CAPITOLO

2

Le formule goniometriche

Una sola formula, quella del coseno della differenza: tutte le altre ne discendono come i rami da un tronco. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Dimostrare la formula del coseno della differenza e ricavarne le formule di addizione e sottrazione di seno, coseno e tangente.
2. Calcolare valori esatti delle funzioni goniometriche di angoli come 15°, 75° e 22,5°, e l'angolo tra due rette nel piano cartesiano.
3. Usare le formule di duplicazione, di bisezione e di linearizzazione, scegliendo il segno in base al quadrante.
4. Esprimere seno e coseno in funzione razionale di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ e interpretare le formule parametriche sulla circonferenza goniometrica.
5. Trasformare somme in prodotti e prodotti in somme con le formule di prostaferesi e di Werner.
6. Verificare identità e semplificare espressioni goniometriche, indicando le condizioni di esistenza.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Le formule di addizione e sottrazione 2
2.2 L'angolo tra due rette 8
2.3 Duplicazione e bisezione 11
2.4 Le formule parametriche 16
2.5 Prostaferesi, formule di Werner e identità 18

Matematica 4 · Parte I · Goniometria · versione 1.0
Capitolo 2: Le formule goniometriche · pagine 55–82 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 1 abbiamo esteso il seno, il coseno e la tangente a ogni numero reale e abbiamo imparato a ricondurre qualunque angolo al primo quadrante con gli archi associati. Conosciamo i valori esatti delle funzioni goniometriche per gli angoli notevoli: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ e i loro associati. Ma quanto vale, esattamente, il seno di $15°$? E quello di $75°$, che pure è la somma di due angoli notevoli, $45°$ e $30°$? La calcolatrice risponde $0{,}2588\ldots$ e $0{,}9659\ldots$: cifre corrette, che però non dicono da dove vengano questi numeri e non permettono di lavorarci in modo esatto.

Il primo impulso è «distribuire» il seno sulla somma, come si fa con la moltiplicazione. Basta una prova per vedere che non funziona: con $30°$ e $60°$ si avrebbe $\text{sen}\,90° = \text{sen}\,30° + \text{sen}\,60°$, cioè $1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}366$, che è falso. Il seno non è una funzione lineare, e nemmeno il coseno e la tangente. Per calcolare le funzioni goniometriche di una somma servono formule vere, e questo capitolo le ricava tutte. Ne dimostreremo una sola partendo dalla geometria, quella del coseno della differenza; tutte le altre (addizione, duplicazione, bisezione, formule parametriche, prostaferesi) ne discendono con pochi passaggi algebrici. Non sono quindi un elenco da imparare a memoria, ma una famiglia di cui conviene conoscere l'albero genealogico: chi sa ricavare una formula non la dimentica, e se la dimentica la ritrova in un minuto.

Queste formule servono ovunque compaiano angoli, rotazioni e oscillazioni: per calcolare l'angolo tra due strade su una mappa o tra due rette nel piano cartesiano, per scrivere le coordinate di un punto ruotato, per capire perché due diapason quasi uguali, suonati insieme, producono un suono che pulsa. Nei prossimi capitoli saranno lo strumento principale per risolvere equazioni e disequazioni goniometriche e per studiare le funzioni sinusoidali.

2.1 Le formule di addizione e sottrazione

2.1.1 Il coseno della differenza

Tutto parte da un fatto geometrico semplice: una rotazione attorno all'origine è un'isometria, cioè non cambia le distanze. Siano α e β due angoli qualsiasi e siano A e B i punti della circonferenza goniometrica associati a essi, $A(\cos\alpha;\ \text{sen}\,\alpha)$ e $B(\cos\beta;\ \text{sen}\,\beta)$ (Figura 2.1, a). Il raggio OB deve ruotare dell'angolo $\alpha - \beta$ per sovrapporsi al raggio OA. Vogliamo esprimere il coseno di questo angolo con le funzioni di α e di β.

IN SINTESI

Teorema (coseno della differenza).

Ipotesi: α e β sono due numeri reali qualsiasi.

Tesi: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Dimostrazione. Calcoliamo il quadrato della lunghezza della corda AB con la formula della distanza tra due punti del piano cartesiano:

$$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$

Sviluppando i quadrati compaiono le somme $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta$, che valgono 1 per la relazione fondamentale; restano i doppi prodotti:

$$AB^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Ora ruotiamo tutta la figura attorno a O dell'angolo $-\beta$, in modo che B vada a finire nel punto $E(1;\ 0)$ (Figura 2.1, b). Il punto A va a finire nel punto C associato all'angolo $\alpha - \beta$, cioè $C(\cos(\alpha - \beta);\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. Poiché la rotazione conserva le distanze, la corda CE è lunga quanto la corda AB. Calcoliamo anche la sua lunghezza, usando di nuovo la relazione fondamentale:

$$CE^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$, e semplificando si ha la tesi. *c.v.d.*

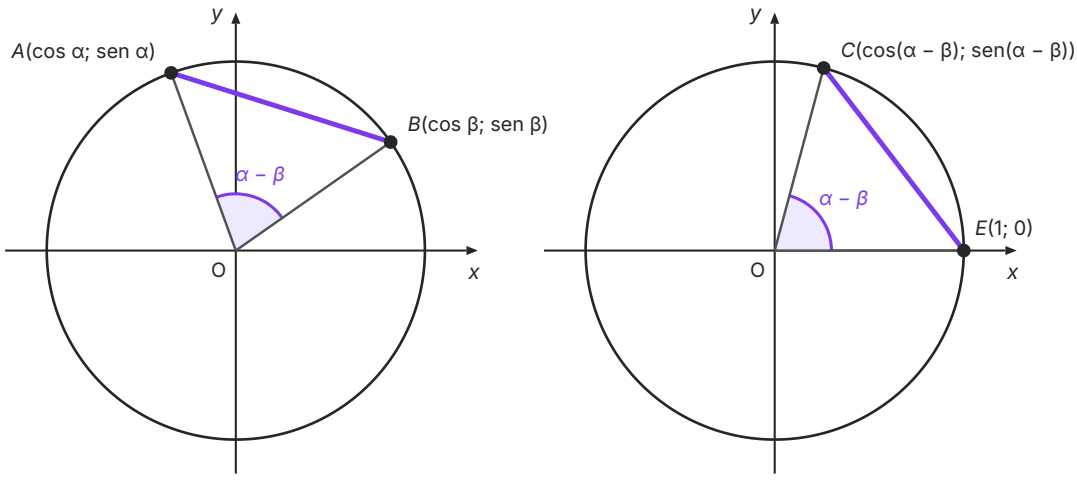


Figura 2.1 La dimostrazione della formula del coseno della differenza, disegnata per α = 110° e β = 35°. a) La corda AB congiunge i punti della circonferenza goniometrica associati ad α e a β. b) Ruotando la figura di −β attorno a O, B va in E(1; 0) e A va nel punto C associato ad α − β = 75°: le due corde (in viola) hanno la stessa lunghezza.

Nella dimostrazione non abbiamo mai supposto che gli angoli fossero acuti, né che α fosse maggiore di β: per ogni angolo φ, positivo o negativo, minore o maggiore di un giro, il punto associato della circonferenza goniometrica ha coordinate (cos φ; sen φ). Per questo la formula vale per qualunque coppia di numeri reali. Controlliamola su un caso noto: con $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{6}$ dà $\cos \frac{\pi}{3} = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, che è il valore giusto.

APPROFONDIMENTO · UN'ALTRA DIMOSTRAZIONE CON IL PRODOTTO SCALARE

In *Matematica 2* (cap. 13) hai incontrato il prodotto scalare di due vettori, che si può calcolare in due modi equivalenti: come prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso, $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$, oppure sommando i prodotti delle componenti, $u_x v_x + u_y v_y$.

Applichiamo le due definizioni ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che vanno da O ad A e da O a B. Hanno modulo 1 e componenti $(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$ e $(\cos\beta; \operatorname{sen}\beta)$, quindi in componenti il prodotto scalare vale $\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. L'angolo θ compreso tra i due vettori differisce da $\alpha - \beta$ al più per il segno e per un multiplo di 2π; poiché il coseno è pari e periodico di periodo 2π, $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$, e la prima definizione dà $1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)$. Uguagliando le due espressioni ritroviamo la formula.

Le due dimostrazioni si fondano sulla stessa idea: il prodotto scalare non cambia se si ruotano insieme i due vettori, così come non cambia la lunghezza della corda. È la geometria delle rotazioni, scritta in due linguaggi diversi.

2.1.2 Dalla differenza alla somma

Dalla formula appena dimostrata ricaviamo tutte le altre formule di addizione, usando gli angoli associati del capitolo 1. Il trucco è sempre lo stesso: scrivere l'angolo che ci interessa come una differenza.

