CAPITOLO

4

Disequazioni goniometriche

Un'equazione dice dove una grandezza tocca la soglia; una disequazione dice per quanto tempo resta oltre. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Risolvere le disequazioni elementari in seno, coseno e tangente, leggendo le soluzioni sulla circonferenza goniometrica e sul grafico e scrivendole con il periodo.
2. Ricondurre a disequazioni elementari quelle con un argomento $\omega x + \varphi$, quelle di secondo grado in una funzione e quelle che richiedono le formule goniometriche.
3. Risolvere le disequazioni lineari in seno e coseno con l'angolo aggiunto e con il metodo grafico, e le disequazioni omogenee.
4. Usare la tabella dei segni su un periodo per disequazioni fratte, prodotto e sistemi.
5. Determinare dominio e segno di funzioni goniometriche e risolvere semplici disequazioni con le funzioni inverse.
6. Tradurre in disequazioni problemi geometrici con un angolo incognito e modelli di fenomeni periodici.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Le disequazioni goniometriche elementari 2

4.2 Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari 9

4.3 Disequazioni lineari e omogenee in seno e coseno 12

4.4 Disequazioni fratte, prodotto e sistemi 15

4.5 Domini, segno di funzioni e disequazioni con le funzioni inverse 18

4.6 Problemi e modelli 20

Matematica 4 · Parte I · Goniometria · versione 1.0
Capitolo 4: Disequazioni goniometriche · pagine 111–138 del volume completo · estratto per lo studio

Una ruota panoramica ha il centro a 20 m da terra e un raggio di 18 m, e compie un giro completo in 12 minuti. Se partiamo dalla cabina più bassa, l'altezza della nostra cabina dopo t minuti è $h(t) = 20 - 18\cos(\pi t/6)$ metri (un modello inventato, che hai già incontrato negli esercizi del capitolo 3). Nel capitolo 3 avremmo chiesto: *in quali istanti* la cabina si trova a 29 m da terra? È un'equazione goniometrica. Ma un passeggero curioso chiede un'altra cosa: *per quanto tempo*, durante il giro, sta più in alto di 29 m e vede il mare oltre i tetti? La risposta non è un insieme di istanti isolati, ma un insieme di *intervalli* di tempo: è la soluzione di una disequazione.

Le disequazioni goniometriche rispondono proprio a domande di questo tipo: per quali angoli una grandezza supera una soglia, in quali ore del giorno la temperatura resta sopra un certo valore, per quali inclinazioni un proiettile arriva abbastanza lontano. In questo capitolo impariamo a risolverle con i due strumenti che conosciamo già: la **circonferenza goniometrica**, su cui le soluzioni diventano archi, e il **grafico** delle funzioni goniometriche, su cui diventano intervalli dell'asse x. Useremo le equazioni del capitolo 3 come punto di partenza, perché le soluzioni di un'equazione sono gli estremi degli intervalli di una disequazione; useremo le formule del capitolo 2 per ridurre le disequazioni più complesse a quelle elementari; e alla fine useremo tutto per determinare domini e segno di funzioni e per risolvere problemi.

4.1 Le disequazioni goniometriche elementari

4.1.1 Che cosa significa risolvere una disequazione goniometrica

Una **disequazione goniometrica** è una disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento di una o più funzioni goniometriche, come $2\operatorname{sen} x - 1 > 0$ o $\operatorname{tg}^2 x < 3$. Risolverla significa trovare *tutti* i numeri reali x (angoli in radianti) che la verificano. Le più semplici sono le **disequazioni elementari**

$$\operatorname{sen} x > m, \quad \cos x > m, \quad \operatorname{tg} x > m$$

e quelle con i versi $<$, $\geq$, $\leq$. Tutte le altre, come vedremo, si risolvono riconducendole a queste.

Il metodo ha sempre tre passi. Primo: si risolve l'*equazione associata* ($\operatorname{sen} x = m$, ...) in un intervallo lungo un periodo, come nel capitolo 3; le sue soluzioni dividono la circonferenza in archi (o il periodo in intervalli). Secondo: si stabilisce, sulla circonferenza goniometrica o sul grafico, quali archi verificano la disuguaglianza. Terzo: si estende la soluzione a tutto $\mathbb{R}$ aggiungendo il periodo, cioè $2k\pi$ per seno e coseno e $k\pi$ per la tangente, con $k \in \mathbb{Z}$. Ricordiamo che sulla circonferenza goniometrica $\operatorname{sen} x$ è l'*ordinata* di $P(\cos x; \operatorname{sen} x)$, $\cos x$ è la sua *ascissa*, $\operatorname{tg} x$ è l'ordinata del punto in cui la retta OP incontra la retta $x = 1$.

4.1.2 La disequazione sen $x > m$

Risolviamo sen $x > \frac{1}{2}$. L'equazione associata sen $x = \frac{1}{2}$ ha, nell'intervallo $[0; 2\pi[$, le soluzioni $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$: sono i due punti della circonferenza che hanno ordinata $\frac{1}{2}$, cioè quelli in cui la retta $y = \frac{1}{2}$ taglia la circonferenza. I punti con ordinata *maggiore* di $\frac{1}{2}$ sono quelli dell'arco che sta sopra la retta: percorrendo la circonferenza in senso antiorario, l'arco che va da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$ (Figura 4.1, a sinistra). Gli estremi sono esclusi, perché lì il seno vale esattamente $\frac{1}{2}$.

Sul grafico la stessa informazione si legge così: le soluzioni sono le ascisse dei punti in cui la sinusoide $y = \text{sen } x$ sta *sopra* la retta $y = \frac{1}{2}$ (Figura 4.1, a destra). Poiché il seno ha periodo 2π, la situazione si ripete identica in ogni giro, e la soluzione completa è

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Questa scrittura indica infiniti intervalli, uno per ogni intero k: per $k = 0$ si ottiene $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$, per $k = 1$ l'intervallo $]\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}[$, per $k = -1$ l'intervallo $]-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}[$, e così via. Chiameremo **soluzione su un periodo** la parte della soluzione che cade in un intervallo di ampiezza un periodo, scelto da noi.

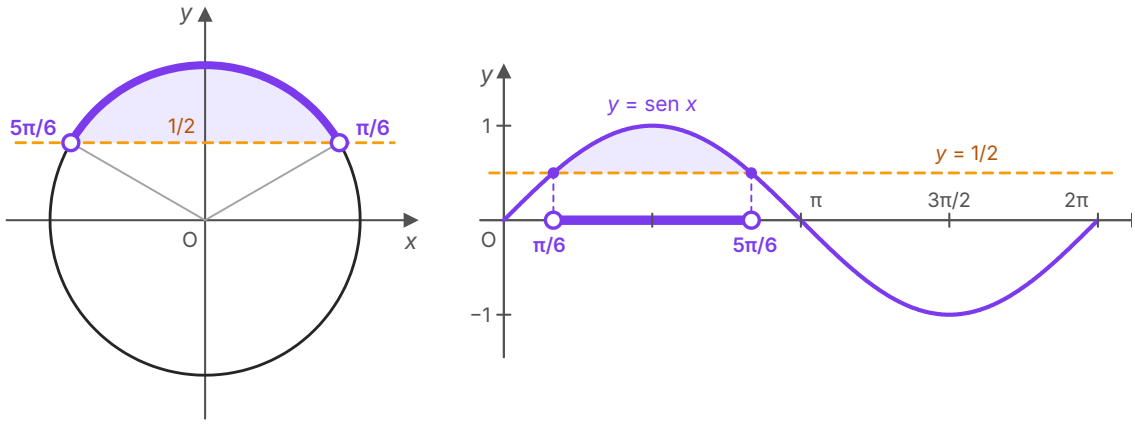


Figura 4.1 La disequazione sen $x > \frac{1}{2}$. A sinistra, sulla circonferenza goniometrica: i punti con ordinata maggiore di $\frac{1}{2}$ formano l'arco (in viola) da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$, estremi esclusi (pallini vuoti). A destra, sul grafico di $y = \text{sen } x$ (calcolato, stessa unità sui due assi): le ascisse dei punti della curva che stanno sopra la retta $y = \frac{1}{2}$ formano l'intervallo $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$, che si ripete con periodo 2π.

Se il verso è opposto, sen $x < \frac{1}{2}$, le soluzioni sono i punti dell'arco *complementare*, quello che sta sotto la retta: parte da $\frac{5\pi}{6}$ e, passando per il basso, arriva a $\frac{\pi}{6}$ del giro successivo, cioè a $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$. Quindi

$$\text{sen } x < \frac{1}{2} \iff \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Si può scrivere anche $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: è lo stesso insieme, descritto partendo da un giro prima. Due scritture diverse sono entrambe corrette se differiscono per un multiplo intero del periodo; per controllarlo basta provare un valore.

