anche una via del tutto algebrica. Il teorema del coseno applicato all'angolo α dà $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, che è un'equazione di secondo grado nell'incognita c:

$$c^2 - 2b\cos\alpha \cdot c + b^2 - a^2 = 0, \quad c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}.$$

Il discriminante è positivo, nullo o negativo secondo che a sia maggiore, uguale o minore di $h = b$ sen α; il prodotto delle radici, $b^2 - a^2$, dice se le radici hanno lo stesso segno ($a < b$) o segno opposto ($a > b$), e solo le radici positive sono lati. Ritroviamo così, con il linguaggio delle equazioni di secondo grado, tutte le righe della tabella: due approcci diversi, sintetico e algebrico, alla stessa domanda.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In un triangolo $\alpha = 30°$ e $b = 10$. Quanti triangoli si ottengono, e quali, se $a = 4$, $a = 5$, $a = 7$, $a = 12$?

Soluzione. L'altezza è $h = 10 \cdot \mathrm{sen}\,30° = 5$.

$a = 4$: sen $\beta = 10 \cdot 0{,}5 / 4 = 1{,}25 > 1$. Nessun triangolo: la circonferenza di raggio 4 non raggiunge il lato dell'angolo.

$a = 5$: sen $\beta = 1$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$; il triangolo è rettangolo in B e $c = b\cos\alpha = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$.

$a = 7$: sen $\beta = 5/7 \approx 0{,}7143$, quindi $\beta_1 \approx 45{,}58°$ oppure $\beta_2 \approx 180° - 45{,}58° = 134{,}42°$. Entrambi sono compatibili con α: $30° + 134{,}42° < 180°$. Primo triangolo: $\gamma_1 \approx 104{,}42°$, $c_1 = a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1 / \mathrm{sen}\,\alpha \approx 14 \cdot 0{,}9686 \approx 13{,}56$. Secondo triangolo: $\gamma_2 \approx 15{,}58°$, $c_2 \approx 14 \cdot 0{,}2686 \approx 3{,}76$. Controllo con la formula algebrica: $c = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{24} \approx 8{,}660 \pm 4{,}899$, cioè 13,56 e 3,76.

$a = 12$: sen $\beta = 5/12 \approx 0{,}4167$, $\beta_1 \approx 24{,}62°$; il supplementare 155,38° va scartato, perché $30° + 155{,}38° > 180°$. Un solo triangolo, con $\gamma \approx 125{,}38°$ e $c = 24\,\mathrm{sen}\,\gamma \approx 19{,}57$. La formula algebrica dà $c = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{119}$: una radice positiva, circa 19,57, e una negativa, circa −2,25, che non è un lato.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare l'angolo ottuso. Il tasto $\sin^{-1}$ della calcolatrice restituisce sempre un angolo fra −90° e 90°. Quando con il teorema dei seni cerchi un angolo, controlla sempre anche il supplementare: è accettabile se la somma con gli angoli già noti resta minore di 180°. Un indizio utile: al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore. Se cerchi l'angolo opposto al lato più lungo, può essere ottuso, e conviene ricavarlo con il teorema del coseno, che non è ambiguo perché il coseno distingue gli angoli acuti dagli ottusi.

DEG o RAD? In modalità RAD, sen 30 vale circa −0,988, il seno di 30 radianti. Nei problemi sui triangoli con angoli in gradi la calcolatrice deve essere in DEG; nei problemi con un angolo incognito in radianti, in RAD.

6.2 Altri teoremi sui triangoli

6.2.1 Il teorema delle proiezioni

Dal vertice A conduciamo l'altezza relativa al lato BC, con piede H. I segmenti BH e HC sono le **proiezioni** dei lati AB e AC sulla retta BC. Nel triangolo rettangolo ABH il cateto BH è adiacente all'angolo β, quindi $BH = c\cos\beta$; nel triangolo rettangolo AHC allo stesso modo $HC = b\cos\gamma$. Se β e γ sono acuti, H cade fra B e C e il lato a è la somma delle due proiezioni (Figura 6.2, a).

Se invece β è ottuso, H cade sul prolungamento di CB oltre B (Figura 6.2, b). L'angolo acuto del triangolo rettangolo ABH in B è $180° - \beta$, quindi $HB = c\cos(180° - \beta) = -c\cos\beta$, e il lato a è la differenza $HC - HB = b\cos\gamma + c\cos\beta$: la stessa formula, perché ora $\cos\beta$ è negativo. Se β è retto, H coincide con B e $\cos\beta = 0$; anche in questo caso la formula vale. Ripetendo il ragionamento per gli altri lati si ottiene il

IN SINTESI

Teorema delle proiezioni. Ipotesi: ABC è un triangolo qualsiasi. **Tesi:** ogni lato è uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di essi forma con il primo:

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$; $\quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$; $\quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

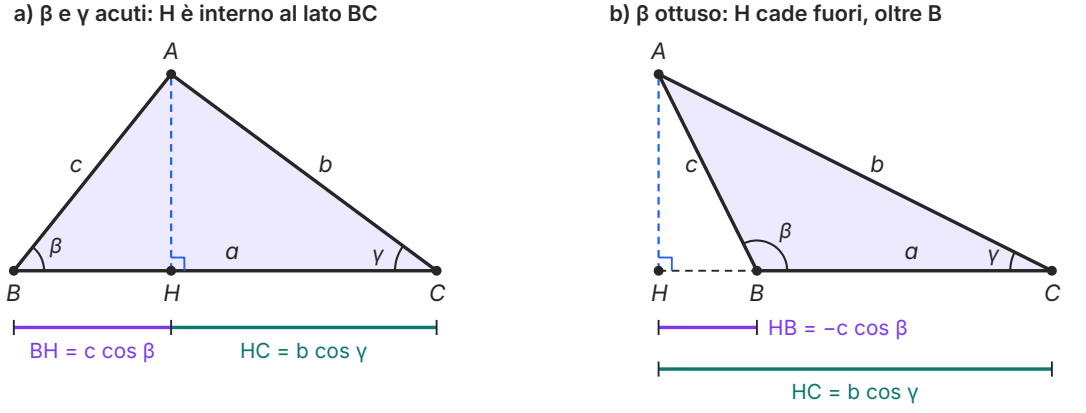


Figura 6.2 Il teorema delle proiezioni. a) Con β e γ acuti il piede H dell'altezza da A cade sul lato BC, che è la somma delle proiezioni $c\cos\beta$ e $b\cos\gamma$. b) Con β ottuso H cade oltre B: il lato BC è la differenza $HC - HB$, e il termine $c\cos\beta$, negativo, si sottrae da solo.

6.2.2 Il teorema del coseno: due dimostrazioni

In *Matematica 2* il teorema del coseno è stato dimostrato con le coordinate: messo C nell'origine e B nel punto $(a; 0)$, il vertice A ha coordinate $(b\cos\gamma; b\,\text{sen}\,\gamma)$, e la formula della distanza dà subito $c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + b^2\text{sen}^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. È una dimostrazione analitica: il calcolo fa tutto il lavoro, e vale senza distinguere angoli acuti e ottusi, perché le coordinate di A vengono dalle definizioni di seno e coseno.

Il teorema delle proiezioni ne dà una dimostrazione che non usa alcun sistema di riferimento. Moltiplichiamo la prima uguaglianza per a, la seconda per b, la terza per c:

$$a^2 = ab\cos\gamma + ac\cos\beta, \qquad b^2 = ab\cos\gamma + bc\cos\alpha, \qquad c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha.$$

Sommando membro a membro la seconda e la terza e sottraendo la prima, i termini in $\cos\beta$ e in $\cos\gamma$ si cancellano e resta $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$, cioè il teorema del coseno. c.v.d.

Le due dimostrazioni mostrano bene la specificità dei due approcci di cui parlano le *Indicazioni*. L'approccio analitico è uniforme e quasi meccanico: una volta scelto il riferimento, basta calcolare. L'approccio sintetico richiede un'idea (proiettare i lati) e la discussione dei casi in cui H cade fuori dal lato, ma rivela un legame fra teoremi che il calcolo nasconde. Euclide, che non conosceva il coseno, enunciava questo stesso risultato negli *Elementi* (libro II, proposizioni 12 e 13) come una correzione del teorema di Pitagora, con il doppio rettangolo formato da un lato e dalla proiezione dell'altro.