Coseno della somma. Poiché $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, e $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Seno della somma. Il seno di un angolo è il coseno del suo complementare. Quindi $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$, e applicando la formula della differenza, con $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Seno della differenza. Basta sostituire β con $-\beta$ nella formula precedente:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Le formule con $\alpha + \beta$ si chiamano **formule di addizione**, quelle con $\alpha - \beta$ **formule di sottrazione**. Per ricordarle conviene osservarne la struttura. Il seno «mescola» le funzioni (seno per coseno più coseno per seno) e conserva il segno dell'operazione; il coseno «non le mescola» (coseno per coseno, seno per seno) e ha il segno opposto a quello dell'operazione.

Per angoli acuti c'è anche una verifica geometrica che mostra da dove vengono i due prodotti (Figura 2.2). Il segmento OP, lungo 1, forma con l'asse x l'angolo $\alpha + \beta$; la semiretta OQ forma l'angolo α, e Q è il piede della perpendicolare condotta da P. Nel triangolo rettangolo OQP si ha

PQ = sen β e OQ = cos β. Nel triangolo rettangolo OAQ si ha QA = OQ · sen α = sen α cos β. Infine l'angolo in *P* del triangolo PRQ è uguale ad α, perché i suoi lati sono perpendicolari ai lati dell'angolo α in *O*: quindi PR = PQ · cos α = cos α sen β. Poiché PB = QA + PR, si ritrova la formula del seno della somma; con OB = OA − RQ quella del coseno. La figura, però, funziona solo quando α, β e α + β sono acuti, mentre la dimostrazione algebrica vale sempre: è uno dei casi in cui il metodo analitico arriva dove il disegno non può arrivare.

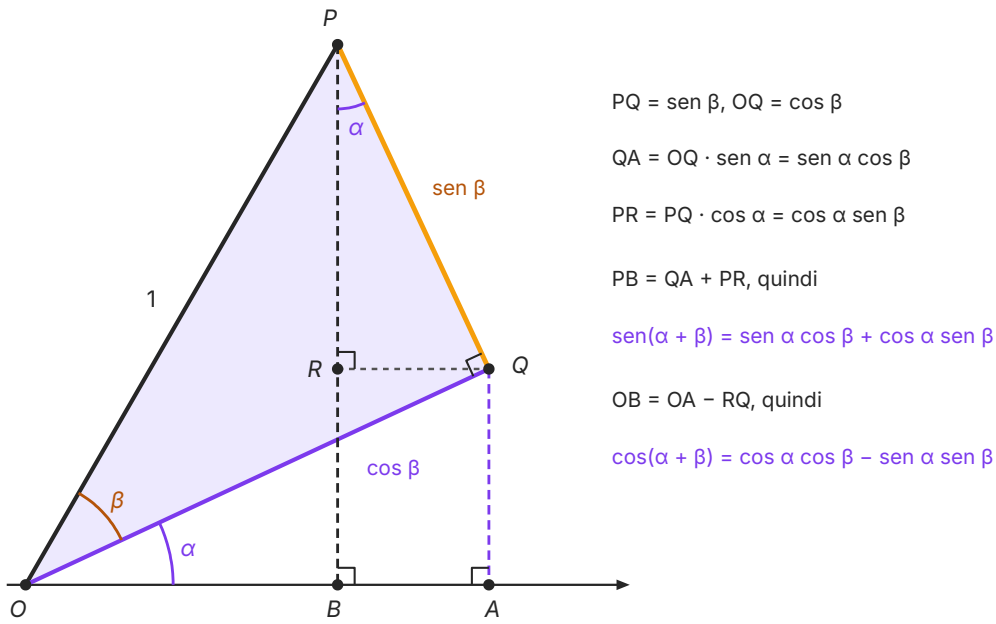


Figura 2.2 La costruzione geometrica di sen(α + β) e cos(α + β) con due triangoli rettangoli sovrapposti, per α = 25°, β = 35° e OP = 1. L'angolo in P tra PR e PQ è uguale ad α, perché ha i lati perpendicolari a quelli dell'angolo α in O.

Una conseguenza: le coordinate di un punto ruotato. Se un punto $P(x; y)$ dista r dall'origine e il raggio OP forma l'angolo φ con l'asse x, allora $x = r\cos\varphi$ e $y = r\,\text{sen}\,\varphi$. Ruotando P attorno a O dell'angolo β si ottiene il punto $P'(x'; y')$, alla stessa distanza r e con l'angolo φ + β. Le formule di addizione danno subito le sue coordinate:

$$x' = r\cos(\varphi+\beta) = x\cos\beta - y\,\text{sen}\,\beta \qquad y' = r\,\text{sen}(\varphi+\beta) = x\,\text{sen}\,\beta + y\cos\beta$$

Sono le equazioni della rotazione di centro O e angolo β. Per esempio, con β = 90° si ottiene $(x; y) \mapsto (-y; x)$: il punto (3; 1) ruota in (−1; 3). Le ritroveremo nel capitolo 8, dove una rotazione diventerà una moltiplicazione tra numeri complessi.

2.1.3 Tangente della somma e della differenza

Per la tangente dividiamo il seno della somma per il coseno della somma, e poi dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Allo stesso modo, oppure sostituendo β con $-\beta$ e ricordando che la tangente è dispari:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Le condizioni di esistenza vanno lette con attenzione: devono esistere $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ e la tangente del risultato, quindi α, β e $\alpha\pm\beta$ devono essere diversi da $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Se uno dei due angoli ha tangente non definita, la formula non si applica, ma si ricorre agli archi associati: per esempio $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$ (capitolo 1). Un caso che si incontra spesso è $\beta=\frac{\pi}{4}$, per cui $\operatorname{tg}\beta=1$:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}\qquad\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

ESEMPIO SVOLTO

Valori esatti con le formule di addizione

Problema. Calcola i valori esatti di sen 15°, cos 15°, tg 15° e sen 105°.

Soluzione. Scriviamo $15° = 45° - 30°$ e usiamo le formule di sottrazione con i valori notevoli:

$$\text{sen } 15° = \text{sen } 45° \cos 30° - \cos 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$$

$$\cos 15° = \cos 45° \cos 30° + \text{sen } 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}9659$$

Per la tangente usiamo la formula della differenza con $\text{tg } 45° = 1$ e $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, poi razionalizziamo:

$$\text{tg } 15° = \frac{1 - \sqrt{3}/3}{1 + \sqrt{3}/3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}2679$$

Infine $105° = 60° + 45°$: $\text{sen } 105° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Controllo. sen 105° è uguale a cos 15°, e deve esserlo: $105° = 90° + 15°$ e $\text{sen}(90° + \alpha) = \cos \alpha$. Confrontare il risultato con un arco associato è un buon modo per scoprire gli errori di segno. I valori decimali coincidono con quelli della calcolatrice.

Esempio. Sappiamo che $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e che $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ con $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$; vogliamo $\cos(\alpha + \beta)$, $\text{sen}(\alpha - \beta)$ e $\text{tg}(\alpha + \beta)$. Prima completiamo i dati con la relazione fondamentale, scegliendo il segno in base al quadrante: nel secondo quadrante il coseno è negativo, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; nel terzo il seno è negativo, $\text{sen } \beta = -\frac{5}{13}$. Allora $\cos(\alpha + \beta) = (-\frac{4}{5})(-\frac{12}{13}) - \frac{3}{5} \cdot (-\frac{5}{13}) = \frac{48 + 15}{65} = \frac{63}{65}$ e $\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \cdot (-\frac{12}{13}) - (-\frac{4}{5})(-\frac{5}{13}) = \frac{-36 - 20}{65} = -\frac{56}{65}$. Per la tangente calcoliamo $\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{-36 + 20}{65} = -\frac{16}{65}$, quindi $\text{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{16}{63}$. Lo stesso risultato si ottiene dalla formula della tangente con $\text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}$ e $\text{tg } \beta = \frac{5}{12}$.

2.2 L'angolo tra due rette

Nel capitolo 1 abbiamo ricordato che il coefficiente angolare m di una retta non verticale $y = mx + q$ è la tangente dell'angolo α, con $0 \le \alpha < \pi$, di cui bisogna ruotare in verso antiorario il se-

miasse positivo delle x per renderlo parallelo alla retta: $m = \text{tg}\,\alpha$. Le formule di sottrazione permettono ora di calcolare l'angolo formato da due rette qualsiasi conoscendo soltanto i loro coefficienti angolari, come avevamo promesso.

Due rette incidenti formano quattro angoli, a due a due opposti al vertice: due acuti e due ottusi, supplementari dei primi, oppure quattro angoli retti. Si chiama **angolo tra due rette** incidenti il minore di questi angoli; la sua ampiezza θ è quindi compresa tra 0° e 90°, estremi inclusi se si considerano anche le rette parallele ($\theta = 0°$) e quelle perpendicolari ($\theta = 90°$).

