CAPITOLO

3

Equazioni goniometriche

Una formula trova una soluzione; la periodicità ne regala infinite. Il lavoro sta nel non perderne nessuna. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Risolvere le equazioni elementari sen $x = m$, cos $x = m$, tg $x = m$, sulla circonferenza goniometrica e sul grafico, scrivendo tutte le soluzioni.
2. Ricondurre un'equazione a equazioni elementari: argomenti diversi, scomposizione, incognita ausiliaria, formule goniometriche.
3. Risolvere le equazioni lineari in seno e coseno con l'angolo aggiunto, con le formule parametriche e con il metodo grafico, confrontando i tre metodi.
4. Risolvere equazioni omogenee, equazioni con le funzioni inverse e semplici sistemi.
5. Localizzare e approssimare con la bisezione la soluzione di un'equazione come cos $x = x$, dichiarando l'errore.
6. Impostare e discutere problemi di geometria e di fisica con un angolo incognito.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Equazioni elementari 2
3.2 Equazioni riconducibili a equazioni elementari 6
3.3 Equazioni lineari in seno e coseno 10
3.4 Equazioni omogenee e altri tipi 15
3.5 Equazioni che le formule non risolvono 17
3.6 Problemi con un angolo incognito 19

Matematica 4 · Parte I · Goniometria · versione 1.0
Capitolo 3: Equazioni goniometriche · pagine 83–110 del volume completo · estratto per lo studio

Un pallone calciato con velocità v ricade, se trascuriamo l'aria, a una distanza che dipende dall'angolo di tiro: per mandarlo esattamente a 30 metri, con quale angolo bisogna calciarlo? Un pendolo oscilla avanti e indietro: in quali istanti si trova a metà strada fra il centro e l'estremo? Un rettangolo è inscritto in una semicirconferenza: come deve essere inclinato il raggio che ne tocca un vertice perché il perimetro abbia un valore assegnato? Sono domande molto diverse, ma conducono allo stesso tipo di problema: un'equazione in cui l'incognita è un angolo e compare dentro il seno, il coseno o la tangente.

Nei due capitoli precedenti abbiamo studiato le funzioni goniometriche, le loro inverse e le formule che le legano. Ora le usiamo per *risolvere*. Vedrai che ogni equazione goniometrica, per quanto complicata, si cerca di ridurre a una delle tre **equazioni elementari** $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, e che la periodicità delle funzioni goniometriche ha una conseguenza nuova: le soluzioni, quando esistono, sono infinite e vanno descritte tutte. Per alcune equazioni, come $\cos x = x$, nessuna formula basta; impareremo allora a calcolare la soluzione in modo approssimato, con un errore garantito.

3.1 Equazioni elementari

3.1.1 Che cos'è un'equazione goniometrica

Un'**equazione goniometrica** è un'equazione in cui l'incognita compare, almeno una volta, nell'argomento di una funzione goniometrica. Sono goniometriche $2\sin x = 1$, $\cos 2x + \cos x = 0$ e $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$; non lo è $x \cdot \sin 30° = 1$, che è un'equazione di primo grado con un coefficiente scritto in modo curioso ($\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, quindi $x = 2$).

Le funzioni seno e coseno hanno periodo 2π, la tangente ha periodo π. Se un numero x_0 risolve un'equazione che contiene solo $\sin x$ e $\cos x$, la risolvono anche $x_0 + 2\pi$, $x_0 + 4\pi$, $x_0 - 2\pi$ e così via: le soluzioni si presentano a **famiglie** della forma $x = x_0 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. **Risolvere** un'equazione goniometrica significa descrivere *tutte* le sue soluzioni reali, di solito come unione di un numero finito di famiglie. Salvo avviso contrario, gli angoli sono in radianti; quando un problema li chiede in gradi scriveremo, per esempio, $x = 30° + k \cdot 360°$.

Chiamiamo **equazioni elementari** le tre equazioni $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, dove m è un numero reale assegnato. Le risolviamo sulla circonferenza goniometrica, che le rende quasi evidenti, e poi controlliamo sul grafico della funzione.

3.1.2 L'equazione sen x = m

Sulla circonferenza goniometrica il seno di un angolo è l'ordinata del punto associato. Cercare gli x per cui $\sin x = m$ vuol dire quindi cercare i punti della circonferenza che hanno ordinata

m, cioè le intersezioni della circonferenza con la retta orizzontale $y = m$.

- Se $|m| > 1$ la retta non incontra la circonferenza: l'equazione è **impossibile**. Per esempio $\operatorname{sen} x = 2$ non ha soluzioni.
- Se $-1 < m < 1$ la retta taglia la circonferenza in due punti P e P', simmetrici rispetto all'asse y. Il punto P del semicerchio destro corrisponde all'angolo $\alpha = \arcsen m$, che sta in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; il suo simmetrico P' corrisponde all'angolo supplementare $\pi - \alpha$.
- Se $m = 1$ o $m = -1$ i due punti coincidono (la retta è tangente) e resta una sola famiglia: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Nel caso generale le soluzioni sono dunque

$$\operatorname{sen} x = m,\ |m| \le 1 \iff x = \arcsen m + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsen m + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Per $m = \frac{1}{2}$ si ha $\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ e le due famiglie sono $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La Figura 3.1 mostra le due letture: sulla circonferenza i punti sono due; sul grafico di $y = \operatorname{sen} x$ la retta $y = \frac{1}{2}$ incontra la curva infinite volte, due volte in ogni periodo, e le intersezioni si ripetono ogni 2π. Nell'intervallo $[-2\pi; 4\pi]$ del grafico se ne contano sei.

Due casi particolari meritano di essere ricordati perché le due famiglie si possono riunire in una sola. Per $m = 0$ si ha $x = 0 + 2k\pi$ oppure $x = \pi + 2k\pi$: i punti sono gli estremi del diametro orizzontale e le soluzioni distano π l'una dall'altra, quindi $\operatorname{sen} x = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha $\arcsen(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$ e le famiglie sono $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

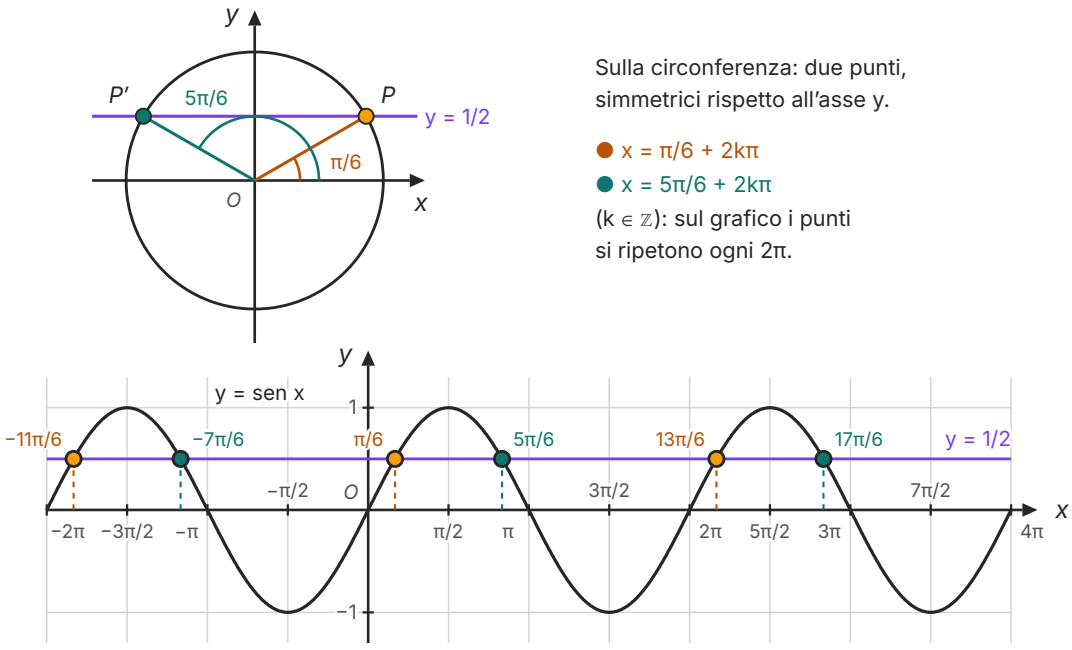


Figura 3.1 L'equazione sen $x = \frac{1}{2}$. In alto, sulla circonferenza goniometrica, la retta $y = \frac{1}{2}$ individua i punti P (angolo $\frac{\pi}{6}$) e P' (angolo $\frac{5\pi}{6}$), simmetrici rispetto all'asse y. In basso, il grafico di $y = \text{sen } x$ su $[-2\pi; 4\pi]$ con le sei soluzioni dell'intervallo, tre per ciascuna famiglia. Grafico calcolato dall'equazione; l'unità sull'asse y è doppia di quella sull'asse x.

3.1.3 Le equazioni cos x = m e tg x = m

Il coseno è l'ascissa del punto associato: le soluzioni di $\cos x = m$ corrispondono alle intersezioni della circonferenza con la retta verticale $x = m$. Anche qui serve $|m| \le 1$; per $|m| < 1$ i due punti sono simmetrici rispetto all'asse x, e se uno corrisponde all'angolo $\alpha = \arccos m$, compreso in $[0; \pi]$, l'altro corrisponde a $-\alpha$:

$$\cos x = m,\ |m| \le 1 \iff x = \pm \arccos m + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Così $\cos x = -\frac{1}{2}$ ha le soluzioni $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $\cos x = 0$ ha $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, due famiglie che si riuniscono in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cos x = 1$ ha la sola famiglia $x = 2k\pi$.

La tangente, invece, assume *ogni* valore reale: l'equazione $\text{tg } x = m$ ha soluzioni per qualunque m. Sulla circonferenza, la retta per l'origine e per il punto $T(1; m)$ della retta tangente $x = 1$ taglia la circonferenza in due punti diametralmente opposti, che corrispondono ad angoli che differiscono di π. Le due famiglie si fondono quindi in una sola, con passo π:

$$\operatorname{tg} x = m \iff x = \operatorname{arctg} m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

La Figura 3.2 mostra il caso $m = 2$: la retta $y = 2$ incontra ogni ramo del grafico di $y = \operatorname{tg} x$ una e una sola volta, nei punti di ascissa $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, con $\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1071$.