6.2.3 La formula di Erone

Se conosciamo i tre lati, possiamo calcolare l'area senza passare per gli angoli. Partiamo da $S = \tfrac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha$ e ricaviamo $\text{sen}\,\alpha$ dal teorema del coseno. Poiché $0 < \alpha < \pi$, il seno è positivo e $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$; quindi

$$16S^2 = 4b^2c^2(1 - \cos^2\alpha) = 4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Una differenza di quadrati si scompone due volte:

$$16S^2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]$$

$$= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c).$$

Introduciamo il **semiperimetro** $p = (a + b + c)/2$. Allora $a + b + c = 2p$, $b + c - a = 2(p - a)$, $a - b + c = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p - c)$, e il prodotto vale $16p(p - a)(p - b)(p - c)$. Dividendo per 16 ed estraendo la radice si ottiene la **formula di Erone**, che porta il nome di Erone di Alessandria, matematico e ingegnere greco dell'età imperiale romana. Attenzione: nella formula compare il semiperimetro, non il perimetro; chi usa il perimetro ottiene un numero molto più grande dell'area, e se ne accorge confrontandolo con $\tfrac{1}{2}bc$, che l'area non può superare.

6.2.4 I raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta

Il teorema dei seni dà $a = 2R \operatorname{sen}\alpha$, e la formula dell'area dà $\operatorname{sen}\alpha = 2S/(bc)$. Sostituendo, $a = 4RS/(bc)$, da cui il **raggio della circonferenza circoscritta** in funzione dei lati e dell'area. Per la circonferenza inscritta, di centro l'**incentro** I (il punto d'incontro delle bisettrici), congiungiamo I con i tre vertici: il triangolo si divide in tre triangoli che hanno per basi i lati a, b, c e per altezza il raggio r, perché la circonferenza inscritta è tangente ai lati e il raggio nel punto di contatto è perpendicolare al lato. Allora $S = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = pr$.

IN SINTESI

Teorema (formula di Erone). Ipotesi: a, b, c sono i lati di un triangolo, $p = (a + b + c)/2$. **Tesi:** l'area è

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Raggi. Circonferenza circoscritta: $R = \dfrac{abc}{4S}$. Circonferenza inscritta: $r = \dfrac{S}{p}$.

6.2.5 Mediane e bisettrici

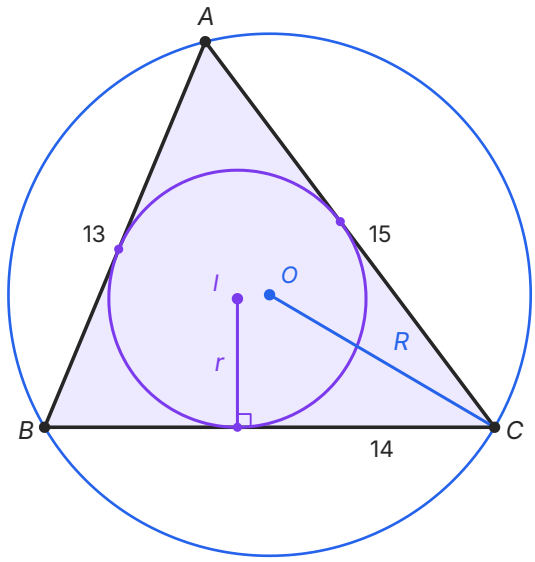
Il teorema del coseno dà anche la lunghezza delle **mediane**. Sia M il punto medio di BC e $m = AM$. I triangoli ABM e AMC hanno in M angoli supplementari, θ e $\pi - \theta$, e $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$. Applichiamo il teorema del coseno a entrambi:

$$c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - am\cos\theta, \qquad b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + am\cos\theta.$$

Sommando, il termine con il coseno scompare: $b^2 + c^2 = 2m^2 + a^2/2$, e quindi

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Per la **bisettrice** AD dell'angolo α basta un cenno. I triangoli ABD e ADC hanno in A angoli uguali ad $\alpha/2$, e la somma delle loro aree è l'area del triangolo: $\tfrac{1}{2}c \cdot AD \cdot \operatorname{sen}(\alpha/2) + \tfrac{1}{2}b \cdot AD \cdot \operatorname{sen}(\alpha/2) = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$. Con la formula di duplicazione $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ (capitolo 2) si ottiene $AD = 2bc\cos(\alpha/2)/(b + c)$.



p = (13 + 14 + 15) : 2 = 21

S = √(21 · 7 · 6 · 8) = 84

R = abc : (4S) = 65/8 = 8,125

r = S : p = 84 : 21 = 4

O: circocentro

I: incentro

Figura 6.3 Il triangolo di lati 13, 14 e 15 con la circonferenza circoscritta (centro O, raggio $R = 65/8$) e la circonferenza inscritta (centro I, raggio $r = 4$). Il raggio inscritto è perpendicolare a ciascun lato nel punto di contatto. Disegno in scala.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un triangolo ha i lati $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$ (in centimetri). Calcola l'area, i raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta, la mediana e la bisettrice uscenti da A, e gli angoli.

Area. $p = 42/2 = 21$; $p - a = 7$, $p - b = 6$, $p - c = 8$. Quindi $S = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = \sqrt{7056} = 84$ cm^2. L'altezza relativa al lato di 14 cm è $2 \cdot 84/14 = 12$ cm.

Raggi. $R = 13 \cdot 14 \cdot 15/(4 \cdot 84) = 2730/336 = 65/8 = 8{,}125$ cm; $r = 84/21 = 4$ cm (Figura 6.3).

Mediana. $m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 225 + 2 \cdot 169 - 196} = \tfrac{1}{2}\sqrt{592} = \sqrt{148} \approx 12{,}17$ cm.

Bisettrice. $\cos\alpha = (225 + 169 - 196)/(2 \cdot 15 \cdot 13) = 198/390 = 33/65$; con la formula di bisezione $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + 33/65)/2} = \sqrt{49/65} = 7/\sqrt{65}$, e $AD = 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 7/(28\sqrt{65}) \approx 12{,}09$ cm.

Angoli. $\alpha = \arccos(33/65) \approx 59{,}49°$; $\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac) = 140/364 = 5/13$, $\beta \approx 67{,}38°$; $\gamma \approx 180° - 59{,}49° - 67{,}38° = 53{,}13°$. Controllo: $\cos\gamma = (196 + 225 - 169)/420 = 3/5$, e infatti $\arccos 0{,}6 \approx 53{,}13°$.

6.3 Quadrilateri e geometria analitica

6.3.1 L'area di un quadrilatero convesso

Le diagonali AC e BD di un quadrilatero convesso si incontrano in un punto O interno e dividono il quadrilatero in quattro triangoli. Se θ è uno degli angoli formati dalle diagonali, gli angoli in O dei quattro triangoli valgono alternativamente θ e $\pi - \theta$, che hanno lo stesso seno. L'area di ciascun triangolo è il semiprodotto dei due segmenti di diagonale per $\operatorname{sen}\theta$, e sommando

$$S = \tfrac{1}{2}\,(AO \cdot BO + BO \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot AO)\operatorname{sen}\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(AO + OC)(BO + OD)\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}\,d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta.$$

L'area di un quadrilatero convesso è il semiprodotto delle diagonali per il seno dell'angolo che formano. Per il rombo e per ogni quadrilatero con le diagonali perpendicolari $\operatorname{sen}\theta = 1$ e si ritrova la formula $d_1 d_2/2$. A parità di diagonali, l'area è massima proprio quando sono perpendicolari.

6.3.2 I quadrilateri inscritti

Un quadrilatero si dice **quadrilatero inscritto** in una circonferenza se i suoi vertici stanno sulla circonferenza; sappiamo da *Matematica 2* che un quadrilatero convesso è inscrivibile se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari. Questa proprietà rende risolubili con il teorema del coseno i problemi in cui sono noti i quattro lati: la diagonale AC è un lato comune ai triangoli ABC e ACD, e poiché $\delta = \pi - \beta$, si ha $\cos\delta = -\cos\beta$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza e $AB = 8$, $BC = 5$, $CD = 3$, $DA = 5$ (in metri). Calcola gli angoli in B e in D, la diagonale AC, l'area e il raggio della circonferenza.

Soluzione. Scriviamo AC^2 con il teorema del coseno nei due triangoli, con $\cos\delta = -\cos\beta$:

$64 + 25 - 80\cos\beta = 9 + 25 + 30\cos\beta$, cioè $110\cos\beta = 55$, $\cos\beta = 1/2$.

Quindi $\beta = 60°$ e $\delta = 120°$; $AC^2 = 89 - 40 = 49$, $AC = 7$ m. Controllo nell'altro triangolo: $9 + 25 + 15 = 49$.