Siano r: $y = m_1x + q_1$ e s: $y = m_2x + q_2$ due rette incidenti, con angoli di inclinazione α_1 e α_2, e supponiamo $\alpha_1 > \alpha_2$. Nel triangolo che le due rette formano con l'asse x (Figura 2.3), α_1 è un angolo esterno, e un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti: $\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$. Dunque $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, e con la formula della tangente della differenza:

$$\text{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\text{tg}\,\alpha_1 - \text{tg}\,\alpha_2}{1 + \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

Se questo numero è negativo, l'angolo $\alpha_1 - \alpha_2$ è ottuso, e l'angolo tra le rette è il suo supplementare, che ha la tangente opposta. In ogni caso, quindi, l'angolo acuto tra le due rette si ottiene con il valore assoluto:

IN SINTESI

Angolo tra due rette

L'angolo θ tra le rette $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, con $m_1m_2 \neq -1$, verifica

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

- se $m_1 = m_2$, $\text{tg}\,\theta = 0$: le rette sono parallele (o coincidenti);
- se $m_1m_2 = -1$, la formula perde significato perché il denominatore si annulla, e infatti $\theta = 90°$: è la condizione di perpendicolarità di *Matematica 3*;
- se una delle due rette è verticale, θ è il complementare dell'angolo di inclinazione dell'altra, e $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{|m|}$ con $m \neq 0$.

ESEMPIO SVOLTO

L'angolo tra due rette

Problema. Trova il punto di intersezione e l'angolo formato dalle rette r: $y = 3x - 2$ e s: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Soluzione. Il punto comune si trova risolvendo $3x - 2 = \frac{1}{2}x + 3$, cioè $\frac{5}{2}x = 5$: $x = 2$, $y = 4$. Le rette si incontrano in $P(2; 4)$. I coefficienti angolari sono $m_1 = 3$ e $m_2 = \frac{1}{2}$, e il loro prodotto non è -1. Quindi

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{3 - 1/2}{1 + 3 \cdot 1/2}\right| = \left|\frac{5/2}{5/2}\right| = 1 \qquad \theta = 45°$$

Commento. Gli angoli di inclinazione, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 3 \approx 71{,}57°$ e $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 26{,}57°$, non sono angoli notevoli, eppure la loro differenza è esattamente $45°$: con le sole funzioni inverse e la calcolatrice avremmo ottenuto un valore approssimato, con la formula il valore esatto. La Figura 2.3 mostra il triangolo usato nella dimostrazione.

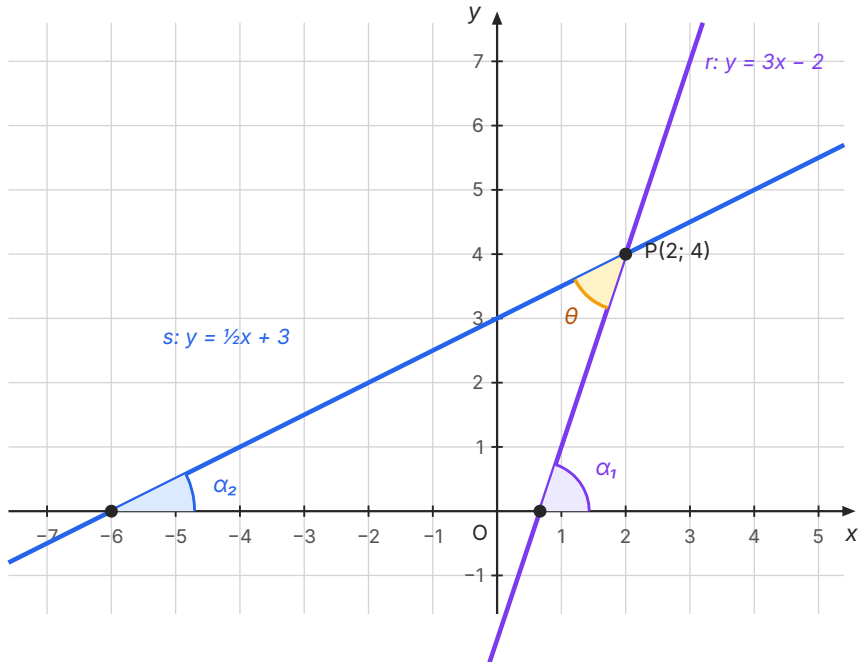


Figura 2.3 Le rette r: y = 3x − 2 e s: y = ½x + 3 dell'esempio svolto, che si incontrano in P(2; 4). Nel triangolo formato dalle due rette e dall'asse x, l'angolo esterno $\alpha_1 = \text{arctg } 3$ è la somma degli angoli interni $\alpha_2 = \text{arctg } ½$ e θ: perciò $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = 45°$. Le scale sui due assi sono uguali.

2.3 Duplicazione e bisezione

2.3.1 Le formule di duplicazione

Ponendo $\beta = \alpha$ nelle formule di addizione si ottengono le **formule di duplicazione**, che esprimono le funzioni dell'angolo doppio 2α mediante quelle di α:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Con la relazione fondamentale la formula del coseno si può scrivere in altri due modi, ciascuno con una sola funzione: basta sostituire $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, oppure $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Dalla formula della tangente della somma, con $\beta = \alpha$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Questa formula vale se esiste tg α, cioè $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e se esiste tg 2α, cioè $1 - \text{tg}^2\alpha \neq 0$, ossia $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Attenzione al 2: non sta «fuori» dal seno. sen 2α non è il doppio di sen α: per esempio sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$, mentre $2 \text{ sen } 30° = 1$.

Una variante utile esprime sen 2α e cos 2α con la sola tangente. Scriviamo sen 2α come frazione con denominatore $1 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$ e dividiamo numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ (supponendo $\cos\alpha \neq 0$); lo stesso per cos 2α:

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{2 \text{ sen } \alpha \cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$

Le ritroveremo tra poco con il nome di formule parametriche.

ESEMPIO SVOLTO

Le funzioni dell'angolo doppio

Problema. Sapendo che $\text{tg } \alpha = 2$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcola sen 2α, cos 2α e tg 2α, e indica il quadrante in cui cade 2α.

Soluzione. Con le formule in tangente:

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{2 \cdot 2}{1 + 4} = \frac{4}{5} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5} \qquad \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

Il seno positivo e il coseno negativo dicono che 2α è un angolo del secondo quadrante (a meno di multipli di 2π). Verifichiamo per altra via: nel terzo quadrante, con $\text{tg } \alpha = 2$, si ha $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, quindi $2 \text{ sen } \alpha \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$. Infatti $\alpha \approx 243{,}43°$ e $2\alpha \approx 486{,}87° = 126{,}87° + 360°$.

Commento. Per sen 2α e cos 2α non serviva il quadrante di α. Il motivo è che gli angoli con tangente 2 sono α e $\alpha + \pi$, e i loro doppi differiscono di 2π: hanno le stesse funzioni goniometriche.

Le formule di triplicazione. Combinando addizione e duplicazione si possono esprimere anche le funzioni di 3α, 4α e così via. Per il seno:

$$\text{sen } 3\alpha = \text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen } 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \text{ sen } \alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos^2\alpha + (1 - 2 \text{ sen}^2\alpha) \text{ sen } \alpha$$

e sostituendo $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$ si ottiene $\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3\alpha$. In modo analogo (lo vedrai negli esercizi) si ricava $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Sono le **formule di triplicazione**. Non c'è bisogno di memorizzarle: l'importante è saperle ricavare quando servono.

2.3.2 Le formule di bisezione

Le due forme di $\cos 2\alpha$ con una sola funzione si possono leggere al contrario: dicono quanto valgono il quadrato del seno e il quadrato del coseno di un angolo, se si conosce il coseno del suo doppio. Scrivendo $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α, cioè α al posto di 2α:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Estraendo la radice quadrata si ottengono le **formule di bisezione**:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Il doppio segno non significa che i valori siano due. Il segno è uno solo: quello che la funzione ha nel quadrante in cui cade $\frac{\alpha}{2}$, e non α. Se, per esempio, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, allora $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, e si prendono i segni positivi; se $\pi < \alpha < 2\pi$, allora $\frac{\alpha}{2}$ è nel secondo quadrante, il seno è positivo e il coseno negativo. La formula della tangente richiede $\alpha \neq \pi + 2k\pi$.