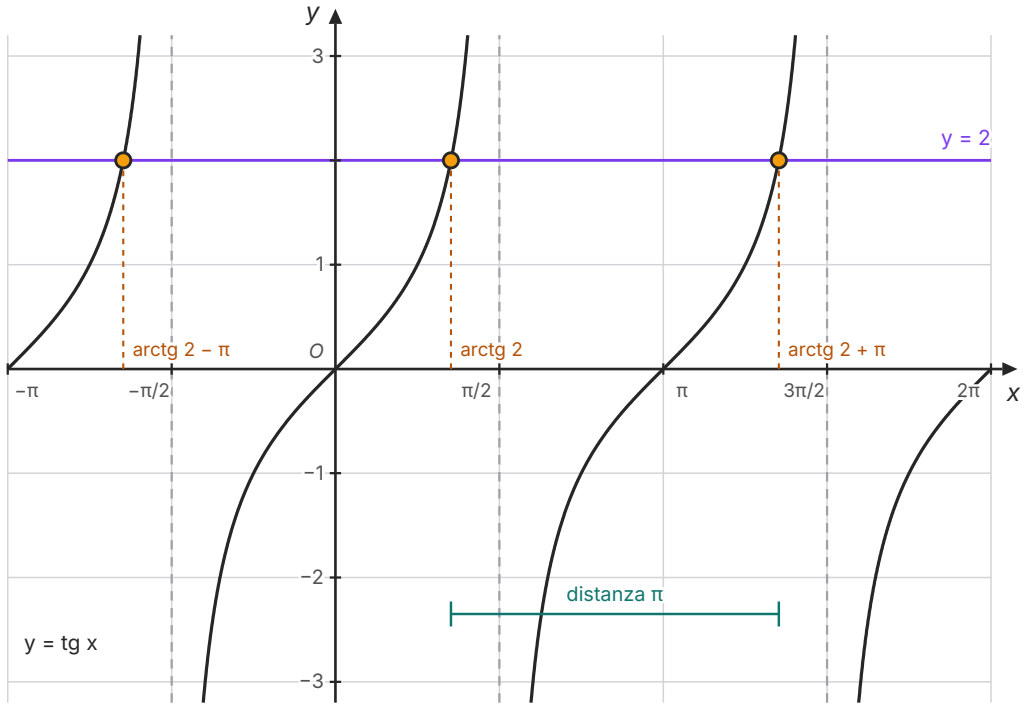


Figura 3.2 L'equazione $\operatorname{tg} x = 2$ sul grafico di $y = \operatorname{tg} x$ (asintoti verticali tratteggiati). La retta $y = 2$ taglia ogni ramo in un punto: le soluzioni $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono equidistanti, a distanza π l'una dall'altra. Grafico calcolato dall'equazione, con la stessa unità sui due assi.

IN SINTESI

Le equazioni elementari. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

- $\operatorname{sen} x = m$: impossibile se $|m| > 1$; altrimenti $x = \operatorname{arcsen} m + 2k\pi \vee x = \pi - \operatorname{arcsen} m + 2k\pi$. Casi particolari: $\operatorname{sen} x = 0 \iff x = k\pi$; $\operatorname{sen} x = \pm 1 \iff x = \pm \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- $\cos x = m$: impossibile se $|m| > 1$; altrimenti $x = \pm \arccos m + 2k\pi$. Casi particolari: $\cos x = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$; $\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$.
- $\operatorname{tg} x = m$: sempre risolubile; $x = \operatorname{arctg} m + k\pi$.

3.1.4 Valori non notevoli e soluzioni in un intervallo

Quando m non è il seno, il coseno o la tangente di un angolo notevole, le formule restano le stesse e l'arcoseno, l'arcocoseno o l'arcotangente si calcolano con la calcolatrice. Ricorda che la calcolatrice restituisce solo il valore principale, cioè il valore della funzione inversa, che sta nell'immagine di arcsen, arccos o arctg (capitolo 1): l'altra famiglia di soluzioni la devi scrivere tu. Imposta la calcolatrice in RAD per avere radianti, in DEG per avere gradi.

Spesso un problema non chiede tutte le soluzioni, ma solo quelle in un intervallo assegnato, per esempio gli angoli fra 0° e 360° o gli istanti di un'oscillazione fra 0 e 10 secondi. Si scrivono allora le famiglie e si danno a k i valori interi che portano dentro l'intervallo, uno per uno.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\text{sen}\, x = 0{,}3$, prima in $\mathbb{R}$ e poi nell'intervallo $[-\pi; 3\pi]$.

Tutte le soluzioni. Con la calcolatrice in RAD, $\arcsen 0{,}3 \approx 0{,}3047$ (in gradi, circa 17,46°). Poiché $0 < 0{,}3 < 1$, le famiglie sono due:

$$x \approx 0{,}3047 + 2k\pi \vee x \approx \pi - 0{,}3047 + 2k\pi \approx 2{,}8369 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Soluzioni in $[-\pi; 3\pi]$. L'intervallo va da circa −3,1416 a circa 9,4248. Nella prima famiglia, $k = 0$ dà 0,3047 e $k = 1$ dà $0{,}3047 + 2\pi \approx 6{,}5879$; $k = -1$ dà circa −5,9785, fuori. Nella seconda, $k = 0$ dà 2,8369 e $k = 1$ dà circa 9,1201, che è ancora minore di 3π; $k = -1$ dà circa −3,4463, che è minore di $-\pi$ e quindi fuori. Le soluzioni sono quattro:

$$x_1 \approx 0{,}3047,\ x_2 \approx 2{,}8369,\ x_3 \approx 6{,}5879,\ x_4 \approx 9{,}1201$$

Controllo. $\text{sen}\, 2{,}8369 \approx 0{,}3000$ e $\text{sen}\, 9{,}1201 \approx 0{,}3000$. In gradi, le stesse soluzioni si scriverebbero $x \approx 17{,}46° + k \cdot 360° \vee x \approx 162{,}54° + k \cdot 360°$.

Una stessa famiglia può essere scritta in molti modi. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ e $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ descrivono lo stesso insieme, perché $\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi$; e l'unione di $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ è $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Per confrontare il tuo risultato con quello del libro, o con quello di un compagno, sostituisci a k i valori −1, 0 e 1 e confronta gli angoli ottenuti nell'intervallo $[0; 2\pi[$: se gli elenchi coincidono, i risultati sono equivalenti.

3.2 Equazioni riconducibili a equazioni elementari

Quasi tutte le equazioni goniometriche si risolvono trasformandole, con passaggi equivalenti, in una o più equazioni elementari. Le trasformazioni più usate sono quattro: confrontare due

funzioni dello stesso tipo, scomporre in fattori, sostituire una funzione con un'**incognita ausiliaria**, applicare le formule del capitolo 2.

3.2.1 Lo stesso valore per due argomenti diversi

Quando l'argomento non è x ma un'espressione $f(x)$, si risolve prima rispetto a $f(x)$ e poi si ricava x. Per esempio $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ dà $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, e dividendo per 2:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Osserva che anche il periodo $2k\pi$ si è dimezzato: la funzione $\operatorname{sen} 2x$ ha periodo π, e le soluzioni si ripetono ogni π. Dimenticare di dividere $2k\pi$ farebbe perdere metà delle soluzioni. Allo stesso modo $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -1$ dà $x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, cioè $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Più in generale, due angoli hanno lo stesso seno se e solo se sono uguali o supplementari, a meno di multipli di 2π; hanno lo stesso coseno se e solo se sono uguali od opposti; hanno la stessa tangente se e solo se differiscono per un multiplo di π. Sono le stesse simmetrie della circonferenza che abbiamo usato per le equazioni elementari.

Per esempio, $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$ dà $3x = x + 2k\pi$, cioè $x = k\pi$, oppure $3x = \pi - x + 2k\pi$, cioè $4x = \pi + 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Nell'intervallo $[0; 2\pi[$ le soluzioni sono 0, π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$: sei angoli.

IN SINTESI

Equazioni del tipo $\operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} g(x)$. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} g(x) \iff f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \iff f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \iff f(x) = g(x) + k\pi$$

Per la tangente vanno aggiunte le condizioni di esistenza: $f(x)$ e $g(x)$ diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Un'equazione $\operatorname{sen} f(x) = \cos g(x)$ si riconduce al primo tipo scrivendo $\cos g(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - g(x))$.

3.2.2 Scomporre in fattori

Se un'equazione si scrive nella forma $A(x) \cdot B(x) = 0$, per la legge di annullamento del prodotto equivale a $A(x) = 0 \vee B(x) = 0$, a patto che entrambi i fattori esistano. Per arrivare a un prodotto si raccoglie un fattore comune, spesso dopo aver usato una formula di duplicazione. Non si

deve invece *dividere* per un fattore che contiene l'incognita: si perderebbero le soluzioni che lo annullano.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ in due modi.

Primo modo: scomposizione. Con la formula di duplicazione, $2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$, e raccogliendo $\cos x$:

$$\cos x\,(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \iff \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In $[0; 2\pi[$: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

Secondo modo: riduzione a seni. Scriviamo $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$: l'equazione $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$ dà $2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$, cioè $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, oppure $2x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Il risultato sembra diverso, ma non lo è. La prima famiglia, per $k = 0, 1, 2$, dà in $[0; 2\pi[$ gli angoli $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$; la seconda aggiunge $\frac{\pi}{2}$. Sono gli stessi quattro angoli del primo modo.

3.2.3 Equazioni di secondo grado in una funzione

L'equazione $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ contiene una sola funzione, $\operatorname{sen} x$, elevata al quadrato e alla prima potenza. Con l'incognita ausiliaria $t = \operatorname{sen} x$ diventa l'equazione algebrica $2t^2 - t - 1 = 0$, che ha le soluzioni $t = 1$ e $t = -\frac{1}{2}$. Prima di tornare a x bisogna controllare che ogni valore di t sia accettabile, perché il seno e il coseno stanno sempre in $[-1; 1]$: qui lo sono entrambi. Dunque

$$\operatorname{sen} x = 1 \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se nell'equazione compaiono due funzioni diverse, la relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (o la $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$) permette spesso di ridursi a una sola.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $2\,\text{sen}^2x + 3\cos x = 0$.