Area: $S = \tfrac{1}{2}\cdot 8 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen}60° + \tfrac{1}{2}\cdot 3 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen}120° = (20 + 7{,}5)\cdot\sqrt{3}/2 = 55\sqrt{3}/4 \approx 23{,}8\ \text{m}^2$.

Raggio: la circonferenza circoscritta al quadrilatero è circoscritta anche al triangolo ABC, e per il teorema dei seni $R = AC/(2\operatorname{sen}\beta) = 7/\sqrt{3} \approx 4{,}04$ m.

6.3.3 Trigonometria e geometria analitica

La trigonometria entra nella geometria analitica in due punti. Il primo è il coefficiente angolare: se φ è l'**inclinazione** di una retta non verticale, cioè l'angolo, preso in [0; π[, di cui bisogna ruotare in verso antiorario il semiasse positivo delle x per sovrapporlo alla retta, allora $m = \text{tg}\ \varphi$. Il secondo è l'**angolo fra due rette**: nel capitolo 2 abbiamo ricavato con la formula di sottrazione della tangente che due rette di coefficienti angolari m_1 e m_2, con $m_1 m_2 \neq -1$, formano un angolo acuto θ tale che

$$\text{tg}\ \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Anche l'area di un triangolo si scrive in coordinate. Dati $A(x_A;\ y_A)$, B e C, poniamo $u = B - A = (u_1;\ u_2)$ e $v = C - A = (v_1;\ v_2)$. L'area è $\frac{1}{2}\ |u||v|$ sen α, e per il prodotto scalare $|u||v|\ \cos\alpha = u_1v_1 + u_2v_2$. Allora $|u|^2|v|^2\ \text{sen}^2\alpha = |u|^2|v|^2 - (u_1v_1 + u_2v_2)^2$, e sviluppando il calcolo resta il quadrato $(u_1v_2 - u_2v_1)^2$. Quindi

$$S = \tfrac{1}{2}\ |u_1v_2 - u_2v_1|,$$

cioè metà del valore assoluto del determinante della matrice che ha per righe i due vettori (vedi *Matematica 2*, capitolo 13). Per esempio, per $A(1;\ 1)$, $B(7;\ 3)$, $C(3;\ 6)$ si ha $u = (6;\ 2)$, $v = (2;\ 5)$ e $S = \frac{1}{2}\ |30 - 4| = 13$. L'angolo in A si trova in due modi: con il prodotto scalare, $\cos\alpha = 22/(\sqrt{40} \cdot \sqrt{29}) \approx 0{,}6460$; oppure con i coefficienti angolari 1/3 e 5/2 delle rette AB e AC, $\text{tg}\ \alpha = (5/2 - 1/3)/(1 + 5/6) = 13/11$. In entrambi i casi $\alpha \approx 49{,}76°$, e $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{29} \cdot \text{sen}\ \alpha \approx 13$ conferma l'area.

6.4 Problemi con un angolo incognito

6.4.1 Una grandezza come funzione di un angolo

Nei problemi dei paragrafi precedenti il triangolo era determinato dai dati. Ora capovolgiamo il punto di vista: la figura può cambiare, perché uno dei suoi angoli è libero di variare, e ci chiediamo come cambia una grandezza (un perimetro, un'area, una somma di segmenti) al variare di quell'angolo. È un **problema con un angolo incognito**: la grandezza diventa una funzione dell'angolo x, e le domande del problema diventano un'equazione, una disequazione o la ricerca di un massimo. Il metodo si articola in passi che conviene seguire ogni volta.

1. **Figura e incognita.** Disegna la figura in una posizione generica, non in un caso particolare, e scegli come incognita x un angolo che determina tutta la figura.
2. **Limitazioni.** Dalla figura ricava l'intervallo in cui x può variare, le **limitazioni dell'incognita**; decidi se gli estremi, che corrispondono a figure degeneri, sono accettabili.
3. **Segmenti.** Esprimi i segmenti che servono in funzione di x, con i teoremi sui triangoli rettangoli, dei seni o del coseno.

4. **Modello.** Scrivi la funzione $f(x)$ richiesta e semplificala con le formule del capitolo 2.
5. **Risoluzione.** Risolvi l'equazione o la disequazione (capitoli 3 e 4), oppure cerca il massimo riducendo f a una funzione sinusoidale (capitolo 5).
6. **Verifica.** Accetta solo le soluzioni che rispettano le limitazioni, e controlla che il risultato abbia senso nella figura.

6.4.2 Il triangolo inscritto in una semicirconferenza

Il problema guida di questa sezione è illustrato nella Figura 6.4. Una semicirconferenza ha diametro $AB = 2r$; un punto P si muove sull'arco e $x = PAB$ è l'angolo in A del triangolo APB. L'angolo in P è retto, perché inscritto in una semicirconferenza; quindi $PA = 2r \cos x$ e $PB = 2r \operatorname{sen} x$. Quando P va da B ad A, l'angolo x va da 0 a $\pi/2$: le limitazioni sono $0 \le x \le \pi/2$, dove gli estremi danno triangoli degeneri (ridotti al diametro).

Il perimetro del triangolo e la sua area sono funzioni di x:

$$2p(x) = 2r(1 + \operatorname{sen} x + \cos x), \qquad S(x) = \tfrac{1}{2} \cdot PA \cdot PB = 2r^2 \operatorname{sen} x \cos x = r^2 \operatorname{sen} 2x.$$

L'area è massima quando $\operatorname{sen} 2x = 1$, cioè $x = \pi/4$: il triangolo di area massima è il triangolo rettangolo isoscele, con area r^2. Un calcolo simile vale per i rettangoli inscritti in una semicirconferenza, con un lato sul diametro: se θ è l'angolo al centro che il raggio condotto a un vertice sull'arco forma con il diametro, il rettangolo ha i lati $2r \cos \theta$ e $r \operatorname{sen} \theta$ e area $2r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = r^2 \operatorname{sen} 2\theta$, massima, uguale a r^2, per $\theta = \pi/4$.

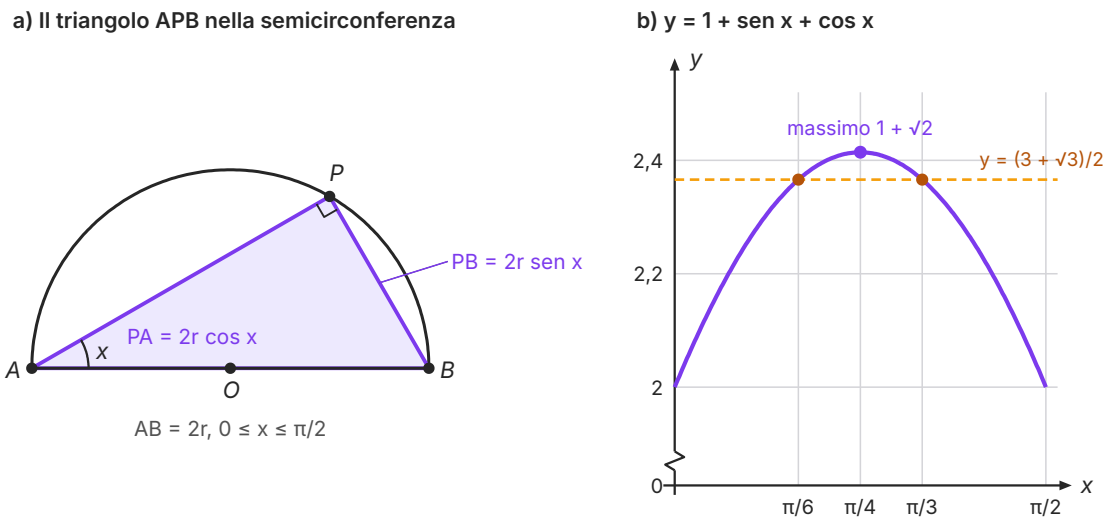


Figura 6.4 a) Il triangolo APB inscritto nella semicirconferenza di diametro $AB = 2r$, con $x = PAB$; nel disegno $x = \pi/6$. b) Il grafico di $y = 1 + \operatorname{sen} x + \cos x$ per $0 \le x \le \pi/2$, cioè il perimetro diviso per $2r$, calcolato dall'equazione; l'asse y è interrotto fra 0 e 1,9. La retta $y = (3 + \sqrt{3})/2$ lo taglia in $x = \pi/6$ e $x = \pi/3$; il massimo $1 + \sqrt{2}$ è in $x = \pi/4$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nella situazione della Figura 6.4: a) per quali x il perimetro di APB vale $r(3+\sqrt{3})$? b) per quali x supera $r(3+\sqrt{3})$? c) qual è il perimetro massimo?

a) $2r(1+\text{sen}\,x+\cos x)=r(3+\sqrt{3})$ equivale a $\text{sen}\,x+\cos x=(1+\sqrt{3})/2$, un'equazione lineare in seno e coseno. Con il metodo dell'angolo aggiunto (capitolo 3), $\text{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}\,\text{sen}(x+\pi/4)$, e l'equazione diventa

$\text{sen}(x+\pi/4)=(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{2})=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4=\text{sen}(5\pi/12)$.