Per la tangente esiste una strada che evita sia la radice sia la scelta del segno. Moltiplichiamo numeratore e denominatore di $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$ per $2\cos\frac{\alpha}{2}$, e poi, in alternativa, per $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$; con $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha$, $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ e $2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ otteniamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (\alpha \neq \pi + 2k\pi) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$$

Qui il segno è già quello giusto, perché è contenuto nei valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e di $\cos\alpha$. Con $\alpha = \frac{\pi}{4}$ le formule di bisezione danno i valori esatti delle funzioni di $\frac{\pi}{8}$, cioè di 22,5°, tutte positive perché l'angolo è nel primo quadrante:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}3827 \qquad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}9239$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$$

ERRORE FREQUENTE

Formule inventate e segni sbagliati

- «$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta$», «$\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha$», «$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{2}$»: sono tutte false. Le funzioni goniometriche non sono lineari, e un controllo con un angolo notevole basta a smentirle: $\text{sen}\,60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, non $2\,\text{sen}\,30°=1$.
- Nelle formule di bisezione il segno si sceglie in base al quadrante di $\frac{\alpha}{2}$, non di α. Con $\alpha=300°$ il seno di α è negativo, ma $\frac{\alpha}{2}=150°$ è nel secondo quadrante e $\text{sen}\,150°=+\frac{1}{2}$; infatti $\sqrt{\frac{1-\cos 300°}{2}}=\sqrt{\frac{1-1/2}{2}}=\frac{1}{2}$.
- Le formule della tangente hanno condizioni di esistenza: $\text{tg}\,2\alpha$ non esiste se $\text{tg}\,\alpha=\pm1$, e $\text{tg}(\alpha+\beta)$ non esiste se $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta=1$. Prima di applicarle, controlla che tutti i termini abbiano significato.

ESEMPIO SVOLTO

Le funzioni dell'angolo metà

Problema. Sapendo che $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$ e $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, calcola $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Soluzione. Dividendo per 2 le disuguaglianze si ha $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$: l'angolo metà è nel secondo quadrante, dove il seno è positivo e il coseno negativo.

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+7/25}{2}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-7/25}{2}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

e quindi $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{3}$.

Controllo. Nel terzo quadrante $\text{sen}\,\alpha=-\sqrt{1-\frac{49}{625}}=-\frac{24}{25}$. La formula senza radice dà $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{-24/25}{18/25}=-\frac{4}{3}$: lo stesso risultato, con il segno ottenuto automaticamente.

2.3.3 Le formule di linearizzazione

Le uguaglianze ottenute prima dell'estrazione della radice, riscritte con α al posto di $\frac{\alpha}{2}$, hanno un uso tutto loro e prendono il nome di **formule di linearizzazione**:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Trasformano un quadrato, che è di secondo grado nella funzione goniometrica, in un'espressione di primo grado nel coseno dell'angolo doppio. La Figura 2.4 le mostra al lavoro. La funzione $y = \operatorname{sen}^2 x$, che a prima vista sembra una funzione nuova, coincide con $y = \frac{1 - \cos 2x}{2}$: è il grafico del coseno con il periodo dimezzato (π invece di 2π), ribaltato, ridotto a metà in altezza e sollevato di $\frac{1}{2}$. Oscilla quindi tra 0 e 1 attorno al valore $\frac{1}{2}$. Si capisce anche senza calcoli perché il periodo si dimezza: sen x cambia segno ogni π, il suo quadrato no, e dopo mezzo giro ne ripete esattamente i valori. Nel capitolo 5 funzioni di questo tipo, $y = A\ \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + k$, si chiameranno sinusoidali.

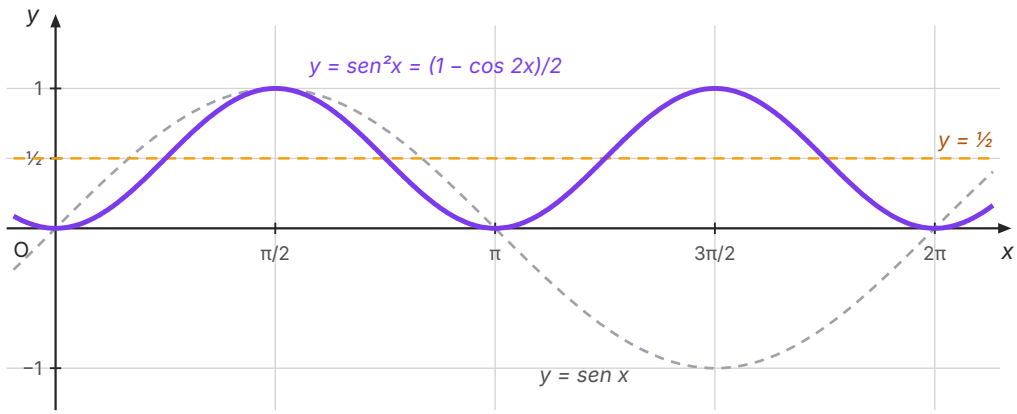


Figura 2.4 Il grafico di y = sen²x (in viola) coincide con quello di y = (1 – cos 2x)/2: ha periodo π e oscilla tra 0 e 1 attorno al valore ½ (retta tratteggiata). In grigio tratteggiato, per confronto, y = sen x. Le scale sui due assi sono uguali.

Applicata due volte, la linearizzazione abbassa anche potenze più alte. Per esempio $\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$, e linearizzando anche $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ si arriva a $\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$, una somma di coseni di primo grado.

2.4 Le formule parametriche

2.4.1 Seno e coseno in funzione di una sola variabile

Nelle formule di duplicazione in tangente scriviamo $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α e poniamo $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Si ottengono le **formule parametriche**, dette anche formule parametriche razionali:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Le prime due valgono per ogni α per cui esiste t, cioè $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia $\alpha \neq \pi + 2k\pi$; la terza richiede anche $t \neq \pm 1$. Il valore escluso non è un dettaglio. Per $\alpha = \pi$ si ha $\cos\pi = -1$, ma nessun valore di t dà $\cos\alpha = -1$: l'uguaglianza $\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$ porterebbe a $1 = -1$. Quando, nel capitolo 3, useremo queste formule per risolvere un'equazione, dovremo sempre controllare a parte se $\alpha = \pi + 2k\pi$ ne è soluzione, altrimenti rischieremmo di perderla.

Il pregio delle formule parametriche è di esprimere $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ come funzioni razionali di un'unica variabile t. Così un'espressione qualsiasi in $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ diventa una frazione algebrica in t, che si tratta con l'algebra del biennio. Per esempio, per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$,

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-(1-t^2)/(1+t^2)}{1+(1-t^2)/(1+t^2)} = \frac{2t^2/(1+t^2)}{2/(1+t^2)} = t^2$$

E se conosciamo t, le funzioni di α si calcolano senza radici: con $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$ si ha $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{1-9}{10} = -\frac{4}{5}$.

2.4.2 Un'interpretazione geometrica

Le formule parametriche hanno un significato geometrico elegante (Figura 2.5). Sulla circonferenza goniometrica fissiamo il punto $A(-1; 0)$ e tracciamo da A la retta di coefficiente angolare t, che ha equazione $y = t(x+1)$. Questa retta incontra la circonferenza in un secondo punto P; sia α l'angolo che il raggio OP forma con il semiasse positivo delle x. L'angolo che la retta AP forma con l'asse x è un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco dell'angolo al centro α, quindi ne è la metà. Perciò il coefficiente angolare della retta è proprio $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, e il punto P, che ha coordinate $(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$, ha coordinate $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

Lo stesso risultato si ottiene con l'algebra di *Matematica 3* (cap. 7). Sostituendo $y = t(x+1)$ nell'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ottiene l'equazione di secondo grado $(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. Una so-

luzione è $x = -1$, l'ascissa di A; il prodotto delle soluzioni è $\frac{t^2-1}{1+t^2}$, quindi l'altra soluzione è $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, e $y = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2}$. Due strade, una sintetica e una analitica, portano alla stessa formula.

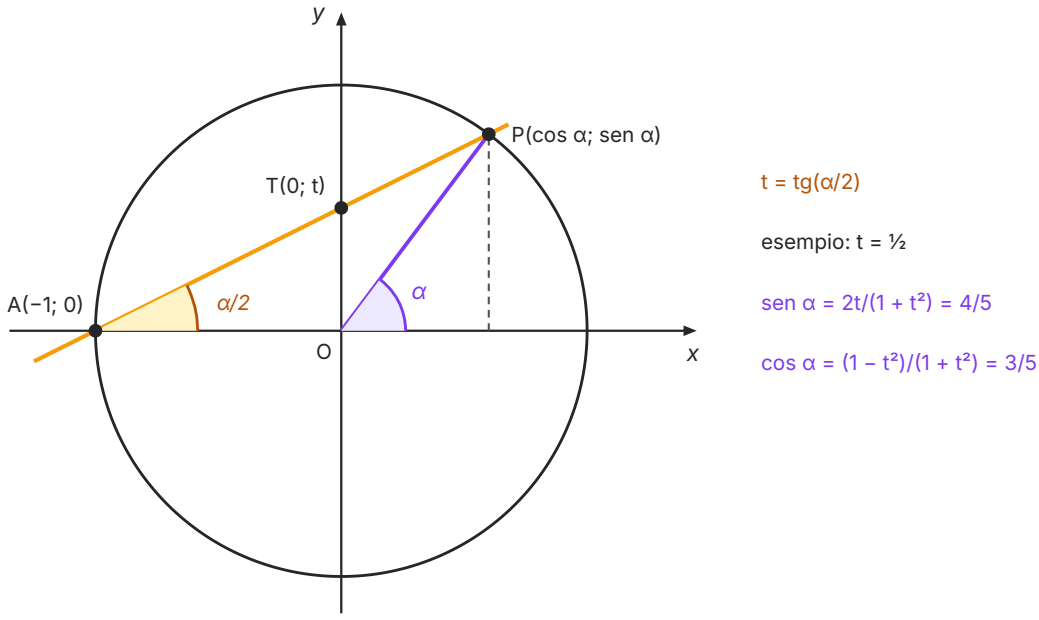


Figura 2.5 Le formule parametriche sulla circonferenza goniometrica. La retta per A(−1; 0) con coefficiente angolare t taglia l'asse y in T(0; t) e la circonferenza in P. L'angolo in A è un angolo alla circonferenza, metà dell'angolo al centro α: dunque t = tg(α/2). Il disegno è fatto per t = ½, che dà P(3/5; 4/5).