Una sola funzione. Sostituiamo $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x$: $2 - 2\cos^2x + 3\cos x = 0$, cioè

$$2\cos^2x - 3\cos x - 2 = 0$$

Incognita ausiliaria. Con $t = \cos x$: $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $\Delta = 9 + 16 = 25$, $t = \frac{3 \pm 5}{4}$, cioè $t = 2$ oppure $t = -\frac{1}{2}$.

Controllo dei valori. $\cos x = 2$ è impossibile, perché $2 > 1$: questo valore si scarta. Resta $\cos x = -\frac{1}{2}$:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Verifica. Per $x = \frac{2\pi}{3}$: $2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$.

3.2.4 Usare le formule goniometriche

Quando nell'equazione compaiono angoli diversi, come x e $2x$, le formule del capitolo 2 permettono di riportare tutto a un solo angolo. Nell'equazione $\cos 2x + \cos x = 0$ scegliamo per $\cos 2x$ la forma $2\cos^2x - 1$, che contiene solo il coseno: si ottiene $2\cos^2x + \cos x - 1 = 0$, da cui $\cos x = \frac{1}{2}$ oppure $\cos x = -1$, cioè $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$. In altri casi servono le formule di prostaferesi: $\text{sen}\,3x + \text{sen}\,x = 0$ diventa $2\,\text{sen}\,2x\cos x = 0$, che si risolve con la legge di annullamento del prodotto.

ERRORE FREQUENTE

Dividere per una funzione dell'incognita. Chi risolve $\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$ dividendo per $\operatorname{sen} x$ ottiene $\cos x = 1$, cioè $x = 2k\pi$, e perde tutte le soluzioni di $\operatorname{sen} x = 0$. Il modo corretto è $\operatorname{sen} x\,(\cos x - 1) = 0$, che dà $x = k\pi \vee x = 2k\pi$, cioè semplicemente $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: per esempio $x = \pi$ è una soluzione persa.

Dimenticare la seconda famiglia. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ non equivale a $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: manca $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Lo stesso vale per $\cos x = m$, che ha la famiglia $+\arccos m$ e la famiglia $-\arccos m$.

Perdere $x = \pi + 2k\pi$ con le formule parametriche. Le formule in $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ escludono proprio quei valori: vanno sempre controllati a parte, come vedremo con le equazioni lineari.

Accettare valori impossibili dell'incognita ausiliaria. Se $t = \operatorname{sen} x$ o $t = \cos x$, ogni soluzione con $|t| > 1$ va scartata; con $t = \operatorname{tg} x$, invece, ogni valore reale è accettabile.

3.3 Equazioni lineari in seno e coseno

Un'equazione della forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c, \text{ con } a \neq 0,\ b \neq 0$$

si dice **equazione lineare in seno e coseno**: seno e coseno compaiono al primo grado e nello stesso argomento. Se $c = 0$ l'equazione è facile: i valori con $\cos x = 0$ non la risolvono (darebbero $a \operatorname{sen} x = 0$ con $\operatorname{sen} x = \pm 1$), quindi possiamo dividere per $\cos x$ e ottenere l'equazione elementare $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$. Se $c \neq 0$ servono altri strumenti. Ne vediamo tre, applicandoli tutti alla stessa equazione

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

così da poterli confrontare.

3.3.1 Primo metodo: l'angolo aggiunto

L'idea è riconoscere nel primo membro lo sviluppo di $R \operatorname{sen}(x + \varphi) = R \operatorname{sen} x \cos\varphi + R \cos x \operatorname{sen}\varphi$. I due membri coincidono per ogni x se $R\cos\varphi = a$ e $R \operatorname{sen}\varphi = b$. Elevando al quadrato e sommando si trova $R^2 = a^2 + b^2$; scelto $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, l'angolo φ, detto **angolo aggiunto**, è determinato dalle due condizioni

$$\cos\varphi = \frac{a}{R},\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{R},\ R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il quadrante di φ va letto sui segni di *entrambi* $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$: la sola $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ non basta, perché non distingue φ da $\varphi + \pi$. Per la nostra equazione $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $R = 2$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, e l'equazione diventa

$$2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Da $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ si ottiene

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

La verifica è immediata: $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2} = 1$, e $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 1$. La Figura 3.3 mostra il significato del metodo: la somma delle due sinusoidi $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \sqrt{3}\cos x$ è ancora una sinusoide, di ampiezza 2 e spostata di $\dfrac{\pi}{3}$ verso sinistra rispetto a $y = 2\operatorname{sen} x$. Le soluzioni sono le ascisse dei punti in cui questa curva incontra la retta $y = 1$.

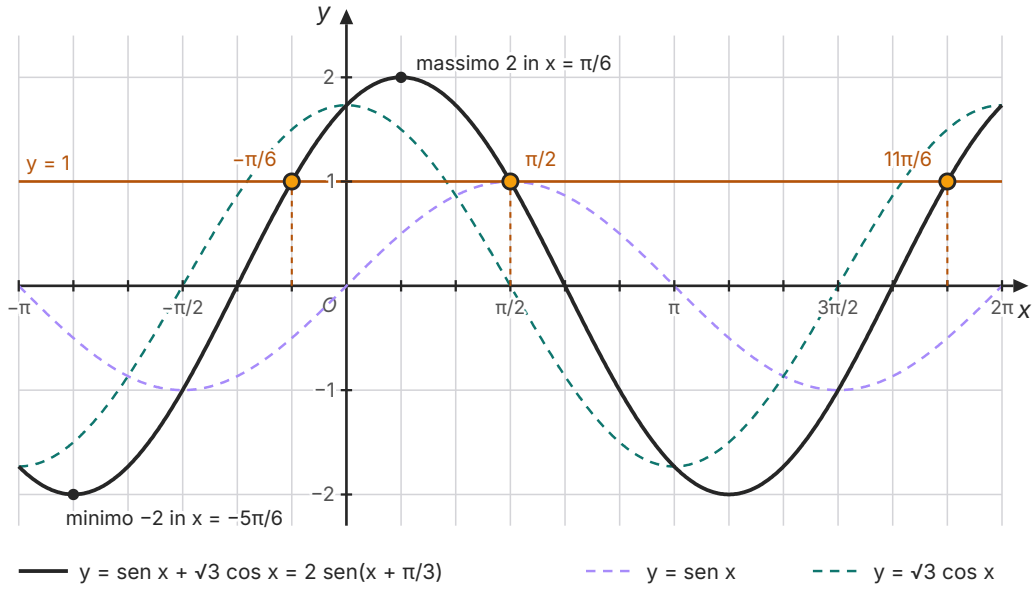


Figura 3.3 Il metodo dell'angolo aggiunto. La curva continua è $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x$, somma delle due curve tratteggiate $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \sqrt{3}\cos x$; coincide con $y = 2\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, che oscilla fra -2 e 2. Le intersezioni con la retta $y = 1$ hanno ascisse $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, … Grafici calcolati dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi.

Il metodo dà anche una **condizione di risolubilità**. L'equazione equivale a $\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{c}{R}$, che ha soluzioni se e solo se $\left|\frac{c}{R}\right|\le 1$, cioè

$$a\operatorname{sen}x+b\cos x=c \text{ è risolubile} \iff c^2\le a^2+b^2$$

Per esempio $3\operatorname{sen}x+4\cos x=6$ è impossibile, perché $R=5$ e il primo membro non supera mai 5: vedremo nel capitolo 5 che R è l'ampiezza della sinusoide.

3.3.2 Secondo metodo: le formule parametriche

Le formule parametriche del capitolo 2 esprimono seno e coseno con la sola $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x\ne\pi+2k\pi$$

Sostituendole, un'equazione lineare diventa un'equazione algebrica in t. Ma le formule valgono solo dove $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ esiste, cioè per $x\ne\pi+2k\pi$: i valori $x=\pi+2k\pi$ vanno quindi **controllati a parte**, sostituendoli nell'equazione di partenza. Nel nostro esempio, per $x=\pi$ si ha $\operatorname{sen}\pi+\sqrt{3}\cos\pi=-\sqrt{3}\ne 1$: non sono soluzioni. Per gli altri x, moltiplicando per $1+t^2>0$:

$$2t+\sqrt{3}(1-t^2)=1+t^2 \iff (1+\sqrt{3})\,t^2-2t+1-\sqrt{3}=0$$

Il discriminante ridotto è $\frac{\Delta}{4}=1-(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-(1-3)=3$, quindi $t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$: $t=1$ oppure $t=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$. Il primo valore dà $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, cioè $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Per il secondo ricordiamo che $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ (capitolo 2): dunque $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ e $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. Ritroviamo le due famiglie, con un calcolo più lungo; in compenso il metodo non richiede di riconoscere un angolo e funziona anche con coefficienti qualsiasi.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ con le formule parametriche, e vediamo che cosa succede se si dimentica il controllo.

Sostituzione. $\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ dà $2t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, cioè $2t = 2$ e $t = 1$. Il termine in t^2 si è cancellato: l'equazione in t è di primo grado e ha una sola soluzione, da cui $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Controllo di $x = \pi + 2k\pi$. $\operatorname{sen}\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$: *è una soluzione*. Le soluzioni sono quindi

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Controprova con l'angolo aggiunto. $R = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ e l'equazione è $\sqrt{2}\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = 1$, cioè $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oppure $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, le stesse due famiglie. Senza il controllo, la famiglia $x = \pi + 2k\pi$ sarebbe andata perduta. In generale le soluzioni $x = \pi + 2k\pi$ sfuggono proprio quando, come qui, il coefficiente di t^2 si annulla.