4.1.3 La disequazione cos $x \le m$ e la scelta del periodo

Il coseno è l'ascissa del punto P, quindi questa volta tagliamo la circonferenza con una retta *verticale*. Risolviamo $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'equazione $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ha in $[0; 2\pi[$ le soluzioni $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$; i punti con ascissa minore o uguale a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ formano l'arco a sinistra della retta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, estremi compresi (Figura 4.2). Dunque

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

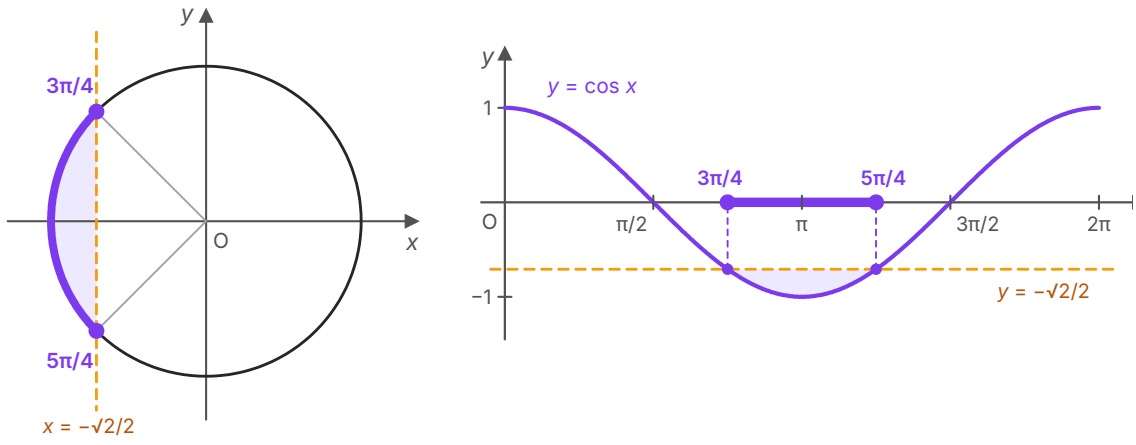


Figura 4.2 La disequazione $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sulla circonferenza le soluzioni sono i punti dell'arco a sinistra della retta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, estremi compresi (pallini pieni); sul grafico di $y = \cos x$, calcolato, sono le ascisse dei punti della curva che stanno sotto o sulla retta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: l'intervallo $[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$, da ripetere con periodo 2π.

Ora risolviamo $\cos x > \frac{1}{2}$. I punti con ascissa maggiore di $\frac{1}{2}$ formano l'arco a *destra* della retta $x = \frac{1}{2}$, che va da $-\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{3}$ passando per il punto $(1; 0)$. Se ci ostiniamo a lavorare in $[0; 2\pi[$, quell'unico arco viene spezzato in due pezzi, $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$, perché il punto da cui iniziamo a contare gli angoli sta proprio al suo interno. Conviene invece scegliere come periodo di riferimento $[-\pi; \pi[$: l'arco diventa un solo intervallo e la soluzione si scrive in modo compatto

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

La regola pratica è questa: **si percorre l'arco delle soluzioni in senso antiorario, dal suo primo estremo al secondo**, e si sceglie per il primo estremo una misura che renda il secondo maggiore del primo.

4.1.4 La disequazione tg $x > m$

La tangente ha periodo π, non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ed è *crescente* in ciascun intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi[$. Conviene allora lavorare sul periodo $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$, dove la tangente assume ogni valore reale una sola volta. Risolviamo $\operatorname{tg} x > 1$: in $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$ si ha $\operatorname{tg} x = 1$ per $x = \frac{\pi}{4}$, e poiché la funzione cresce, $\operatorname{tg} x > 1$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Aggiungendo il periodo

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sulla circonferenza (Figura 4.3) la tangente di x si legge sulla retta $x = 1$: i valori maggiori di 1 sono le ordinate dei punti della semiretta sopra $T(1;\ 1)$, e le rette per l'origine che la incontrano individuano *due* archi opposti, da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ e da $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$. È il motivo per cui il periodo della tangente è π. Il secondo estremo di ciascun intervallo, $\frac{\pi}{2} + k\pi$, è sempre escluso: lì la tangente non esiste, e il grafico ha un asintoto verticale.

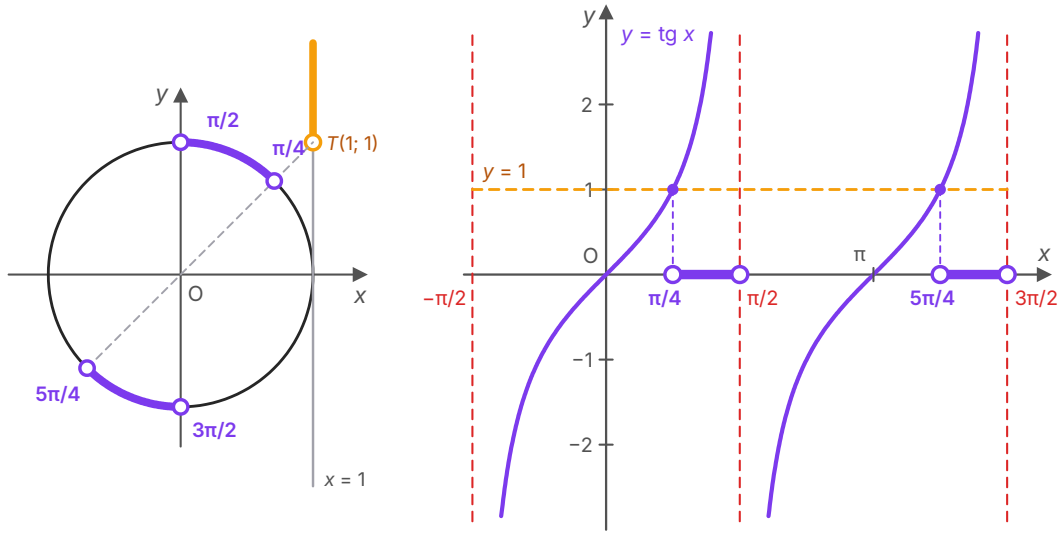


Figura 4.3 La disequazione tg $x > 1$. A sinistra: sulla retta $x = 1$ i valori della tangente maggiori di 1 formano la semiretta sopra $T(1; 1)$; le soluzioni sono i due archi opposti da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ e da $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$ (estremi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ esclusi). A destra, il grafico di $y = \text{tg } x$ (calcolato) con gli asintoti tratteggiati: in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ le soluzioni sono $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$, ripetute con periodo π.

4.1.5 Valori non notevoli e casi limite

Quando m non è un valore notevole, gli estremi si scrivono con le funzioni inverse del capitolo 1 e si approssimano con la calcolatrice (in modalità RAD). Risolviamo per esempio $3 \text{ sen } x + 2 < 0$, cioè $\text{sen } x < -\frac{2}{3}$. Posto $\alpha = \text{arcsen}(\frac{2}{3}) \approx 0{,}7297$, l'equazione $\text{sen } x = -\frac{2}{3}$ ha in un giro le soluzioni $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$ (il seno è negativo nel terzo e nel quarto quadrante). I punti con ordinata minore di $-\frac{2}{3}$ stanno sull'arco in basso, tra questi due. Quindi

$$\pi + \text{arcsen}(\frac{2}{3}) + 2k\pi < x < 2\pi - \text{arcsen}(\frac{2}{3}) + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

cioè, approssimando, $3{,}87 + 2k\pi < x < 5{,}55 + 2k\pi$. Le soluzioni approssimate sono una risposta legittima, purché dichiarate come tali.

Restano i **casi limite**, in cui m è fuori dall'intervallo $]-1; 1[$. Poiché $-1 \le \text{sen } x \le 1$ per ogni x, la disequazione $\text{sen } x < 3$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre $\text{sen } x > 3$ è impossibile; $\text{sen } x \le 1$ è sempre vera, mentre $\text{sen } x \ge 1$ equivale a $\text{sen } x = 1$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Lo stesso vale per il co-

seno. La tangente invece assume tutti i valori reali, quindi tg $x > m$ ha soluzioni per ogni m. La Tabella 4.1 raccoglie i casi generali.

Tabella 4.1 Soluzioni delle disequazioni elementari, per $-1 < m < 1$ (seno e coseno) e per ogni m reale (tangente); $k \in \mathbb{Z}$. Con $\geq$ e $\leq$ gli estremi finiti diventano compresi; i valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$ restano sempre esclusi per la tangente.

Disequazione	Posto	Soluzioni
sen $x > m$	$\alpha = \arcsen m$	$\alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$
sen $x < m$	$\alpha = \arcsen m$	$\pi - \alpha + 2k\pi < x < 2\pi + \alpha + 2k\pi$
cos $x > m$	$\beta = \arccos m$	$-\beta + 2k\pi < x < \beta + 2k\pi$
cos $x < m$	$\beta = \arccos m$	$\beta + 2k\pi < x < 2\pi - \beta + 2k\pi$
tg $x > m$	$\gamma = \operatorname{arctg} m$	$\gamma + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
tg $x < m$	$\gamma = \operatorname{arctg} m$	$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \gamma + k\pi$

IN SINTESI

Risolvere una disequazione elementare

1. risolvi l'equazione associata su un periodo: le sue soluzioni sono gli estremi;
2. leggi sulla circonferenza (seno: retta orizzontale $y = m$; coseno: retta verticale $x = m$; tangente: retta $x = 1$) o sul grafico quali archi verificano la disuguaglianza;
3. scrivi ogni arco come un solo intervallo, percorrendolo in senso antiorario, e aggiungi $2k\pi$ (seno, coseno) o $k\pi$ (tangente), con $k \in \mathbb{Z}$;
4. controlla con un valore di prova interno e uno esterno all'intervallo trovato.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare la periodicità. Scrivere che le soluzioni di $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$ sono $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ è sbagliato: quello è solo il pezzo di soluzione contenuto in $[0; 2\pi[$. Anche $x = \frac{5\pi}{2}$ è una soluzione, perché $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{2}) = 1 > \frac{1}{2}$, ma non sta in quell'intervallo. Senza $+ 2k\pi$ la soluzione è incompleta.

Dimenticare gli asintoti della tangente. Chi risolve $\operatorname{tg} x > 1$ in $[0; 2\pi]$ e scrive «$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$» ha unito due intervalli attraverso $\frac{\pi}{2}$, dove la tangente non esiste, e ha incluso valori come $x = \frac{3\pi}{4}$, per cui $\operatorname{tg} x = -1$. Le soluzioni in $[0; 2\pi]$ sono $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$: gli asintoti in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ spezzano sempre gli intervalli.