Con le limitazioni, $\pi/4\le x+\pi/4\le 3\pi/4$; in questo intervallo le soluzioni sono $x+\pi/4=5\pi/12$ e $x+\pi/4=\pi-5\pi/12=7\pi/12$, cioè $x=\pi/6$ e $x=\pi/3$. I due triangoli sono simmetrici rispetto all'asse di AB: è naturale, perché scambiando A e B il perimetro non cambia. Verifica per $x=\pi/6$: $1+1/2+\sqrt{3}/2=(3+\sqrt{3})/2$.

b) $\text{sen}(x+\pi/4)>\text{sen}(5\pi/12)$ con $\pi/4\le x+\pi/4\le 3\pi/4$: il seno supera quel valore fra $5\pi/12$ e $7\pi/12$, quindi $\pi/6<x<\pi/3$. Si legge anche sul grafico: la curva sta sopra la retta fra i due punti d'intersezione.

c) Il massimo di $\text{sen}(x+\pi/4)$ è 1, per $x=\pi/4$, che rispetta le limitazioni. Il perimetro massimo è $2r(1+\sqrt{2})\approx 4{,}83r$, ancora per il triangolo rettangolo isoscele.

6.4.3 La discussione con un parametro

Spesso il problema chiede per quali valori di un parametro k la condizione ha soluzioni, e quante. Il modo più chiaro è quello grafico: si scrive l'equazione nella forma $f(x)=k$, si disegna il grafico di f sull'intervallo delle limitazioni e si conta quante volte la retta orizzontale $y=k$ lo taglia. È la **discussione grafica** dell'equazione. Ne facciamo un solo esempio, perché il metodo è sempre lo stesso.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Sempre nella Figura 6.4, per quali valori del parametro reale k esiste un triangolo APB, non degenere, con perimetro $2kr$? Quanti sono?

Soluzione. La condizione è $1+\text{sen}\,x+\cos x=k$, con $0<x<\pi/2$ perché escludiamo i triangoli degeneri. Poniamo $f(x)=1+\sqrt{2}\,\text{sen}(x+\pi/4)$. Per x da 0 a $\pi/4$ l'angolo $x+\pi/4$ va da $\pi/4$ a $\pi/2$ e f cresce da 2 a $1+\sqrt{2}$; per x da $\pi/4$ a $\pi/2$ f decresce di nuovo fino a 2. Il grafico è quello della Figura 6.4, b, privato degli estremi.

La retta $y=k$ taglia il grafico in due punti se $2<k<1+\sqrt{2}$; in un punto se $k=1+\sqrt{2}$ (il triangolo isoscele); in nessun punto se $k\le 2$ o $k>1+\sqrt{2}$. Il caso $k=2$ corrisponde alle soluzioni degeneri $x=0$ e $x=\pi/2$, che abbiamo escluso: un triangolo «schiacciato» sul diametro ha perimetro $4r$.

Conclusione. Due triangoli per $2<k<1+\sqrt{2}\approx 2{,}414$, uno per $k=1+\sqrt{2}$, nessuno altrimenti. Per $k=(3+\sqrt{3})/2\approx 2{,}366$ ritroviamo le due soluzioni dell'esempio precedente.

6.5 Misure, rotte e forze

6.5.1 Triangolazione: l'altezza di un rilievo

La **triangolazione** è il metodo con cui i topografi misurano distanze e altezze inaccessibili: si misura con cura una sola distanza sul terreno, la **base**, e poi soltanto angoli, che si misurano con precisione con un teodolite; tutto il resto si calcola risolvendo triangoli. Il caso più semplice è quello della Figura 6.5: da due punti A e B del piano, allineati con il piede H della verticale di una cima V, si misurano gli angoli di elevazione α e β della cima, e la distanza $d = AB$.

Nel triangolo ABV l'angolo in A è α, l'angolo in B è il supplementare di β, quindi l'angolo in V è $180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha$. Per il teorema dei seni $BV = d \operatorname{sen}\alpha / \operatorname{sen}(\beta - \alpha)$, e nel triangolo rettangolo BHV l'altezza è $h = BV \operatorname{sen}\beta$:

$$h = \frac{d \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}.$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Da un punto A la cima V di una collina si vede con un angolo di elevazione di $18°$; avanzando di 500 m in piano verso la collina, fino a B, l'angolo diventa $27°$. Quanto è alta la cima rispetto al piano di A e B, e quanto dista B dal piede H?

Soluzione. L'angolo in V è $27° - 18° = 9°$. Teorema dei seni: $BV = 500 \cdot \operatorname{sen}18°/\operatorname{sen}9° \approx 500 \cdot 0{,}30902/0{,}15643 \approx 987{,}7$ m. Poi $h = BV \operatorname{sen}27° \approx 987{,}7 \cdot 0{,}45399 \approx 448$ m e $BH = BV \cos 27° \approx 880$ m.

Controllo. Da A la cima dista in orizzontale $500 + 880 = 1380$ m, e $\operatorname{tg}18° \approx 0{,}3249$: $1380 \cdot 0{,}3249 \approx 448$ m. Il risultato va dato come «circa 450 m», per le ragioni che vedremo fra poco.

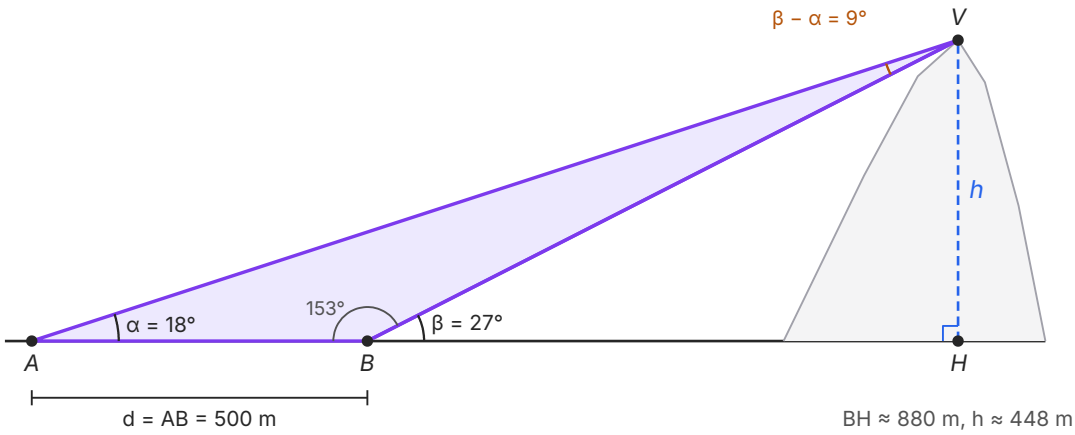


Figura 6.5 L'altezza di una cima da due punti allineati con il suo piede: base AB = 500 m, angoli di elevazione $\alpha = 18°$ e $\beta = 27°$. Nel triangolo ABV l'angolo in V vale $\beta - \alpha = 9°$; il teorema dei seni dà BV, il triangolo rettangolo BHV dà h. Disegno in scala, il profilo del rilievo è indicativo.

6.5.2 Quante cifre? Il calcolo approssimato

Gli angoli dell'esempio sono misurati al grado. Che cosa succede se la misura vera è 17° o 19°, invece di 18°, o se β è 26° o 28°? La Tabella 6.3 riporta l'altezza calcolata in tutte le combinazioni.

Tabella 6.3 Altezza h della cima, in metri, con d = 500 m, al variare di α e β di un grado (valori arrotondati al decimetro).