La retta per A taglia l'asse y nel punto $T(0; t)$: il parametro t si legge direttamente sull'asse y. Al variare di t in $\mathbb{R}$, il punto P percorre tutta la circonferenza tranne A: per raggiungere A servirebbe la retta tangente in A, cioè la retta verticale $x = -1$, che non ha coefficiente angolare. È di nuovo il valore escluso $\alpha = \pi$. Si dice che le formule parametriche forniscono una **parametrizzazione razionale** della circonferenza: ogni suo punto, tranne uno, si ottiene da uno e un solo numero reale t con le sole quattro operazioni.

Ne segue un fatto curioso. Se t è razionale, anche cos α e sen α lo sono, e P ha coordinate razionali. Con $t = \frac{1}{2}$ si trova $P(\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$, e la relazione $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, moltiplicata per 5^2, diventa $3^2 + 4^2 = 5^2$. Si chiama **terna pitagorica** una terna di numeri interi positivi (a; b; c) tali che $a^2 + b^2 = c^2$, cioè le misure dei lati di un triangolo rettangolo con lati interi: ogni valore razionale di t compreso tra 0 e 1, estremi esclusi, ne produce una, come vedrai negli esercizi.

2.5 Prostaferesi, formule di Werner e identità

2.5.1 Da prodotti a somme: le formule di Werner

Scriviamo una sotto l'altra le formule del coseno della differenza e della somma e sommiamole membro a membro: i termini con il seno si eliminano e resta $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$. Sottraendole, invece, si eliminano i termini con il coseno: $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Allo stesso modo, sommando le formule del seno della somma e della differenza si ottiene $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$. Dividendo per 2 abbiamo le **formule di Werner**, che trasformano un prodotto in una somma:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

Prendono il nome dal matematico e astronomo tedesco Johannes Werner (1468–1522). Servono, per esempio, a calcolare prodotti di valori non notevoli: $\operatorname{sen}75° \operatorname{sen}15° = \frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 90°) = \frac{1}{4}$.

2.5.2 Da somme a prodotti: le formule di prostaferesi

Leggiamo ora le formule di Werner da destra a sinistra. Poniamo $\alpha + \beta = p$ e $\alpha - \beta = q$; sommando e sottraendo queste due uguaglianze si ha $\alpha = \frac{p+q}{2}$ e $\beta = \frac{p-q}{2}$. La formula del prodotto di due coseni diventa allora $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, e procedendo allo stesso modo con le altre si ottengono le quattro **formule di prostaferesi**, che trasformano somme e differenze in prodotti. Valgono per ogni p e q reali:

$$\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Il nome viene dal greco *prósthesis*, «aggiunta», e *aphaíresis*, «sottrazione». Attenzione al segno meno dell'ultima formula, che si dimentica facilmente: se $0 < p < q < \pi$, allora $\cos p > \cos q$ e il primo membro è positivo, mentre il prodotto dei due seni senza il segno meno sarebbe negativo. Trasformare una somma in un prodotto è utile quando bisogna studiare il segno di un'espressione o risolvere un'equazione, perché un prodotto è nullo se e solo se è nullo uno dei fat-

tori: lo sfrutteremo nel capitolo 3. Per esempio $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x$ e $\cos 40° + \cos 20° = 2 \cos 30° \cos 10° = \sqrt{3} \cos 10°$.

COLLEGAMENTI

Fisica: i battimenti

Due diapason vibrano insieme: uno è accordato a 440 Hz, l'altro è leggermente stonato, a 444 Hz. Se i due suoni hanno la stessa ampiezza, la pressione dell'aria in un punto è, a meno di una costante, la somma di due sinusoidi: $\operatorname{sen}(2\pi \cdot 440\, t) + \operatorname{sen}(2\pi \cdot 444\, t)$, con il tempo t in secondi. La prima formula di prostaferesi la trasforma in un prodotto:

$$\operatorname{sen}(2\pi \cdot 440\, t) + \operatorname{sen}(2\pi \cdot 444\, t) = 2 \cos(2\pi \cdot 2\, t) \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot 442\, t)$$

Il fattore $\operatorname{sen}(2\pi \cdot 442\, t)$ è una nota di 442 Hz, la media delle due frequenze. Il fattore $2 \cos(2\pi \cdot 2t)$ varia molto più lentamente e si comporta come un'ampiezza che cambia nel tempo: il suono si rinforza e si affievolisce periodicamente. Il valore assoluto $|\cos(2\pi \cdot 2t)|$ raggiunge il massimo ogni quarto di secondo, quindi si sentono 4 pulsazioni al secondo, tante quante la differenza delle due frequenze. Queste pulsazioni si chiamano **battimenti**. È così che si accorda uno strumento a orecchio: si confronta una corda con una nota di riferimento e la si tende o allenta finché i battimenti rallentano fino a scomparire, quando le due frequenze coincidono.

APPROFONDIMENTO · MOLTIPLICARE CON LA PROSTAFERESI

Prima dei logaritmi, che John Napier pubblicò nel 1614, moltiplicare numeri con molte cifre era un lavoro lungo e facile da sbagliare, e gli astronomi dovevano farne in grande quantità. Alla fine del Cinquecento si diffuse un procedimento, detto **metodo della prostaferesi**, che sostituiva la moltiplicazione con un'addizione e con la consultazione delle tavole trigonometriche, già allora molto accurate. Lo usarono, tra gli altri, gli astronomi che lavoravano all'osservatorio di Tycho Brahe.

L'idea è la formula di Werner $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$. Per moltiplicare 0,9063 per 0,7660 si cerca nelle tavole, a quattro cifre, che $0{,}9063 = \cos 25°$ e $0{,}7660 = \cos 40°$; poi si leggono $\cos 15° = 0{,}9659$ e $\cos 65° = 0{,}4226$, si sommano e si divide per 2: $(0{,}9659 + 0{,}4226) : 2 = 0{,}69425$. Il prodotto esatto è 0,69422...: la piccola differenza è dovuta all'arrotondamento delle tavole.

I logaritmi (*Matematica 3*, cap. 13) resero il metodo superato in pochi decenni: trasformano ogni prodotto di numeri positivi in una somma, senza bisogno di riportare i fattori tra −1 e 1.

2.5.3 Identità ed espressioni

Con tutte queste formule si possono verificare identità e semplificare espressioni molto più varie di quelle del capitolo 1. Il metodo non cambia. Prima si scrivono le condizioni di esistenza

(C.E.), cioè i valori per cui tutti i termini hanno significato; poi si trasforma uno dei due membri, di solito il più complicato, finché non diventa uguale all'altro, oppure si trasformano entrambi in una stessa espressione. Non si «porta» mai un termine da un membro all'altro come in un'equazione, perché l'uguaglianza è proprio ciò che si deve dimostrare. Una strategia che funziona quasi sempre: ricondurre tutto allo stesso angolo (sviluppando 2α, $\frac{\alpha}{2}$, $\alpha + \beta$ e così via), poi alle sole funzioni seno e coseno, e infine semplificare.

ESEMPIO SVOLTO

Un'identità e una semplificazione

Problema. a) Verifica l'identità $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. b) Semplifica l'espressione $\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$.

Soluzione. a) C.E.: $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 0$, cioè $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$; queste condizioni comprendono anche $\cos \alpha \neq 0$, necessaria per il secondo membro. Trasformiamo il primo membro con le formule di duplicazione, scegliendo per il coseno la forma che elimina l'1:

$$\frac{1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

La semplificazione per $\operatorname{sen} \alpha$ è lecita perché, per le C.E., $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$. L'identità è verificata.

b) Con le formule di prostaferesi, numeratore e denominatore diventano prodotti con un fattore comune:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$$

C.E.: il denominatore $2 \cos 2x \cos x$ deve essere diverso da zero, quindi $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Commento. L'espressione di partenza e $\operatorname{tg} 2x$ non hanno lo stesso dominio: $\operatorname{tg} 2x$ esiste anche per $x = \frac{\pi}{2}$, dove vale $\operatorname{tg} \pi = 0$, mentre la frazione iniziale lì non ha significato, perché $\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Il risultato di una semplificazione va sempre accompagnato dalle condizioni di esistenza dell'espressione di partenza.