3.3.3 Terzo metodo: il metodo grafico

Il terzo metodo traduce l'equazione in un problema di geometria analitica. Poniamo $X = \cos x$ e $Y = \operatorname{sen} x$. Il punto $(X; Y)$ sta sulla circonferenza goniometrica, e l'equazione chiede che stia anche sulla retta $bX + aY = c$. Le soluzioni corrispondono quindi ai punti comuni alla retta e alla circonferenza, cioè alle soluzioni del **sistema**

$$bX + aY = c,\ X^2 + Y^2 = 1$$

che sai risolvere dal capitolo sulla circonferenza di *Matematica 3*. Nel nostro esempio la retta è $\sqrt{3}X + Y = 1$; sostituendo $Y = 1 - \sqrt{3}X$ nell'equazione della circonferenza si trova $4X^2 - 2\sqrt{3}X = 0$, cioè $X = 0$ oppure $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$. I punti sono $A(0; 1)$ e $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$ (Figura 3.4). Il punto A corrisponde agli angoli $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, il punto B agli angoli $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: ancora le stesse famiglie.

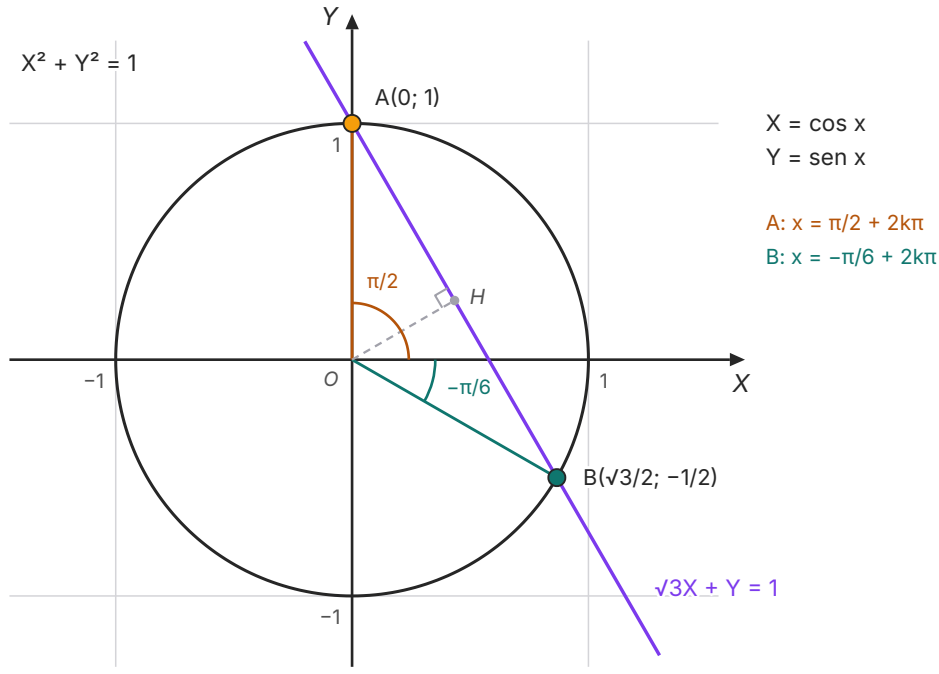


Figura 3.4 Il metodo grafico per sen x + √3 cos x = 1. Nel piano XY, con X = cos x e Y = sen x, la retta √3X + Y = 1 taglia la circonferenza goniometrica nei punti $A(0; 1)$ e $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$, associati agli angoli $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{6}$. La distanza della retta dall'origine è OH = $\frac{1}{2}$ < 1. Figura calcolata dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi.

Anche la condizione di risolubilità ha qui un significato evidente: la retta incontra la circonferenza se e solo se la sua distanza dal centro non supera il raggio, cioè $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le 1$, la stessa condizione $c^2 \le a^2 + b^2$ trovata con l'angolo aggiunto. Nel nostro esempio la distanza è $\frac{1}{2}$ e i punti sono due; se la retta fosse tangente ci sarebbe una sola famiglia di soluzioni.

3.3.4 Quale metodo scegliere

I tre metodi danno, ovviamente, lo stesso risultato, ma mostrano cose diverse. L'angolo aggiunto è il più rapido quando $\frac{a}{R}$ e $\frac{b}{R}$ sono il coseno e il seno di un angolo notevole, e fa vedere che a sen $x + b$ cos x è una sinusoide: è il punto di vista che useremo nel capitolo 5. Le formule parametriche sono un procedimento *analitico* e meccanico, che funziona sempre, al prezzo di calcoli più lunghi e del controllo di $x = \pi + 2k\pi$. Il metodo grafico è il più *geometrico*: trasforma l'equazione in un problema di intersezione fra una retta e una circonferenza, e rende evidente

perché le soluzioni possono essere due, una o nessuna. È un buon esempio di come lo stesso problema si possa affrontare con un approccio sintetico e con uno analitico.

IN SINTESI

Equazione lineare a sen $x + b$ cos $x = c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

- Se $c = 0$: $\operatorname{tg} x = -\dfrac{b}{a}$.
- È risolubile se e solo se $c^2 \leq a^2 + b^2$.
- **Angolo aggiunto:** $a \operatorname{sen} x + b \cos x = R \operatorname{sen}(x + \varphi)$, con $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{a}{R}$, $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{R}$.
- **Formule parametriche:** $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; controllare a parte $x = \pi + 2k\pi$.
- **Metodo grafico:** $X = \cos x$, $Y = \operatorname{sen} x$; intersecare la retta $bX + aY = c$ con la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$.

3.4 Equazioni omogenee e altri tipi

3.4.1 Equazioni omogenee di secondo grado

Un'**equazione omogenea di secondo grado** in seno e coseno ha la forma

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

in cui ogni termine ha grado complessivo 2 in sen x e cos x. Se $a \neq 0$, i valori con $\cos x = 0$ non sono soluzioni: per essi $\operatorname{sen}^2 x = 1$ e l'equazione si ridurrebbe a $a = 0$. Possiamo allora dividere entrambi i membri per $\cos^2 x \neq 0$ e ottenere un'equazione di secondo grado nella tangente:

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Per esempio $\operatorname{sen}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ diventa $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$, cioè $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$, con le soluzioni $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se invece $a = 0$ non si divide: si raccoglie cos x. Così sen x cos $x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ diventa cos x (sen $x - \sqrt{3}$ cos x) $= 0$, e dà cos $x = 0$, cioè $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, oppure tg $x = \sqrt{3}$, cioè $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. Dividendo per $\cos^2 x$ avremmo perso la prima famiglia.

3.4.2 Equazioni riconducibili a omogenee

Un'equazione come $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 1$ non è omogenea, perché il termine noto ha grado zero. Ma una costante d si può scrivere come $d(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$, e l'equazione diventa omogenea:

$\text{sen}^2x + \text{sen}\,x\cos x = \text{sen}^2x + \cos^2x$, cioè $\cos x\,(\text{sen}\,x - \cos x) = 0$, con le soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Un'equazione di questo tipo si dice **riconducibile a omogenea**.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $\text{sen}^2x + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x - \cos^2x = 2$ in due modi.

Riconducendo a omogenea. Scriviamo $2 = 2\text{sen}^2x + 2\cos^2x$ e portiamo tutto al primo membro:

$$-\text{sen}^2x + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x - 3\cos^2x = 0 \iff \text{sen}^2x - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x + 3\cos^2x = 0$$

Il coefficiente di sen^2x non è nullo, quindi $\cos x = 0$ non dà soluzioni e possiamo dividere per $\cos^2x$: $\text{tg}^2x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}\,x + 3 = 0$, cioè $(\text{tg}\,x - \sqrt{3})^2 = 0$. La soluzione $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ è doppia:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Con le formule di duplicazione. Poiché $\text{sen}^2x - \cos^2x = -\cos 2x$ e $2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x$, l'equazione è $\sqrt{3}\,\text{sen}\,2x - \cos 2x = 2$, lineare nell'angolo $2x$. Con l'angolo aggiunto $(R = 2,\ \varphi = -\frac{\pi}{6})$: $2\,\text{sen}(2x - \frac{\pi}{6}) = 2$, cioè $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Il valore 2 è il massimo del primo membro: per questo le soluzioni formano una sola famiglia, come nel caso di una retta tangente alla circonferenza.

3.4.3 Equazioni con le funzioni inverse

Nelle **equazioni con le funzioni inverse** l'incognita compare nell'argomento di arcsen, arccos o arctg. Le più semplici si risolvono applicando la funzione diretta, dopo aver controllato che il secondo membro stia nell'immagine della funzione inversa. Per esempio $\text{arcsen}\,x = \frac{\pi}{6}$ dà $x = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, perché $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; invece $\text{arcsen}\,x = \frac{2\pi}{3}$ è impossibile, perché l'arcoseno non supera mai $\frac{\pi}{2}$. Allo stesso modo $2\,\text{arctg}\,x = \frac{\pi}{2}$ dà $\text{arctg}\,x = \frac{\pi}{4}$, cioè $x = 1$, e $\arccos x = \frac{3\pi}{4}$ dà $x = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

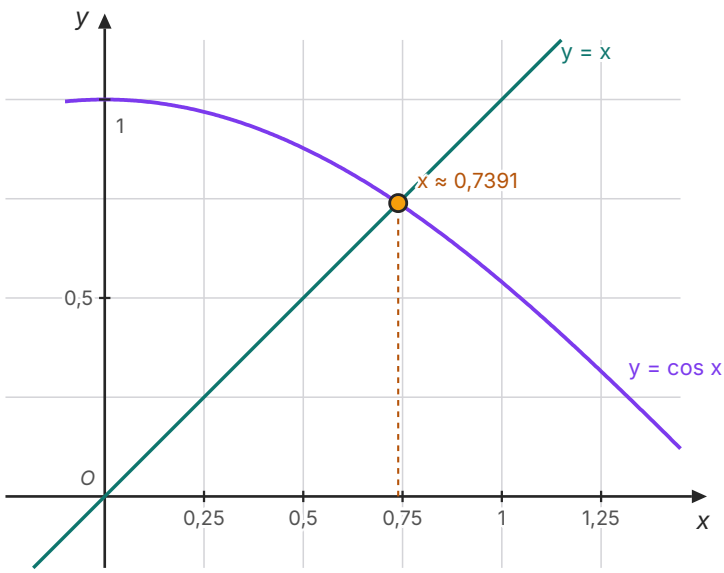
3.4.4 Sistemi di equazioni goniometriche

Un **sistema goniometrico** contiene due o più incognite angolari. Ci limitiamo a un esempio, in cui una delle equazioni è lineare negli angoli: due angoli x e y sono complementari e la somma dei loro seni vale $\sqrt{2}$. Il sistema è $x + y = \frac{\pi}{2}$, $\text{sen}\,x + \text{sen}\,y = \sqrt{2}$. Sostituendo $y = \frac{\pi}{2} - x$ nella seconda equazione si ha $\text{sen}\,y = \cos x$, quindi $\text{sen}\,x + \cos x = \sqrt{2}$. Con l'angolo aggiunto

$\sqrt{2}\,\text{sen}(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, cioè $\text{sen}(x+\frac{\pi}{4})=1$: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{4}-2k\pi$. Se x e y sono angoli di una figura, quindi compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, l'unica soluzione è $x=y=\frac{\pi}{4}$.

