CAPITOLO

5

Funzioni sinusoidali e andamenti periodici

Ciò che torna sempre uguale si lascia descrivere da poche quantità: quanto oscilla, quanto spesso, intorno a quale valore e da dove comincia. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere ampiezza, pulsazione, periodo, frequenza, fase e valore medio di una funzione sinusoidale e tracciarne il grafico.
2. Ricavare l'equazione di una sinusoide da un grafico o da una tabella di dati e valutare il modello con i residui.
3. Costruire modelli di andamenti periodici, discreti e continui, in fisica e nelle scienze.
4. Studiare la somma di funzioni sinusoidali: stessa pulsazione, periodi commensurabili, battimenti.
5. Collegare il moto circolare uniforme al moto armonico.
6. Stimare numericamente la velocità di variazione di una grandezza periodica.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 La funzione sinusoidale 2
5.2 Dal grafico e dai dati all'equazione 7
5.3 Somma di funzioni sinusoidali 11
5.4 Funzioni periodiche non sinusoidali 15
5.5 Moto circolare uniforme e moto armonico 16
5.6 La velocità di variazione di una grandezza periodica 18

Matematica 4 · Parte II · Funzioni periodiche e trigonometria · versione 1.0
Capitolo 5: Funzioni sinusoidali e andamenti periodici · pagine 143–170 del volume completo · estratto per lo studio

L'altezza dell'acqua in un porto sale e scende due volte al giorno; la tensione delle prese di casa cambia segno cento volte al secondo; la temperatura media di una città torna, anno dopo anno, a toccare il minimo in inverno e il massimo in estate; la corda di una chitarra vibra centinaia di volte al secondo e noi la sentiamo come una nota. Sono tutti *andamenti periodici*: fenomeni in cui, trascorso un certo intervallo, la grandezza torna a ripetere gli stessi valori nello stesso ordine.

Nella prima parte del volume abbiamo studiato le funzioni seno e coseno come funzioni di una variabile reale, con le loro formule, equazioni e disequazioni. Ora le mettiamo al lavoro. In questo capitolo impariamo a costruire, a leggere e ad adattare ai dati le **funzioni sinusoidali** $y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + k$, il modello matematico più semplice di un fenomeno periodico; vediamo che cosa succede quando si sommano due oscillazioni; incontriamo funzioni periodiche che sinusoidali non sono; infine misuriamo con quale velocità varia una grandezza periodica, scoprendo un legame inatteso tra il seno e il coseno.

5.1 La funzione sinusoidale

5.1.1 Funzioni periodiche: un richiamo

In *Matematica 3* (cap. 3) abbiamo dato la definizione: una funzione f è **periodica** se esiste un numero $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio (con $x + T$ anch'esso nel dominio). Se T ha questa proprietà, la hanno anche $2T$, $3T$, …; il più piccolo numero positivo con questa proprietà, quando esiste, si chiama **periodo** della funzione. Il seno e il coseno hanno periodo 2π, la tangente e la cotangente hanno periodo π (capitolo 1).

Il grafico di una funzione periodica di periodo T è fatto di copie identiche di un unico tratto, quello sopra un intervallo lungo T, affiancate senza fine verso destra e verso sinistra. Basta quindi studiare la funzione su un solo periodo. In questo capitolo k indicherà il valore medio di una sinusoide; per questo motivo il numero intero che compare nelle famiglie di soluzioni sarà indicato con n, sempre con $n \in \mathbb{Z}$.

5.1.2 Ampiezza, pulsazione, fase e valore medio

Costruiamo la funzione sinusoidale un passo alla volta, partendo da $y = \mathrm{sen}\,x$ e applicando le trasformazioni di *Matematica 3*. Ogni passo modifica una sola caratteristica del grafico.

1. Il fattore davanti al seno. Il grafico di $y = A\,\mathrm{sen}\,x$, con $A > 0$, si ottiene da quello di $y = \mathrm{sen}\,x$ con una dilatazione verticale di fattore A: gli zeri restano dove sono, il massimo diventa A e il

minimo $-A$. Il numero A si chiama **ampiezza**: è la distanza fra il valore massimo e il «livello di riposo» intorno a cui la grandezza oscilla.

2. Il coefficiente di x. Consideriamo $y = \text{sen}\,\omega x$, con $\omega > 0$. Poiché il seno ha periodo 2π, l'argomento ωx deve aumentare di 2π perché i valori si ripetano, e questo accade quando x aumenta di $\frac{2\pi}{\omega}$:

$$\text{sen}[\omega(x + \tfrac{2\pi}{\omega})] = \text{sen}(\omega x + 2\pi) = \text{sen}\,\omega x.$$

Dunque $y = \text{sen}\,\omega x$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (nessun numero positivo più piccolo funziona, perché 2π è il periodo del seno). Il numero ω si chiama **pulsazione**: dice quanti radianti «percorre» l'argomento per ogni unità di x. Il reciproco del periodo, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, si chiama **frequenza** e conta quanti periodi completi stanno in un'unità di x; se x è un tempo in secondi, la frequenza si misura in hertz (1 Hz = un ciclo al secondo). Se $\omega > 1$ il grafico è compresso orizzontalmente, se $0 < \omega < 1$ è dilatato: la Figura 5.1 confronta $y = \text{sen}\,x$, $y = \text{sen}\,2x$ e $y = \text{sen}\,\frac{x}{2}$.

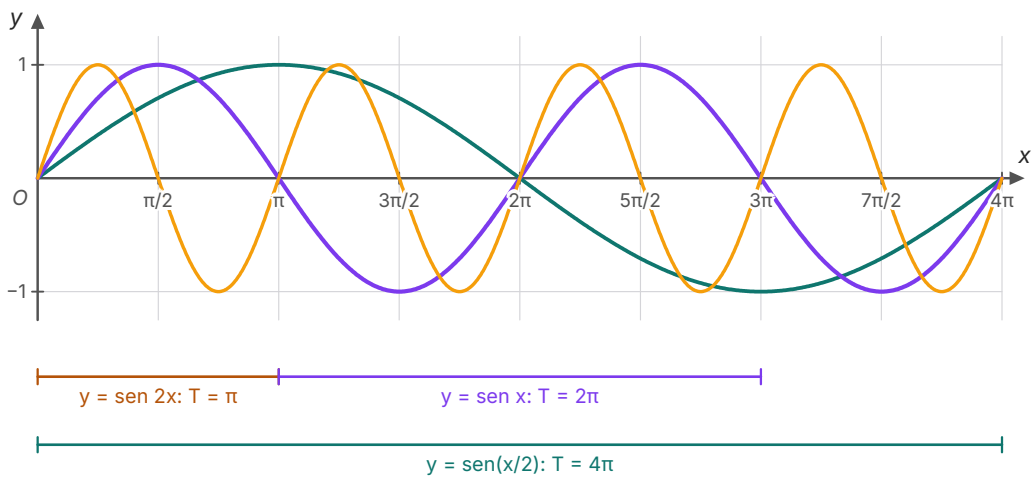


Figura 5.1 I grafici di $y = \text{sen}\,x$ (viola), $y = \text{sen}\,2x$ (arancio) e $y = \text{sen}\,\frac{x}{2}$ (verde) su $[0; 4\pi]$. Raddoppiare la pulsazione dimezza il periodo: $y = \text{sen}\,2x$ compie due oscillazioni complete mentre $y = \text{sen}\,x$ ne compie una e $y = \text{sen}\,\frac{x}{2}$ mezza. L'ampiezza è 1 in tutti e tre i casi.

3. La costante aggiunta all'argomento. In $y = \text{sen}(\omega x + \varphi)$ raccogliamo ω:

$$\text{sen}(\omega x + \varphi) = \text{sen}[\omega(x + \tfrac{\varphi}{\omega})].$$

Il grafico è quello di $y = \text{sen}\,\omega x$ traslato orizzontalmente di $-\frac{\varphi}{\omega}$: verso sinistra se $\varphi > 0$, verso destra se $\varphi < 0$. Il numero φ si chiama **fase** (o fase iniziale): è il valore dell'argomento quando $x = 0$. La traslazione, invece, vale $\frac{\varphi}{\omega}$ in valore assoluto, non φ.

4. La costante aggiunta alla funzione. Infine $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) + k$ trasla tutto verticalmente di k. La retta $y = k$ è il livello intorno a cui la funzione oscilla: si chiama **valore medio** della sinusoide, perché sta esattamente a metà fra il massimo $k + A$ e il minimo $k - A$.

IN SINTESI

La funzione sinusoidale $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) + k$, con $A > 0$ e $\omega > 0$, ha:

- **ampiezza** A; massimo $k + A$, minimo $k - A$; immagine $[k - A;\, k + A]$;
- **pulsazione** ω, **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, **frequenza** $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$;
- **fase** φ: il grafico è quello di $y = A\,\text{sen}\,\omega x + k$ traslato orizzontalmente di $-\frac{\varphi}{\omega}$;
- **valore medio** k: la retta $y = k$ divide a metà ogni oscillazione.

5.1.3 L'ordine delle trasformazioni

Per disegnare $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) + k$ conviene seguire proprio l'ordine dei quattro passi: prima la compressione orizzontale ($y = \text{sen}\,\omega x$), poi la traslazione orizzontale di $-\frac{\varphi}{\omega}$, poi la dilatazione verticale di fattore A, infine la traslazione verticale di k. Si può anche cominciare dalla traslazione, ma allora la traslazione è di $-\varphi$ ($y = \text{sen}(x + \varphi)$) e la compressione viene dopo. Se invece si comprime e poi si trasla di $-\varphi$, oppure si trasla di $-\frac{\varphi}{\omega}$ e poi si comprime, si ottiene un'altra funzione, come avevamo osservato in *Matematica 3*: l'entità della traslazione dipende dall'ordine in cui si eseguono le trasformazioni.

In pratica, più che trasformare il grafico punto per punto, si individua un **ciclo** completo: l'argomento $\omega x + \varphi$ va da 0 a 2π quando x va da $-\frac{\varphi}{\omega}$ a $\frac{2\pi - \varphi}{\omega}$, e sui quattro quarti di questo intervallo la funzione sale dal valore medio al massimo, scende al valore medio, poi al minimo, poi risale al valore medio.