	β = 26°	β = 27°	β = 28°
α = 17°	409,7	382,2	359,7
α = 18°	486,7	448,4	417,7
α = 19°	585,5	531,0	488,5

Un errore di un solo grado su un angolo sposta il risultato di decine di metri, e nel caso peggiore lo fa passare da 360 m a 585 m. Il motivo è al denominatore: $\operatorname{sen}(\beta - \alpha)$ è il seno di un angolo piccolo, 9°, e un grado in più o in meno ne cambia il valore di oltre il 10%. È un esempio di **propagazione degli errori**: l'incertezza dei dati si trasmette al risultato, e può amplificarsi molto. Da qui due regole pratiche. Primo, un risultato non è più preciso dei dati da cui proviene: dare h = 448,4011 m con angoli misurati al grado è un'informazione falsa. Secondo, una buona misura si progetta: con una base più lunga, che renda $\beta - \alpha$ più grande, lo stesso errore sugli angoli pesa molto meno. I topografi, infatti, scelgono le basi e i vertici in modo da evitare triangoli molto «schiacciati».

APPROFONDIMENTO · LA MISURA DELLA TERRA

Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene, direttore della biblioteca di Alessandria, stimò la circonferenza della Terra con un'idea geometrica. A Siene, nell'Alto Egitto, a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole era allo zenit; ad Alessandria, che riteneva sullo stesso meridiano, nello stesso istante i raggi formavano con la verticale un angolo pari a 1/50 dell'angolo giro. Se i raggi del Sole sono paralleli, quell'angolo è anche l'angolo al centro della Terra fra le due città, e quindi la circonferenza è 50 volte la distanza Siene–Alessandria, che egli valutò 5000 stadi: 250 000 stadi. Quanto valga oggi quel risultato dipende dalla lunghezza dello stadio usato, che non conosciamo con certezza.

Il metodo richiede di conoscere una distanza lunga sul terreno, ed è qui che entra la triangolazione. Nel Seicento l'olandese Willebrord Snellius misurò un arco di meridiano nei Paesi Bassi collegando le città con una catena di triangoli: sul terreno misurò direttamente solo poche distanze, e per il resto angoli; pubblicò il lavoro nel 1617 con il titolo *Eratosthenes Batavus*, «l'Eratostene olandese». Per oltre tre secoli le carte geografiche si sono costruite così, con catene di triangoli che coprivano interi Paesi.

6.5.3 Rotte e forze

In navigazione la **rotta** è l'angolo, misurato in senso orario da 0° a 360°, fra la direzione del nord e la direzione del moto. Due tratti percorsi con rotte diverse formano due lati di un triangolo; il terzo lato è lo spostamento complessivo, e l'angolo fra i due tratti, nel triangolo, è il supplementare della variazione di rotta. Supponiamo che un'imbarcazione percorra 12 miglia con rotta 040° e poi 8 miglia con rotta 100°: la rotta è cambiata di 60°, quindi l'angolo nel triangolo è $180° - 60° = 120°$ e

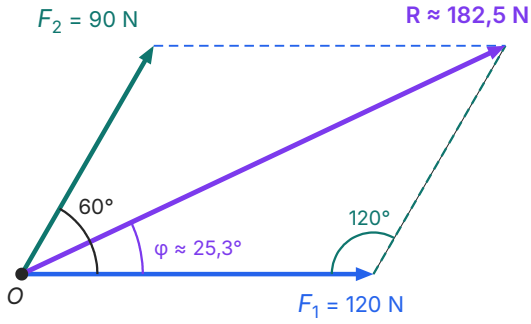
$$d^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 144 + 64 + 96 = 304, \qquad d \approx 17{,}4 \text{ miglia}.$$

L'angolo φ fra il primo tratto e lo spostamento complessivo si trova con il teorema dei seni: $\operatorname{sen}\varphi = 8 \operatorname{sen} 120°/17{,}44 \approx 0{,}397$, $\varphi \approx 23{,}4°$; l'angolo è certamente acuto, perché si oppone al lato minore. Per tornare al punto di partenza l'imbarcazione deve percorrere circa 17,4 miglia con rotta $40° + 23{,}4° + 180° \approx 243°$.

Lo stesso calcolo serve per le forze. In *Matematica 2* abbiamo scomposto il peso su un piano inclinato in due componenti perpendicolari, con i teoremi sui triangoli rettangoli; ora sappiamo trattare anche angoli qualsiasi. La **risultante** di due forze applicate allo stesso punto è la diagonale del parallelogramma che ha per lati le due forze (Figura 6.6). Nel triangolo formato da F_1, da una copia di F_2 e da R, l'angolo opposto a R è il supplementare dell'angolo θ fra le forze, e il teorema del coseno dà

$$R^2 = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2 \cos\theta.$$

Il segno è più, perché $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$. Con $F_1 = 120$ N, $F_2 = 90$ N e $\theta = 60°$: $R^2 = 14\,400 + 8100 + 10\,800 = 33\,300$, $R \approx 182{,}5$ N; l'angolo fra R e F_1 si ricava da $\operatorname{sen}\varphi = 90 \cdot \operatorname{sen} 120°/182{,}5 \approx 0{,}427$, $\varphi \approx 25{,}3°$. Per $\theta = 0°$ la formula dà $R = F_1 + F_2$, per $\theta = 90°$ il teorema di Pitagora, per $\theta = 180°$ la differenza: i tre casi della fisica del primo anno sono casi particolari di un'unica formula.



Nel triangolo O, punta di F_1, punta di R, l'angolo opposto a R vale 180° − 60° = 120°. Teorema del coseno:

$R^2 = 120^2 + 90^2 - 2 \cdot 120 \cdot 90 \cdot \cos 120°$

$R^2 = 33\,300\ \text{N}^2$, $R \approx 182{,}5$ N

Teorema dei seni:

$\operatorname{sen}\varphi = 90 \cdot \operatorname{sen} 120° : R \approx 0{,}427$

$\varphi \approx 25{,}3°$

Figura 6.6 La risultante di due forze di 120 N e 90 N che formano un angolo di 60°: con la regola del parallelogramma e il teorema del coseno $R \approx 182{,}5$ N, a circa 25,3° da F_1. Le frecce sono in scala.

COLLEGAMENTI

Fisica. Le formule di questa sezione valgono per qualunque grandezza vettoriale: spostamenti, velocità, forze, campi. La velocità di un aereo rispetto al suolo è la somma della sua velocità rispetto all'aria e della velocità del vento; un cavo che sostiene un carico insieme a un altro cavo, con angoli diversi, porta una tensione che si calcola con il teorema dei seni applicato al triangolo delle forze. In tutti questi casi il triangolo non è disegnato sul terreno ma costruito con i vettori, e l'angolo «giusto» da mettere nel teorema del coseno è quello interno al triangolo.

Scienze della Terra e tecnologia. I ricevitori satellitari di posizionamento non misurano angoli ma distanze dai satelliti: la loro geometria è una trilaterazione, perché la posizione si ricava dalle distanze, come intersezione di sfere centrate nei satelliti, invece che dagli angoli.

APPROFONDIMENTO · LA PARALLASSE DELLE STELLE

Mentre la Terra percorre la sua orbita, le stelle più vicine sembrano spostarsi leggermente rispetto a quelle molto più lontane: è la **parallasse**, lo stesso effetto per cui un dito tenuto davanti al viso sembra saltare quando si chiude prima un occhio e poi l'altro. Si chiama parallasse annua p di una stella l'angolo sotto cui, dalla stella, si vedrebbe il raggio medio dell'orbita terrestre, l'unità astronomica (UA). In un triangolo rettangolo con un cateto di 1 UA e l'angolo opposto p, la distanza è $d = 1 \text{ UA} / \operatorname{tg} p$.

Le parallassi sono piccolissime, sempre minori di un secondo d'arco (1″ = 1/3600 di grado), e per angoli così piccoli, misurati in radianti, $\operatorname{sen} p \approx p$ (capitolo 5) e $\cos p \approx 1$, quindi anche $\operatorname{tg} p \approx p$. La distanza a cui la parallasse vale 1″ si chiama **parsec**: 1 pc = 1 UA / tg 1″ ≈ 206 265 UA, circa 3,26 anni luce. La prima misura di una parallasse stellare a essere pubblicata fu quella di Friedrich Wilhelm Bessel, nel 1838, per la stella 61 Cygni: circa 0,3″, cioè una distanza di oltre 10 anni luce. È ancora un problema di triangoli, con una base di 300 milioni di chilometri, il diametro dell'orbita terrestre, e un angolo al vertice minore di un millesimo di grado.