3.5 Equazioni che le formule non risolvono

Non tutte le equazioni si riconducono a equazioni elementari. Nell'equazione $\cos x = x$ l'incognita compare sia dentro sia fuori da una funzione goniometrica, e nessuna delle trasformazioni viste finora la elimina: non esiste una formula che dia la soluzione con un numero finito di operazioni elementari e di funzioni inverse. È uno dei casi in cui, come dicono le *Indicazioni nazionali*, entra in gioco il **calcolo approssimato**, che hai già incontrato in *Matematica 3* con le equazioni irrazionali. Una **soluzione approssimata** con un errore dichiarato è una risposta legittima, non un ripiego.



Intervalli della bisezione

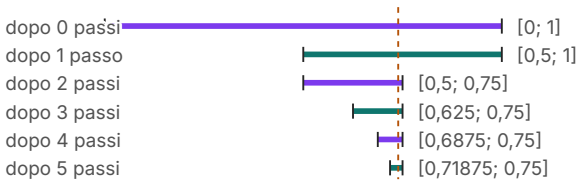


Figura 3.5 L'equazione $\cos x = x$. In alto, i grafici di $y = \cos x$ e $y = x$ si incontrano in un solo punto, di ascissa $x \approx 0{,}7391$. In basso, gli intervalli dei primi cinque passi della bisezione, a partire da [0; 1]: ciascuno è la metà del precedente e contiene sempre la soluzione (linea tratteggiata). Grafici calcolati dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi.

3.5.1 Quante soluzioni? Il grafico

Per prima cosa si capisce quante soluzioni ci sono e dove stanno, disegnando nello stesso piano $y = \cos x$ e $y = x$ (Figura 3.5). Il grafico suggerisce un'unica intersezione, poco a sinistra di $x = 0{,}75$, e un ragionamento lo conferma. Poiché $|\cos x| \le 1$, una soluzione deve stare in $[-1; 1]$. Per $-1 \le x < 0$ si ha $\cos x > 0 > x$: nessuna soluzione. Su $[0; 1]$ la funzione $f(x) = \cos x - x$ è *strettamente decrescente*, perché è la somma di due funzioni decrescenti, $\cos x$ e $-x$; quindi si annulla al più una volta. Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = \cos 1 - 1 \approx -0{,}4597 < 0$: il grafico di f, che non ha salti, passa dai valori positivi a quelli negativi e dunque attraversa l'asse x. L'intervallo $[0; 1]$ è un **intervallo di separazione**: contiene una e una sola soluzione.

3.5.2 Il metodo di bisezione

Il **metodo di bisezione** restringe l'intervallo di separazione, dimezzandolo a ogni passo. Si calcola f nel punto medio m dell'intervallo $[a; b]$: se $f(m)$ ha il segno di $f(a)$, la soluzione sta in $[m; b]$, altrimenti in $[a; m]$. La Tabella 3.1 riporta i primi passi per $f(x) = \cos x - x$; ricorda di impostare la calcolatrice in radianti.

Tabella 3.1 Bisezione per $\cos x = x$ a partire da $[0; 1]$: a ogni passo si tiene la metà dell'intervallo agli estremi della quale $f(x) = \cos x - x$ ha segni opposti.

Passo	a	b	punto medio m	$f(m)$
1	0	1	0,5	+0,3776
2	0,5	1	0,75	−0,0183
3	0,5	0,75	0,625	+0,1860
4	0,625	0,75	0,6875	+0,0853
5	0,6875	0,75	0,71875	+0,0339
6	0,71875	0,75	0,734375	+0,0079
7	0,734375	0,75	0,7421875	−0,0052
8	0,734375	0,7421875	0,7382812	+0,0013
9	0,7382812	0,7421875	0,7402344	−0,0019
10	0,7382812	0,7402344	0,7392578	−0,0003

Dopo n passi l'intervallo è lungo $\dfrac{1}{2^n}$, e il suo punto medio dista dalla soluzione al più $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Dopo 10 passi la soluzione sta in $[0{,}73828; 0{,}73926]$: il punto medio 0,7388 la approssima con un

errore minore di $\frac{1}{2^{11}} < 0{,}0005$. Proseguendo, per esempio con un foglio di calcolo (esercizio 31), si arriva a

$$x \approx 0{,}7391$$

APPROFONDIMENTO · L'EQUAZIONE DI KEPLERO

Nel 1609, nell'*Astronomia nova*, Keplero pubblicò le sue prime due leggi sul moto dei pianeti, ricavate dallo studio dell'orbita di Marte. Per sapere dove si trova un pianeta in un dato istante occorre risolvere un'equazione che oggi chiamiamo **equazione di Keplero**:

$$E - e \operatorname{sen} E = M$$

Qui e, compreso fra 0 e 1, è l'eccentricità dell'orbita, M è un angolo che cresce in modo proporzionale al tempo, ed E è l'incognita, un angolo da cui si ricava la posizione del pianeta sull'ellisse. Come cos $x = x$, è un'equazione in cui l'incognita compare dentro e fuori dal seno, e nessuna formula elementare la risolve: da allora la si risolve con metodi approssimati.

Con i valori, scelti per esercizio, $e = 0{,}5$ e $M = 1$, la funzione $g(E) = E - 0{,}5 \operatorname{sen} E - 1$ vale circa $-0{,}4207$ per $E = 1$ e circa $+0{,}0013$ per $E = 1{,}5$: la bisezione su $[1; 1{,}5]$ porta a $E \approx 1{,}4987$.

Lo stesso procedimento vale per ogni equazione di questo tipo. In $\operatorname{sen} x = \frac{x}{2}$, per esempio, il grafico mostra tre soluzioni: $x = 0$ e due soluzioni opposte, perché i due membri sono funzioni dispari; quella positiva sta fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2\pi}{3}$ e si approssima con la bisezione (esercizio 24).

3.6 Problemi con un angolo incognito

Nei problemi di geometria e di fisica l'angolo incognito rappresenta una grandezza concreta, e non tutte le soluzioni dell'equazione hanno senso. Il procedimento è sempre lo stesso: si sceglie l'incognita e si scrivono le sue **limitazioni**, cioè i valori che può assumere nella figura o nella situazione; si esprimono le grandezze in funzione dell'incognita e si imposta l'equazione; la si risolve; si tengono solo le **soluzioni accettabili**, quelle che rispettano le limitazioni, e si verifica il risultato.

3.6.1 Oscillazioni e traiettorie

Un corpo appeso a una molla, se lo si sposta dall'equilibrio e lo si lascia andare, oscilla con un *moto armonico*, che studieremo nel capitolo 5. Supponiamo che la sua posizione, misurata in centimetri dal centro di oscillazione, sia $s(t) = 10 \cos(\pi t)$, con t in secondi: il corpo parte dall'estremo $s = 10$ e ritorna allo stesso punto dopo il periodo $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s. In quali istanti si trova a

metà strada fra il centro e l'estremo positivo, cioè in $s = 5$? Deve essere $\cos(\pi t) = \frac{1}{2}$, quindi $\pi t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $t = \pm\frac{1}{3} + 2k$. Con $t \geq 0$ gli istanti sono $\frac{1}{3}$ s, $\frac{5}{3}$ s, $\frac{7}{3}$ s, $\frac{11}{3}$ s, ...: due in ogni periodo, uno all'andata e uno al ritorno.

COLLEGAMENTI

Fisica: la gittata di un proiettile. Un corpo lanciato dal suolo con velocità v e inclinazione α sull'orizzontale, trascurando la resistenza dell'aria, ricade a una distanza, detta **gittata**,

$$R = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

con $g \approx 9{,}81$ m/s^2. Con $v = 20$ m/s la gittata massima, per $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ cioè $\alpha = 45°$, è $\frac{400}{9{,}81}$ m $\approx 40{,}8$ m. Per ottenere $R = 30$ m serve $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{30 \cdot 9{,}81}{400} \approx 0{,}7358$. Con $0° < \alpha < 90°$ si ha $0° < 2\alpha < 180°$ e l'equazione ha due soluzioni: $2\alpha \approx 47{,}37°$ oppure $2\alpha \approx 180° - 47{,}37° = 132{,}63°$, cioè

$$\alpha \approx 23{,}69° \vee \alpha \approx 66{,}31°$$

I due angoli sono complementari: $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(180° - 2\alpha) = \operatorname{sen} 2(90° - \alpha)$. Un tiro «teso» e un tiro «a campanile» arrivano nello stesso punto, ma il secondo impiega più tempo e sale molto più in alto. Chi gioca a calcio lo sa per esperienza: lo stesso punto si raggiunge con un tiro teso o con un pallonetto.