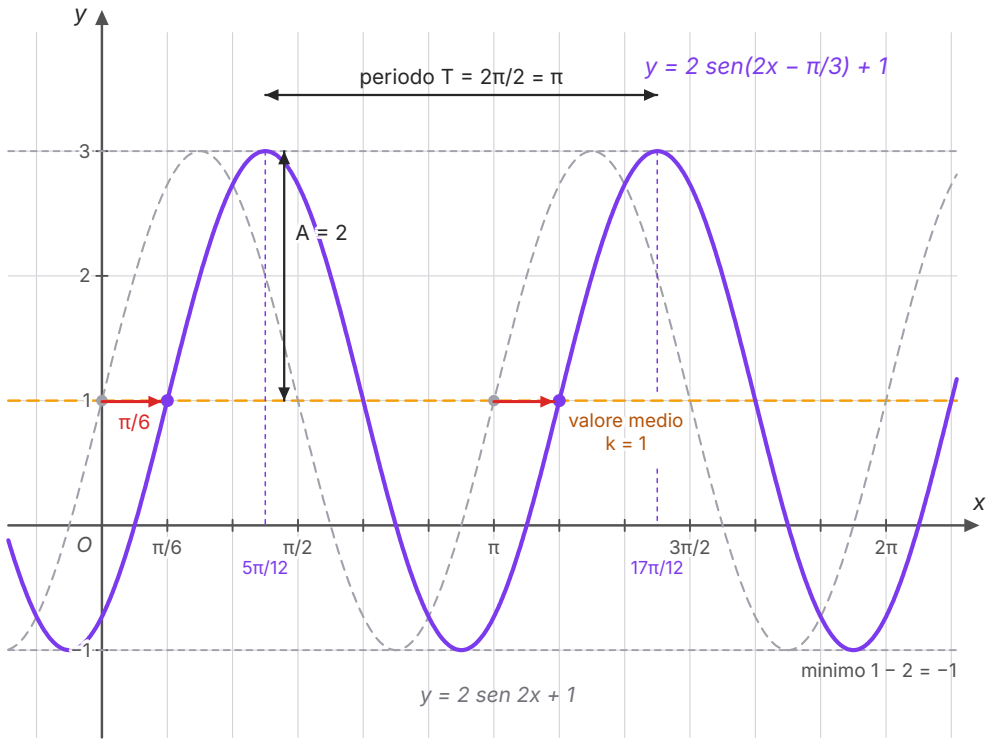


Figura 5.2 Il grafico di $y = 2\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ (viola), in scala uguale sui due assi, a confronto con $y = 2\,\text{sen}\,2x + 1$ (grigio). Le frecce rosse mostrano la traslazione di $\frac{\pi}{6}$ verso destra; la retta tratteggiata $y = 1$ è il valore medio, $A = 2$ l'ampiezza, $T = \pi$ la distanza fra due massimi consecutivi.

ESEMPIO SVOLTO

Studia la funzione $y = 2\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ e tracciane il grafico.

Parametri. $A = 2$, $\omega = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $k = 1$. Periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, frequenza $\frac{1}{\pi}$. Massimo $1 + 2 = 3$, minimo $1 - 2 = -1$.

Traslazione. $2x - \frac{\pi}{3} = 2(x - \frac{\pi}{6})$: il grafico di $y = 2\,\text{sen}\,2x + 1$ va traslato di $\frac{\pi}{6}$ verso destra (non di $\frac{\pi}{3}$).

Un ciclo. L'argomento $2x - \frac{\pi}{3}$ vale 0 per $x = \frac{\pi}{6}$ e 2π per $x = \frac{7\pi}{6}$. Dividiamo $[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}]$ in quattro parti uguali, di ampiezza $\frac{\pi}{4}$: la funzione vale 1 in $x = \frac{\pi}{6}$, ha il massimo 3 in $x = \frac{5\pi}{12}$, torna a 1 in $x = \frac{2\pi}{3}$, ha il minimo -1 in $x = \frac{11\pi}{12}$ e torna a 1 in $x = \frac{7\pi}{6}$.

Tutti i massimi e i minimi. $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ dà i massimi in $x = \frac{5\pi}{12} + n\pi$; $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ dà i minimi in $x = \frac{11\pi}{12} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Zeri. $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ dà $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ oppure $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$, cioè $x = \frac{\pi}{12} + n\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Il grafico è nella Figura 5.2.

ERRORE FREQUENTE

In $y = \text{sen}(2x + \frac{\pi}{3})$ la traslazione **non** è di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra: bisogna prima raccogliere la pulsazione, $\text{sen}[2(x + \frac{\pi}{6})]$, e la traslazione è di $\frac{\pi}{6}$. In generale la traslazione è $-\frac{\varphi}{\omega}$, non $-\varphi$. Allo stesso modo il periodo di $y = \text{sen}\,3x$ è $\frac{2\pi}{3}$, non 6π: la pulsazione si divide, non si moltiplica.

5.1.4 Seno o coseno?

Poiché $\cos x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ (archi associati, capitolo 1), il grafico del coseno è quello del seno traslato di $\frac{\pi}{2}$ verso sinistra: **un coseno è un seno sfasato**. Di conseguenza anche $y = A\cos(\omega x + \varphi) + k = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}) + k$ è una funzione sinusoidale, con la stessa ampiezza, la stessa pulsazione e lo stesso valore medio. Nei problemi si sceglie la forma più comoda: il

coseno quando l'osservazione comincia da un massimo, il seno quando comincia dal valore medio in salita.

Anche le condizioni $A > 0$ e $\omega > 0$ non sono una restrizione. Un segno meno davanti si assorbe nella fase, perché $-\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \pi)$: per esempio $-2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x + \pi)$. Un coefficiente negativo di x si riporta al caso positivo con la disparità del seno: $\operatorname{sen}(-3x + 1) = -\operatorname{sen}(3x - 1) = \operatorname{sen}(3x - 1 + \pi)$.

5.2 Dal grafico e dai dati all'equazione

5.2.1 Leggere i parametri su un grafico

Spesso il problema è rovesciato: conosciamo il grafico di un fenomeno periodico, o una tabella di misure, e cerchiamo una sinusoide che lo descriva. I quattro parametri si leggono così:

- il **valore medio** è la media fra massimo e minimo: $k = \dfrac{\max + \min}{2}$;
- l'**ampiezza** è metà della distanza fra massimo e minimo: $A = \dfrac{\max - \min}{2}$;
- il **periodo** è la distanza fra due massimi consecutivi (o il doppio della distanza fra un massimo e il minimo successivo); da esso $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$;
- la **fase** si ricava da un punto noto, di solito un massimo: se il massimo è in x_M, deve essere $\omega x_M + \varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, e si sceglie il valore di φ più comodo (per esempio quello in $]-\pi;\pi]$).

ESEMPIO SVOLTO

Una funzione sinusoidale ha un massimo nel punto $(1;\,5)$ e il minimo successivo nel punto $(4;\,-1)$. Scrivine l'equazione.

$k = \dfrac{5 + (-1)}{2} = 2$ e $A = \dfrac{5 - (-1)}{2} = 3$. Fra un massimo e il minimo successivo passa mezzo periodo: $\dfrac{T}{2} = 4 - 1 = 3$, quindi $T = 6$ e $\omega = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

Il massimo in $x = 1$ impone $\dfrac{\pi}{3}\cdot 1 + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, cioè $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. L'equazione è

$$y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + 2.$$

Verifica. Per $x = 4$ l'argomento vale $\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$ e $y = 3\cdot(-1) + 2 = -1$: è il minimo. Poiché il ciclo parte da un massimo, la stessa funzione si scrive più semplicemente con il coseno: $y = 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(x - 1)\right] + 2$.

5.2.2 Un modello discreto: le temperature di un anno

Le *Indicazioni nazionali* chiedono di costruire modelli di andamenti periodici «sia in un contesto discreto sia continuo». Cominciamo dal discreto. La Tabella 5.1 riporta le temperature medie mensili di una città immaginaria (dati inventati). Qui la variabile è il numero del mese, $m = 1, 2, \ldots, 12$: una variabile che assume solo valori interi, come gli indici di una successione.

Massimo e minimo sono 23,4 °C (luglio, $m = 7$) e 3,4 °C (gennaio, $m = 1$). Quindi $k = \dfrac{23{,}4 + 3{,}4}{2} = 13{,}4$ e $A = \dfrac{23{,}4 - 3{,}4}{2} = 10$. Il fenomeno si ripete ogni anno, cioè ogni 12 mesi: $T = 12$ e $\omega = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$. Il massimo in $m = 7$ impone $\dfrac{\pi}{6} \cdot 7 + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, cioè $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{2\pi}{3}$. Il modello è

$$T(m) = 10\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}m - \frac{2\pi}{3}\right) + 13{,}4.$$

Per giudicarlo calcoliamo i **residui**, cioè le differenze fra il valore misurato e il valore previsto dal modello: un residuo positivo significa che il modello ha previsto troppo poco, uno negativo troppo.

Tabella 5.1 Temperature medie mensili di una città immaginaria (dati inventati), valori del modello $T(m) = 10\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}m - \frac{2\pi}{3}\right) + 13{,}4$ e residui (dato − modello), in °C, arrotondati ai decimi.

Mese	m	Dato	Modello	Residuo
gennaio	1	3,4	3,4	0,0
febbraio	2	4,6	4,7	−0,1
marzo	3	8,1	8,4	−0,3
aprile	4	12,6	13,4	−0,8
maggio	5	17,4	18,4	−1,0
giugno	6	21,3	22,1	−0,8
luglio	7	23,4	23,4	0,0
agosto	8	22,6	22,1	0,5
settembre	9	18,9	18,4	0,5
ottobre	10	13,5	13,4	0,1
novembre	11	8,2	8,4	−0,2
dicembre	12	4,4	4,7	−0,3

Tutti i residui sono al massimo di 1 °C in valore assoluto: il modello coglie bene l'andamento (Figura 5.3). Ma i residui non sono distribuiti a caso: sono negativi da marzo a giugno e positivi da agosto a ottobre. In primavera la città si scalda un po' più tardi di quanto preveda la sinusoide, in autunno si raffredda un po' più tardi. Un modello leggermente migliore si ottiene spostando la sinusoide verso destra: con uno spostamento di un decimo di mese, $T(m) = 10\ \text{sen}[\frac{\pi}{6}(m - 4{,}1)] + 13{,}4$, la somma dei quadrati dei residui scende da circa 3,0 a circa 1,7. Leggere la forma dei residui, e non solo la loro grandezza, è il modo in cui si migliora un modello.

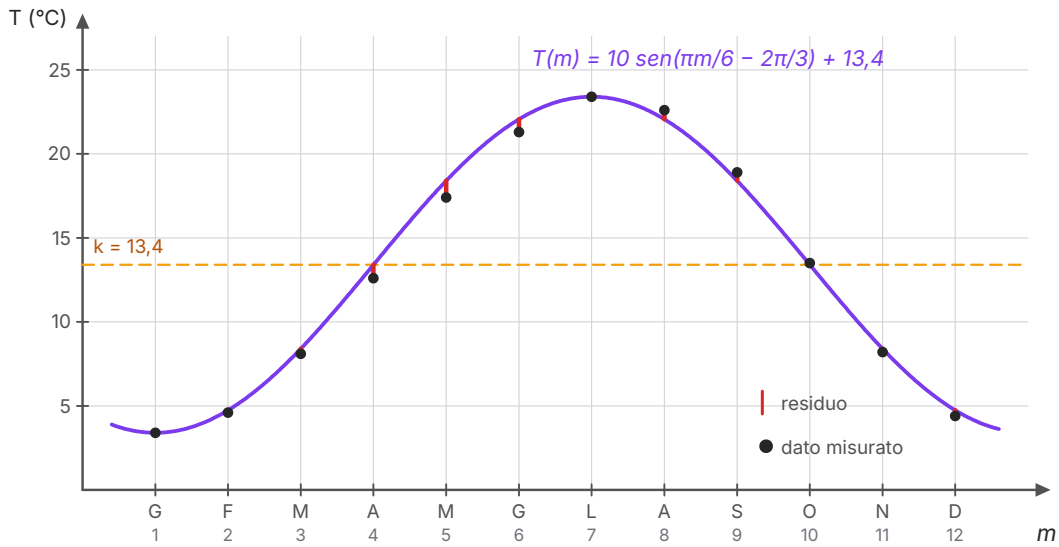


Figura 5.3 Le temperature medie mensili della Tabella 5.1 (punti, dati inventati) e la sinusoide $T(m) = 10\ \text{sen}(\frac{\pi}{6}m - \frac{2\pi}{3}) + 13{,}4$ ottenuta leggendo massimo, minimo e periodo. I segmenti rossi sono i residui; la retta tratteggiata è il valore medio.