APPROFONDIMENTO · SENO, ARCO E TANGENTE

Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ valgono le disuguaglianze $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, che collegano la misura in radianti di un angolo al suo seno e alla sua tangente. La dimostrazione usa le aree. Sulla circonferenza goniometrica siano $A(1; 0)$, $P(\cos x; \operatorname{sen} x)$ e $T(1; \operatorname{tg} x)$. Il triangolo OAP è contenuto nel settore circolare OAP, che a sua volta è contenuto nel triangolo OAT. Le tre aree sono, nell'ordine, $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x$ (base OA = 1, altezza $\operatorname{sen} x$), $\frac{1}{2} x$ (l'area di un settore di raggio 1 e ampiezza x radianti, vedi *Matematica 3*, cap. 8) e $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$. Quindi $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, cioè la tesi. c.v.d.

Per angoli piccoli i tre numeri sono molto vicini: per $x = 0{,}1$ si ha $\operatorname{sen} x \approx 0{,}0998$ e $\operatorname{tg} x \approx 0{,}1003$. Per questo in fisica, per oscillazioni di pochi gradi, si sostituisce $\operatorname{sen} x$ con x (lo farai con il pendolo). Il confronto preciso tra $\operatorname{sen} x$ e x quando x si avvicina a 0 è il primo limite notevole che studierai in quinta.

4.2 Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari

Molte disequazioni, anche se all'apparenza complicate, si trasformano in una o più disequazioni elementari. Le chiameremo **disequazioni riconducibili a elementari**. Le strategie sono le stesse che abbiamo usato per le equazioni nel capitolo 3; la differenza è che ora, a ogni passo, dobbiamo controllare che la trasformazione conservi il verso e non aggiunga o tolga soluzioni.

4.2.1 Un argomento diverso da *x*

Consideriamo $\operatorname{sen} 2x > \frac{1}{2}$. Poniamo $z = 2x$: la disequazione diventa $\operatorname{sen} z > \frac{1}{2}$, che sappiamo risolvere, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < z < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Tornando a x, cioè dividendo *tutti* i membri per 2 (anche il termine periodico),

$$\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Il periodo delle soluzioni è diventato π: è proprio il periodo di $\operatorname{sen} 2x$, che vale $\frac{2\pi}{2}$. In generale le soluzioni di una disequazione in $\operatorname{sen}(\omega x)$ o $\cos(\omega x)$ si ripetono con periodo $2\pi/\omega$, quelle di una disequazione in $\operatorname{tg}(\omega x)$ con periodo π/ω (per $\omega > 0$). Allo stesso modo, $\cos(x - \frac{\pi}{3}) \le 0$ dà $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x - \frac{\pi}{3} \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, e sommando $\frac{\pi}{3}$ a tutti i membri $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

4.2.2 Disequazioni di secondo grado in una funzione goniometrica

Se nella disequazione compare una sola funzione goniometrica, con lo stesso argomento, la si sostituisce con una **variabile ausiliaria** t e si risolve la disequazione algebrica ottenuta. Poi si torna alla funzione goniometrica, ricordando che $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ possono assumere solo i valori di $[-1; 1]$, mentre $\operatorname{tg} x$ assume tutti i valori reali.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvere $2\,\text{sen}^2x - \text{sen}\,x - 1 < 0$.

Posto $t = \text{sen}\,x$, la disequazione diventa $2t^2 - t - 1 < 0$. Le radici del trinomio sono $t = 1$ e $t = -\frac{1}{2}$ (infatti $2t^2 - t - 1 = (2t + 1)(t - 1)$); il trinomio, con primo coefficiente positivo, è negativo tra le radici: $-\frac{1}{2} < t < 1$.

Torniamo al seno: dobbiamo risolvere il sistema delle due disequazioni elementari $\text{sen}\,x > -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}\,x < 1$. La prima, letta sulla circonferenza, è verificata sull'arco che sta sopra la retta $y = -\frac{1}{2}$, da $-\frac{\pi}{6}$ a $\frac{7\pi}{6}$: $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. La seconda è verificata ovunque *tranne* dove $\text{sen}\,x = 1$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Soluzione: $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ con $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verifica: per $x = 0$ si ha $0 - 0 - 1 = -1 < 0$ (sì); per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $2 - 1 - 1 = 0$, che non è minore di 0 (escluso, giusto); per $x = \frac{3\pi}{2}$ si ha $2 + 1 - 1 = 2$ (no, ed è fuori dall'intervallo).

Il vincolo $-1 \le t \le 1$ a volte elimina intere parti della soluzione algebrica. Per $2\cos^2x + 3\cos x - 2 \ge 0$, con $t = \cos x$ si ottiene $(2t - 1)(t + 2) \ge 0$, cioè $t \le -2$ oppure $t \ge \frac{1}{2}$. La prima condizione, $\cos x \le -2$, è impossibile; resta $\cos x \ge \frac{1}{2}$, cioè $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Con la tangente il problema non si pone: $\text{tg}^2x - 4\,\text{tg}\,x + 3 > 0$ dà $\text{tg}\,x < 1$ oppure $\text{tg}\,x > 3$, cioè $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ oppure $\text{arctg}\,3 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

4.2.3 Con le formule goniometriche

Se nella disequazione compaiono funzioni diverse o argomenti diversi, si usano la relazione fondamentale e le formule del capitolo 2 per ridursi a *una sola funzione di un solo argomento*. Per esempio $\text{sen}\,x\cos x > \frac{1}{4}$, moltiplicata per 2 (numero positivo: il verso non cambia), diventa $\text{sen}\,2x > \frac{1}{2}$, che abbiamo appena risolto.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvere $\cos 2x + 3\operatorname{sen} x - 2 > 0$.

Compaiono gli argomenti $2x$ e x. Scegliamo per $\cos 2x$ la formula di duplicazione che contiene solo il seno, $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$:

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 > 0 \iff 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 < 0$$

(abbiamo moltiplicato per -1 e cambiato il verso). Con $t = \operatorname{sen} x$: $2t^2 - 3t + 1 = (2t - 1)(t - 1) < 0$ per $\frac{1}{2} < t < 1$.

Dunque $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x < 1$: l'arco sopra la retta $y = \frac{1}{2}$, privato del punto più alto, in cui $\operatorname{sen} x = 1$.

Soluzione: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.3 Disequazioni lineari e omogenee in seno e coseno

4.3.1 Disequazioni lineari: il metodo dell'angolo aggiunto

Una **disequazione lineare in seno e coseno** ha la forma $a\operatorname{sen} x + b\cos x > c$ (o con un altro verso), con a e b non nulli. Nel capitolo 3 abbiamo visto che il primo membro si può scrivere come una sola sinusoide con il **metodo dell'angolo aggiunto**:

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = R\operatorname{sen}(x + \varphi),\ \text{con } R = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{R},\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{R}.$$

Dividendo per $R > 0$ (il verso non cambia) si arriva alla disequazione elementare $\operatorname{sen}(x + \varphi) > c/R$. Se ne ricava subito un fatto utile: poiché $R\operatorname{sen}(x + \varphi)$ varia esattamente tra $-R$ e R, la disequazione $a\operatorname{sen} x + b\cos x > c$ è verificata per ogni x se $c < -R$ ed è impossibile se $c \geq R$.

C'è anche un **metodo grafico**, che usa la geometria analitica. Poniamo $X = \cos x$ e $Y = \operatorname{sen} x$: il punto $(X; Y)$ sta sulla circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$, e la disequazione $a\operatorname{sen} x + b\cos x > c$ diventa $bX + aY > c$, che nel piano XY rappresenta un *semipiano* delimitato dalla retta $bX + aY = c$. Le soluzioni sono gli angoli dei punti della circonferenza che cadono in quel semipiano: un arco.

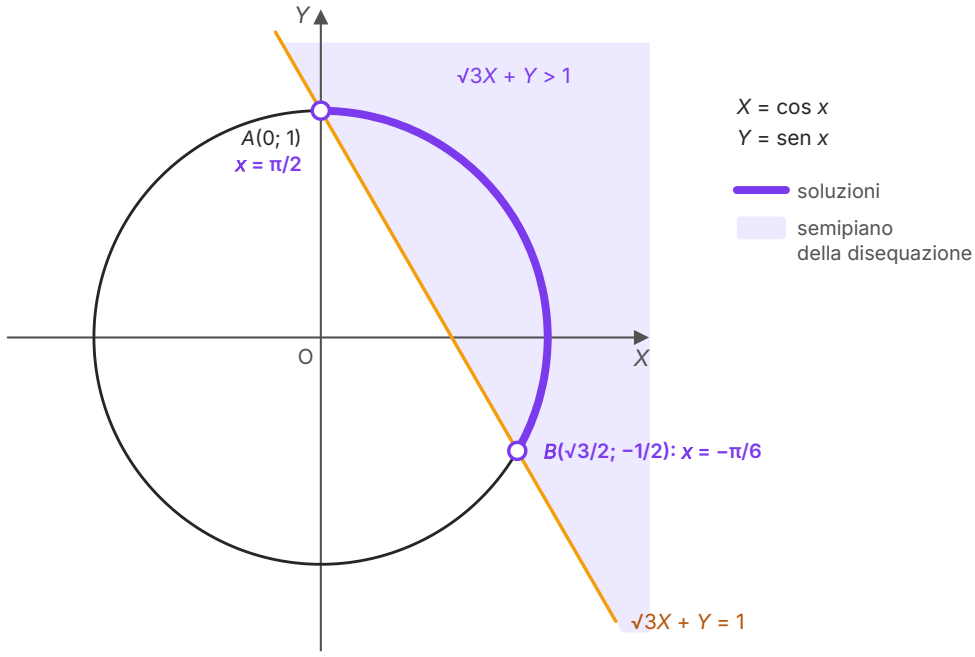


Figura 4.4 Il metodo grafico per sen $x + \sqrt{3}\cos x > 1$. Nel piano XY, con $X = \cos x$ e $Y = \text{sen } x$, la disequazione è il semipiano $\sqrt{3}X + Y > 1$ (in viola chiaro), che non contiene l'origine. La retta incontra la circonferenza goniometrica in A $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ e in B $\left(x = -\frac{\pi}{6}\right)$; le soluzioni sono gli angoli dei punti dell'arco da B ad A in senso antiorario, estremi esclusi.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvere $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x > 1$ **in due modi.**