3.6.2 Un rettangolo inscritto in una semicirconferenza

In una semicirconferenza di centro O e raggio r è inscritto un rettangolo ABCD, con il lato AB sul diametro e i vertici C e D sulla semicirconferenza. Determiniamo l'angolo $x = \angle\mathrm{BOC}$ in modo che il perimetro del rettangolo sia $4r$. **Limitazioni:** perché il rettangolo non degeneri, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Nel triangolo rettangolo OBC l'ipotenusa OC è un raggio, quindi $\mathrm{OB} = r\cos x$ e $\mathrm{BC} = r \operatorname{sen} x$ (Figura 3.6). Per la simmetria della figura rispetto alla perpendicolare al diametro in O, $\mathrm{AB} = 2r\cos x$. Il perimetro è

$$p(x) = 2 \cdot 2r\cos x + 2r \operatorname{sen} x = 4r\cos x + 2r \operatorname{sen} x$$

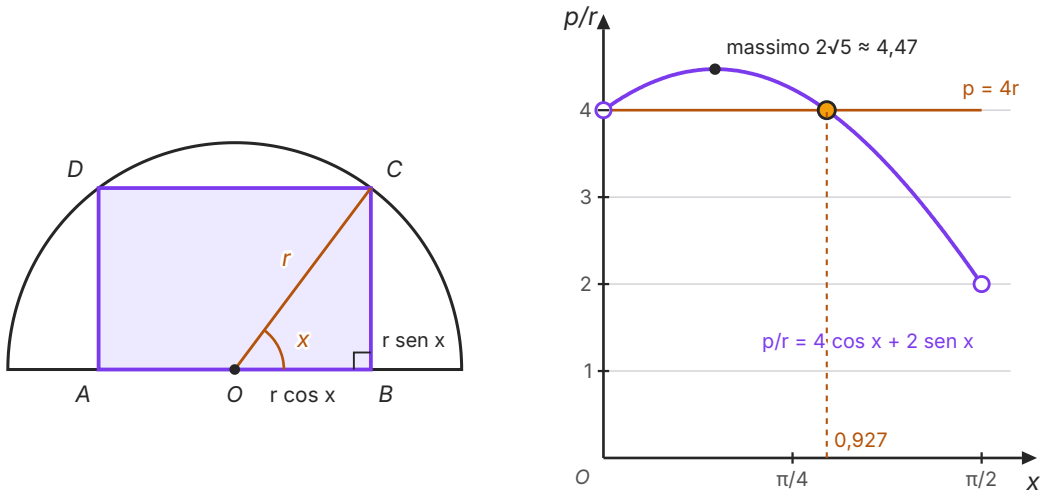


Figura 3.6 A sinistra, il rettangolo ABCD inscritto nella semicirconferenza di raggio r, per $x = 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} \approx 0{,}927$. A destra, $p/r = 4\cos x + 2\,\text{sen}\,x$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (estremi esclusi): la retta $p = 4r$ incontra la curva in un solo punto accettabile. Grafico calcolato dall'equazione.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo il problema: troviamo l'angolo x, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, per cui il perimetro del rettangolo è $4r$.

Equazione. $4r\cos x + 2r\,\text{sen}\,x = 4r$, cioè, dividendo per $2r$, $2\cos x + \text{sen}\,x = 2$: un'equazione lineare. Usiamo le formule parametriche. Il valore $x = \pi$ è fuori dalle limitazioni e non va controllato; con $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$:

$$2(1 - t^2) + 2t = 2(1 + t^2) \iff 4t^2 - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{1}{2}$$

Soluzioni accettabili. $t = 0$ dà $x = 0$, che non è accettabile: è il rettangolo degenere, il diametro percorso due volte, che ha effettivamente «perimetro» $4r$. Resta $\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, da cui $\cos x = \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = \frac{3}{5}$ e $\text{sen}\,x = \frac{1}{1 + 1/4} = \frac{4}{5}$; quindi $x = 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{2} \approx 0{,}9273$, circa 53,13°.

Verifica. La base misura $\frac{6}{5}r$, l'altezza $\frac{4}{5}r$, e il perimetro $\frac{12}{5}r + \frac{8}{5}r = 4r$.

Il grafico a destra della Figura 3.6 dice di più. Il perimetro, scritto con l'angolo aggiunto, è $p(x) = 2\sqrt{5}\,r\,\text{sen}(x + \varphi)$ con $\text{tg}\,\varphi = 2$: il suo valore massimo è $2\sqrt{5}\,r \approx 4{,}47r$, raggiunto per

$x = \text{arctg}\ \frac{1}{2}$. Se si chiedesse un perimetro fra $4r$ e $2\sqrt{5}\,r$ le soluzioni accettabili sarebbero due; un perimetro maggiore di $2\sqrt{5}\,r$ sarebbe impossibile. È il genere di discussione che farai nell'esercizio 30 e che riprenderemo nel capitolo 6.

SINTESI

- Un'equazione goniometrica ha in generale infinite soluzioni, a famiglie $x = x_0 + 2k\pi$ (o $+ k\pi$): risolverla significa descriverle tutte, scrivendo ogni volta $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen}\ x = m$ è risolubile se e solo se $|m| \le 1$: $x = \text{arcsen}\ m + 2k\pi \vee x = \pi - \text{arcsen}\ m + 2k\pi$.
- $\cos x = m$ è risolubile se e solo se $|m| \le 1$: $x = \pm\ \text{arccos}\ m + 2k\pi$. $\text{tg}\ x = m$ è sempre risolubile: $x = \text{arctg}\ m + k\pi$.
- La calcolatrice dà solo il valore principale: l'altra famiglia va scritta a mano. Le soluzioni in un intervallo si trovano dando a k i valori interi opportuni.
- $\text{sen}\ f = \text{sen}\ g \iff f = g + 2k\pi \vee f = \pi - g + 2k\pi$; $\cos f = \cos g \iff f = \pm\, g + 2k\pi$; $\text{tg}\ f = \text{tg}\ g \iff f = g + k\pi$ (con le C.E.). Se l'argomento è nx, anche il periodo si divide per n.
- Si scompone in fattori e non si divide per un'espressione che contiene l'incognita. Con un'incognita ausiliaria $t = \text{sen}\ x$ o $t = \cos x$ si scartano i valori con $|t| > 1$.
- $a\ \text{sen}\ x + b \cos x = c$ è risolubile se e solo se $c^2 \le a^2 + b^2$; si risolve con l'angolo aggiunto, con le formule parametriche (controllando $x = \pi + 2k\pi$) o intersecando la retta $bX + aY = c$ con la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$.
- Un'equazione omogenea di secondo grado con $a \neq 0$ si divide per $\cos^2 x$ e diventa di secondo grado in $\text{tg}\ x$; se $a = 0$ si raccoglie $\cos x$. Un termine noto d si scrive $d(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$.
- Nelle equazioni con le funzioni inverse si controlla che il secondo membro stia nell'immagine di arcsen, arccos o arctg.
- Un'equazione come $\cos x = x$ non si risolve con le formule: si localizza la soluzione con un grafico, si restringe l'intervallo con la bisezione e si dichiara l'errore. $\cos x = x$ ha l'unica soluzione $x \approx 0{,}7391$.
- Nei problemi si scrivono le limitazioni dell'incognita e si tengono solo le soluzioni accettabili.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Le soluzioni di sen $x = -1$ sono:

   A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

   B. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

   C. $x = \pi + 2k\pi$

   D. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. ● L'equazione cos $x = m$ ha soluzioni se e solo se:

   A. $m \geq 0$

   B. $-1 < m < 1$

   C. $-1 \leq m \leq 1$

   D. per ogni m reale

3. ● Le soluzioni di tg $x = -\sqrt{3}$ sono:

   A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

   B. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

   C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

   D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

4. ● Quante soluzioni ha l'equazione sen $x = 0{,}8$ nell'intervallo $[0; 4\pi]$?

   A. 1

   B. 2

   C. infinite

   D. 4

5. ●● Risolvendo a sen $x + b$ cos $x = c$ con le formule parametriche, bisogna controllare a parte i valori:

   A. $x = 2k\pi$

   B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

   C. $x = \pi + 2k\pi$

   D. $x = k\pi$

6. ●● L'equazione $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = c$ ha soluzioni se e solo se:
   A. $|c| \leq 1$
   B. $|c| \leq 5$
   C. $|c| \leq 7$
   D. $c^2 \leq 7$

7. ●● Nell'equazione $\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ si può dividere per $\cos^2 x$ perché:
   A. $\cos^2 x$ è positivo per ogni x
   B. dividere per un'espressione non fa mai perdere soluzioni
   C. le soluzioni con $\cos x = 0$ si ritrovano poi nella tangente
   D. per $\cos x = 0$ l'equazione diventerebbe $\operatorname{sen}^2 x = 0$, incompatibile con $\cos x = 0$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) L'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ equivale a $x = \frac{\pi}{6}$. b) Le soluzioni di $\cos x = 0$ sono $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. c) L'equazione $\operatorname{tg} x = m$ ha soluzioni per ogni m reale. d) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ ha le stesse soluzioni di $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$. e) L'equazione $\operatorname{arcsen} x = \frac{2\pi}{3}$ ha la soluzione $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. ● Completa. Se $|m| < 1$, le soluzioni di $\operatorname{sen} x = m$ sono $x =$ _____ $+ 2k\pi$ e $x =$ _____ $+ 2k\pi$; quelle di $\cos x = m$ sono $x =$ _____ $+ 2k\pi$; quelle di $\operatorname{tg} x = m$, per ogni m, sono $x =$ _____. L'equazione $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ ha soluzioni se e solo se _____.

Calcolare

10. ● Risolvi: a) $2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$; b) $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$; c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$; d) $\operatorname{sen} x = 0$.

11. ● Risolvi con la calcolatrice, in radianti con quattro cifre decimali: a) $\operatorname{sen} x = 0{,}6$; b) $\cos x = -0{,}25$; c) $\operatorname{tg} x = 3$.

12. ● Trova le soluzioni nell'intervallo indicato: a) $\cos x = \frac{1}{2}$ in $[0; 4\pi]$; b) $\operatorname{tg} x = -1$ in $[-\pi; \pi]$; c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $[0°; 720°]$.

13. ●● Risolvi: a) $\operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$; c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$; d) $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -1$.

14. ●● Risolvi: a) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$; b) $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{3})$; c) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$; d) $\operatorname{sen} 2x = \cos 3x$.

15. ●● Risolvi scomponendo in fattori: a) $2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 0$; b) $\operatorname{tg} x \, (2 \cos x - 1) = 0$; c) $\operatorname{sen} 2x = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$.

16. ●● Risolvi: a) $2\,\text{sen}^2x + \text{sen}\,x - 1 = 0$; b) $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$; c) $\text{tg}^2x - (1 + \sqrt{3})\,\text{tg}\,x + \sqrt{3} = 0$; d) $2\,\text{sen}^2x - 5\,\text{sen}\,x + 2 = 0$.