Si noti che il modello discreto e la curva continua disegnata non sono la stessa cosa: i dati esistono solo per m intero, e la curva fra un mese e l'altro è un'interpolazione. Una funzione definita sugli interi con $T(m + 12) = T(m)$ è una *successione periodica*, l'analogo discreto di una funzione periodica.

5.2.3 Modelli continui: oscillazioni, maree, correnti e suoni

Molti fenomeni, invece, evolvono in modo continuo nel tempo t, e la sinusoide $y = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi) + k$ ne è il modello naturale. In questo contesto ω si misura in radianti al secondo e la frequenza in hertz.

- **Oscillazioni.** Un corpo appeso a una molla, spostato dalla posizione di equilibrio e lasciato andare, oscilla (in assenza di attriti) secondo la legge $x(t) = A\cos(\omega t)$: si tratta di un **moto armonico**, che studieremo nel paragrafo dedicato al moto circolare.
- **Il pendolo.** Un pendolo semplice di lunghezza L, per piccole ampiezze, oscilla con legge sinusoidale e periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ (Figura 5.4). Per $L = 1$ m e $g = 9{,}81$ m/s^2 si ottiene $T \approx 2{,}01$ s. Per ampiezze grandi il moto resta periodico, ma il modello sinusoidale non è più preciso: è un esempio di modello valido entro certi limiti.
- **Le maree.** In molti porti l'acqua raggiunge due alte maree al giorno e l'intervallo fra due alte maree successive è di circa 12 ore e 25 minuti, legato al moto apparente della Luna; l'altezza dell'acqua si descrive, in prima approssimazione, con una sinusoide di quel periodo.
- **La corrente alternata.** Nella rete elettrica europea la tensione varia nel tempo come $v(t) = V_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$ con frequenza $f = 50$ Hz, cioè $T = 0{,}02$ s e $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s ≈ 314 rad/s.
- **Il suono.** Un suono puro, come quello di un diapason, è una variazione sinusoidale della pressione dell'aria; la frequenza determina l'altezza della nota.

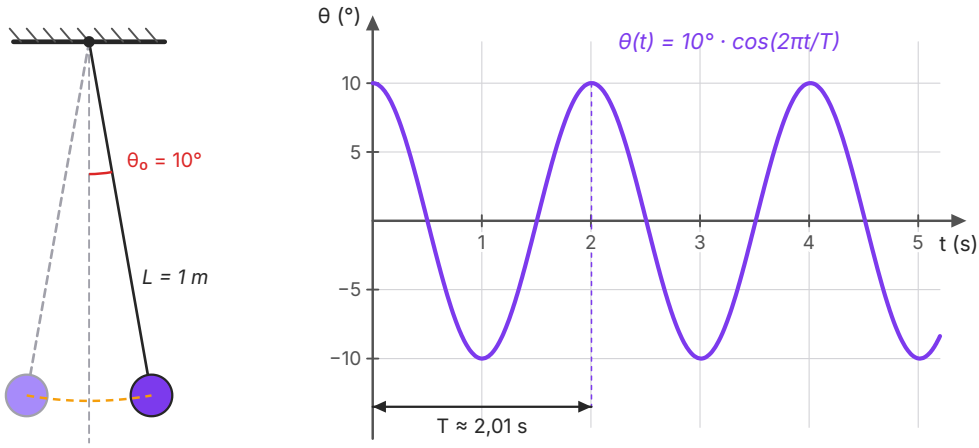


Figura 5.4 Un pendolo di lunghezza $L = 1$ m lasciato oscillare da $\theta_0 = 10°$ (a sinistra, angolo in scala) e il grafico dell'angolo in funzione del tempo, $\theta(t) = 10° \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$ con $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \approx 2{,}01$ s (a destra). Per piccole ampiezze il modello sinusoidale descrive bene il moto ideale, senza attriti.

ESEMPIO SVOLTO

La tensione di una presa domestica è descritta da $v(t) = 325\ \text{sen}(100\pi t)$, con v in volt e t in secondi. Determina ampiezza, periodo e frequenza, e trova gli istanti del primo periodo in cui la tensione vale 162,5 V.

L'ampiezza è $V_0 = 325$ V; $\omega = 100\pi$ rad/s, quindi $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = \dfrac{1}{50}$ s $= 0{,}02$ s e $f = 50$ Hz.

Poiché $162{,}5 = \dfrac{325}{2}$, l'equazione è $\text{sen}(100\pi t) = \dfrac{1}{2}$: $100\pi t = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ oppure $100\pi t = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Nel primo periodo, $0 \le t < 0{,}02$, servono le soluzioni con $n = 0$:

$$t_1 = \frac{1}{600}\ \text{s} \approx 1{,}67\ \text{ms}, \qquad t_2 = \frac{5}{600}\ \text{s} = \frac{1}{120}\ \text{s} \approx 8{,}33\ \text{ms}.$$

Fra i due istanti la tensione supera 162,5 V: per $\dfrac{4}{600}$ s, cioè per un terzo di ogni periodo.

COLLEGAMENTI

Fisica. Oscillazioni di molle e pendoli, onde sonore ed elettromagnetiche, correnti alternate: in fisica la funzione sinusoidale è il modello di base di ogni fenomeno che si ripete. Il valore 325 V dell'esempio non è casuale: la tensione di rete si indica come «230 V», che è il **valore efficace**, e l'ampiezza è $230 \cdot \sqrt{2} \approx 325$ V (vedremo il perché più avanti, studiando il quadrato di una sinusoide).

Scienze della Terra. Le maree e le stagioni sono fenomeni periodici legati ai moti della Luna e della Terra; le curve annuali di temperatura e di ore di luce si descrivono, in prima approssimazione, con sinusoidi di periodo un anno.

Musica. L'altezza di una nota dipende dalla frequenza: raddoppiare la frequenza fa salire la nota di un'ottava. Il La centrale a 440 Hz è una convenzione adottata per accordare gli strumenti, non una proprietà naturale del suono.

5.3 Somma di funzioni sinusoidali

5.3.1 Due sinusoidi con la stessa pulsazione

Che cosa succede se sommiamo due oscillazioni? Se hanno la **stessa pulsazione**, la risposta è semplice: il metodo dell'angolo aggiunto del capitolo 3 dice che

$$a\ \text{sen}\,\omega x + b\cos\omega x = R\ \text{sen}(\omega x + \varphi), \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{R}, \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{b}{R}.$$

Basta sviluppare il secondo membro con la formula di addizione: $R\,\text{sen}(\omega x + \varphi) = R\cos\varphi \cdot \text{sen}\,\omega x + R\,\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\omega x$, e i coefficienti coincidono con a e b. La somma è dunque ancora una sinusoide, con la stessa pulsazione e un'ampiezza R che in generale non è la somma delle ampiezze: è la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $|a|$ e $|b|$. Ricorda che φ va determinato con *entrambe* le condizioni su seno e coseno, non con $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{b}{a}$ soltanto.

ESEMPIO SVOLTO

Scrivi $y = \text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x$ nella forma $R\,\text{sen}(2x + \varphi)$; indica ampiezza, periodo, massimo e minimo.

$a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $R = \sqrt{1 + 3} = 2$; $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ danno $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Quindi

$$y = 2\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ampiezza 2, periodo $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, massimo 2 per $2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $x = \dfrac{\pi}{12} + n\pi$; minimo -2 per $x = \dfrac{7\pi}{12} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. **Verifica:** per $x = \dfrac{\pi}{12}$ si ha $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$.

5.3.2 Pulsazioni diverse

Se le pulsazioni sono diverse, la somma non è più una sinusoide. La Figura 5.5a mostra $y = \text{sen}\,x + \text{sen}\,2x$: il grafico si ripete con periodo 2π, ma ha una forma irregolare, con massimi di altezze diverse. È comunque periodico, perché 2π è un periodo di entrambi gli addendi: 2π è il periodo di $\text{sen}\,x$ e un multiplo, il doppio, del periodo π di $\text{sen}\,2x$.

In generale, se f_1 ha periodo T_1 e f_2 ha periodo T_2 e il rapporto $\dfrac{T_1}{T_2}$ è un numero razionale $\dfrac{p}{q}$ (frazione ridotta ai minimi termini), allora il numero $qT_1 = pT_2$ è un multiplo comune dei due periodi ed è un periodo della somma. Il più piccolo multiplo comune si chiama, per analogia con gli interi, **minimo comune multiplo dei periodi**, ed è di solito il periodo della somma.

Per esempio, $y = \text{sen}\,\dfrac{2x}{3} + \cos\dfrac{x}{2}$ somma una funzione di periodo $\dfrac{2\pi}{2/3} = 3\pi$ e una di periodo $\dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Il rapporto è $\dfrac{3\pi}{4\pi} = \dfrac{3}{4}$, e il minimo comune multiplo è $12\pi = 4 \cdot 3\pi = 3 \cdot 4\pi$.

Se invece il rapporto fra i periodi è **irrazionale**, non esiste alcun multiplo comune: $y = \text{sen}\,x + \text{sen}(\sqrt{2}x)$ ha addendi di periodi 2π e $\sqrt{2}\pi$, e un multiplo comune $a \cdot 2\pi = b \cdot \sqrt{2}\pi$ con a,

b interi positivi darebbe $\sqrt{2} = \frac{2a}{b}$, un numero razionale, il che è assurdo. Si può dimostrare che in questo caso la somma non è periodica: il grafico non si ripete mai esattamente.

ERRORE FREQUENTE

Il periodo di una somma **non** è la somma dei periodi, né il loro prodotto: per $y = \text{sen}\, 4x + \cos 6x$ i periodi sono $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$ e il periodo della somma è il loro minimo comune multiplo, π. E il minimo comune multiplo esiste solo se il rapporto fra i periodi è razionale: $\text{sen}\, x + \cos(\pi x)$, che somma periodi 2π e 2, non è periodica.