APPROFONDIMENTO · IL SENO DI 18° E LA SEZIONE AUREA

Il triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° e gli angoli alla base di 72° si chiama **triangolo aureo**: è il triangolo che si ottiene congiungendo un vertice del pentagono regolare con gli estremi del lato opposto. Da esso si ricava il valore esatto di sen 18° (Figura 2.6).

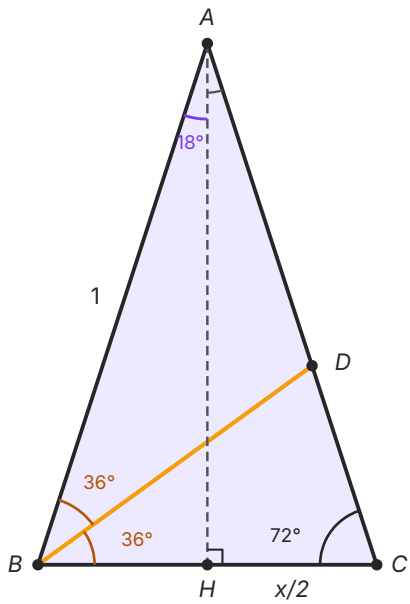
Sia ABC il triangolo, con AB = AC = 1 e base BC = x. La bisettrice dell'angolo in B incontra AC in D e divide l'angolo di 72° in due angoli di 36°. Nel triangolo BCD l'angolo in D misura 180° − 36° − 72° = 72°: il triangolo è isoscele e BD = BC = x. Nel triangolo ABD gli angoli in A e in B misurano entrambi 36°: anche questo è isoscele, e AD = BD = x, quindi DC = 1 − x. I triangoli ABC e BCD hanno gli stessi angoli e sono simili: AB : BC = BC : CD, cioè $1 : x = x : (1 - x)$, da cui $x^2 + x - 1 = 0$ e, poiché $x > 0$,

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$$

La base è quindi la sezione aurea del lato (*Matematica 2*), e il rapporto tra lato e base è il **rapporto aureo** $\frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. L'altezza AH è anche bisettrice dell'angolo al vertice, quindi nel triangolo rettangolo ABH l'angolo in A misura 18° e

$$\text{sen } 18° = \frac{\text{BH}}{\text{AB}} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx 0{,}3090$$

Verifichiamo il risultato con la formula di duplicazione: $\cos 36° = 1 - 2\,\text{sen}^2 18° = 1 - 2 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0{,}8090$. È proprio quello che dice il triangolo isoscele ABD, con i lati obliqui lunghi x e la base lunga 1: $\cos 36° = \frac{1/2}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.



AB = AC = 1, BC = x

BD bisettrice: AD = BD = BC = x

ABC ~ BCD: x : 1 = (1 − x) : x

$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = (\sqrt{5} - 1)/2$

sen 18° = BH/AB = x/2 = (√5 − 1)/4

Figura 2.6 Il triangolo aureo ABC (angolo al vertice di 36°, lati obliqui lunghi 1) e la bisettrice BD dell'angolo in B. I triangoli ABC e BCD sono simili, e dalla proporzione tra i lati si ricava la base x e quindi sen 18°.

La Tabella 2.1 raccoglie tutte le formule del capitolo con le loro condizioni di esistenza.

Tabella 2.1 Le formule del capitolo e le loro condizioni di esistenza ($k \in \mathbb{Z}$). Il doppio segno ± va letto con il segno superiore o con quello inferiore in tutta la formula.

Formule	Espressione	Condizioni
Addizione e sottrazione	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	ogni α, β
	$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	ogni α, β
	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	α, β, $\alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
Duplicazione	$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	ogni α
	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	ogni α
	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$
Bisezione	$\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	segno dal quadrante di $\dfrac{\alpha}{2}$
	$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi$; la seconda $\alpha \neq k\pi$
Linearizzazione	$\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	ogni α
Parametriche	$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi$
Werner	$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$	ogni α, β
	$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$	ogni α, β
	$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$	ogni α, β
Prostaferesi	$\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\dfrac{p \pm q}{2}\cos\dfrac{p \mp q}{2}$	ogni p, q
	$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	ogni p, q
	$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$	ogni p, q

SINTESI

- Tutte le formule del capitolo discendono dalla formula del coseno della differenza, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, che si dimostra uguagliando due corde della circonferenza goniometrica, una ottenuta dall'altra con una rotazione, oppure con il prodotto scalare.
- Con gli angoli associati se ne ricavano le formule di addizione e sottrazione: $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, quest'ultima con le sue condizioni di esistenza.
- Le funzioni goniometriche non sono lineari: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$ e $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 2\operatorname{sen}\alpha$. Le formule permettono di calcolare valori esatti, come $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.
- L'angolo θ tra due rette di coefficienti angolari m_1 e m_2 verifica $\operatorname{tg}\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$; per $m_1 m_2 = -1$ le rette sono perpendicolari.
- Formule di duplicazione: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.
- Formule di bisezione: $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$, con il segno dato dal quadrante di $\dfrac{\alpha}{2}$; per la tangente $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, senza ambiguità di segno.
- Formule di linearizzazione: $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; il grafico di $y = \operatorname{sen}^2 x$ è una sinusoide di periodo π che oscilla tra 0 e 1.
- Formule parametriche: con $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$; sono una parametrizzazione razionale della circonferenza e producono le terne pitagoriche.
- Le formule di Werner trasformano prodotti in somme; le formule di prostaferesi, che ne sono la lettura inversa, trasformano somme in prodotti. Descrivono, tra l'altro, i battimenti tra due suoni di frequenza vicina.
- Per verificare un'identità si scrivono le condizioni di esistenza e si trasforma un membro fino a ottenere l'altro; una semplificazione va accompagnata dalle condizioni di esistenza dell'espressione di partenza.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● $\cos(\alpha - \beta)$ è uguale a:
   - **A.** $\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
   - **B.** $\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
   - **C.** $\cos\alpha - \cos\beta$
   - **D.** $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

2. ● $\operatorname{sen} 2\alpha$ è uguale a:
   - **A.** $2\operatorname{sen}\alpha$
   - **B.** $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$
   - **C.** $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
   - **D.** $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

3. ● Se $\pi < \alpha < 2\pi$, allora $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ è uguale a:
   - **A.** $-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
   - **B.** $-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
   - **C.** $+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ oppure $-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, secondo il valore di α
   - **D.** $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

4. ● Supponendo che $\operatorname{tg}\alpha$ esista, $\operatorname{tg} 2\alpha$ non esiste se e solo se:
   - **A.** $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$
   - **B.** $\operatorname{tg}\alpha = 0$
   - **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{3}$
   - **D.** esiste sempre

5. ●● Il valore di $\cos^2\frac{\pi}{8} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8}$ è:
   - **A.** 1
   - **B.** $\frac{1}{2}$
   - **C.** $\sqrt{2} - 1$
   - **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. ●● L'angolo tra le rette $y = \sqrt{3}x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ misura:

   A. 15°
   B. 30°
   C. 45°
   D. 60°

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta$ per ogni α e β. b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$ per ogni α. c) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ per ogni α con $\text{sen}\,\alpha \neq 0$. d) Le formule parametriche valgono per ogni angolo α.

8. ● Completa. «Ponendo $\beta = \alpha$ nelle formule di addizione si ottengono le formule di _____. Leggendo al contrario $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$ si ottiene $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} =$ _____. Nelle formule di bisezione il segno si sceglie in base al quadrante di _____. Le formule parametriche esprimono $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di $t =$ _____ e valgono per $\alpha \neq$ _____.»

9. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\cos 60° = 2\cos 30°$. b) $\text{sen}\,4\alpha = 2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha$ per ogni α. c) $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ per ogni α. d) $\text{sen}\,75° = \text{sen}\,45° + \text{sen}\,30°$.

Calcolare

10. ● Calcola i valori esatti: a) $\cos 75°$; b) $\text{tg}\,75°$; c) $\cos 165°$; d) $\text{sen}(-15°)$.

11. ● Sapendo che $\text{sen}\,\alpha = \frac{8}{17}$ con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e che $\cos\beta = \frac{3}{5}$ con $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, calcola $\text{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ e $\text{tg}(\alpha + \beta)$.

12. ●● Semplifica, indicando le condizioni di esistenza quando servono: a) $\text{sen}(\frac{\pi}{3} + x) - \text{sen}(\frac{\pi}{3} - x)$; b) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})$; c) $\text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \text{tg}(\frac{\pi}{4} - x)$.