SINTESI

- Un triangolo è determinato da LLL, LAL, ALA o LAA; con i teoremi dei seni e del coseno se ne calcolano tutti gli elementi.
- Nel caso LLA (a, b, α opposto ad a) i triangoli possono essere 0, 1 o 2: per α acuto si confronta a con $h = b \operatorname{sen}\alpha$ e con b; per α retto od ottuso c'è un triangolo solo se $a > b$.
- Con il teorema dei seni il caso LLA è l'equazione $\operatorname{sen}\beta = k$ in $]0; \pi - \alpha[$: va sempre controllato il supplementare $\pi - \arcsen k$.
- Teorema delle proiezioni: $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$, valido anche con un angolo ottuso; da esso segue il teorema del coseno.
- Formula di Erone: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, con p semiperimetro.
- Raggi: $R = abc/(4S)$ (circoscritta), $r = S/p$ (inscritta); mediana: $m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.
- Area di un quadrilatero convesso: $\tfrac{1}{2}\, d_1 d_2 \operatorname{sen}\theta$; nei quadrilateri inscritti gli angoli opposti sono supplementari e la diagonale si calcola con il teorema del coseno.
- In geometria analitica: $m = \operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\theta = |(m_2 - m_1)/(1 + m_1 m_2)|$, $S = \tfrac{1}{2}|u_1 v_2 - u_2 v_1|$.
- Nei problemi con un angolo incognito si fissano le limitazioni, si scrive la grandezza come funzione $f(x)$ e si risolve un'equazione, una disequazione o si cerca il massimo con la forma $R\operatorname{sen}(x + \varphi)$.
- La discussione con un parametro si fa contando le intersezioni del grafico di f sull'intervallo delle limitazioni con la retta $y = k$.
- Triangolazione: da una base e da angoli misurati si ricavano distanze e altezze; risultante di due forze: $R^2 = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\theta$.
- Gli errori sui dati si propagano ai risultati, e si amplificano nei triangoli con un angolo molto piccolo: si danno solo le cifre significative giustificate dai dati.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● In un triangolo $b = 10$, $\alpha = 30°$ e $a = 6$ (a opposto ad α). Quanti triangoli hanno questi dati?

   A. nessuno

   B. uno solo

   C. due

   D. infiniti

2. ● Quale uguaglianza vale in ogni triangolo?

   A. $a = b\cos\beta + c\cos\gamma$

   B. $a = b\,\text{sen}\,\gamma + c\,\text{sen}\,\beta$

   C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$

   D. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$

3. ● L'area del triangolo di lati 5, 6 e 7 è:

   A. $6\sqrt{6}$

   B. $12\sqrt{6}$

   C. 36

   D. $\sqrt{18 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}$

4. ● In un triangolo $a = 10$ e $\alpha = 30°$. Il raggio della circonferenza circoscritta è:

   A. 5

   B. 10

   C. 20

   D. $10\sqrt{3}$

5. ● Le diagonali di un quadrilatero convesso misurano 8 cm e 6 cm e formano un angolo di 30°. L'area è:

   A. 24 cm^2

   B. 48 cm^2

   C. 12 cm^2

   D. $12\sqrt{3}$ cm^2

6. ● Per $0 \le x \le \pi/2$, il valore massimo di $2\,\text{sen}\,x + 2\cos x$ è:

   A. 4

   B. $2\sqrt{2}$

   C. 2

   D. $\sqrt{2}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Se α è ottuso e $a < b$, non esiste alcun triangolo con i lati a, b e l'angolo α opposto ad a.
   b) Il teorema dei seni determina sempre in modo unico un angolo di cui si conosce il seno.
   c) Il raggio della circonferenza inscritta è l'area divisa per il perimetro.
   d) In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono congruenti.
   e) Il teorema delle proiezioni vale anche per i triangoli ottusangoli.

8. ● Completa. Nella formula di Erone compare il _____ , cioè la metà del perimetro. Il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo è il prodotto dei tre lati diviso per _____ . L'area di un triangolo è uguale al prodotto del raggio della circonferenza inscritta per il _____ . Nel caso LLA con α acuto, se $h < a < b$, dove $h =$ _____ , i triangoli sono _____ .

Calcolare

9. ● Risolvi i triangoli con $b = 12$, $\alpha = 40°$ e: a) $a = 9$; b) $a = 15$; c) $a = 6$. Prima di calcolare, stabilisci quanti sono.

10. ●● Risolvi, se possibile, i triangoli con $\alpha = 110°$ e: a) $a = 10$, $b = 7$; b) $a = 7$, $b = 10$.

11. ● Il triangolo ha i lati 7, 8 e 9. Calcola l'area con la formula di Erone e i raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta (valori esatti e approssimati).

12. ● Calcola con la formula di Erone l'area del triangolo isoscele di lati 5, 5 e 6, e controlla il risultato con base e altezza. Trova poi R e r.

13. ●● Calcola le tre mediane del triangolo di lati $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$.

14. ●● Nel triangolo di lati $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ calcola $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ come frazioni e verifica le uguaglianze del teorema delle proiezioni $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ e $b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$.

15. ●● Le diagonali di un quadrilatero convesso misurano 10 m e 7 m e formano un angolo di 50°. Calcola l'area. Cambia qualcosa se l'angolo indicato è di 130°?

16. ●● Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza e $AB = 15$, $BC = 8$, $CD = 7$, $DA = 8$. Calcola l'angolo in B, la diagonale AC, l'area del quadrilatero e il raggio della circonferenza.

17. ●● a) Dati $A(-2; 1)$, $B(4; -1)$, $C(2; 5)$, calcola l'area del triangolo ABC e l'angolo in A, sia con il prodotto scalare sia con i coefficienti angolari. b) Trova l'angolo acuto formato dalle rette $y = 2x - 1$ e $y = -3x + 4$.

18. ●● Nella semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ il punto P sta sull'arco e $x = PAB$. Determina x in modo che $PA + PB = r\sqrt{6}$.

19. ●● Nella stessa figura dell'esercizio precedente, per quali valori di x l'area del triangolo APB è almeno $r^2/2$?

20. ●●● Il triangolo ABC è rettangolo in C e ha l'ipotenusa $AB = 10$; sia $x = CAB$. Scrivi in funzione di x la somma $3 \cdot BC + 4 \cdot AC$, trova il suo valore massimo e l'angolo per cui si raggiunge.

Dimostrare e argomentare

21. ● Dimostra il teorema delle proiezioni $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ nel caso in cui l'angolo γ è ottuso. Disegna la figura.

22. ●● Dimostra la formula della mediana $4m_a^{\,2} = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ e deducine che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa.

23. ●● Dimostra che in ogni triangolo $abc = 4Rrp$. Verifica l'uguaglianza sul triangolo di lati 13, 14 e 15, e usala per mostrare che nel triangolo equilatero $R = 2r$.

24. ●● Trova l'errore. Per il triangolo di lati 13, 14 e 15 Marco scrive: «$p = 42$, quindi $S = \sqrt{42 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} \approx 959{,}6$». Spiega perché il risultato è sicuramente sbagliato anche senza rifare il calcolo, individua l'errore e correggilo.

25. ●● Teorema della bisettrice. Sia AD la bisettrice dell'angolo α del triangolo ABC, con D su BC. Applicando il teorema dei seni ai triangoli ABD e ADC, dimostra che $BD : DC = c : b$.

Problemi

26. ● Per misurare la distanza di un punto C sulla riva opposta di un lago, si fissa una base $AB = 300$ m e si misurano gli angoli $CAB = 72°$ e $CBA = 65°$. Calcola AC, BC e la distanza di C dalla retta AB.

27. ●● Da un punto A la cima di un campanile si vede con un angolo di elevazione di 25°; avvicinandosi di 40 m in piano, l'angolo diventa 38°. Calcola l'altezza del campanile rispetto al piano degli occhi dell'osservatore e la distanza dell'osservatore dal campanile nella seconda posizione.

28. ●● Una barca percorre 15 miglia con rotta 060° e poi 8 miglia con rotta 120°. A quale distanza si trova dal punto di partenza? Con quale rotta lo vedrebbe in linea retta, cioè qual è la rotta dello spostamento complessivo?

29. ●● Un carico di 200 N è appeso a due funi che formano con l'orizzontale angoli di 30° e 45°. Disegna il triangolo delle forze e calcola le tensioni delle due funi con il teorema dei seni.

30. ●● Due forze di 50 N e 80 N applicate allo stesso punto hanno una risultante di 100 N. Quale angolo formano?

31. ●●● Un terreno ha la forma del quadrilatero $ABCD$ con $AB = 40$ m, $BC = 55$ m, $CD = 35$ m, $DA = 50$ m; la diagonale AC misura 60 m. Calcola l'area del terreno, con tre cifre significative, e l'angolo in B.