5.3.3 I battimenti

Un caso notevole è la somma di due sinusoidi con pulsazioni **vicine**, come $y = \text{sen}\, 10x + \text{sen}\, 11x$. Le formule di prostaferesi del capitolo 2 la trasformano in un prodotto:

$$\text{sen}\, 10x + \text{sen}\, 11x = 2\, \text{sen}\, \frac{21x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

Il fattore $\text{sen}\, \frac{21x}{2}$ oscilla rapidamente, con periodo $\frac{4\pi}{21}$; il fattore $2 \cos \frac{x}{2}$ varia lentamente e fa da «ampiezza variabile». Il grafico (Figura 5.5b) è un'oscillazione veloce racchiusa fra le curve $y = 2 \cos \frac{x}{2}$ e $y = -2 \cos \frac{x}{2}$, che si chiamano **inviluppo**: l'ampiezza cresce fino a 2, si annulla in $x = \pi$, torna a 2 e così via, con un rigonfiamento ogni 2π. Questo fenomeno si chiama **battimento**.

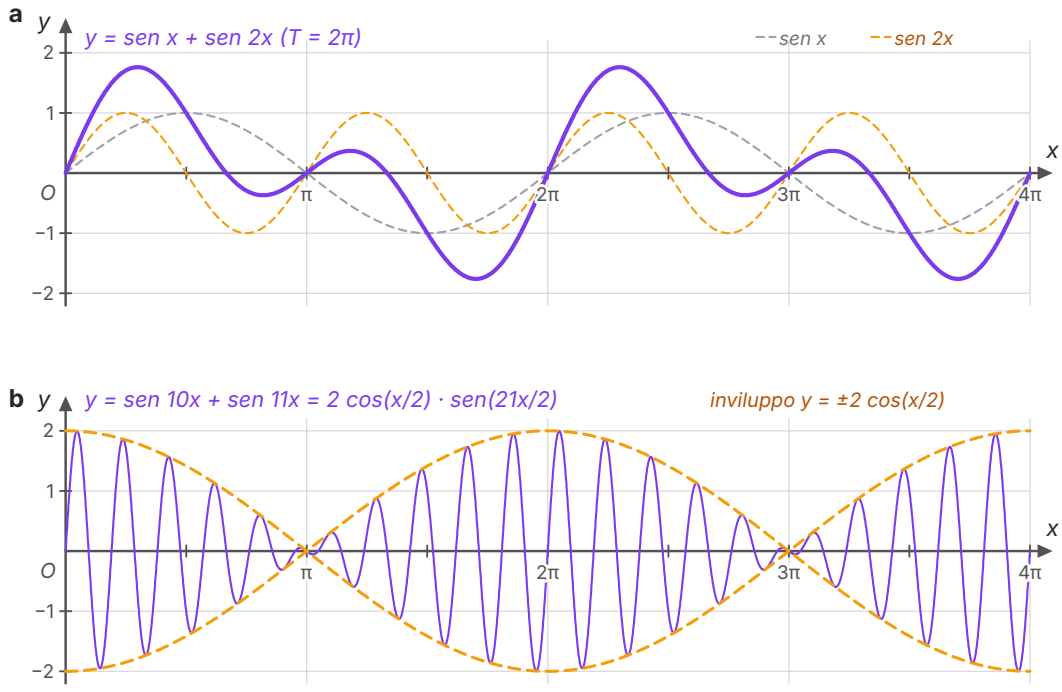


Figura 5.5 (a) Il grafico di $y = \text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x$ (viola) ottenuto sommando $y = \text{sen}\, x$ e $y = \text{sen}\, 2x$ (tratteggiate): è periodico di periodo 2π, ma non sinusoidale. (b) I battimenti: $y = \text{sen}\, 10x + \text{sen}\, 11x$ oscilla rapidamente dentro l'inviluppo $y = \pm 2 \cos \frac{x}{2}$ (arancio, tratteggiato), che si annulla in $x = \pi$ e $x = 3\pi$.

Con i suoni il fenomeno si sente. Se due diapason di frequenze f_1 e f_2 molto vicine suonano insieme, si ode una nota di frequenza intermedia $\frac{f_1 + f_2}{2}$ la cui intensità cresce e cala $|f_1 - f_2|$ volte al secondo. Con 440 Hz e 442 Hz si sentono due battimenti al secondo; quando le due frequenze coincidono i battimenti scompaiono. Gli accordatori di strumenti usano proprio questo segnale.

5.3.4 Il quadrato di una sinusoide

Anche $y = \text{sen}^2 x$ è una sinusoide, travestita. Le formule di linearizzazione del capitolo 2 danno

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

È una sinusoide di ampiezza $\frac{1}{2}$, valore medio $\frac{1}{2}$ e periodo π: il quadrato dimezza il periodo, perché il seno e il suo opposto hanno lo stesso quadrato. Allo stesso modo

$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$. Questo spiega il «230 V» della rete elettrica: la potenza dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della tensione, $v^2 = {V_0}^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)$, che oscilla fra 0 e ${V_0}^2$ con valore medio $\frac{{V_0}^2}{2}$. Una tensione costante che dia la stessa potenza media vale $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$: è il valore efficace, e $\frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230$.

5.4 Funzioni periodiche non sinusoidali

Non tutto ciò che si ripete è una sinusoide. Il battito del cuore registrato da un elettrocardiogramma si ripete a ogni battito, ma con un profilo fatto di picchi e tratti piatti; la stessa nota suonata da un violino e da un flauto ha lo stesso periodo ma forme d'onda diverse, ed è per questo che i due strumenti hanno un *timbro* diverso. Ecco alcuni esempi di funzioni periodiche non sinusoidali.

- **Il valore assoluto del seno.** $y = |\operatorname{sen} x|$ (capitolo 1) ribalta sopra l'asse x gli archi negativi: il periodo diventa π, il valore medio non è più la media fra massimo e minimo e nei punti $x = n\pi$ il grafico ha delle «punte».
- **L'onda quadra.** È la funzione che vale 1 su $[0; \pi[$ e -1 su $[\pi; 2\pi[$, prolungata per periodicità: $f(x + 2\pi) = f(x)$. Si definisce a tratti e salta bruscamente da un valore all'altro; descrive, per esempio, un segnale che si accende e si spegne a intervalli regolari.
- **Il dente di sega.** È la funzione «parte frazionaria» $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore o uguale a x: cresce linearmente da 0 verso 1 su ogni intervallo $[n; n + 1[$ e poi ricade a 0. Ha periodo 1.

Per riconoscere il periodo di una funzione assegnata con una formula si cerca il più piccolo $T > 0$ per cui $f(x + T) = f(x)$; per riconoscerlo in un grafico di dati si misura la distanza fra due punti «corrispondenti», per esempio due picchi consecutivi, e conviene misurare la distanza fra il primo e l'ultimo di molti picchi e dividere per il numero di cicli, così che l'errore di lettura si ripartisca.

APPROFONDIMENTO · FOURIER E LE SOMME DI SINUSOIDI

Nel 1822 Joseph Fourier pubblicò la *Théorie analytique de la chaleur*, dedicata alla propagazione del calore. Per risolvere le sue equazioni Fourier sostenne che una funzione periodica, anche discontinua, si può ottenere come somma di infinite sinusoidi con pulsazioni multiple di quella fondamentale. L'idea suscitò discussioni fra i matematici dell'epoca e richiese decenni di lavoro per essere precisata; oggi le *serie di Fourier* sono alla base dell'elaborazione di suoni e immagini.

Un esempio si vede senza alcuna teoria. Sommiamo i primi termini di $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots$ (Figura 5.6): ogni nuovo termine rende il grafico più piatto in alto e in basso e più ripido vicino a $x = n\pi$, e la somma si avvicina all'onda quadra che vale $\frac{\pi}{4}$ su $]0; \pi[$ e $-\frac{\pi}{4}$ su $]\pi; 2\pi[$. Le funzioni sinusoidali sono i «mattoni» con cui si costruiscono tutte le altre funzioni periodiche.

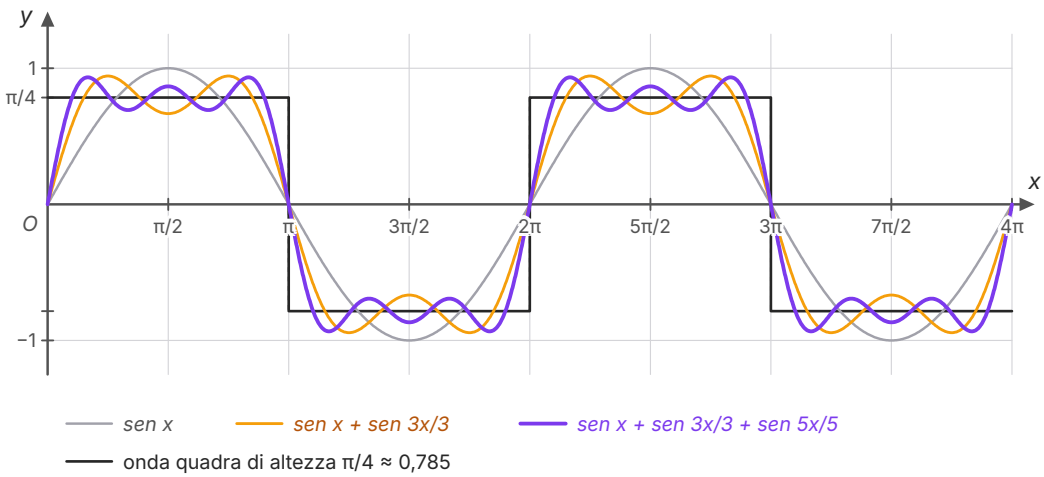


Figura 5.6 L'onda quadra di altezza $\frac{\pi}{4}$ (nero) e le prime somme $\operatorname{sen} x$ (grigio), $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ (arancio) e $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5}$ (viola), calcolate su $[0; 4\pi]$. Aggiungendo termini la somma si avvicina all'onda quadra.

5.5 Moto circolare uniforme e moto armonico

Da dove viene la forma sinusoidale di tanti fenomeni? Una risposta geometrica si trova nel moto più regolare che si conosca: quello di un punto che percorre una circonferenza con velo-

cità costante.

Un punto P si muove su una circonferenza di centro O e raggio r in senso antiorario, descrivendo angoli uguali in tempi uguali: è un **moto circolare uniforme**. L'angolo descritto in un secondo, misurato in radianti, si chiama **velocità angolare** ω. Se all'istante $t = 0$ il raggio OP forma con l'asse x l'angolo φ, all'istante t l'angolo è $\omega t + \varphi$ e le coordinate di P sono

$$x(t) = r\cos(\omega t + \varphi), \qquad y(t) = r\,\text{sen}(\omega t + \varphi).$$

Il punto torna nella stessa posizione quando l'angolo è aumentato di 2π, cioè dopo il tempo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: il periodo del moto circolare coincide con il periodo delle due funzioni sinusoidali. La pulsazione di una sinusoide è dunque la velocità angolare di un punto che gira su una circonferenza: per questo, in fisica, si chiama anche «frequenza angolare».