Angolo aggiunto. Qui $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, quindi $R = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (primo quadrante, perché coseno e seno sono entrambi positivi). La disequazione diventa $2\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) > 1$, cioè $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \iff -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Metodo grafico. Con $X = \cos x$ e $Y = \operatorname{sen} x$ la disequazione diventa $\sqrt{3}X + Y > 1$. La retta $\sqrt{3}X + Y = 1$ incontra la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ in due punti: sostituendo $Y = 1 - \sqrt{3}X$ si ottiene $4X^2 - 2\sqrt{3}X = 0$, cioè $X = 0$ oppure $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi i punti $A(0;1)$ e $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$, che corrispondono agli angoli $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{6}$. L'origine non verifica la disuguaglianza ($0 > 1$ è falso), quindi il semipiano delle soluzioni è quello che *non* contiene l'origine: l'arco da B ad A in senso antiorario, che passa per $(1;0)$ (Figura 4.4). Ritroviamo $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verifica: per $x = 0$, $0 + \sqrt{3} > 1$ (sì); per $x = \pi$, $0 - \sqrt{3} > 1$ (no).

I due metodi si completano: l'angolo aggiunto è un procedimento *analitico*, che funziona sempre allo stesso modo; il metodo grafico è più *sintetico*, fa vedere perché le soluzioni formano un arco e quando non ce ne sono (se la retta non incontra la circonferenza e il semipiano non la contiene). Un terzo metodo, le formule parametriche in $t = \operatorname{tg}(x/2)$, porta a una disequazione razionale in t; è meno comodo, perché richiede di esaminare a parte i valori $x = \pi + 2k\pi$, per cui $\operatorname{tg}(x/2)$ non esiste.

4.3.2 Disequazioni omogenee

Una **disequazione omogenea di secondo grado** in seno e coseno ha la forma $a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen} x\cos x + c\cos^2 x > 0$ (o con un altro verso): ogni termine ha grado 2 complessivo in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Il metodo è quello delle equazioni omogenee, con un'attenzione in più:

1. si esaminano prima i valori in cui $\cos x = 0$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$: lì il primo membro vale $a\operatorname{sen}^2 x = a$, e basta controllare se la disuguaglianza è vera;
2. per gli altri valori si dividono entrambi i membri per $\cos^2 x$, che è **positivo**, quindi il verso non cambia; si ottiene $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c > 0$, una disequazione di secondo grado in $\operatorname{tg} x$;
3. la soluzione è l'unione dei due risultati.

Si noti che si divide per $\cos^2 x$ e non per $\cos x$: dividere per una quantità di segno variabile cambierebbe il verso in metà dei casi. Una disequazione del tipo $a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x > d$ è **riconducibile a omogenea**: si scrive $d = d(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$ e si porta tutto al primo membro.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvere $3\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x\cos x \geq 1$.

Scriviamo $1 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ e portiamo tutto a sinistra: $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x\cos x - \cos^2 x \geq 0$.

Valori con $\cos x = 0$: per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ il primo membro vale $2 \cdot 1 + 0 - 0 = 2 \geq 0$. Questi valori **sono soluzioni**.

Valori con $\cos x \neq 0$: dividiamo per $\cos^2 x > 0$ e otteniamo $2\,\text{tg}^2 x + \text{tg}\,x - 1 \geq 0$. Con $t = \text{tg}\,x$: $(2t - 1)(t + 1) \geq 0$, cioè $t \leq -1$ oppure $t \geq \frac{1}{2}$. Quindi $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ oppure $\text{arctg}(\frac{1}{2}) + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Unione. I punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ saldano gli intervalli: $[\text{arctg}(\frac{1}{2});\ \frac{\pi}{2}[$, il punto $\frac{\pi}{2}$ e $]\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}]$ (che è $]-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}]$ spostato di π) formano un unico intervallo.

Soluzione: $\text{arctg}(\frac{1}{2}) + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, con $\text{arctg}(\frac{1}{2}) \approx 0{,}4636$ (circa $26{,}57°$). Chi dividesse subito per $\cos^2 x$ perderebbe i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ e scriverebbe due intervalli al posto di uno.

4.4 Disequazioni fratte, prodotto e sistemi

4.4.1 La tabella dei segni su un periodo

Per le disequazioni fratte o scritte come prodotto si usa la **tabella dei segni**, come in algebra (*Matematica 1*, cap. 11). C'è però una differenza essenziale: i fattori sono funzioni periodiche, che cambiano segno infinite volte. Si studia allora il segno di ogni fattore su **un solo periodo dell'intera espressione**, e alla fine si aggiunge quel periodo. Come periodo di lavoro si prende il minimo comune multiplo dei periodi dei fattori, che è sempre un periodo dell'espressione (non necessariamente il più piccolo): se compaiono $\text{sen}\,x$ (periodo 2π) e $\text{tg}\,x$ (periodo π), si lavora su un intervallo di ampiezza 2π.

Il periodo si rappresenta su un segmento dell'asse reale, per esempio $[0;\ 2\pi]$, oppure su una circonferenza, la **ruota goniometrica**: tante circonferenze concentriche quanti sono i fattori, ciascuna con gli archi in cui il fattore è positivo; il segno del prodotto si legge lungo ogni raggio. I due modi danno lo stesso risultato; la ruota ha il vantaggio di non spezzare gli intervalli che attraversano $x = 0$.

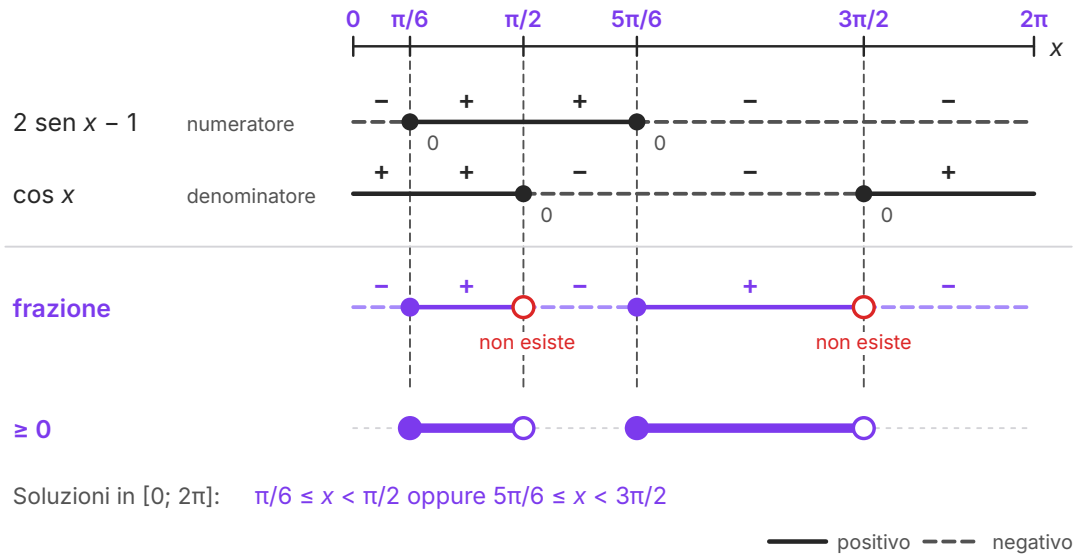


Figura 4.5 La tabella dei segni di $\frac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$ sul periodo $[0; 2\pi]$ (scala proporzionale). Linea continua: fattore positivo; linea tratteggiata: fattore negativo; 0: zero del fattore. Nell'ultima riga le soluzioni di $\frac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} \geq 0$: gli zeri del numeratore sono compresi, quelli del denominatore esclusi. La soluzione si ripete con periodo 2π.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvere $\frac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} \geq 0$.

Condizione di esistenza: $\cos x \neq 0$, cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Il periodo dell'espressione è 2π; lavoriamo in $[0; 2\pi]$.

Segno del numeratore: $2\operatorname{sen} x - 1 > 0$ per $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$; si annulla in $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Segno del denominatore: $\cos x > 0$ per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$.

La tabella (Figura 4.5) combina i segni con la regola dei segni del quoziente. La frazione è positiva in $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$ e in $\left]\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right[$, si annulla in $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ (valori da includere, perché il verso è $\geq$) e non esiste in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Soluzione: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.4.2 Prodotti: non semplificare un fattore di segno ignoto

Risolviamo $\operatorname{sen} 2x > \operatorname{sen} x$. Con la formula di duplicazione: $2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x > 0$, cioè, raccogliendo, $\operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1) > 0$. Studiamo il segno dei due fattori in $[0; 2\pi]$: $\operatorname{sen} x > 0$ per $0 < x < \pi$; $2\cos x - 1 > 0$ per $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ e per $\frac{5\pi}{3} < x \le 2\pi$. Il prodotto è positivo dove i fattori hanno lo stesso segno: entrambi positivi in $]0; \frac{\pi}{3}[$, entrambi negativi in $]\pi; \frac{5\pi}{3}[$. Quindi

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ oppure } \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

ERRORE FREQUENTE

Moltiplicare o dividere per un'espressione di segno ignoto. Nella disequazione $\operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1) > 0$ è sbagliato «semplificare» $\operatorname{sen} x$ e scrivere $2\cos x - 1 > 0$: si dividerebbe per una quantità che è positiva in $]0; \pi[$ e negativa in $]\pi; 2\pi[$, e in questo secondo intervallo il verso andrebbe cambiato. Il risultato sbagliato, $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, contiene per esempio $x = -\frac{\pi}{6}$, dove il prodotto vale $(-\frac{1}{2})(\sqrt{3} - 1) < 0$.