17. ●● Risolvi riducendo a una sola funzione di un solo angolo: a) $2\cos^2x + \text{sen}\,x - 1 = 0$; b) $\cos 2x + 3\,\text{sen}\,x - 2 = 0$; c) $\cos 2x = \cos x$ (in due modi); d) $\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = 0$.

18. ●● Risolvi le equazioni lineari: a) $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x = 1$; b) $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 3$; d) $\text{sen}\,x + \cos x = 0$; e) $\text{sen}\,x + \cos x = 1$ con il metodo grafico, disegnando la retta e la circonferenza.

19. ●● Risolvi le equazioni omogenee o riconducibili a omogenee: a) $\text{sen}^2x - 4\,\text{sen}\,x\cos x + 3\cos^2x = 0$; b) $\sqrt{3}\,\text{sen}^2x - \text{sen}\,x\cos x = 0$; c) $\text{sen}^2x + 2\,\text{sen}\,x\cos x - 3\cos^2x = 0$; d) $\cos^2x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x = 1$.

20. ●● Risolvi: a) $\text{arcsen}\,x = -\frac{\pi}{4}$; b) $\arccos(2x - 1) = \frac{\pi}{3}$; c) $3\,\text{arctg}\,x = \pi$; d) $\arccos x = \frac{4\pi}{3}$; e) $\text{arcsen}\,x = \arccos x$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Usando la formula di prostaferesi $\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}$, dimostra che $\cos f = \cos g \iff f = \pm g + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

22. ●● Spiega in due modi, con l'angolo aggiunto e con il metodo grafico, perché l'equazione $a\,\text{sen}\,x + b\cos x = c$ ha soluzioni se e solo se $c^2 \leq a^2 + b^2$.

23. ●● *Trova l'errore.* Per risolvere $\text{sen}\,x + \cos x = 1$, Anna eleva al quadrato i due membri: «$\text{sen}^2x + 2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos^2x = 1$, quindi $\text{sen}\,2x = 0$ e $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$». Dov'è l'errore? Qual è la soluzione corretta?

24. ●●● Spiega con un grafico perché l'equazione $\text{sen}\,x = \frac{x}{2}$ ha esattamente tre soluzioni. Dimostra che la soluzione positiva sta fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2\pi}{3}$, calcolando il segno di $f(x) = \text{sen}\,x - \frac{x}{2}$ agli estremi, e approssimala con quattro passi di bisezione, dichiarando l'errore.

25. ●●● Dimostra che, con $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, l'equazione $a\,\text{sen}\,x + b\cos x = c$ diventa $(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$, e che i valori $x = \pi + 2k\pi$ sono soluzioni se e solo se $b + c = 0$, cioè proprio quando l'equazione in t si abbassa di grado.

Problemi

26. ● La posizione di un corpo che oscilla, in centimetri, è $s(t) = 8\cos(\frac{\pi}{2}t)$, con t in secondi. a) Qual è il periodo dell'oscillazione? b) In quali istanti dell'intervallo [0; 8] s il corpo si trova in $s = 4$ cm? c) In quali istanti dello stesso intervallo si trova nell'estremo negativo $s = -8$ cm?

27. ●● Un pallone viene calciato con velocità $v = 15$ m/s. Trascurando la resistenza dell'aria e usando la formula della gittata $R = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$, con $g = 9{,}81$ m/s^2: a) calcola la gittata massima; b) trova gli angoli di tiro per cui il pallone ricade a 18 m, arrotondati al centesimo di grado.

28. ●● In una semicirconferenza di raggio r è inscritto un rettangolo, come nell'esempio svolto del paragrafo «Un rettangolo inscritto in una semicirconferenza». Determina l'angolo x per cui il perimetro vale $(2 + \sqrt{3})r$ e calcola i lati del rettangolo.

29. ●● Una ruota panoramica (modello inventato) porta una cabina la cui altezza dal suolo, in metri, è $h(t) = 20 - 18\cos(\frac{\pi}{6}t)$, con t in minuti. a) Qual è l'altezza minima, e qual è quella massima? Quanto dura un giro? b) In quali istanti del primo giro la cabina si trova a 29 m di altezza?

30. ●●● Nella situazione dell'esempio svolto del rettangolo inscritto nella semicirconferenza, il perimetro deve valere $p = kr$, con $k > 0$. a) Discuti, con il grafico della Figura 3.6, il numero delle soluzioni accettabili al variare di k. b) Per $k = 4{,}4$ trova le soluzioni, in gradi con due decimali.

Con il computer

31. ● In un foglio di calcolo, imposta la bisezione per $\cos x = x$ su [0; 1]: colonne a, b, $m = \frac{a+b}{2}$, $f(a)$, $f(m)$, e nella riga successiva i nuovi estremi scelti con una funzione SE sul segno di $f(a) \cdot f(m)$. a) Dopo quanti passi l'errore massimo $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa minore di 10^{-6}? b) Qual è la soluzione con sei cifre decimali?

32. ● Con un software di geometria dinamica, disegna $y = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$ e la retta $y = c$, con c comandato da uno slider. a) Per quali valori di c ci sono intersezioni? b) Per $c = 2$, leggi le soluzioni in $[0; 2\pi]$ con due decimali e confrontale con quelle che ottieni con l'angolo aggiunto.

Verso la verifica

33. ●● Risolvi $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$ e scrivi le soluzioni nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

34. ●● Risolvi $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ con l'angolo aggiunto e controlla il risultato con le formule parametriche.

35. ●●● *Sfida.* Risolvi l'equazione $\operatorname{sen} x + \cos x = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$. (Suggerimento: porta tutto al primo membro e prova a scomporre.)

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: una storia della trigonometria, dai calcoli degli astronomi antichi alle funzioni goniometriche moderne.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: scegliere l'incognita, scrivere le condizioni e controllare il risultato, i passi dei problemi con un angolo incognito.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le funzioni continue e l'esistenza delle soluzioni di un'equazione, il fondamento del metodo di bisezione.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Keplero e l'astronomia del Seicento.

Glossario del capitolo

Angolo aggiunto
L'angolo φ per cui $a \operatorname{sen} x + b \cos x = R \operatorname{sen}(x + \varphi)$, con $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{R}$.

Bisezione (metodo di)
Metodo di approssimazione che dimezza a ogni passo un intervallo di separazione, tenendo la metà agli estremi della quale la funzione ha segni opposti.

Condizione di risolubilità
Per $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$: $c^2 \leq a^2 + b^2$. Per $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = m$: $|m| \leq 1$.

Equazione di Keplero
L'equazione $E - e \operatorname{sen} E = M$ del moto dei pianeti, risolubile solo in modo approssimato.

Equazione elementare
Ciascuna delle equazioni $\operatorname{sen} x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$.

Equazione goniometrica
Equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di almeno una funzione goniometrica.

Equazione lineare in seno e coseno
Equazione della forma $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$.

Equazione omogenea di secondo grado
Equazione $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$, in cui ogni termine ha grado 2 in seno e coseno.

Equazione riconducibile a omogenea
Equazione che diventa omogenea scrivendo un termine noto d come $d(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$.

Famiglia di soluzioni
Insieme di soluzioni della forma $x_0 + 2k\pi$ (oppure $x_0 + k\pi$), con $k \in \mathbb{Z}$.

Gittata
Distanza orizzontale percorsa da un proiettile che parte dal suolo e vi ricade; senza attrito, $R = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$.

Incognita ausiliaria
Nuova incognita, come $t = \operatorname{sen} x$, introdotta per trasformare un'equazione goniometrica in una algebrica.

Intervallo di separazione
Intervallo che contiene una e una sola soluzione di un'equazione.

Limitazioni
In un problema, i valori che l'incognita può assumere perché la figura o la situazione abbia senso.

Sistema goniometrico
Sistema di equazioni in cui almeno una equazione è goniometrica.

Soluzione accettabile
In un problema, soluzione dell'equazione che rispetta le limitazioni dell'incognita.

Soluzione approssimata
Numero che differisce dalla soluzione esatta meno di un errore massimo dichiarato.

Soluzioni

1. B. sen $x = -1$ corrisponde al solo punto $(0; -1)$: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, cioè anche $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. La A contiene anche $x = \frac{\pi}{2}$, dove il seno vale 1.

2. C. Il coseno assume tutti e soli i valori di $[-1; 1]$, estremi compresi.

3. A. $\text{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, quindi $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, che è la stessa famiglia di $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. La B perde metà delle soluzioni.

4. D. Due soluzioni in ogni periodo $[0; 2\pi[$ e due in $[2\pi; 4\pi[$: circa 0,9273; 2,2143; 7,2105; 8,4975.

5. C. Le formule parametriche richiedono che $\text{tg}\,\frac{x}{2}$ esista, cioè $x \neq \pi + 2k\pi$.

6. B. $R = \sqrt{9 + 16} = 5$: deve essere $c^2 \leq 25$.

7. D. Se $\cos x = 0$, allora $\text{sen}^2 x = 1$ e il primo membro vale 1, non 0: nessuna soluzione si perde dividendo.

8. a) Falso: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. b) Vero. c) Vero. d) Falso: $\text{sen}\,2x = \frac{1}{2}$ dà $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, mentre per esempio $x = \frac{\pi}{12}$ non risolve $\text{sen}\,x = \frac{1}{4}$ ($\text{sen}\,\frac{\pi}{12} \approx 0{,}2588$). e) Falso: l'immagine di arcsen è $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e $\frac{2\pi}{3}$ ne è fuori, quindi l'equazione è impossibile.

9. $\text{arcsen}\,m$; $\pi - \text{arcsen}\,m$; $\pm\,\text{arccos}\,m$; $\text{arctg}\,m + k\pi$; $c^2 \leq a^2 + b^2$.

10. a) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \pm\,\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. c) $\text{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. d) $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ in tutti i casi).

11. a) $\text{arcsen}\,0{,}6 \approx 0{,}6435$: $x \approx 0{,}6435 + 2k\pi \vee x \approx 2{,}4981 + 2k\pi$. b) $\arccos(-0{,}25) \approx 1{,}8235$: $x \approx \pm\,1{,}8235 + 2k\pi$. c) $\text{arctg}\,3 \approx 1{,}2490$: $x \approx 1{,}2490 + k\pi$.