Proiettiamo ora P su un diametro, per esempio sull'asse y: il punto Q, proiezione di P, va su e giù lungo il diametro con legge $y(t) = r\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$. Il moto di un punto che si muove su una retta secondo una legge sinusoidale si chiama **moto armonico**: **la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro è un moto armonico**, con ampiezza uguale al raggio e pulsazione uguale alla velocità angolare.

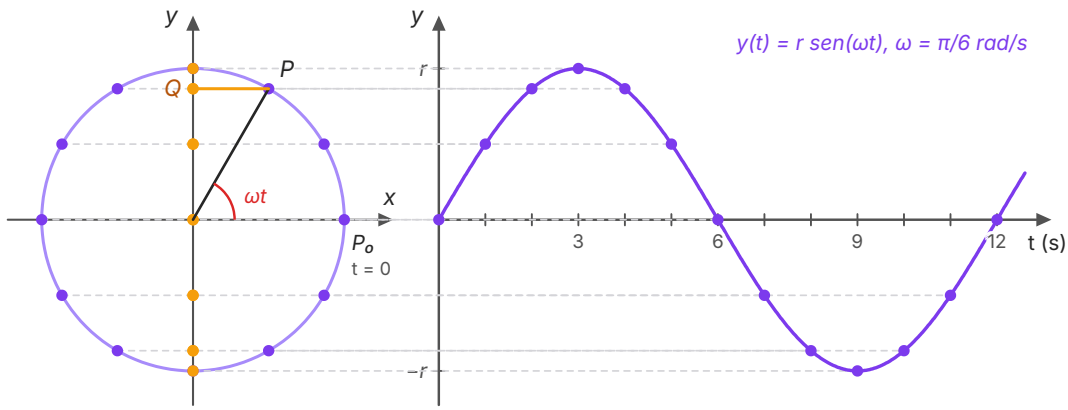


Figura 5.7 Un punto P in moto circolare uniforme con $\omega = \dfrac{\pi}{6}$ rad/s (periodo 12 s) è disegnato a intervalli di 1 s (punti viola sulla circonferenza). La sua proiezione Q sull'asse y (punti arancio) si muove di moto armonico: riportando y in funzione di t si ottiene la sinusoide $y(t) = r\,\text{sen}(\omega t)$. Le proiezioni sono fitte vicino agli estremi e rade vicino al centro.

La Figura 5.7 mostra le posizioni di P a intervalli di tempo uguali: sulla circonferenza sono equidistanti, ma le proiezioni sul diametro non lo sono. Sono fitte vicino agli estremi, dove Q rallenta, si ferma per un istante e torna indietro; sono rade vicino al centro, dove Q è più velo-

ce. La Tabella 5.2 lo mostra con i numeri per $r = 1$ m e $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/s, partendo dall'estremo, cioè con la legge $x(t) = \cos \frac{\pi t}{6}$.

Tabella 5.2 Posizioni del punto in moto armonico $x(t) = \cos \frac{\pi t}{6}$ (in metri, t in secondi) e spostamenti in ciascun secondo, arrotondati ai millesimi.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
$x(t)$ (m)	1	0,866	0,500	0	−0,500	−0,866	−1
spostamento nel secondo precedente (m)	—	−0,134	−0,366	−0,500	−0,500	−0,366	−0,134

Nel primo secondo il punto si sposta di soli 13 cm, nel terzo e nel quarto di 50 cm ciascuno: la velocità media è massima intorno al passaggio per il centro e minima vicino agli estremi. Nel prossimo paragrafo daremo un valore preciso a queste velocità.

DA RICORDARE

Moto circolare uniforme di raggio r e velocità angolare ω ⟶ proiezione su un diametro: moto armonico $x(t) = r\cos(\omega t + \varphi)$, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Il punto proiettato è fermo agli estremi e più veloce al centro.

5.6 La velocità di variazione di una grandezza periodica

5.6.1 Le secanti del grafico del seno

In *Matematica 3* abbiamo misurato la rapidità con cui cambia una funzione con il **tasso medio di variazione** su un intervallo $[x_0; x_0 + h]$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

che è la pendenza della retta *secante* il grafico nei punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$. Calcoliamolo per $f(x) = \text{sen}\, x$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$, con valori di h sempre più piccoli, sia a destra ($h > 0$) sia a sinistra di x_0 (Tabella 5.3).

Tabella 5.3 Tassi medi di variazione di $f(x) = \text{sen } x$ a destra e a sinistra di $x_0 = \frac{\pi}{3}$, calcolati con la calcolatrice in radianti e arrotondati alla quarta cifra decimale.

h	$\frac{\text{sen}(x_0 + h) - \text{sen } x_0}{h}$	$\frac{\text{sen } x_0 - \text{sen}(x_0 - h)}{h}$
1	0,0226	0,8188
0,5	0,2674	0,6915
0,1	0,4559	0,5424
0,01	0,4957	0,5043
0,001	0,4996	0,5004

I due tassi si stringono da parti opposte intorno a 0,5, che è proprio $\cos\frac{\pi}{3}$. Geometricamente, le secanti ruotano attorno al punto $P(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ e si avvicinano a una retta che «sfiora» il grafico in P: la *tangente*, la cui pendenza misura la **velocità di variazione istantanea** della funzione in x_0 (Figura 5.8).

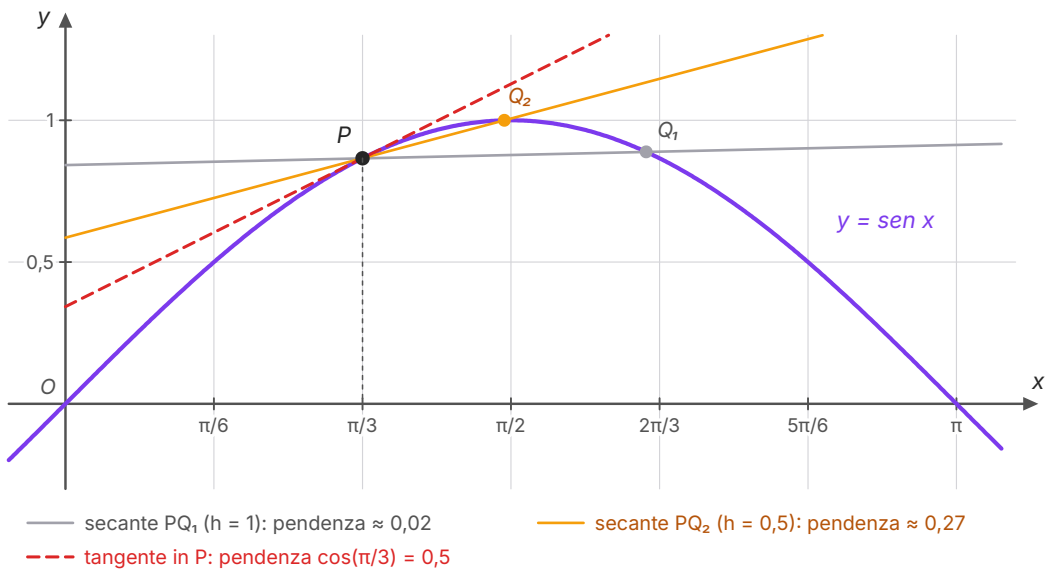


Figura 5.8 Il grafico di $y = \text{sen } x$ (viola, scala uguale sui due assi) e le secanti per il punto $P(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ con $h = 1$ (grigio) e $h = 0{,}5$ (arancio). Al diminuire di h le secanti si avvicinano alla retta tangente in P (rossa, tratteggiata), che ha pendenza $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$.

Non è una coincidenza. Con la formula di prostaferesi $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$ il tasso medio diventa

$$\frac{\operatorname{sen}(x_0+h)-\operatorname{sen} x_0}{h} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}.$$

Quando h è piccolo, il primo fattore è vicino a $\cos x_0$. Tutto dipende allora dal secondo fattore, che ha la forma $\dfrac{\operatorname{sen} u}{u}$ con $u = \dfrac{h}{2}$ piccolo.

5.6.2 Perché i radianti sono «naturali»

La Tabella 5.4 mostra il rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ per valori di x sempre più piccoli, misurando l'angolo prima in radianti e poi in gradi.

Tabella 5.4 Il rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ per x piccolo, con l'angolo x misurato in radianti e in gradi (valori arrotondati alla sesta cifra decimale).

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, x in radianti	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, x in gradi
1	0,841471	0,017452
0,5	0,958851	0,017453
0,1	0,998334	0,017453
0,01	0,999983	0,017453
0,001	1,000000	0,017453

In radianti il rapporto si avvicina a 1: **per x piccolo, $\operatorname{sen} x \approx x$**. In gradi si avvicina invece a $\dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}017453$, il fattore di conversione fra le due unità. Il motivo si vede sulla circonferenza goniometrica: per un angolo piccolo l'arco, che in radianti misura x, e la semicorda, che misura $\operatorname{sen} x$, sono quasi uguali. Solo misurando gli angoli in radianti il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ ha nell'origine una tangente di pendenza 1, la retta $y = x$, esattamente come in *Matematica 3* il grafico di $y = e^x$ ha nel punto (0; 1) una tangente di pendenza 1. Il radiante è per la goniometria quello che il numero e è per gli esponenziali: l'unità che rende le formule più semplici.

Tornando al tasso medio del seno, per h piccolo il fattore $\dfrac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}$ è vicino a 1 e il tasso medio è vicino a $\cos x_0$. In conclusione: **la velocità di variazione istantanea della funzione seno nel punto x_0 vale $\cos x_0$**. Con lo stesso ragionamento si trova che quella del coseno vale

$-\text{sen}\, x_0$. Al quinto anno queste osservazioni numeriche diventeranno teoremi, con il concetto di limite e di derivata.

DA RICORDARE

Con x in radianti e vicino a 0: sen $x \approx x$ (per esempio sen 0,1 = 0,0998...). La velocità di variazione di sen x in x_0 è cos x_0: massima, uguale a 1, dove il seno passa per lo zero salendo; nulla nei massimi e nei minimi.

5.6.3 La velocità nel moto armonico

Applichiamo queste idee al moto armonico $x(t) = A\cos(\omega t)$. La velocità media sull'intervallo $[t;\, t+h]$ è il tasso medio $\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$, e con la prostaferesi del coseno si trova, come sopra, che per h piccolo si avvicina a $-A\omega\,\text{sen}(\omega t)$. La velocità istantanea è quindi nulla quando $\text{sen}(\omega t) = 0$, cioè agli estremi $x = \pm A$, ed è massima in valore assoluto, uguale a $A\omega$, quando $|\text{sen}(\omega t)| = 1$, cioè nel passaggio per il centro. Il valore $A\omega$ è anche la velocità con cui si muove il punto P sulla circonferenza (un arco di lunghezza $A \cdot \omega$ in un secondo): al centro la proiezione è veloce quanto il punto che la genera, perché in quel momento P si muove parallelamente al diametro.

ESEMPIO SVOLTO

Un corpo oscilla con legge $x(t) = 0{,}10\cos(2\pi t)$, con x in metri e t in secondi. Calcola la velocità media nell'intervallo [0,24; 0,26] e nell'intervallo [0; 0,02], e confrontale con il valore $A\omega$.