13. ●● Calcola l'angolo tra le rette: a) $y = 2x + 1$ e $y = -3x + 4$; b) $3x - y = 0$ e $x + 2y - 1 = 0$; c) $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -2x + 5$.

14. ● Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ con $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcola $\text{sen}\,2\alpha$, $\cos 2\alpha$ e $\text{tg}\,2\alpha$.

15. ●● Sapendo che $\text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$ con $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcola $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

16. ●● Formule parametriche. a) Calcola sen α e cos α sapendo che $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 2$. b) Fai lo stesso con $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$. c) Esprimi $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ in funzione di $t = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, indicando per quali α vale il risultato.

17. ●● Trasforma in prodotto: a) sen $5x$ + sen x; b) cos $3x$ − cos $7x$; c) cos 40° + cos 20°.

18. ●● Trasforma in somma con le formule di Werner: a) 2 sen $3x$ cos x; b) 2 cos $5x$ cos $2x$; c) calcola il valore esatto di sen 75° sen 15°.

19. ●● Verifica le identità, indicando le condizioni di esistenza: a) $\frac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \text{tg}\,\alpha$; b) $(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)^2 = 1 + \text{sen}\,2\alpha$; c) $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha = \cos 2\alpha$; d) $\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \frac{2}{\text{sen}\,2\alpha}$.

20. ●●● Senza calcolatrice, dimostra che sen 10° · sen 50° · sen 70° = $\frac{1}{8}$. *Suggerimento:* trasforma prima sen 50° · sen 70° con le formule di Werner.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra la formula $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ partendo dalla formula del seno della somma e dalle proprietà degli angoli opposti.

22. ●● Dimostra la formula di triplicazione $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

23. ●● Trova l'errore: «Per la formula di duplicazione, sen 60° = sen(2 · 30°) = 2 sen 30° = 1». Correggi il ragionamento e trova il valore giusto.

24. ●● Spiega perché la formula $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$ non richiede di scegliere un segno, mentre la formula $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ sì.

25. ●● Dimostra che, per ogni α, $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \text{sen}(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$.

26. ●●● Dimostra che, se α, β e γ sono gli angoli di un triangolo non rettangolo, allora $\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\gamma$. *Suggerimento:* $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

27. ●●● Dimostra che, se $t = \frac{p}{q}$ è razionale (con p, q interi positivi e $p < q$), le formule parametriche producono la terna pitagorica $(q^2 - p^2;\ 2pq;\ q^2 + p^2)$. Ricava la terna che corrisponde a $t = \frac{2}{3}$ e verificala.

Problemi

28. ●● Su una mappa con un riferimento cartesiano (unità: 1 km) due strade rettilinee hanno equazioni $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x - 3$. a) In quale punto si incrociano? b) Quale angolo formano all'incrocio? Dai il risultato in gradi, con due decimali.

29. ●● Un cartellone alto 3 m è appeso a una parete verticale, con il bordo inferiore 2 m sopra il livello degli occhi di una persona che si trova a 4 m dalla parete. Nel capitolo 1 l'angolo visuale θ è stato scritto come differenza di due arcotangenti. Calcola il valore esatto di $\operatorname{tg}\theta$ con la formula della tangente della differenza, e poi θ in gradi.

30. ●● Un pallone viene calciato da terra con velocità di modulo v e angolo θ sull'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria, la gittata è $R = \frac{2v^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$. a) Scrivi R con una sola funzione goniometrica. b) Calcola R per $v = 20$ m/s e $\theta = 30°$ e $\theta = 60°$ ($g = 9{,}8$ m/s^2). c) Spiega perché due angoli complementari danno la stessa gittata e per quale angolo la gittata è massima.

31. ●● In un resistore di resistenza R scorre la corrente alternata $i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$; la potenza dissipata è $P(t) = R \cdot i^2(t)$. a) Scrivi $P(t)$ con la formula di linearizzazione. b) Con $R = 10\ \Omega$ e $I_0 = 2$ A, tra quali valori oscilla P e qual è il suo valore medio? c) Se la corrente ha frequenza 50 Hz, qual è la frequenza con cui oscilla la potenza? d) Quale corrente costante dissiperebbe nello stesso resistore la potenza media trovata?

32. ●●● Nel quadrato ABCD, M è il punto medio del lato BC. Sia θ l'angolo MAC. a) Calcola $\operatorname{tg}\theta$ come tangente della differenza tra l'angolo CAB e l'angolo MAB. b) Ricava $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$. c) Verifica che $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{3}{5}$ e calcola θ in gradi.

Verso la verifica

33. ●● Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcola: a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$; b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ in forma razionalizzata; c) $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{6})$.

34. ●● a) Verifica l'identità $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$. b) Deduci il valore massimo e il valore minimo di $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$ e per quali x sono raggiunti.

35. ●●● *Sfida.* Dimostra che $\cos 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$ senza usare i valori esatti di questi coseni. *Suggerimento:* usa le formule di prostaferesi, poi moltiplica e dividi per $\cos 18°$.

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: la storia delle formule di addizione, delle tavole trigonometriche e del metodo della prostaferesi.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la trigonometria nel Cinquecento, Werner, Tycho Brahe e l'invenzione dei logaritmi.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le terne pitagoriche e i punti razionali della circonferenza.

Glossario del capitolo

Angolo tra due rette
Il minore degli angoli formati da due rette incidenti, compreso tra 0° e 90°; per rette di coefficienti angolari m_1 e m_2 ($m_1m_2 \neq -1$) si ha $\operatorname{tg}\theta = |(m_1 - m_2)/(1 + m_1m_2)|$.

Battimenti
Variazioni periodiche dell'intensità del suono prodotto da due sorgenti di frequenze vicine; il loro numero al secondo è la differenza delle due frequenze.

Formule di addizione
Le formule che esprimono $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ mediante le funzioni goniometriche di α e di β.

Formule di bisezione
Le formule che esprimono le funzioni goniometriche di $\alpha/2$ mediante $\cos\alpha$; il segno si sceglie in base al quadrante di $\alpha/2$.

Formule di duplicazione
Le formule che esprimono $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ e $\operatorname{tg} 2\alpha$ mediante le funzioni goniometriche di α.

Formule di linearizzazione
Le formule $\operatorname{sen}^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ e $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$, che trasformano un quadrato in un'espressione di primo grado in $\cos 2\alpha$.

Formule di prostaferesi
Le formule che trasformano la somma o la differenza di due seni o di due coseni in un prodotto.

Formule di sottrazione
Le formule che esprimono $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ e $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ mediante le funzioni goniometriche di α e di β.

Formule di triplicazione
Le formule che esprimono le funzioni di 3α mediante quelle di α, come $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$ e $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Formule di Werner
Le formule che trasformano il prodotto di due seni, di due coseni o di un seno per un coseno in una somma.

Formule parametriche
Le formule che esprimono $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ come funzioni razionali di $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$: $\operatorname{sen}\alpha = 2t/(1 + t^2)$, $\cos\alpha = (1 - t^2)/(1 + t^2)$, valide per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$.

Metodo della prostaferesi
Procedimento usato prima dei logaritmi per sostituire una moltiplicazione con un'addizione, mediante le formule di Werner e le tavole trigonometriche.

Parametrizzazione razionale
Descrizione dei punti di una curva mediante funzioni razionali di un parametro; per la circonferenza goniometrica la forniscono le formule parametriche.

Rapporto aureo
Il numero $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$, rapporto tra il lato obliquo e la base del triangolo aureo.

Terna pitagorica
Terna di numeri interi positivi $(a; b; c)$ tali che $a^2 + b^2 = c^2$, come $(3; 4; 5)$ e $(5; 12; 13)$.

Triangolo aureo
Triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° e gli angoli alla base di 72°; il rapporto tra base e lato obliquo è $(\sqrt{5} - 1)/2$.

Soluzioni

1. B. È la formula dimostrata nel paragrafo sul coseno della differenza; A è il coseno della somma, D il seno della differenza.

2. C. sen $2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$; per esempio sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2 \operatorname{sen} 30° = 1$.

3. D. Se $\pi < \alpha < 2\pi$, allora $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$: l'angolo metà è nel secondo quadrante, dove il seno è positivo. A usa la formula del coseno, B e C sbagliano il segno.

4. A. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ non esiste quando $1 - \operatorname{tg}^2\alpha = 0$, cioè $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$ ($\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$).

5. D. Per la formula di duplicazione il valore è $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. B. Le rette hanno angoli di inclinazione 60° e 30°; con la formula, $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}/3}{1 + 1}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, quindi $\theta = 30°$.