12. a) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$. b) $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. c) Le famiglie sono $x = 225° + k \cdot 360°$ e $x = 315° + k \cdot 360°$: 225°, 315°, 585°, 675°.

13. a) $3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$. b) $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. c) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. d) $x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

14. a) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. b) $2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ dà $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ dà $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$. c) C.E.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. $3x = x + k\pi$ dà $x = k\frac{\pi}{2}$; i valori con k dispari violano le C.E., restano $x = k\pi$. d) $\cos 3x = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - 3x)$: $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ dà $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$; $2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$ dà $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

15. a) $\text{sen}\,x\,(2\cos x + 1) = 0$: $x = k\pi \vee x = \pm\,\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. b) C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\text{tg}\,x = 0$ o $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = k\pi \vee x = \pm\,\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, tutte accettabili. c) $\text{sen}\,x\,(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$: $x = k\pi \vee x = \pm\,\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

16. a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} x = -1$:
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. b)
$\cos x = 1$ o $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = 2k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. c)
$\operatorname{tg} x = 1$ o $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. d) $t = 2$ (scartato) o $t = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

17. a) $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$:
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. b)
$2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$:
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. c) Con $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: $\cos x = 1$ o $\cos x = -\frac{1}{2}$,
$x = 2k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; con $\cos f = \cos g$:
$2x = \pm x + 2k\pi$, cioè $x = 2k\pi \vee x = k\frac{2\pi}{3}$. Le due scritture coincidono: $x = k\frac{2\pi}{3}$. d) Prostaferesi:
$2\operatorname{sen} 2x \cos x = 0$; $\operatorname{sen} 2x = 0$ dà $x = k\frac{\pi}{2}$, che comprende già $\cos x = 0$: $x = k\frac{\pi}{2}$.

18. a) $2\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{6}) = 1$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$.
b) $\sqrt{2}\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$. c) Impossibile:
$c^2 = 9 > a^2 + b^2 = 4$. d) $c = 0$: $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. e) La retta $X + Y = 1$ taglia la circonferenza in $(1; 0)$ e $(0; 1)$: $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

19. a) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$:
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$ ($\operatorname{arctg} 3 \approx 1{,}2490$). b)
$a = \sqrt{3} \neq 0$ ma conviene raccogliere:
$\operatorname{sen} x\,(\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x) = 0$, $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. c)
$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$.
d) $\cos^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$:
$\operatorname{sen} x\,(\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$, $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

20. a) $x = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $2x - 1 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ (e $2x - 1 \in [-1; 1]$). c) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$, $x = \sqrt{3}$. d) Impossibile: $\frac{4\pi}{3} > \pi$, fuori dall'immagine di arccos. e) Da $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ segue $\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. $\cos f - \cos g = -2\operatorname{sen}\frac{f+g}{2}\operatorname{sen}\frac{f-g}{2} = 0$ se e solo se $\operatorname{sen}\frac{f+g}{2} = 0$ oppure $\operatorname{sen}\frac{f-g}{2} = 0$, cioè $\frac{f+g}{2} = k\pi$ oppure $\frac{f-g}{2} = k\pi$: $f = -g + 2k\pi$ oppure $f = g + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. c.v.d.

22. *Traccia.* Angolo aggiunto: l'equazione equivale a $\operatorname{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{R}$ con $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, risolubile se e solo se $|c| \leq R$. Metodo grafico: la retta $bX + aY = c$ ha distanza $\frac{|c|}{R}$ dall'origine e incontra la circonferenza di raggio 1 se e solo se questa distanza è al più 1. In entrambi i casi la condizione è $c^2 \leq a^2 + b^2$.

23. Elevando al quadrato si risolve anche $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$: si aggiungono soluzioni estranee. Infatti $x = \pi$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ danno $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$. Verificando i quattro angoli di $[0; 2\pi[$ trovati (0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$) restano $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, che è la soluzione corretta (si ottiene anche con l'angolo aggiunto o con il metodo grafico).

24. *Traccia.* Poiché $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, una soluzione ha $|x| \leq 2$. $x = 0$ è soluzione. Su $]0; \frac{\pi}{2}]$ l'arco del grafico del seno sta sopra la corda che unisce $(0; 0)$ a $(\frac{\pi}{2}; 1)$, cioè $\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi}x > \frac{x}{2}$: nessuna soluzione. Su $[\frac{\pi}{2}; 2]$ il seno decresce e $\frac{x}{2}$ cresce, quindi c'è al più una soluzione; $f(\frac{\pi}{2}) \approx 0{,}2146 > 0$ e $f(\frac{2\pi}{3}) \approx -0{,}1812 < 0$, quindi ce n'è una in $]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}[$. Per simmetria (funzioni dispari) c'è la

soluzione opposta: in tutto tre. Bisezione: punto medio 1,8326 ($f > 0$), poi 1,9635 ($f < 0$), 1,8980 ($f < 0$), 1,8653 ($f > 0$): la soluzione sta in [1,8653; 1,8980], punto medio 1,8817 con errore minore di $\frac{\pi/6}{2^5} \approx 0{,}0164$. (Il valore è $x \approx 1{,}8955$.)

25. Sostituendo le formule parametriche e moltiplicando per $1 + t^2$: $2at + b(1 - t^2) = c(1 + t^2)$, cioè $(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$. Per $x = \pi + 2k\pi$ si ha $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = -1$: l'equazione diventa $-b = c$, cioè $b + c = 0$, che è esattamente la condizione perché il coefficiente di t^2 si annulli. c.v.d.

26. a) $T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ s. b) $\cos(\frac{\pi}{2}t) = \frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{2}t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $t = \pm\frac{2}{3} + 4k$; in [0; 8]: $t = \frac{2}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{14}{3}$, $\frac{22}{3}$ s. c) $\cos(\frac{\pi}{2}t) = -1$: $t = 2 + 4k$, cioè $t = 2$ s e $t = 6$ s.

27. a) $R_{\max} = \frac{v^2}{g} = \frac{225}{9{,}81}$ m $\approx 22{,}94$ m (per $\alpha = 45°$). b) $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{18 \cdot 9{,}81}{225} = 0{,}7848$: $2\alpha \approx 51{,}70°$ oppure $2\alpha \approx 128{,}30°$, cioè $\alpha \approx 25{,}85°$ oppure $\alpha \approx 64{,}15°$ (complementari).

28. $4\cos x + 2\operatorname{sen} x = 2 + \sqrt{3}$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (il valore $x = \pi$ è fuori dalle limitazioni). Con $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $4(1 - t^2) + 4t = (2 + \sqrt{3})(1 + t^2)$, cioè $(6 + \sqrt{3})t^2 - 4t + \sqrt{3} - 2 = 0$. Il prodotto delle radici è negativo: una sola radice positiva, $t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ (si verifica sostituendo), quindi $x = \frac{\pi}{3}$. I lati: base $2r\cos\frac{\pi}{3} = r$, altezza $r\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$; perimetro $2r + \sqrt{3}\,r$.

29. a) Il coseno varia fra -1 e 1: altezza minima $20 - 18 = 2$ m, massima $20 + 18 = 38$ m; periodo $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ minuti. b) $20 - 18\cos(\frac{\pi}{6}t) = 29$ dà $\cos(\frac{\pi}{6}t) = -\frac{1}{2}$: $\frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3}$ oppure $\frac{4\pi}{3}$, quindi $t = 4$ min e $t = 8$ min.

30. a) $p/r = 4\cos x + 2\operatorname{sen} x = 2\sqrt{5}\operatorname{sen}(x + \varphi)$ con $\operatorname{tg}\varphi = 2$: per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ cresce da 4 (escluso) al massimo $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ in $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, poi decresce fino a 2 (escluso). Quindi: nessuna soluzione per $k \le 2$ o $k > 2\sqrt{5}$; una per $2 < k \le 4$; due per $4 < k < 2\sqrt{5}$; una ($x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$) per $k = 2\sqrt{5}$. b) $2\cos x + \operatorname{sen} x = 2{,}2$; con $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $4{,}2t^2 - 2t + 0{,}2 = 0$, cioè $21t^2 - 10t + 1 = 0$, $t = \frac{1}{3}$ o $t = \frac{1}{7}$. Da $t = \frac{1}{3}$: $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \approx 36{,}87°$; da $t = \frac{1}{7}$: $\cos x = \frac{24}{25}$, $x \approx 16{,}26°$. Entrambe accettabili.

31. a) Serve $\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-6}$, cioè $2^{n+1} > 10^6$: $2^{19} = 524\,288$ non basta, $2^{20} = 1\,048\,576$ sì, quindi $n + 1 = 20$ e servono 19 passi. b) $x \approx 0{,}739085$.

32. a) Per $-5 \le c \le 5$ ($R = 5$). b) $x \approx 1{,}80$ e $x \approx 5{,}77$. Con l'angolo aggiunto: $5\operatorname{sen}(x + \varphi) = 2$, con $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5}$, $\varphi \approx 0{,}9273$; $x + \varphi \approx 0{,}4115$ o $x + \varphi \approx \pi - 0{,}4115 \approx 2{,}7301$, da cui $x \approx 1{,}8028$ e $x \approx -0{,}5158 + 2\pi \approx 5{,}7674$.

33. $1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$, cioè $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$: $\operatorname{sen} x = 1$ o $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$.

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; in $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.

34. $R = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$: $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, quindi $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$. Controllo: $x = \pi$ non è soluzione ($-\sqrt{3} \ne \sqrt{2}$); l'equazione in t è $(\sqrt{2} + \sqrt{3})t^2 - 2t + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$, con radici $t \approx 0{,}7673 = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}$ e $t \approx -0{,}1317 = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{24})$, che danno le stesse famiglie.

35. $\operatorname{sen} x + \cos x - 1 - \operatorname{sen} x\cos x = 0$ si scompone: $-(1 - \operatorname{sen} x)(1 - \cos x) = 0$. Quindi $\operatorname{sen} x = 1$ o

$\cos x = 1$: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (In alternativa, con $u = \operatorname{sen} x + \cos x$ e $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{u^2 - 1}{2}$ si trova $(u - 1)^2 = 0$, cioè $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.)