Il periodo è $T = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$ s; in $t = 0{,}25$ s il corpo passa per il centro, in $t = 0$ è all'estremo $x = 0{,}10$ m.

Nell'intervallo centrale: $\dfrac{x(0{,}26)-x(0{,}24)}{0{,}02} = \dfrac{0{,}10\cdot[\cos(0{,}52\pi)-\cos(0{,}48\pi)]}{0{,}02} \approx -0{,}628$ m/s. Nell'intervallo iniziale: $\dfrac{x(0{,}02)-x(0)}{0{,}02} = \dfrac{0{,}10\cdot[\cos(0{,}04\pi)-1]}{0{,}02} \approx -0{,}039$ m/s.

Il valore teorico della velocità massima è $A\omega = 0{,}10\cdot 2\pi \approx 0{,}628$ m/s, e coincide (in valore assoluto, alla terza cifra) con la velocità media vicino al centro; vicino all'estremo il corpo è quasi fermo. Il segno meno indica che il corpo si muove verso le x negative.

Lo stesso ragionamento vale per ogni grandezza periodica descritta da una sinusoide. Nel modello delle temperature della Tabella 5.1 la temperatura cambia più rapidamente quando la sinusoide attraversa il valore medio, intorno ad aprile e a ottobre, e quasi non cambia vicino al massimo di luglio e al minimo di gennaio: chi vive in un clima temperato lo sa per esperienza, perché le mezze stagioni sono quelle in cui il tempo cambia più in fretta.

SINTESI

- Una funzione è periodica di periodo T se $f(x+T)=f(x)$ per ogni x del dominio, e T è il più piccolo numero positivo con questa proprietà.
- La funzione sinusoidale $y=A\,\text{sen}(\omega x+\varphi)+k$ ($A>0$, $\omega>0$) ha ampiezza A, pulsazione ω, periodo $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, frequenza $f=\dfrac{1}{T}$, valore medio k, massimo $k+A$ e minimo $k-A$.
- Il grafico di $y=\text{sen}(\omega x+\varphi)$ è quello di $y=\text{sen}\,\omega x$ traslato orizzontalmente di $-\dfrac{\varphi}{\omega}$, non di $-\varphi$.
- Un coseno è un seno sfasato: $\cos x=\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; anche $A\cos(\omega x+\varphi)+k$ è una sinusoide.
- Dal grafico o dai dati: $k=\dfrac{\max+\min}{2}$, $A=\dfrac{\max-\min}{2}$, T = distanza fra due massimi, φ da un punto noto. I residui (dato − modello) misurano la bontà del modello e la loro forma suggerisce come migliorarlo.
- Gli andamenti periodici si modellano nel discreto (dati mensili, successioni periodiche) e nel continuo (oscillazioni, pendolo per piccoli angoli, maree, corrente alternata, suoni).
- La somma di sinusoidi con la stessa pulsazione è una sinusoide: $a\,\text{sen}\,\omega x+b\cos\omega x=R\,\text{sen}(\omega x+\varphi)$ con $R=\sqrt{a^2+b^2}$.
- La somma di funzioni periodiche è periodica se il rapporto fra i periodi è razionale (un periodo è il minimo comune multiplo dei periodi, che di solito è il periodo della somma); pulsazioni vicine producono i battimenti.
- Esistono funzioni periodiche non sinusoidali (onda quadra, dente di sega, $|\text{sen}\,x|$); secondo l'idea di Fourier si ottengono come somme di sinusoidi.
- La proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro è un moto armonico; la pulsazione è la velocità angolare.
- Con x in radianti, $\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$ si avvicina a 1 per x piccolo; il tasso medio di variazione di sen x vicino a x_0 si avvicina a $\cos x_0$.
- Nel moto armonico $x(t)=A\cos(\omega t)$ la velocità è nulla agli estremi e massima, uguale a $A\omega$ in valore assoluto, al centro.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il periodo della funzione $y = 3\,\text{sen}(4x - 1) + 2$ è:

   A. $\frac{\pi}{4}$

   B. $\frac{\pi}{2}$

   C. 2π

   D. 8π

2. ● Il grafico di $y = \text{sen}(2x + \frac{\pi}{3})$ si ottiene da quello di $y = \text{sen}\,2x$ con una traslazione:

   A. di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra

   B. di $\frac{\pi}{6}$ verso destra

   C. di $\frac{\pi}{6}$ verso sinistra

   D. di $\frac{\pi}{3}$ verso destra

3. ● Una funzione sinusoidale ha massimo 7 e minimo −1. La sua ampiezza A e il suo valore medio k sono:

   A. $A = 4$, $k = 3$

   B. $A = 8$, $k = 3$

   C. $A = 4$, $k = 4$

   D. $A = 3$, $k = 4$

4. ●● La funzione $y = \text{sen}\,3x + \cos 2x$:

   A. ha periodo 6π

   B. ha periodo π

   C. non è periodica

   D. ha periodo 2π

5. ●● Quale di queste funzioni **non** è periodica?

   A. $y = \text{sen}^2 x$

   B. $y = \text{sen}\,x + \text{sen}(\pi x)$

   C. $y = |\cos x|$

   D. $y = \text{sen}\,\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

6. ● Nel moto armonico $x(t) = A\cos(\omega t)$ la velocità, in valore assoluto, è massima:
   A. agli estremi $x = \pm A$
   B. nei punti $x = \pm \frac{A}{2}$
   C. in ogni punto, perché è costante
   D. nel passaggio per il centro $x = 0$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) La funzione $y = -2\operatorname{sen} x$ ha ampiezza −2. b) $\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ per ogni x reale. c) La funzione $y = \operatorname{sen}(100\pi t)$, con t in secondi, ha frequenza 50 Hz. d) La funzione $y = \operatorname{sen}^2 x$ ha periodo 2π. e) Se T è un periodo di f, anche $2T$ è un periodo di f.

8. ● Completa. Nella funzione $y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + k$, con $A > 0$ e $\omega > 0$, il numero A si chiama _____, il numero ω si chiama _____, il periodo è $T =$ _____, la frequenza è $f =$ _____ e il grafico è quello di $y = A\operatorname{sen}\omega x + k$ traslato orizzontalmente di _____. La retta $y = k$ si chiama _____.

Calcolare

9. ● Per ciascuna funzione indica ampiezza, periodo, frequenza, valore medio, massimo e minimo. a) $y = 4\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 1$; b) $y = 0{,}5\cos 3x + 2$; c) $y = -3\operatorname{sen}(\pi x)$.

10. ● Scrivi una funzione della forma $y = A\operatorname{sen}\omega x + k$ che abbia: a) ampiezza 2, periodo π e valore medio 1; b) ampiezza 5, periodo 8 e valore medio 0; c) massimo 6, minimo 2 e periodo 4π.

11. ●● Data $y = 3\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{2}) + 1$: a) indica la traslazione orizzontale rispetto a $y = 3\operatorname{sen} 2x + 1$; b) trova tutti i punti di massimo e di minimo; c) verifica che $y = 1 - 3\cos 2x$; d) trova le intersezioni del grafico con l'asse x, esprimendole con la funzione arccos e con due cifre decimali.

12. ●● Il grafico di una funzione sinusoidale ha un massimo nel punto $(\frac{\pi}{8}; 5)$ e il minimo successivo nel punto $(\frac{5\pi}{8}; -1)$. a) Scrivine l'equazione nella forma $y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + k$, con $\varphi \in]-\pi; \pi]$. b) Scrivi la stessa funzione con il coseno.

13. ●● Scrivi nella forma $R\operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$ e indica ampiezza e periodo: a) $y = \operatorname{sen} 3x - \cos 3x$; b) $y = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$; c) $y = 3\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x$ (esprimi φ con la funzione arctg e in gradi).

14. ●● Stabilisci se la funzione è periodica e, se lo è, trovane il periodo. a) $y = \operatorname{sen} 4x + \cos 6x$; b) $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{3}$; c) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; d) $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{sen} x$.

15. ●● Con le formule di linearizzazione o di duplicazione scrivi ciascuna funzione come sinusoide e indica periodo, massimo e minimo. a) $y = \cos^2 x$; b) $y = \operatorname{sen} x\cos x$; c) $y = 4\operatorname{sen}^2 3x$.

16. ●● a) Con le formule di prostaferesi scrivi $y = \text{sen } 7x + \text{sen } 9x$ come prodotto. b) Indica l'equazione dell'inviluppo e trova, in $[0; 2\pi]$, i punti in cui l'ampiezza dell'oscillazione si annulla. c) Qual è il periodo della funzione?

17. ●● Calcola il tasso medio di variazione di $f(x) = \text{sen } x$ sugli intervalli a) $[0; \frac{\pi}{2}]$; b) $[0; \frac{\pi}{6}]$; c) $[\frac{\pi}{2}; \pi]$. Dai i valori esatti e con tre cifre decimali e confronta i primi due con $\cos 0 = 1$.

18. ●● Un corpo oscilla con legge $x(t) = 0{,}05 \cos(4\pi t)$, con x in metri e t in secondi. a) Indica ampiezza, periodo e frequenza. b) Calcola la posizione per $t = 0$, $t = \frac{1}{8}$ s, $t = \frac{1}{4}$ s, $t = \frac{1}{3}$ s. c) Trova il primo istante $t > 0$ in cui $x = 0{,}025$ m.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che, se f ha periodo T e $\omega > 0$, la funzione $g(x) = f(\omega x)$ ha periodo $\frac{T}{\omega}$. (Dimostra sia che $\frac{T}{\omega}$ è un periodo, sia che nessun numero positivo più piccolo lo è.)

20. ●● Dimostra che $a \text{ sen } \omega x + b \cos \omega x = R \text{ sen}(\omega x + \varphi)$, con $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\text{sen } \varphi = \frac{b}{R}$ (a e b non entrambi nulli). Spiega perché un angolo φ con queste proprietà esiste sempre.

21. ●● Trova l'errore. «La funzione $y = \text{sen}(2x + \frac{\pi}{3})$ ha lo stesso grafico di $y = \text{sen } 2x$ traslato di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra, perché si aggiunge $\frac{\pi}{3}$ all'argomento.» Correggi il ragionamento e verifica la correzione calcolando un punto del grafico.

22. ●●● Siano f_1 di periodo T_1 e f_2 di periodo T_2, con $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, p e q interi positivi. Dimostra che $qT_1 = pT_2$ è un periodo (non necessariamente il minimo) di $f_1 + f_2$. Applica il risultato a $y = \text{sen } 4x + \cos 6x$.

Problemi

23. ●● Una ruota panoramica ha raggio 20 m, il suo centro è a 22 m da terra e compie un giro completo in 8 minuti. All'istante $t = 0$ una cabina si trova nel punto più basso. a) Verifica che l'altezza della cabina, in metri, è $h(t) = 22 - 20 \cos \frac{\pi t}{4}$, con t in minuti. b) Calcola l'altezza dopo 2 minuti e dopo 5 minuti. c) Per quanto tempo, durante ogni giro, la cabina si trova a più di 32 m da terra?