Lo stesso accade con $\operatorname{sen} x > \cos x$: dividendo per $\cos x$ si otterrebbe $\operatorname{tg} x > 1$, cioè $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, che contiene $x = \frac{4\pi}{3}$, dove $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ è minore di $\cos x = -\frac{1}{2}$, e non contiene $x = \frac{3\pi}{4}$, che invece è una soluzione. La strada giusta è l'angolo aggiunto: $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) > 0$, cioè $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. Si può dividere solo per una quantità di segno noto, come $\cos^2 x$ dove non è nullo.

4.4.3 Sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni goniometriche** si risolve come in algebra: si risolve ciascuna disequazione su uno stesso periodo e si prendono i valori comuni a tutte. Anche qui si lavora su un intervallo di ampiezza uguale al minimo comune multiplo dei periodi delle singole disequazioni. Consideriamo il sistema formato da $\operatorname{tg} x \ge 1$ e $\operatorname{sen} x > 0$. La prima, in $[0; 2\pi[$, è verificata per $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}$; la seconda per $0 < x < \pi$. L'intersezione è $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$, e la soluzione è

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}:$$

il periodo 2π, e non π, perché solo uno dei due intervalli della tangente sopravvive alla condizione sul seno.

4.5 Domini, segno di funzioni e disequazioni con le funzioni inverse

4.5.1 Il dominio di una funzione goniometrica

Nel volume dello scorso anno (*Matematica 3*, cap. 3 e 13) abbiamo determinato il **dominio** di una funzione come l'insieme dei valori di x per cui l'espressione ha significato: radicandi non negativi negli indici pari, denominatori non nulli, argomenti dei logaritmi positivi. Quando nell'espressione compaiono funzioni goniometriche, queste condizioni diventano disequazioni (o equazioni) goniometriche, e vanno aggiunte le condizioni proprie delle funzioni goniometriche: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ per la tangente, $x \neq k\pi$ per la cotangente, argomento in $[-1; 1]$ per arcsen e arccos.

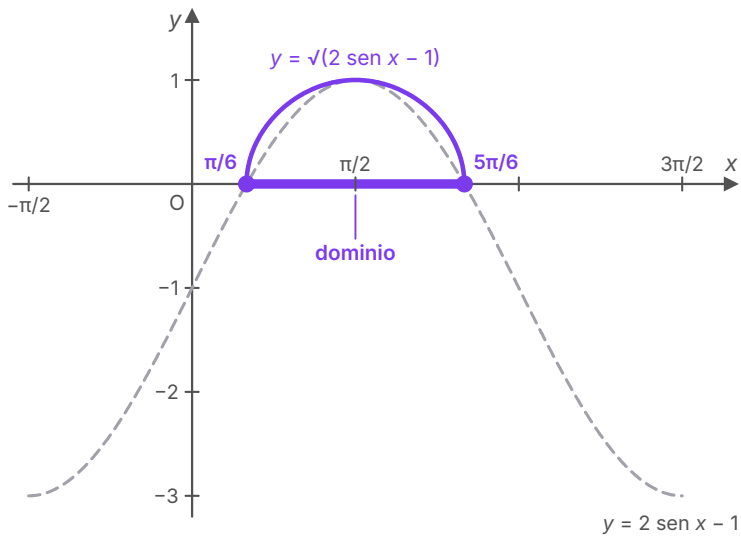


Figura 4.6 Il dominio di $y = \sqrt{2 \operatorname{sen} x - 1}$. Il radicando $y = 2 \operatorname{sen} x - 1$ (grigio tratteggiato) è non negativo solo per $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ nel periodo disegnato: lì, e solo lì, esiste la funzione (in viola, calcolata), che vale 0 agli estremi e 1 in $\frac{\pi}{2}$. Il dominio, segnato sull'asse x, si ripete con periodo 2π.

- $y = \sqrt{2 \operatorname{sen} x - 1}$: deve essere $2 \operatorname{sen} x - 1 \ge 0$, cioè $\operatorname{sen} x \ge \frac{1}{2}$; il dominio è $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Figura 4.6).
- $y = \ln(\cos x)$: deve essere $\cos x > 0$, cioè $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

- $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x - 1}$: la tangente deve esistere e il denominatore non deve annullarsi: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- $y = \arcsen(2x - 1)$: deve essere $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$, cioè $0 \leq x \leq 1$. Qui la disequazione è algebrica: la variabile non è un angolo.

4.5.2 Il segno di una funzione

Studiare il **segno di una funzione** f significa stabilire per quali x del dominio si ha $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) < 0$: è una disequazione, da risolvere *dentro il dominio*. Prendiamo $f(x) = \ln(2\cos x)$. Il dominio è $\cos x > 0$, cioè $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Il logaritmo è positivo quando il suo argomento è maggiore di 1: $2\cos x > 1$, cioè $\cos x > \dfrac{1}{2}$, per $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. La funzione si annulla per $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ed è negativa nel resto del dominio:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ oppure } \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Fuori dal dominio, per esempio in $x = \pi$, la funzione non è né positiva né negativa: semplicemente non esiste.

4.5.3 Disequazioni con le funzioni inverse

Le disequazioni in cui l'incognita compare nell'argomento di arcsen, arccos o arctg si risolvono con due proprietà del capitolo 1: il **dominio** e la **monotonia**. Le funzioni arcsen e arctg sono crescenti, quindi conservano il verso; arccos è decrescente, quindi lo inverte. Per esempio, poiché $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ e arctg è crescente su tutto $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4} \iff x > 1.$$

Invece $\arccos x < \dfrac{\pi}{3}$ equivale a $x > \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ (il verso si inverte), ma anche a $x \leq 1$ per il dominio: la soluzione è $\dfrac{1}{2} < x \leq 1$. Bisogna anche confrontare il secondo membro con l'immagine della funzione: $\operatorname{arctg} x < 2$ è vera per ogni x, perché $\operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57 < 2$; $\arcsen x > 2$ è impossibile.

Un esempio che usa entrambe le proprietà: $\arcsen(2x - 1) \leq \dfrac{\pi}{6}$. Il dominio richiede $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$, cioè $0 \leq x \leq 1$. Poiché arcsen è crescente e $\dfrac{\pi}{6} = \arcsen\left(\dfrac{1}{2}\right)$, la disequazione

equivale a $2x - 1 \le \frac{1}{2}$, cioè $x \le \frac{3}{4}$. Mettendo insieme le due condizioni, $0 \le x \le \frac{3}{4}$; senza il dominio avremmo accettato anche $x = -5$, per cui l'arcoseno non esiste.

4.6 Problemi e modelli

4.6.1 Quando una grandezza periodica supera una soglia

Torniamo alla ruota panoramica dell'inizio: $h(t) = 20 - 18\cos(\pi t/6)$, con t in minuti. La cabina è più alta di 29 m quando $20 - 18\cos(\pi t/6) > 29$, cioè $\cos(\pi t/6) < -\frac{1}{2}$. Con $z = \pi t/6$: $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < z < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, quindi, moltiplicando per $6/\pi$,

$$4 + 12k < t < 8 + 12k, \text{ con } k \text{ intero e } t \ge 0.$$

In ogni giro di 12 minuti il passeggero sta sopra i 29 m dal quarto all'ottavo minuto: 4 minuti su 12, cioè un terzo del tempo. Il periodo delle soluzioni, 12 minuti, è il periodo della ruota: in un modello periodico la soluzione di una disequazione è sempre fatta di **intervalli che si ripetono** con il periodo del fenomeno. Le funzioni del tipo $A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + k$ che descrivono questi fenomeni saranno l'argomento del prossimo capitolo; qui ci basta saperle leggere.

ESEMPIO SVOLTO

Una giornata di sole. In una giornata estiva la temperatura dell'aria in una località è descritta dal modello (dati inventati)

$$T(t) = 18 + 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right),$$

con t in ore, da 0 a 24, e T in gradi Celsius. In quali ore la temperatura supera 21 °C?

Lettura del modello. Il seno varia tra −1 e 1, quindi T varia tra 12 °C e 24 °C. Il massimo si ha quando l'argomento del seno vale $\frac{\pi}{2}$, cioè $t - 9 = 6$: alle 15. Il periodo è 24 ore.

Disequazione. $18 + 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right) > 21$ equivale a $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right) > \frac{1}{2}$. Posto $z = \frac{\pi(t-9)}{12}$: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < z < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Moltiplicando per $12/\pi$: $2 + 24k < t - 9 < 10 + 24k$, cioè $11 + 24k < t < 19 + 24k$.

Risposta. Nell'intervallo $0 \le t \le 24$ l'unica possibilità è $k = 0$: la temperatura supera 21 °C dalle 11 alle 19, per 8 ore (Figura 4.7). Notiamo che l'intervallo è simmetrico rispetto all'ora del massimo, le 15: è una conseguenza della simmetria della sinusoide rispetto alla retta verticale per un suo massimo.