Verso la verifica

32. ●● Nel triangolo ABC $a = 8$, $b = 5$, $\gamma = 60°$. Calcola c, l'area, R e r in forma esatta.

33. ●● Con $b = 10$ e $\alpha = 45°$, discuti al variare di $a > 0$ quanti triangoli hanno lati a, b e l'angolo α opposto ad a.

34. ●● In un triangolo $b = 10$ cm, $c = 12$ cm e l'angolo compreso α è misurato «50° a meno di un grado». Calcola a per $\alpha = 49°$, 50° e 51°, e indica con quante cifre ha senso dare il risultato.

35. ●●● Sfida. La semicirconferenza ha diametro $AB = 2$; P è un punto dell'arco, $x = PAB$ e H è la proiezione di P su AB. a) Dimostra che $PH + AH = \sin 2x + \cos 2x + 1$. b) Trova il valore massimo di questa somma. c) Discuti, al variare di k, quante soluzioni ha l'equazione $PH + AH = k$ con $0 \le x \le \pi/2$.

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: i capitoli sulla misura della Terra e sulla nascita della trigonometria come scienza della misura, da Eratostene alla triangolazione.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come scegliere l'incognita, ricavare le condizioni dalla figura e controllare il risultato, i passi dei problemi con un angolo incognito.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Erone di Alessandria, Tolomeo e la trigonometria degli antichi.

Glossario del capitolo

Bisettrice di un triangolo
Il segmento della bisettrice di un angolo compreso fra il vertice e il lato opposto; divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Caso LLA
Risoluzione di un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo opposto a uno di essi; i triangoli possibili sono 0, 1 o 2.

Discussione grafica
Studio del numero di soluzioni di $f(x) = k$ contando le intersezioni del grafico di f con la retta $y = k$.

Formula di Erone
L'area di un triangolo in funzione dei lati: $S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$.

Incentro
Il punto d'incontro delle bisettrici di un triangolo, centro della circonferenza inscritta, di raggio $r = S/p$.

Inclinazione di una retta
L'angolo $\varphi \in [0; \pi[$ fra il semiasse positivo delle x e la retta; per una retta non verticale $m = \operatorname{tg} \varphi$.

Mediana
Il segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto; $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}$.

Parallasse annua
L'angolo sotto cui da una stella si vedrebbe il raggio medio dell'orbita terrestre; una parallasse di 1″ corrisponde a una distanza di 1 parsec.

Problema con un angolo incognito
Problema in cui una grandezza di una figura variabile è espressa come funzione di un angolo x e si risolve con equazioni, disequazioni o la ricerca di un massimo.

Proiezione di un segmento
Il segmento che ha per estremi i piedi delle perpendicolari condotte dagli estremi del segmento a una retta.

Propagazione degli errori
La trasmissione dell'incertezza dei dati al risultato di un calcolo; nei triangoli con un angolo piccolo può amplificarsi molto.

Quadrilatero inscritto
Quadrilatero con i vertici su una circonferenza; se è convesso, i suoi angoli opposti sono supplementari.

Raggio della circonferenza circoscritta
$R = abc/(4S)$; per il teorema dei seni $2R = a/\operatorname{sen} \alpha$.

Rotta
L'angolo, misurato in senso orario da 0° a 360°, fra la direzione del nord e la direzione del moto.

Semiperimetro
La metà del perimetro di un poligono, indicata con p.

Teorema delle proiezioni
In ogni triangolo un lato è la somma dei prodotti degli altri due per il coseno dell'angolo che formano con esso: $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$.

Triangolazione
Metodo di misura che ricava distanze e altezze inaccessibili da una base misurata e da angoli, risolvendo triangoli.

Soluzioni

1. C. $h = 10 \operatorname{sen} 30° = 5$ e $5 < 6 < 10$: due triangoli (sen $\beta = 5/6$, $\beta \approx 56{,}44°$ oppure $\beta \approx 123{,}56°$).

2. D. È il teorema delle proiezioni. A scambia gli angoli; C ha il segno sbagliato.

3. A. $p = 9$, $S = \sqrt{(9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \approx 14{,}70$. D usa il perimetro al posto del semiperimetro.

4. B. $2R = a/\operatorname{sen}\alpha = 10/0{,}5 = 20$, quindi $R = 10$.

5. C. $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 30° = 12\ \text{cm}^2$.

6. B. $2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x = 2\sqrt{2} \operatorname{sen}(x + \pi/4)$, massimo $2\sqrt{2}$ per $x = \pi/4$, che appartiene all'intervallo.

7. a) V: il lato opposto all'angolo ottuso deve essere il maggiore del triangolo, ma $a < b$. b) F: in $]0; \pi[$ sen $\beta = k$ ha in generale due soluzioni, β e $\pi - \beta$. c) F: è l'area divisa per il semiperimetro. d) F: sono supplementari. e) V: quando un angolo è ottuso il suo coseno è negativo e il termine corrispondente si sottrae.

8. semiperimetro; il quadruplo dell'area ($4S$); semiperimetro; b sen α; due.

9. $h = 12 \operatorname{sen} 40° \approx 7{,}71$. a) $h < 9 < 12$: due triangoli. sen $\beta = 12 \operatorname{sen} 40°/9 \approx 0{,}8570$: $\beta_1 \approx 58{,}99°$, $\gamma_1 \approx 81{,}01°$, $c_1 = 9 \operatorname{sen}\gamma_1/\operatorname{sen} 40° \approx 13{,}83$; $\beta_2 \approx 121{,}01°$, $\gamma_2 \approx 18{,}99°$, $c_2 \approx 4{,}56$. b) $a \geq b$: un triangolo; sen $\beta \approx 0{,}5142$, $\beta \approx 30{,}95°$ (il supplementare dà $\alpha + \beta > 180°$), $\gamma \approx 109{,}05°$, $c \approx 22{,}06$. c) $6 < h$: nessun triangolo (sen $\beta \approx 1{,}29 > 1$).

10. a) $a > b$: un triangolo. sen $\beta = 7 \operatorname{sen} 110°/10 \approx 0{,}6578$, $\beta \approx 41{,}13°$ (l'ottuso è escluso perché α è già ottuso), $\gamma \approx 28{,}87°$, $c = 10 \operatorname{sen}\gamma/\operatorname{sen} 110° \approx 5{,}14$. b) Nessun triangolo: il lato opposto all'angolo ottuso deve essere il maggiore, ma $7 < 10$; infatti sen $\beta \approx 1{,}342 > 1$.

11. $p = 12$, $S = \sqrt{(12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$. $R = 504/(48\sqrt{5}) = 21\sqrt{5}/10 \approx 4{,}70$; $r = 12\sqrt{5}/12 = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

12. $p = 8$, $S = \sqrt{(8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2)} = \sqrt{144} = 12$. Altezza sulla base 6: $\sqrt{(25 - 9)} = 4$, $S = 6 \cdot 4/2 = 12$. $R = 150/48 = 25/8$; $r = 12/8 = 3/2$.

13. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(128 + 162 - 49)} = \frac{1}{2}\sqrt{241} \approx 7{,}76$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{(98 + 162 - 64)} = \frac{1}{2}\sqrt{196} = 7$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{(98 + 128 - 81)} = \frac{1}{2}\sqrt{145} \approx 6{,}02$.

14. $\cos\alpha = (64 + 81 - 49)/144 = 2/3$; $\cos\beta = (49 + 81 - 64)/126 = 11/21$; $\cos\gamma = (49 + 64 - 81)/112 = 2/7$. $8 \cdot 2/7 + 9 \cdot 11/21 = 16/7 + 33/7 = 7 = a$; $7 \cdot 2/7 + 9 \cdot 2/3 = 2 + 6 = 8 = b$.

15. $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \operatorname{sen} 50° \approx 26{,}8\ \text{m}^2$. Non cambia nulla: sen $130° = \operatorname{sen} 50°$, e le diagonali formano sempre due angoli supplementari.

16. $\cos\beta = (225 + 64 - 49 - 64)/(2(120 + 56)) = 176/352 = 1/2$, $\beta = 60°$, $\delta = 120°$. $AC^2 = 225 + 64 - 120 = 169$, $AC = 13$ (controllo: $49 + 64 + 56 = 169$). $S = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot \operatorname{sen} 60° + \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot \operatorname{sen} 120° = 88 \cdot \sqrt{3}/2 = 44\sqrt{3} \approx 76{,}2$. $R = 13/(2 \operatorname{sen} 60°) = 13/\sqrt{3} = 13\sqrt{3}/3 \approx 7{,}51$.