7. a) Falso: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ (per esempio sen $90° = 1 \neq \operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 60°$). b) Vero. c) Vero: è una formula di bisezione senza radice, valida per $\alpha \neq k\pi$. d) Falso: valgono per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, perché per $\alpha = \pi$ non esiste $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

8. duplicazione; $\frac{1 - \cos\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

9. a) Falso: $\cos 60° = 2\cos^2 30° - 1 = \frac{1}{2}$, mentre $2\cos 30° = \sqrt{3}$. b) Vero: è la duplicazione applicata all'angolo 2α. c) Vero: è una formula di linearizzazione. d) Falso: sen $75° =$ $\operatorname{sen} 45°\cos 30° + \cos 45°\operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966$, mentre $\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 30° \approx 1{,}207$.

10. a) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$. b) $\operatorname{tg} 75° = \frac{1 + \sqrt{3}/3}{1 - \sqrt{3}/3} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$. c) $\cos 165° = -\cos 15° = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx -0{,}9659$. d) $\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \approx -0{,}2588$.

11. $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$ (secondo quadrante), $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{8}{17} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{15}{17}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{24 - 60}{85} = -\frac{36}{85}$; $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{15}{17} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{-45 + 32}{85} = -\frac{13}{85}$; $\cos(\alpha + \beta) = \frac{-45 - 32}{85} = -\frac{77}{85}$, quindi $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{36}{77}$.

12. a) Con le formule di addizione e sottrazione i termini sen $\frac{\pi}{3}\cos x$ si eliminano: resta $2\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$. b) Si eliminano i termini con il seno: $2\cos x\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos x$. c) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1$, con C.E. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ (devono esistere entrambe le tangenti del prodotto; per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la formula della tangente della somma non si applica, perché $\operatorname{tg} x$ non esiste, ma il prodotto esiste e vale ancora $(-1) \cdot (-1) = 1$).

13. a) $m_1 = 2$, $m_2 = -3$: $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2 + 3}{1 - 6}\right| = 1$, $\theta = 45°$. b) $m_1 = 3$, $m_2 = -\frac{1}{2}$: $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{3 + 1/2}{1 - 3/2}\right| = 7$, $\theta =$ arctg $7 \approx 81{,}87°$. c) $m_1 m_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$: le rette sono perpendicolari, $\theta = 90°$.

14. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$ (terzo quadrante). $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} =$

$-\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

15. Nel quarto quadrante $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$. Poiché $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, il seno è positivo e il coseno negativo: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-4/5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+4/5}{2}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1/5}{-3/5} = -\frac{1}{3}$.

16. a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{1-4}{5} = -\frac{3}{5}$. b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-2/3}{10/9} = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{8/9}{10/9} = \frac{4}{5}$. c) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = t^2$, per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ (il calcolo è svolto nel paragrafo sulle formule parametriche).

17. a) $2\operatorname{sen}3x\cos 2x$. b) $\cos 3x - \cos 7x = -2\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}(-2x) = 2\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}2x$. c) $2\cos 30°\cos 10° = \sqrt{3}\cos 10°$.

18. a) $\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x$. b) $\cos 3x + \cos 7x$ (il coseno è pari: $\cos(-3x) = \cos 3x$). c) $\frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 90°) = \frac{1}{4}$.

19. a) C.E. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. $\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. b) Ogni α: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 + \operatorname{sen}2\alpha$. c) Ogni α: $(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = \cos 2\alpha \cdot 1$. d) C.E. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha}$.

20. $\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}70° = \frac{1}{2}(\cos 20° - \cos 120°) = \frac{1}{2}\cos 20° + \frac{1}{4}$. Quindi il prodotto è $\frac{1}{2}\operatorname{sen}10°\cos 20° + \frac{1}{4}\operatorname{sen}10°$. Con Werner, $\operatorname{sen}10°\cos 20° = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}30° + \operatorname{sen}(-10°)) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}10°$. Sostituendo: $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}10° + \frac{1}{4}\operatorname{sen}10° = \frac{1}{8}$.

21. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, perché il coseno è pari e il seno dispari.

22. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

23. L'errore è $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha$: il 2 non si porta fuori dal seno. La formula giusta è $\operatorname{sen}60° = 2\operatorname{sen}30°\cos 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. Nella formula con la radice, la radice dà un numero non negativo e il segno va scelto in base al quadrante di $\frac{\alpha}{2}$. La formula razionale, invece, è stata ricavata senza estrarre radici, con le formule di duplicazione: è un'identità valida per ogni $\alpha \neq \pi + 2k\pi$. Il suo denominatore $1 + \cos\alpha$ non è mai negativo, quindi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ha il segno di $\operatorname{sen}\alpha$: l'informazione sul quadrante è già contenuta nei valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

25. Con le formule di addizione: $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$. Sommando a $\operatorname{sen}\alpha$ si ottiene $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha + 0 = 0$.

26. Poiché $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (nessuno degli angoli è retto, quindi tutte le tangenti esistono; se fosse $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$ si avrebbe $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ e γ retto). Moltiplicando per $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$: $\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$, cioè $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

27. Con $t = \frac{p}{q}$: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2p/q}{1 + p^2/q^2} = \frac{2pq}{q^2 + p^2}$ e $\cos\alpha = \frac{1 - p^2/q^2}{1 + p^2/q^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$. Da $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, moltiplicando per $(q^2 + p^2)^2$, si ottiene $(q^2 - p^2)^2 + (2pq)^2 = (q^2 + p^2)^2$, e i tre numeri sono interi positivi. Con $t = \frac{2}{3}$: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$, terna (5; 12; 13): $25 + 144 = 169$.

28. a) $\frac{1}{2}x = 2x - 3$ dà $x = 2$, $y = 1$: l'incrocio è in (2; 1). b) $\text{tg}\,\theta = \left|\frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2}\right| = \frac{3}{4}$, quindi $\theta = \text{arctg}\,0{,}75 \approx 36{,}87°$.

29. Il bordo superiore è 5 m sopra gli occhi, quello inferiore 2 m. Gli angoli di elevazione hanno tangenti $\frac{5}{4}$ e $\frac{1}{2}$, quindi $\text{tg}\,\theta = \frac{5/4 - 1/2}{1 + 5/4 \cdot 1/2} = \frac{3/4}{13/8} = \frac{6}{13}$ e $\theta = \text{arctg}\,\frac{6}{13} \approx 24{,}78°$.

30. a) $R = \frac{v^2 \,\text{sen}\,2\theta}{g}$. b) $R = \frac{400 \cdot \text{sen}\,60°}{9{,}8} \approx 35{,}3$ m in entrambi i casi, perché $\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60°$. c) Per angoli complementari $\text{sen}\,2(90° - \theta) = \text{sen}(180° - 2\theta) = \text{sen}\,2\theta$; la gittata è massima quando $\text{sen}\,2\theta = 1$, cioè $\theta = 45°$, e vale $\frac{400}{9{,}8} \approx 40{,}8$ m.

31. a) $P(t) = R\,I_0{}^2\,\text{sen}^2(\omega t) = \frac{R\,I_0{}^2}{2}(1 - \cos 2\omega t)$. b) $R\,I_0{}^2 = 40$ W: P oscilla tra 0 e 40 W attorno al valore medio di 20 W. c) $\cos 2\omega t$ ha pulsazione doppia: la potenza oscilla a 100 Hz. d) Una corrente costante I dissipa $R\,I^2 = 20$ W se $I^2 = 2$ A^2, cioè $I = \sqrt{2}$ A $\approx 1{,}41$ A, pari a $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$: è il valore efficace della corrente.

32. a) Con A nell'origine e lato 1: l'angolo CAB misura 45° ($\text{tg} = 1$) e l'angolo MAB ha tangente $\frac{1}{2}$. $\text{tg}\,\theta = \frac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}$. b) θ è acuto: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$. c) $\text{sen}\,2\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$; $\theta = \text{arctg}\,\frac{1}{3} \approx 18{,}43°$.

33. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (primo quadrante). a) $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$. b) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1/3}{1 + 2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$. c) $\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$.

34. a) $\text{sen}^4x + \cos^4x = (\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 - 2\,\text{sen}^2x\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3 + \cos 4x}{4}$. b) Poiché $-1 \le \cos 4x \le 1$, il valore massimo è 1, per $\cos 4x = 1$, cioè $x = k\frac{\pi}{2}$; il minimo è $\frac{1}{2}$, per $\cos 4x = -1$, cioè $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

35. Con la prostaferesi $\cos 36° - \cos 72° = -2\,\text{sen}\,54°\,\text{sen}(-18°) = 2\,\text{sen}\,54°\,\text{sen}\,18° = 2\cos 36°\,\text{sen}\,18°$. Moltiplicando e dividendo per $\cos 18°$: $\frac{2\,\text{sen}\,18°\cos 18° \cdot \cos 36°}{\cos 18°} = \frac{\text{sen}\,36°\cos 36°}{\cos 18°} = \frac{1/2 \cdot \text{sen}\,72°}{\cos 18°} = \frac{1}{2}$, perché $\text{sen}\,72° = \cos 18°$.