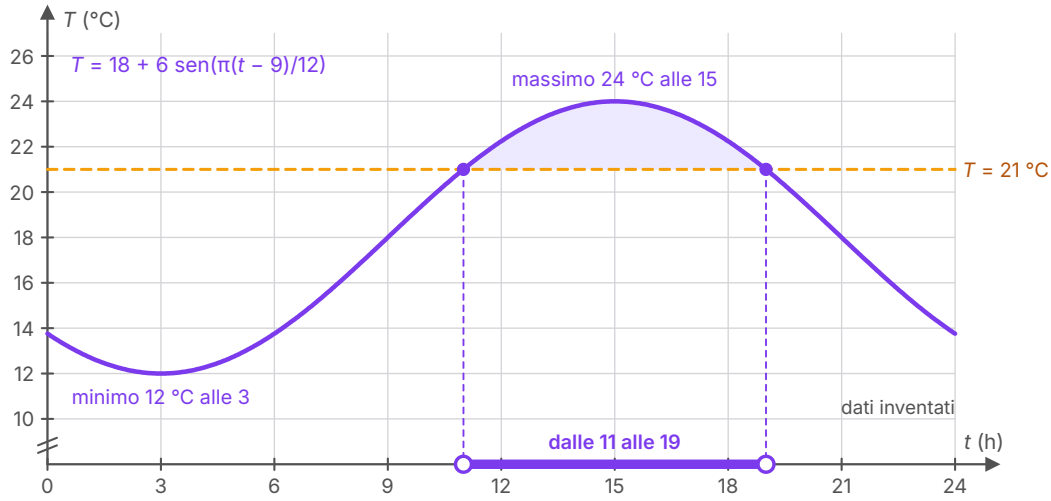


Figura 4.7 Il modello di temperatura $T(t) = 18 + 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)$ (dati inventati), calcolato dall'equazione. La curva sta sopra la retta $T = 21$ °C dalle 11 alle 19: l'intervallo, segnato sull'asse dei tempi, è centrato sull'ora del massimo (24 °C alle 15). L'asse T parte da 8 °C (interruzione segnata).

4.6.2 Un angolo incognito in un problema geometrico

Nei problemi geometrici l'incognita è spesso un angolo, e le grandezze della figura (lati, perimetri, aree) diventano funzioni goniometriche di quell'angolo. Una disequazione risponde allora alla domanda: *per quali forme della figura* una grandezza supera un valore? L'insieme delle soluzioni va sempre intersecato con le **limitazioni geometriche** dell'angolo, cioè con i valori per cui la figura esiste.

ESEMPIO SVOLTO

Un rettangolo in una semicirconferenza. Riprendiamo il problema del capitolo 3: in una semicirconferenza di centro O e raggio r è inscritto un rettangolo ABCD, con il lato AB sul diametro e i vertici C e D sulla semicirconferenza; x è l'angolo BOC. Là abbiamo trovato che il perimetro vale $4r$ per $x = 2\arctg(\frac{1}{2}) \approx 53{,}13°$. Ora chiediamo: per quali x il perimetro è *maggiore* di $4r$?

Limitazioni: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **Grandezze:** $OB = r\cos x$ e $BC = r\operatorname{sen} x$, quindi il perimetro è $4r\cos x + 2r\operatorname{sen} x$.

Disequazione: $4r\cos x + 2r\operatorname{sen} x > 4r$; dividendo per $2r > 0$, $2\cos x + \operatorname{sen} x > 2$. Usiamo il metodo grafico: con $X = \cos x$, $Y = \operatorname{sen} x$ è il semipiano $2X + Y > 2$, delimitato dalla retta $Y = 2 - 2X$. Intersecando con $X^2 + Y^2 = 1$: $X^2 + (2 - 2X)^2 = 1$, cioè $5X^2 - 8X + 3 = 0$, con soluzioni $X = 1$ e $X = \frac{3}{5}$. I punti sono $(1; 0)$, cioè $x = 0$, e $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$, che corrisponde proprio all'angolo $x_0 = 2\arctg(\frac{1}{2})$ del capitolo 3 (infatti $\cos x_0 = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} x_0 = \frac{4}{5}$). L'origine non verifica $2X + Y > 2$, quindi il semipiano delle soluzioni è quello opposto all'origine: contiene l'arco che va da $(1; 0)$ a $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$ in senso antiorario, cioè gli angoli con $0 < x < x_0$.

Risposta: tenendo conto delle limitazioni, $0 < x < 2\arctg(\frac{1}{2})$, cioè all'incirca $0 < x < 53{,}13°$ (si noti che $2\arctg(\frac{1}{2}) = \arctg(\frac{4}{3})$). Il perimetro supera $4r$ quando il rettangolo è «basso e largo»; il valore $x = 0$ è escluso, perché il rettangolo degenera nel diametro.

COLLEGAMENTI

Fisica: la gittata di un proiettile. Nel capitolo 3 abbiamo visto che un corpo lanciato dal suolo con velocità v e inclinazione α, trascurando la resistenza dell'aria, ricade alla distanza $R = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$, con $g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$, e che con $v = 20$ m/s i due angoli che danno $R = 30$ m sono circa 23,69° e 66,31°. La disequazione risponde alla domanda che interessa davvero a chi lancia: per quali inclinazioni il corpo arriva *almeno* a 30 m?

Si deve avere $\operatorname{sen} 2\alpha \geq \frac{30 \cdot 9{,}81}{400} \approx 0{,}7358$, con $0° < 2\alpha < 180°$. In questo intervallo il seno supera 0,7358 tra $\arcsen 0{,}7358 \approx 47{,}37°$ e $180° - 47{,}37° = 132{,}63°$: quindi $47{,}37° \leq 2\alpha \leq 132{,}63°$, cioè $23{,}69° \leq \alpha \leq 66{,}31°$. Le soluzioni dell'equazione sono diventate gli estremi di un intervallo, simmetrico rispetto a 45°, l'angolo della gittata massima.

SINTESI

- Una disequazione goniometrica elementare ($\operatorname{sen} x > m$, $\cos x > m$, $\operatorname{tg} x > m$ e versi simili) si risolve risolvendo l'equazione associata su un periodo, leggendo sulla circonferenza goniometrica o sul grafico quali archi verificano la disuguaglianza e aggiungendo il periodo: $2k\pi$ per seno e coseno, $k\pi$ per la tangente, $k \in \mathbb{Z}$.
- Sulla circonferenza il seno si confronta con una retta orizzontale, il coseno con una retta verticale, la tangente sulla retta $x = 1$. Ogni arco si scrive come un solo intervallo, percorrendolo in senso antiorario: per esempio $\cos x > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- Se $|m| > 1$, $\operatorname{sen} x < m$ o $\operatorname{sen} x > m$ sono sempre vere o impossibili; $\operatorname{sen} x \geq 1$ equivale a $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. La tangente assume ogni valore reale, ma i valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sono sempre esclusi.
- Con un argomento $\omega x + \varphi$ si risolve rispetto all'argomento e poi si torna a x operando su tutti i membri, termine periodico compreso: il periodo delle soluzioni diventa $2\pi/\omega$ (o π/ω per la tangente).
- Le disequazioni di secondo grado in una funzione si risolvono con una variabile ausiliaria t, ricordando che $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$. Le formule goniometriche servono a ridursi a una sola funzione di un solo argomento.
- Una disequazione lineare $a \operatorname{sen} x + b \cos x > c$ si risolve con l'angolo aggiunto ($R \operatorname{sen}(x + \varphi) > c$, $R = \sqrt{a^2 + b^2}$) oppure con il metodo grafico: semipiano $bX + aY > c$ intersecato con la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$.
- In una disequazione omogenea si esaminano prima i valori con $\cos x = 0$, poi si divide per $\cos^2 x > 0$ e si risolve in $\operatorname{tg} x$; i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ possono saldare due intervalli.
- Le disequazioni fratte e prodotto si risolvono con la tabella dei segni su un periodo dell'intera espressione (il minimo comune multiplo dei periodi); i sistemi intersecando le soluzioni su uno stesso periodo.
- Non si moltiplica né si divide per un'espressione goniometrica di segno ignoto: si porta tutto a un membro e si studia il segno.
- Domini e segno di funzioni goniometriche si determinano risolvendo disequazioni; il segno si studia solo dentro il dominio. Con le funzioni inverse si usano dominio e monotonia: arcsen e arctg conservano il verso, arccos lo inverte.
- Nei modelli periodici le soluzioni sono intervalli che si ripetono con il periodo del fenomeno; nei problemi geometrici vanno intersecate con le limitazioni dell'angolo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Le soluzioni di sen $x > 0$ sono:

   A. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   B. $0 < x < \pi$

   C. $k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   D. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. ● La disequazione $\cos x \geq 1$:

   A. non ha soluzioni

   B. è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

   C. è verificata solo per $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   D. è verificata solo per $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. ● Le soluzioni di $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono:

   A. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

   B. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   C. $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   D. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. ● Le soluzioni di $\operatorname{tg} x < -1$ sono:

   A. $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   B. $\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   C. $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   D. $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. ● Il dominio di $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ è:

   A. $\mathbb{R}$

   B. $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   C. $0 \leq x \leq \pi$

   D. $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

6. ● La disequazione $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{3}$ equivale a:

   A. $x > \frac{\pi}{3}$

   B. $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

   C. $x > \sqrt{3}$

   D. $\sqrt{3} < x < \frac{\pi}{2}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\operatorname{sen} x < 3$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. b) Le soluzioni di $\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$ sono $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. c) Le disequazioni $\operatorname{tg} x > 1$ e $\operatorname{sen} x > \cos x$ hanno le stesse soluzioni. d) $\arccos x < \frac{\pi}{2}$ equivale a $0 < x \leq 1$.

8. ● Completa: «Per risolvere una disequazione omogenea di secondo grado in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ si controlla prima se sono soluzioni i valori per cui ; poi si dividono entrambi i membri per , che è , e si ottiene una disequazione di secondo grado in .»

Calcolare

9. ● Risolvi le disequazioni: a) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} < 0$; b) $2 \cos x - \sqrt{2} \geq 0$; c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 \leq 0$; d) $\operatorname{sen} x \geq -\frac{1}{2}$, nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

10. ●● Risolvi, scrivendo gli estremi con arcsen, arccos o arctg e poi in forma decimale (radianti, due cifre decimali): a) $5 \operatorname{sen} x > 2$; b) $4 \cos x + 3 \leq 0$; c) $\operatorname{tg} x > 3$.