24. ●● In un porto (dati inventati) l'alta marea raggiunge 4,1 m alle 3:00 e la bassa marea successiva 0,9 m alle 9:12. a) Determina ampiezza, valore medio e periodo, e verifica che il modello $h(t) = 2{,}5 + 1{,}6 \cos \frac{2\pi(t-3)}{12{,}4}$ (t in ore dalla mezzanotte) descrive i due dati. b) Una barca può entrare nel porto solo se l'acqua è alta almeno 2 m. Fra le 3:00 e l'alta marea successiva, in quale intervallo di tempo non può entrare? Arrotonda al minuto.

25. ●● La tensione di rete è $v(t) = 325 \operatorname{sen}(100\pi t)$, con v in volt e t in secondi. a) Quante volte al secondo la tensione raggiunge il suo valore massimo? b) In quali intervalli del primo periodo si ha $|v(t)| \geq 230$ V? c) Per quale frazione del tempo, approssimativamente, $|v|$ supera 230 V?

26. ●● Due diapason di frequenze 440 Hz e 444 Hz suonano insieme con la stessa ampiezza, e il suono è descritto da $y = \operatorname{sen}(880\pi t) + \operatorname{sen}(888\pi t)$. a) Scrivi y come prodotto. b) Qual è la frequenza del suono che si ode? c) Quanti battimenti al secondo si sentono?

27. ●●● Un punto percorre una circonferenza di raggio 0,3 m con moto circolare uniforme, compiendo 2 giri al secondo, e all'istante $t = 0$ si trova in (0,3; 0). a) Calcola la velocità angolare e il periodo. b) Scrivi la legge del moto armonico della sua proiezione sull'asse x. c) Calcola la velocità media della proiezione negli intervalli $[0;\ \frac{1}{8}]$ e $[\frac{1}{16};\ \frac{1}{8}]$ (in secondi). d) Confronta i risultati con la velocità del punto sulla circonferenza e commenta.

Con il computer

28. ●● Con un software di geometria dinamica crea quattro slider A, ω, φ, k e traccia il grafico di $y = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + k$. a) Descrivi l'effetto di ciascuno slider sul grafico. b) Trova valori dei parametri che rendono il grafico coincidente con quello di $y = 2 \cos x + 1$. c) Con $A > 0$ si può ottenere il grafico di $y = -\operatorname{sen} x$? Con quali valori?

29. ●● In un foglio di calcolo inserisci le ore di luce medie mensili di una località immaginaria (dati inventati), da gennaio a dicembre: 9,2; 10,3; 11,8; 13,3; 14,6; 15,3; 15,0; 13,9; 12,4; 10,9; 9,6; 8,9. a) Leggendo massimo, minimo e periodo, costruisci il modello $L(m) = 12{,}1 - 3{,}2 \cos \frac{\pi m}{6}$ e verificalo. b) Calcola in una colonna i residui e in una cella la somma dei loro quadrati. c) Che cosa osservi nei segni dei residui? d) Prova il modello $L(m) = 12{,}1 - 3{,}2 \cos \frac{\pi(m-s)}{6}$ con $s = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$: quale valore dà la somma dei quadrati più piccola?

Verso la verifica

30. ●● Data la funzione $f(x) = 2 \operatorname{sen}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - 1$: a) indica ampiezza, periodo, traslazione orizzontale e valore medio; b) trova i punti di massimo e di minimo; c) trova gli zeri nell'intervallo $[0; 4\pi]$; d) traccia il grafico su un periodo.

31. ●● La temperatura di una giornata (dati inventati) segue il modello $T(h) = 18 + 6 \operatorname{sen} \dfrac{\pi(h-9)}{12}$, con T in °C e h nelle ore da 0 a 24. a) Trova la temperatura massima e minima e le ore in cui si raggiungono. b) In quali ore la temperatura supera 21 °C? c) Calcola il tasso medio di variazione fra le 9 e le 12 e fra le 13 e le 15, e spiega perché il secondo è minore.

32. ●● a) Scrivi $y = \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x$ nella forma $R \operatorname{sen}(x + \varphi)$. b) Risolvi l'equazione $y = 1$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$. c) Qual è l'immagine della funzione?

33. ●●● Sfida. Con le formule di Werner trasforma $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{3} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$ in una somma di seni e trova il periodo della funzione. Il periodo di un prodotto è sempre il prodotto dei periodi dei fattori? Giustifica la risposta.

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: la storia delle funzioni goniometriche e il loro uso nello studio dei fenomeni periodici, fino alle serie di Fourier.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le funzioni goniometriche nel quadro generale delle funzioni e dei limiti, che incontrerai al quinto anno.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Fourier e la matematica dell'Ottocento.

Glossario del capitolo

Ampiezza
In una sinusoide $y = A\ \text{sen}(\omega x + \varphi) + k$ con $A > 0$, il numero A: metà della differenza fra massimo e minimo.

Ciclo
Tratto del grafico di una funzione periodica che corrisponde a un periodo completo.

Fase
Il numero φ in $y = A\ \text{sen}(\omega x + \varphi) + k$: il valore dell'argomento per $x = 0$. Il grafico è traslato orizzontalmente di $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Frequenza
Numero di periodi compresi in un'unità della variabile: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$; se la variabile è un tempo in secondi si misura in hertz (Hz).

Funzione sinusoidale
Funzione della forma $y = A\ \text{sen}(\omega x + \varphi) + k$; anche $y = A\ \cos(\omega x + \varphi) + k$ lo è, perché un coseno è un seno sfasato.

Inviluppo
Coppia di curve che racchiude un'oscillazione di ampiezza variabile, come $y = \pm 2 \cos \frac{x}{2}$ per $y = \text{sen}\ 10x + \text{sen}\ 11x$.

Moto armonico
Moto di un punto su una retta con legge sinusoidale, $x(t) = A\ \cos(\omega t + \varphi)$; è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro.

Moto circolare uniforme
Moto di un punto su una circonferenza che descrive angoli uguali in tempi uguali.

Onda quadra
Funzione periodica che assume alternativamente due valori costanti su intervalli consecutivi di uguale ampiezza.

Periodo
Il più piccolo numero positivo T per cui $f(x + T) = f(x)$ per ogni x; per una sinusoide $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Pulsazione
Il coefficiente $\omega > 0$ di x in una sinusoide: l'aumento dell'argomento per ogni unità di x. Nel moto circolare uniforme coincide con la velocità angolare.

Residuo
Differenza fra un valore misurato e il valore previsto da un modello.

Tasso medio di variazione
Il rapporto $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, pendenza della secante al grafico di f nei punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$.

Valore efficace
Per una tensione sinusoidale di ampiezza V_0, la tensione costante che dà la stessa potenza media: $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ (per la rete, 230 V).

Valore medio
Il numero k in $y = A\ \text{sen}(\omega x + \varphi) + k$: la media fra massimo e minimo, livello intorno a cui la grandezza oscilla.

Velocità angolare
Angolo, in radianti, descritto nell'unità di tempo da un punto in moto circolare uniforme; si misura in rad/s.

Velocità di variazione istantanea
Valore a cui si avvicina il tasso medio di variazione quando l'ampiezza h dell'intervallo diventa sempre più piccola; per $\text{sen}\ x$ in x_0 vale $\cos x_0$.

Soluzioni

1. B. $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. C. $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{3}) = \text{sen}[2(x + \frac{\pi}{6})]$: traslazione di $\frac{\pi}{6}$ verso sinistra.

3. A. $A = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$, $k = \frac{7 + (-1)}{2} = 3$.

4. D. I periodi sono $\frac{2\pi}{3}$ e π; il rapporto $\frac{2}{3}$ è razionale e il minimo comune multiplo è $2\pi = 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \pi$.

5. B. I periodi di sen x e $\text{sen}(\pi x)$ sono 2π e 2, e il loro rapporto π è irrazionale. $\text{sen}^2 x$ e $|\cos x|$ hanno periodo π; in D i periodi 4π e 6π hanno minimo comune multiplo 12π.

6. D. La velocità vale in valore assoluto $A\omega|\text{sen}\,\omega t|$: è massima, $A\omega$, quando il punto passa per il centro, nulla agli estremi.

7. a) Falso: l'ampiezza è 2, perché $-2\,\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}(x + \pi)$. b) Vero (archi associati). c) Vero: $\omega = 100\pi$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz. d) Falso: $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ha periodo π. e) Vero: $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

8. ampiezza; pulsazione; $\frac{2\pi}{\omega}$; $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$; $-\frac{\varphi}{\omega}$; valore medio.

9. a) $A = 4$, $T = 4\pi$, $f = \frac{1}{4\pi}$, $k = -1$, massimo 3, minimo -5. b) $A = 0{,}5$, $T = \frac{2\pi}{3}$, $f = \frac{3}{2\pi}$, $k = 2$, massimo 2,5, minimo 1,5. c) $-3\,\text{sen}(\pi x) = 3\,\text{sen}(\pi x + \pi)$: $A = 3$, $T = 2$, $f = \frac{1}{2}$, $k = 0$, massimo 3, minimo -3.

10. a) $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$: $y = 2\,\text{sen}\,2x + 1$. b) $\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$: $y = 5\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{4}$. c) $A = \frac{6 - 2}{2} = 2$, $k = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$: $y = 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2} + 4$.

11. a) $2x - \frac{\pi}{2} = 2(x - \frac{\pi}{4})$: traslazione di $\frac{\pi}{4}$ verso destra. b) Massimi (valore 4) per $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; minimi (valore -2) per $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. c) $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x$ (archi associati), quindi $y = 1 - 3\cos 2x$. d) $\cos 2x = \frac{1}{3}$: $2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2n\pi$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + n\pi \approx \pm 0{,}62 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

12. a) $k = 2$, $A = 3$; mezzo periodo vale $\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, quindi $T = \pi$ e $\omega = 2$. Dal massimo: $2 \cdot \frac{\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $y = 3\,\text{sen}(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$ (per $x = \frac{5\pi}{8}$ l'argomento vale $\frac{3\pi}{2}$ e $y = -1$). b) Poiché $\text{sen}\,\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$: $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 2$.

13. a) $R = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen}\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$: $y = \sqrt{2}\,\text{sen}(3x - \frac{\pi}{4})$, ampiezza $\sqrt{2}$, periodo $\frac{2\pi}{3}$. b) $R = 2$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2}$: $y = 2\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{6})$, ampiezza 2, periodo 2π. c) $R = 5$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\text{sen}\,\varphi = \frac{4}{5}$, $\varphi = \text{arctg}\,\frac{4}{3} \approx 0{,}927$ rad $\approx 53{,}13°$ (primo quadrante): $y = 5\,\text{sen}(2x + \varphi)$, ampiezza 5, periodo π.