17. a) $u = (6; -2)$, $v = (4; 4)$: $S = \frac{1}{2}|24 + 8| = 16$. $\cos\alpha = (24 - 8)/(\sqrt{40} \cdot \sqrt{32}) = 16/\sqrt{1280} = 1/\sqrt{5} \approx 0{,}4472$, $\alpha \approx 63{,}43°$; con i coefficienti $-1/3$ e 1: $\operatorname{tg}\alpha = (1 + 1/3)/(1 - 1/3) = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}43°$. b) $\operatorname{tg}\theta = |(-3 - 2)/(1 - 6)| = 1$, $\theta = 45°$.

18. $2r \cos x + 2r \operatorname{sen} x = r\sqrt{6}$, cioè $\sqrt{2} \operatorname{sen}(x + \pi/4) = \sqrt{6}/2$, $\operatorname{sen}(x + \pi/4) = \sqrt{3}/2$, con $\pi/4 \leq x + \pi/4 \leq 3\pi/4$: $x + \pi/4 = \pi/3$ oppure $2\pi/3$, quindi $x = \pi/12$ oppure $x = 5\pi/12$.

19. $r^2 \operatorname{sen} 2x \geq r^2/2$, $\operatorname{sen} 2x \geq 1/2$ con $0 \leq 2x \leq \pi$: $\pi/6 \leq 2x \leq 5\pi/6$, cioè $\pi/12 \leq x \leq 5\pi/12$.

20. $BC = 10 \operatorname{sen} x$, $AC = 10 \cos x$, $0 < x < \pi/2$. $f(x) = 30 \operatorname{sen} x + 40 \cos x = 50 \operatorname{sen}(x + \varphi)$ con $\cos\varphi = 3/5$, $\operatorname{sen}\varphi = 4/5$, $\varphi \approx 53{,}13°$. Massimo 50 per $x + \varphi = 90°$, cioè $x = 90° - \varphi \approx 36{,}87°$ ($\operatorname{tg} x = 3/4$), che rispetta le limitazioni. Allora $BC = 6$, $AC = 8$: $18 + 32 = 50$.

21. Se γ è ottuso, il piede H dell'altezza da A cade sul prolungamento di BC oltre C. In ABH: $BH = c \cos\beta$; in AHC, con angolo acuto $180° - \gamma$ in C: $CH = b \cos(180° - \gamma) = -b \cos\gamma$. Allora $a = BH - CH = c \cos\beta + b \cos\gamma$. c.v.d.

22. Traccia: nei triangoli ABM e AMC, con angoli supplementari in M, il teorema del coseno dà $c^2 = m^2 + a^2/4 - am\cos\theta$ e $b^2 = m^2 + a^2/4 + am\cos\theta$; sommando $b^2 + c^2 = 2m^2 + a^2/2$, cioè $4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Se α è retto, $b^2 + c^2 = a^2$ e $4m^2 = a^2$, $m = a/2$.

23. Da $R = abc/(4S)$ e $S = rp$: $abc = 4RS = 4Rrp$. Con 13, 14, 15: $2730 = 4 \cdot 65/8 \cdot 4 \cdot 21 = 2730$. Nel triangolo equilatero di lato ℓ: $\ell^3 = 4Rr \cdot 3\ell/2$, quindi $Rr = \ell^2/6$; con $R = \ell/\sqrt{3}$ (teorema dei seni) si ha $r = \ell/(2\sqrt{3}) = R/2$.

24. L'area di un triangolo non può superare $\frac{1}{2}\,ab$ per due lati qualsiasi, cioè $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 = 105$, perché $\operatorname{sen}\gamma \le 1$: 959,6 è impossibile. Marco ha usato il perimetro 42 al posto del semiperimetro 21. Correzione: $S = \sqrt{(21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)} = 84$.

25. Siano $\delta = ADB$ e $\pi - \delta = ADC$. In ABD: $BD/\operatorname{sen}(\alpha/2) = c/\operatorname{sen}\delta$; in ADC: $DC/\operatorname{sen}(\alpha/2) = b/\operatorname{sen}(\pi - \delta) = b/\operatorname{sen}\delta$. Dividendo membro a membro: $BD/DC = c/b$. c.v.d.

26. $\gamma = 180° - 72° - 65° = 43°$.
$AC = 300 \operatorname{sen} 65°/\operatorname{sen} 43° \approx 399$ m;
$BC = 300 \operatorname{sen} 72°/\operatorname{sen} 43° \approx 418$ m; distanza da AB: $AC \operatorname{sen} 72° \approx 379$ m.

27. Angolo al vertice $38° - 25° = 13°$. Distanza dalla seconda posizione alla cima:
$40 \operatorname{sen} 25°/\operatorname{sen} 13° \approx 75{,}1$ m. Altezza
$\approx 75{,}1 \cdot \operatorname{sen} 38° \approx 46{,}3$ m; distanza orizzontale
$\approx 75{,}1 \cdot \cos 38° \approx 59{,}2$ m.

28. L'angolo fra i tratti nel triangolo è $180° - 60° = 120°$: $d^2 = 225 + 64 + 120 = 409$, $d \approx 20{,}2$ miglia. $\operatorname{sen}\varphi = 8 \operatorname{sen} 120°/20{,}22 \approx 0{,}343$, $\varphi \approx 20{,}0°$: rotta dello spostamento $60° + 20{,}0° \approx 080°$.

29. Il triangolo delle forze ha i lati $P = 200$ N, T_1 (fune a 30°) e T_2 (fune a 45°); l'angolo opposto a P è $30° + 45° = 75°$, quello opposto a T_1 è $90° - 45° = 45°$, quello opposto a T_2 è $90° - 30° = 60°$.
$T_1 = 200 \operatorname{sen} 45°/\operatorname{sen} 75° \approx 146$ N;
$T_2 = 200 \operatorname{sen} 60°/\operatorname{sen} 75° \approx 179$ N. Controllo: componenti orizzontali $146{,}4 \cos 30° \approx 179{,}3 \cos 45° \approx 126{,}8$ N; verticali $73{,}2 + 126{,}8 = 200$ N.

30. $10\,000 = 2500 + 6400 + 8000\cos\theta$,
$\cos\theta = 1100/8000 = 0{,}1375$, $\theta \approx 82{,}1°$.

31. Erone in ABC (40, 55, 60; $p = 77{,}5$): $S_1 \approx 1069{,}7$ m^2. In ACD (60, 35, 50; $p = 72{,}5$): $S_2 \approx 874{,}4$ m^2. Totale ≈ 1944 m^2, cioè circa 1940 m^2 con tre cifre. Angolo in B: $\cos\beta = (1600 + 3025 - 3600)/(2 \cdot 40 \cdot 55) = 1025/4400 \approx 0{,}2330$, $\beta \approx 76{,}5°$.

32. $c^2 = 64 + 25 - 40 = 49$, $c = 7$.
$S = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \operatorname{sen} 60° = 10\sqrt{3}$. $R = 7/(2 \operatorname{sen} 60°) = 7\sqrt{3}/3$.
$p = 10$, $r = 10\sqrt{3}/10 = \sqrt{3}$.

33. $h = 10 \operatorname{sen} 45° = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$. Nessun triangolo se $a < 5\sqrt{2}$; uno (rettangolo in B) se $a = 5\sqrt{2}$; due se $5\sqrt{2} < a < 10$; uno se $a \ge 10$.

34. $a = \sqrt{(100 + 144 - 240\cos\alpha)}$: per 49° $a \approx 9{,}30$; per 50° $a \approx 9{,}47$; per 51° $a \approx 9{,}64$ cm. L'incertezza è di circa ±0,17 cm: ha senso scrivere $a \approx 9{,}5$ cm, con due cifre significative.

35. a) $PA = 2\cos x$; $PH = PA \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$; $AH = PA\cos x = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. b) $f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(2x + \pi/4) + 1$; con $\pi/4 \le 2x + \pi/4 \le 5\pi/4$ il massimo è $1 + \sqrt{2}$, per $x = \pi/8$. c) f cresce da $f(0) = 2$ a $1 + \sqrt{2}$ su $[0; \pi/8]$ e decresce fino a $f(\pi/2) = 0$ su $[\pi/8; \pi/2]$; inoltre $f(\pi/4) = 2$. Una soluzione per $0 \le k < 2$; due per $2 \le k < 1 + \sqrt{2}$ (per $k = 2$: $x = 0$ e $x = \pi/4$); una per $k = 1 + \sqrt{2}$; nessuna per $k < 0$ o $k > 1 + \sqrt{2}$.