11. ●● Risolvi: a) $\operatorname{sen} 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(x/2) \geq 0$; c) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) > 1$.

12. ●● Risolvi: a) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 > 0$; b) $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0$; c) $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 \geq 0$.

13. ●● Risolvi usando le formule goniometriche: a) $\cos 2x - \cos x \geq 0$; b) $\operatorname{sen} x \cos x \geq \frac{1}{4}$; c) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x > \frac{1}{2}$.

14. ●● Risolvi le disequazioni lineari: a) $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x \geq 1$; b) $\operatorname{sen} x + \cos x < 1$; c) $\operatorname{sen} x - \cos x > 0$.

15. ●● Risolvi le disequazioni omogenee: a) $\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos^2 x > 0$; b) $\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x \leq 0$.

16. ●● Risolvi con la tabella dei segni: a) $\frac{2 \cos x + 1}{1 - 2 \operatorname{sen} x} \geq 0$; b) $\operatorname{tg} x \, (2 \operatorname{sen} x - \sqrt{2}) \geq 0$.

17. ●● Risolvi i sistemi: a) $2 \operatorname{sen} x - 1 > 0$ e $\operatorname{tg} x < 1$; b) $\cos x \geq 0$ e $\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$.

18. ●● Determina il dominio delle funzioni: a) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; b) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$; c) $y = \dfrac{1}{2\operatorname{sen} x + 1}$; d) $y = \arccos(2\operatorname{sen} x)$.

19. ●● Risolvi: a) $\arcsen x < \dfrac{\pi}{4}$; b) $\arccos x \geq \dfrac{2\pi}{3}$; c) $2\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{3} > 0$; d) $\arcsen(x - 1) > \dfrac{\pi}{6}$.

20. ●●● Studia il segno della funzione $f(x) = \cos 2x + \cos x$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Trova l'errore. «$\operatorname{sen} x > \cos x$. Divido per $\cos x$: $\operatorname{tg} x > 1$, quindi $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.» Spiega dove sta l'errore, trova un valore che il ragionamento accetta ma che non è soluzione e uno che è soluzione ma viene perso, e scrivi la soluzione corretta.

22. ●● Spiega perché la disequazione $a \operatorname{sen} x + b \cos x > c$, con a e b non entrambi nulli, è verificata per ogni x se $c < -\sqrt{a^2 + b^2}$ ed è impossibile se $c \geq \sqrt{a^2 + b^2}$. Che cosa succede se $c = -\sqrt{a^2 + b^2}$?

23. ●● Dimostra che per $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{sen} x + \cos x > 1$.

24. ●● Usando l'identità $\arcsen x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, dimostra che $\arcsen x > \arccos x$ se e solo se $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$.

25. ●●● Dimostra che per ogni $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ si ha $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \geq 2$, e che l'uguaglianza vale solo per $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Problemi

26. ●● In un porto (dati inventati) la profondità dell'acqua, t ore dopo l'alta marea, è $d(t) = 4 + 1{,}5\cos(\pi t/6)$ metri. Una nave può entrare solo se la profondità è almeno 4,75 m. In quali intervalli di tempo, tra $t = 0$ e $t = 24$, può entrare? Per quante ore in tutto?

27. ●● Un pallone viene calciato dal suolo con velocità di 15 m/s; trascurando l'aria, la gittata è $R = \dfrac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$, con $g = 9{,}81$ m/s^2. Per quali inclinazioni α (in gradi, $0° < \alpha < 90°$) il pallone ricade ad almeno 20 m? Qual è la gittata massima?

28. ●● Un triangolo isoscele ha i lati obliqui di 10 cm e l'angolo al vertice x, con $0 < x < \pi$. a) Per quali x l'area è almeno 25 cm^2? b) Per quali x la base non supera $10\sqrt{2}$ cm? c) Per quali x valgono entrambe le condizioni?

29. ●● Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro verticale e forma un angolo α con il pavimento orizzontale. Le istruzioni (inventate) chiedono che il piede della scala disti dal muro almeno 1 m e che la scala arrivi sul muro ad almeno 3,6 m di altezza. Per quali angoli α sono rispettate entrambe le richieste? Dai i risultati in gradi, con un decimale.

30. ●● Riprendi il rettangolo ABCD inscritto nella semicirconferenza di raggio r dell'esempio svolto, con lo stesso angolo x. Per quali x l'area del rettangolo è almeno $\frac{\sqrt{3}}{2}\,r^2$?

31. ●●● La posizione di un oscillatore è $s(t) = 5\cos 2t$ (in centimetri, t in secondi). Per quale frazione del tempo l'oscillatore si trova a meno di 2,5 cm dalla posizione di equilibrio $s = 0$? Risolvi la disequazione $|s(t)| < 2{,}5$ nell'intervallo $[0; \pi]$ e confronta la lunghezza delle soluzioni con quella dell'intervallo.

Verso la verifica

32. ●● Risolvi la disequazione $2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x \geq 3$.

33. ●● Determina il dominio della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{2\,\text{sen}\,x - 1}}{\text{tg}\,x}$.

34. ●●● Sfida. Risolvi la disequazione $\text{sen}\,x + \cos x \geq 1 + \text{sen}\,x\cos x$. *Suggerimento:* porta tutto al secondo membro e scomponi in fattori.

PER APPROFONDIRE

- MAOT, per la storia delle funzioni goniometriche e per le disuguaglianze tra seno, arco e tangente.
- BOY, per lo sviluppo della trigonometria da Tolomeo all'età moderna.
- POL, per il metodo di soluzione dei problemi con un angolo incognito.

Glossario del capitolo

Arco delle soluzioni
Insieme dei punti della circonferenza goniometrica i cui angoli verificano una disequazione; si scrive come intervallo percorrendolo in senso antiorario.

Casi limite
Disequazioni elementari in seno o coseno con $|m| \geq 1$: sempre verificate, impossibili o verificate solo in punti isolati.

Disequazione elementare
Disequazione del tipo $\text{sen}\, x > m$, $\cos x > m$, $\text{tg}\, x > m$ (o con i versi $<$, $\geq$, $\leq$).

Disequazione goniometrica
Disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento di funzioni goniometriche.

Disequazione lineare in seno e coseno
Disequazione della forma $a\, \text{sen}\, x + b \cos x > c$ (o con un altro verso), con a e b non nulli.

Disequazione omogenea
Disequazione $a\, \text{sen}^2 x + b\, \text{sen}\, x \cos x + c \cos^2 x > 0$; si esaminano i valori con $\cos x = 0$ e poi si divide per $\cos^2 x > 0$.

Disequazione riconducibile a elementare
Disequazione che, con sostituzioni, scomposizioni o formule goniometriche, si trasforma in una o più disequazioni elementari.

Dominio
Insieme dei valori di x per cui l'espressione di una funzione ha significato.

Metodo grafico
Risoluzione di una disequazione lineare ponendo $X = \cos x$, $Y = \text{sen}\, x$: si interseca il semipiano $bX + aY > c$ con la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$.

Periodo delle soluzioni
Ampiezza dopo la quale le soluzioni di una disequazione si ripetono; si può sempre prendere il minimo comune multiplo dei periodi delle funzioni che vi compaiono (che però non è sempre il più piccolo).

Ruota goniometrica
Rappresentazione su circonferenze concentriche del segno dei fattori di una disequazione, su un periodo.

Segno di una funzione
Studio, dentro il dominio, degli insiemi in cui $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) < 0$.

Sistema di disequazioni
Insieme di disequazioni da verificare contemporaneamente; si risolve intersecando le soluzioni su uno stesso periodo.

Soluzione su un periodo
Parte delle soluzioni contenuta in un intervallo di ampiezza uguale al periodo, scelto in modo da scrivere ogni arco come un solo intervallo.

Tabella dei segni
Schema che riporta il segno di ciascun fattore e del prodotto o quoziente su un periodo dell'intera espressione.

Soluzioni

1. A. Il seno è positivo nel primo e nel secondo quadrante, $0 < x < \pi$, e la soluzione si ripete con periodo 2π. B è solo il pezzo in $[0; 2\pi[$; C contiene anche $]\pi; 2\pi[$; D è la soluzione di $\cos x > 0$.

2. C. Il coseno non supera mai 1, quindi $\cos x \geq 1$ equivale a $\cos x = 1$, cioè $x = 2k\pi$.

3. B. L'arco a destra della retta $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ va da $-\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{6}$. A è il complementare (in $[0; 2\pi]$), D è la soluzione di $\cos x > \frac{1}{2}$.

4. D. In $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ la tangente è crescente e vale -1 in $-\frac{\pi}{4}$: $\operatorname{tg} x < -1$ per $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$; poi si aggiunge $k\pi$. B è sbagliata: in $]\frac{3\pi}{4}; \pi[$ la tangente è compresa tra -1 e 0.

5. B. Deve essere $\operatorname{sen} x \geq 0$: primo e secondo quadrante, estremi compresi, con periodo 2π.

6. C. arctg è crescente e $\frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$, quindi $x > \sqrt{3}$. La D confonde l'immagine con il dominio: arctg è definita su tutto $\mathbb{R}$.

7. a) Vero: $\operatorname{sen} x \leq 1 < 3$. b) Falso: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. c) Falso: $\operatorname{sen} x > \cos x$ ha soluzioni $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ (vedi l'Errore frequente sulle divisioni per un'espressione di segno ignoto). d) Vero: arccos è decrescente, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, e per il dominio $x \leq 1$.

8. «... i valori per cui $\cos x = 0$ (cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$); ... per $\cos^2 x$, che è positivo (dove non è nullo); ... in $\operatorname{tg} x$.»