14. a) Periodi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$, rapporto $\frac{3}{2}$: periodo π. b) Periodi 4π e 6π: periodo 12π. c) Periodi 2π e $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, rapporto $\sqrt{3}$ irrazionale: non è periodica. d) Periodi $\frac{\pi}{2}$ e 2π, rapporto $\frac{1}{4}$: periodo 2π.

15. a) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$: periodo π, massimo 1, minimo 0. b) $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$: periodo π, massimo $\frac{1}{2}$, minimo $-\frac{1}{2}$. c) $4\operatorname{sen}^2 3x = 2 - 2\cos 6x$: periodo $\frac{\pi}{3}$, massimo 4, minimo 0.

16. a) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 9x = 2\operatorname{sen} 8x \cos x$ (perché $\cos(-x) = \cos x$). b) Inviluppo $y = \pm 2\cos x$; l'ampiezza si annulla dove $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. c) I periodi $\frac{2\pi}{7}$ e $\frac{2\pi}{9}$ hanno rapporto $\frac{9}{7}$; il periodo è $7 \cdot \frac{2\pi}{7} = 9 \cdot \frac{2\pi}{9} = 2\pi$.

17. a) $\frac{1-0}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$. b) $\frac{1/2}{\pi/6} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}955$. c) $\frac{0-1}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} \approx -0{,}637$. Sull'intervallo più corto vicino a 0 il tasso medio è più vicino a $\cos 0 = 1$, la velocità di variazione istantanea in 0.

18. a) $A = 0{,}05$ m, $\omega = 4\pi$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$ s, $f = 2$ Hz. b) $x(0) = 0{,}05$ m; $x(\frac{1}{8}) = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $x(\frac{1}{4}) = 0{,}05\cos\pi = -0{,}05$ m; $x(\frac{1}{3}) = 0{,}05\cos\frac{4\pi}{3} = -0{,}025$ m. c) $\cos(4\pi t) = \frac{1}{2}$, primo istante $4\pi t = \frac{\pi}{3}$: $t = \frac{1}{12}$ s $\approx 0{,}083$ s.

19. Traccia. $g(x + \frac{T}{\omega}) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$ per ogni x, quindi $\frac{T}{\omega}$ è un periodo di g. Se g avesse un periodo $T' < \frac{T}{\omega}$, per ogni u si avrebbe $f(u + \omega T') = g(\frac{u}{\omega} + T') = g(\frac{u}{\omega}) = f(u)$, e $\omega T' < T$ sarebbe un periodo di f, contro l'ipotesi che T sia il minimo.

20. Traccia. Per la formula di addizione $R\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) = R\cos\varphi\operatorname{sen}\omega x + R\operatorname{sen}\varphi\cos\omega x = a\operatorname{sen}\omega x + b\cos\omega x$. L'angolo esiste perché $(\frac{a}{R})^2 + (\frac{b}{R})^2 = \frac{a^2+b^2}{R^2} = 1$: il punto $(\frac{a}{R}; \frac{b}{R})$ sta sulla circonferenza goniometrica, ed è il punto associato a un angolo φ (unico in $]-\pi; \pi]$).

21. L'errore è traslare di $\frac{\pi}{3}$ senza raccogliere la pulsazione: $\operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}[2(x + \frac{\pi}{6})]$, e la traslazione è di $\frac{\pi}{6}$ verso sinistra. Verifica: $y = \operatorname{sen} 2x$ vale 0 in $x = 0$ salendo; $y = \operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{3})$ vale 0 salendo in $x = -\frac{\pi}{6}$, non in $x = -\frac{\pi}{3}$ (dove vale $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).

22. Traccia. Da $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$ segue $qT_1 = pT_2 = S$. Poiché q e p sono interi positivi, S è un multiplo del periodo di f_1 e di quello di f_2, dunque $f_1(x + S) = f_1(x)$ e $f_2(x + S) = f_2(x)$ per ogni x, e sommando $(f_1 + f_2)(x + S) = (f_1 + f_2)(x)$. Per $\operatorname{sen} 4x + \cos 6x$: $T_1 = \frac{\pi}{2}$, $T_2 = \frac{\pi}{3}$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2}$, $S = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$.

23. a) Il centro è a 22 m, il raggio è 20 m e la cabina parte dal basso: $h(0) = 22 - 20 = 2$ m; $\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad/min. b) $h(2) = 22 - 20\cos\frac{\pi}{2} = 22$ m; $h(5) = 22 - 20\cos\frac{5\pi}{4} = 22 + 10\sqrt{2} \approx 36{,}1$ m. c) $22 - 20\cos\frac{\pi t}{4} > 32 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi t}{4} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{4} < \frac{4\pi}{3}$ nel primo giro, cioè $\frac{8}{3} < t < \frac{16}{3}$: per $\frac{8}{3}$ min = 2 min 40 s a ogni giro.

24. a) $A = \frac{4{,}1 - 0{,}9}{2} = 1{,}6$ m, $k = 2{,}5$ m; mezzo periodo dura 6 h 12 min = 6,2 h, quindi $T = 12{,}4$ h. $h(3) = 2{,}5 + 1{,}6 = 4{,}1$ e $h(9{,}2) = 2{,}5 + 1{,}6\cos\pi = 0{,}9$. b) $h(t) < 2 \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi(t-3)}{12{,}4} < -0{,}3125 \Leftrightarrow 1{,}8886 < \frac{2\pi(t-3)}{12{,}4} < 2\pi - 1{,}8886 \Leftrightarrow 6{,}727 < t < 11{,}673$: la barca non può entrare dalle 6:44 alle 11:40 circa.

25. a) $f = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz: 50 volte al secondo. b) $\operatorname{sen}(100\pi t) \geq \frac{230}{325}$ dà $100\pi t \in [\alpha; \pi - \alpha]$ con

$\alpha = \arcsen \frac{230}{325} \approx 0{,}7862$, cioè $0{,}00250 \le t \le 0{,}00750$ s; $\sen(100\pi t) \le -\frac{230}{325}$ dà $0{,}01250 \le t \le 0{,}01750$ s. c) $\frac{2 \cdot 0{,}00499\ldots}{0{,}02} \approx 0{,}50$: circa metà del tempo (perché $\frac{230}{325} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$).

26. a) $y = 2\sen(884\pi t)\cos(4\pi t)$. b) Si ode la frequenza $\frac{884\pi}{2\pi} = 442$ Hz, la media delle due. c) L'inviluppo $2|\cos(4\pi t)|$ ha periodo $\frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$ s: 4 battimenti al secondo, pari a 444 − 440.

27. a) $\omega = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$ rad/s $\approx 12{,}6$ rad/s, $T = 0{,}5$ s. b) $x(t) = 0{,}3\cos(4\pi t)$. c) $x(0) = 0{,}3$, $x(\frac{1}{16}) = 0{,}3\cos\frac{\pi}{4} \approx 0{,}212$, $x(\frac{1}{8}) = 0$: velocità medie (in valore assoluto) $\frac{0{,}3}{1/8} = 2{,}4$ m/s e $\frac{0{,}212}{1/16} \approx 3{,}39$ m/s. d) Il punto sulla circonferenza ha velocità $\omega r = 1{,}2\pi \approx 3{,}77$ m/s. La velocità media della proiezione cresce avvicinandosi al centro (raggiunto per $t = \frac{1}{8}$ s), dove la velocità istantanea è uguale a quella del punto, 3,77 m/s.

28. Traccia. a) A dilata verticalmente, ω comprime orizzontalmente (periodo $\frac{2\pi}{\omega}$), φ trasla orizzontalmente di $-\frac{\varphi}{\omega}$, k trasla verticalmente. b) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$ (o $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$). c) Sì: $A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = \pi$, $k = 0$, perché $\sen(x + \pi) = -\sen x$.

29. a) $k = \frac{15{,}3 + 8{,}9}{2} = 12{,}1$, $A = \frac{15{,}3 - 8{,}9}{2} = 3{,}2$, $T = 12$; il massimo cade a giugno e il minimo a dicembre, quindi conviene $-\cos\frac{\pi m}{6}$, che vale 1 per $m = 6$ e −1 per $m = 12$: $L(6) = 15{,}3$ e $L(12) = 8{,}9$. b) Residui da gennaio a dicembre: −0,13; −0,20; −0,30; −0,40; −0,27; 0; 0,13; 0,20; 0,30; 0,40; 0,27; 0; somma dei quadrati ≈ 0,76. c) Sono negativi nella prima metà dell'anno e positivi nella seconda: la curva dei dati è spostata verso destra rispetto al modello. d) Somme dei quadrati: 0,242 ($s = 0{,}1$), 0,054 (0,2), 0,196 (0,3), 0,670 (0,4): il migliore è $s = 0{,}2$.

30. a) $A = 2$, $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, traslazione $-\frac{\pi/6}{1/2} = -\frac{\pi}{3}$ (verso sinistra di $\frac{\pi}{3}$), valore medio −1. b) Massimo 1 per $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $x = \frac{2\pi}{3} + 4n\pi$; minimo −3 per $x = \frac{8\pi}{3} + 4n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. c) $\sen(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ oppure $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, cioè $x = 4n\pi$ oppure $x = \frac{4\pi}{3} + 4n\pi$; in $[0; 4\pi]$: $x = 0$, $\frac{4\pi}{3}$, 4π. d) Un ciclo va da $x = -\frac{\pi}{3}$ a $x = \frac{11\pi}{3}$, con massimo in $\frac{2\pi}{3}$ e minimo in $\frac{8\pi}{3}$.

31. a) Massimo 24 °C quando $\frac{\pi(h-9)}{12} = \frac{\pi}{2}$, cioè alle 15; minimo 12 °C quando $\frac{\pi(h-9)}{12} = -\frac{\pi}{2}$, cioè alle 3. b) $\sen\frac{\pi(h-9)}{12} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi(h-9)}{12} < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 11 < h < 19$. c) $\frac{T(12) - T(9)}{3} = \frac{6\sen(\pi/4)}{3} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ °C/h; $\frac{T(15) - T(13)}{2} = \frac{24 - (18 + 3\sqrt{3})}{2} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}40$ °C/h. Vicino al massimo delle 15 la temperatura varia lentamente; intorno alle 9, quando la sinusoide passa per il valore medio, varia più in fretta.

32. a) $R = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sen\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$: $y = 2\sen(x - \frac{\pi}{3})$. b) $\sen(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$: $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ oppure $\frac{5\pi}{6}$ (in $[0; 2\pi]$), cioè $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$. c) $[-2; 2]$.

33. $\sen\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sen(\alpha + \beta) + \sen(\alpha - \beta)]$ dà $y = \frac{1}{2}[\sen\frac{5x}{6} - \sen\frac{x}{6}]$. I periodi sono $\frac{12\pi}{5}$ e 12π, con rapporto $\frac{1}{5}$: il periodo è 12π. No: i fattori hanno periodi 6π e 4π, e il loro prodotto $24\pi^2$ non è un periodo, perché non è un multiplo intero di 12π. Il periodo di un prodotto, come quello di una

somma, si cerca fra i multipli comuni dei periodi dei fattori (qui 12π, il loro minimo comune multiplo).