9. a) $\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. b) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$: $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. c) $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$: $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$. d) In $[0; 2\pi]$: $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ oppure $\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ nei primi tre casi).

10. a) $\operatorname{sen} x > 0{,}4$: $\arcsin 0{,}4 + 2k\pi < x < \pi - \arcsin 0{,}4 + 2k\pi$, cioè $0{,}41 + 2k\pi < x < 2{,}73 + 2k\pi$. b) $\cos x \leq -\frac{3}{4}$: $\arccos(-\frac{3}{4}) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \arccos(-\frac{3}{4}) + 2k\pi$, cioè $2{,}42 + 2k\pi \leq x \leq 3{,}86 + 2k\pi$. c) $\operatorname{arctg} 3 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, cioè $1{,}25 + k\pi < x < 1{,}57 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

11. a) Con $z = 2x$: $\operatorname{sen} z < \frac{\sqrt{3}}{2}$ per $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < z < \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$, quindi $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k\pi$. b) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x/2 \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, quindi $-\pi + 4k\pi \leq x \leq \pi + 4k\pi$ (periodo 4π). c) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi $k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

12. a) $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) > 0$: $\cos x < -\frac{1}{2}$ oppure $\cos x > 1$ (impossibile); $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$. b) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) < 0$: $1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$. c) $\operatorname{sen}^2 x \geq \frac{3}{4}$, cioè $\operatorname{sen} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure $\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$: $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

13. a) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: $2\cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$, $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) \geq 0$, cioè $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ oppure $\cos x \geq 1$: $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = 2k\pi$ (punti isolati!). b) $\text{sen}\, 2x \geq \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. c) $\cos 2x > \frac{1}{2}$: $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, cioè $-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

14. a) $R = 2$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$: $\text{sen}(x - \frac{\pi}{6}) \geq \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, cioè $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$. b) $\sqrt{2}\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) < 1$: $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$, cioè $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$. c) $\sqrt{2}\,\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) > 0$: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

15. a) Per $\cos x = 0$ il primo membro vale $1 > 0$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono soluzioni. Altrimenti $\text{tg}^2 x - 3\,\text{tg}\, x + 2 > 0$, $\text{tg}\, x < 1$ oppure $\text{tg}\, x > 2$. Unendo: $\text{arctg}\, 2 + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi$ ($\approx 1{,}11 + k\pi < x < 3{,}93 + k\pi$). b) Il primo membro è $(\text{sen}\, x + \sqrt{3}\cos x)^2$, che è ≤ 0 solo se è nullo: $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ (per $\cos x = 0$ il primo membro vale 1). $k \in \mathbb{Z}$.

16. a) In $[0; 2\pi[$: numeratore ≥ 0 per $x \leq \frac{2\pi}{3}$ e $x \geq \frac{4\pi}{3}$; denominatore > 0 per $x < \frac{\pi}{6}$ e $x > \frac{5\pi}{6}$. Soluzione: $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. b) Periodo 2π; $\text{tg}\, x \geq 0$ in $[0; \frac{\pi}{2}[\cup [\pi; \frac{3\pi}{2}[$, $2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2} \geq 0$ in $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$. Soluzione: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq 2k\pi$ oppure $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

17. a) $\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$: $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$; $\text{tg}\, x < 1$ in $[0; 2\pi[$: $[0; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$. Soluzione: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. b) $\cos x \geq 0$: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\text{sen}\, x \leq \frac{1}{2}$ in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}]$. Soluzione: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

18. a) $\cos x \leq \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. b) $\text{sen}\, x > 0$: $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$. c) $\text{sen}\, x \neq -\frac{1}{2}$: $x \neq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ e $x \neq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$. d) $-1 \leq 2\,\text{sen}\, x \leq 1$, cioè $-\frac{1}{2} \leq \text{sen}\, x \leq \frac{1}{2}$: $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

19. a) $-1 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) arccos decrescente: $x \leq \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, con il dominio $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$. c) $\text{arctg}\, x > -\frac{\pi}{6}$, $x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$. d) Dominio $0 \leq x \leq 2$; $x - 1 > \frac{1}{2}$: $\frac{3}{2} < x \leq 2$.

20. Dominio $\mathbb{R}$. $f(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ $= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$. Il secondo fattore è ≥ 0 e si annulla per $x = \pi + 2k\pi$. Quindi $f(x) > 0$ per $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $f(x) = 0$ per $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = \pi + 2k\pi$; $f(x) < 0$ per $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ oppure $\pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

21. Si è diviso per $\cos x$ senza conoscerne il segno: dove $\cos x < 0$ il verso andava invertito, e dove $\cos x = 0$ la divisione non si può fare. Per $x = \frac{4\pi}{3}$ si ha $\text{tg}\, x = \sqrt{3} > 1$, ma $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x = -\frac{1}{2}$; per $x = \frac{3\pi}{4}$ si ha $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ma

tg $x = -1$. Soluzione corretta: $\sqrt{2}\,\text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) > 0$, $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

22. Traccia: $a \text{ sen } x + b \cos x = R \text{ sen}(x + \varphi)$ con $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, e $R \text{ sen}(x + \varphi)$ assume tutti e soli i valori di $[-R; R]$. Se $c < -R$, ogni valore del primo membro è $\geq -R > c$: la disequazione è sempre vera. Se $c \geq R$, il primo membro non supera $R \leq c$: impossibile. Se $c = -R$ la disequazione è vera per ogni x tranne quelli in cui $\text{sen}(x + \varphi) = -1$, cioè $x = -\varphi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

23. Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha $\text{sen } x > 0$ e $\cos x > 0$, quindi $\text{sen } x + \cos x > 0$ e $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 + 2 \text{ sen } x \cos x > 1$. Un numero positivo con quadrato maggiore di 1 è maggiore di 1. (In alternativa: $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{4})$ e $\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, dove il seno supera $\frac{\sqrt{2}}{2}$.) c.v.d.

24. Il dominio comune è $-1 \leq x \leq 1$. Poiché $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen } x$, la disuguaglianza diventa $\text{arcsen } x > \frac{\pi}{2} - \text{arcsen } x$, cioè $\text{arcsen } x > \frac{\pi}{4}$. Essendo arcsen crescente e $\text{arcsen}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, ciò equivale a $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè, con il dominio, $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$. c.v.d.

25. Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cos x} = \frac{2}{\text{sen } 2x}$. Poiché $0 < 2x < \pi$, si ha $0 < \text{sen } 2x \leq 1$, quindi $\frac{2}{\text{sen } 2x} \geq 2$, con uguaglianza solo se $\text{sen } 2x = 1$, cioè $2x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$. c.v.d.

26. $4 + 1{,}5 \cos(\pi t/6) \geq 4{,}75 \iff \cos(\pi t/6) \geq \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi t/6 \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -2 + 12k \leq t \leq 2 + 12k$. Tra 0 e 24: $0 \leq t \leq 2$, $10 \leq t \leq 14$, $22 \leq t \leq 24$; in tutto $2 + 4 + 2 = 8$ ore.

27. $\text{sen } 2\alpha \geq \frac{20 \cdot 9{,}81}{225} = 0{,}872$; con $0° < 2\alpha < 180°$: $60{,}69° \leq 2\alpha \leq 119{,}31°$, cioè $30{,}3° \leq \alpha \leq 59{,}7°$ (arrotondati). Gittata massima (per $\alpha = 45°$): $225/9{,}81 \approx 22{,}9$ m.

28. a) Area $= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \text{sen } x = 50 \text{ sen } x \geq 25 \iff \text{sen } x \geq \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. b) Base $= 20 \text{ sen}(x/2) \leq 10\sqrt{2} \iff \text{sen}(x/2) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; con $0 < x/2 < \frac{\pi}{2}$: $x/2 \leq \frac{\pi}{4}$, cioè $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. c) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

29. Distanza del piede $4 \cos \alpha \geq 1 \iff \cos \alpha \geq 0{,}25 \iff \alpha \leq \arccos 0{,}25 \approx 75{,}5°$; altezza $4 \text{ sen } \alpha \geq 3{,}6 \iff \text{sen } \alpha \geq 0{,}9 \iff \alpha \geq \text{arcsen } 0{,}9 \approx 64{,}2°$ (con $0° < \alpha < 90°$). Entrambe: $64{,}2° \leq \alpha \leq 75{,}5°$.

30. Area $= 2r \cos x \cdot r \text{ sen } x = r^2 \text{ sen } 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \iff \text{sen } 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; con $0 < 2x < \pi$: $\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3}$, cioè $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

31. $|5 \cos 2t| < 2{,}5 \iff |\cos 2t| < \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{3} + k\pi < 2t < \frac{2\pi}{3} + k\pi \iff \frac{\pi}{6} + k\pi/2 < t < \frac{\pi}{3} + k\pi/2$. In $[0; \pi]$: $]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}[$, $]\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}[$; lunghezza totale $\frac{\pi}{3}$ su π: un terzo del tempo.

32. $2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 \geq 0 \iff 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 \leq 0 \iff (2 \cos x - 1)(\cos x - 1) \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$: $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

33. Condizioni: $2 \text{ sen } x - 1 \geq 0$ ($\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$), $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (esistenza della tangente) e $\text{tg } x \neq 0$ ($x \neq k\pi$, già esclusi dalla prima). Dominio: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

34. $1 + \text{sen } x \cos x - \text{sen } x - \cos x = (1 - \text{sen } x)(1 - \cos x)$, quindi la disequazione è

$(1 - \operatorname{sen} x)(1 - \cos x) \leq 0$. Entrambi i fattori sono sempre ≥ 0, quindi il prodotto non è mai negativo: la disequazione vale solo dove il prodotto è nullo, cioè $\operatorname{sen} x = 1$ oppure $\cos x = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.