CAPITOLO

1

Funzioni goniometriche e funzioni inverse

Un punto che gira sulla circonferenza ripassa sempre dagli stessi luoghi: per sapere quanta strada ha fatto non basta guardare dove si trova. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Misurare angoli orientati di ampiezza qualsiasi e associare a ogni numero reale un punto della circonferenza goniometrica.
2. Definire cotangente, secante e cosecante ed esprimere ogni funzione goniometrica per mezzo di un'altra, scegliendo il segno in base al quadrante.
3. Usare gli archi associati per ricondurre ogni angolo al primo quadrante, semplificare espressioni e verificare identità.
4. Descrivere dominio, immagine, periodo, parità, monotonia e segno delle funzioni goniometriche e dedurne nuovi grafici.
5. Definire arcsen, arccos e arctg come inverse di restrizioni, tracciarne i grafici e calcolarne i valori, anche in funzioni composte.
6. Ricavare un angolo da una pendenza o da un rapporto tra lunghezze in problemi di geometria, fisica e misura.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Angoli orientati e circonferenza goniometrica 2
1.2 Cotangente, secante, cosecante 5
1.3 Gli archi associati 8
1.4 Proprietà e grafici delle funzioni goniometriche 12
1.5 Le funzioni goniometriche inverse 16
1.6 Angoli da pendenze e da rapporti 23

Matematica 4 · Parte I · Goniometria · versione 1.0
Capitolo 1: Funzioni goniometriche e funzioni inverse · pagine 23–54 del volume completo · estratto per lo studio

Una ruota panoramica gira lentamente: la cabina su cui sei salito sale, raggiunge la cima, scende, torna vicino a terra e ricomincia. La sua altezza dipende dall'angolo di cui la ruota ha girato, e quell'angolo non si ferma a 360°: dopo tre giri completi è di 1080°, e se la ruota girasse all'indietro sarebbe negativo. Per descrivere il moto servono quindi funzioni definite per angoli di *qualsiasi* ampiezza.

C'è poi la domanda opposta: sapendo a quale altezza si trova la cabina, di quale angolo ha girato la ruota? Le risposte possibili sono infinite, e per sceglierne una sola bisogna costruire con cura le **funzioni inverse** del seno, del coseno e della tangente. È il tema principale di questo capitolo, che riprende le funzioni circolari di *Matematica 2* e le studia con il linguaggio delle funzioni di *Matematica 3*. Da qui partiranno le formule, le equazioni e le disequazioni dei prossimi capitoli e, nella seconda parte del volume, i modelli dei fenomeni periodici.

1.1 Angoli orientati e circonferenza goniometrica

1.1.1 Che cosa sappiamo già

In *Matematica 2* (cap. 12) hai imparato a misurare gli angoli in radianti: un angolo al centro di una circonferenza di raggio r misura α radianti se insiste su un arco lungo $\alpha\, r$. L'angolo giro misura 2π, l'angolo piatto π, e per passare dai gradi ai radianti si moltiplica per $\frac{\pi}{180°}$: per esempio $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$. Un **angolo orientato** è descritto dalla rotazione che porta il suo lato origine sul lato termine: è positivo se la rotazione avviene in verso antiorario, negativo se avviene in verso orario.

La **circonferenza goniometrica** è la circonferenza del piano cartesiano con centro nell'origine O e raggio 1. Il lato origine di ogni angolo α è il semiasse positivo delle x, che parte da O e passa per $A(1;\,0)$; il lato termine incontra la circonferenza in un punto P, e per definizione $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sono l'ascissa e l'ordinata di P. La tangente è $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, definita se $\cos\alpha \neq 0$: è l'ordinata del punto T in cui la retta OP incontra la retta $x = 1$, tangente alla circonferenza in A (Figura 1.1). Poiché P sta sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, per ogni angolo α vale la **relazione fondamentale**

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

La Tabella 1.1 riassume i valori che conviene ricordare senza calcolatrice. I segni dipendono dal quadrante in cui cade P: il seno è positivo nel I e nel II quadrante, il coseno nel I e nel IV, la tangente nel I e nel III.

Tabella 1.1 Le funzioni goniometriche degli angoli notevoli del primo quadrante (vedi *Matematica 2*, cap. 12).

α	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non definita

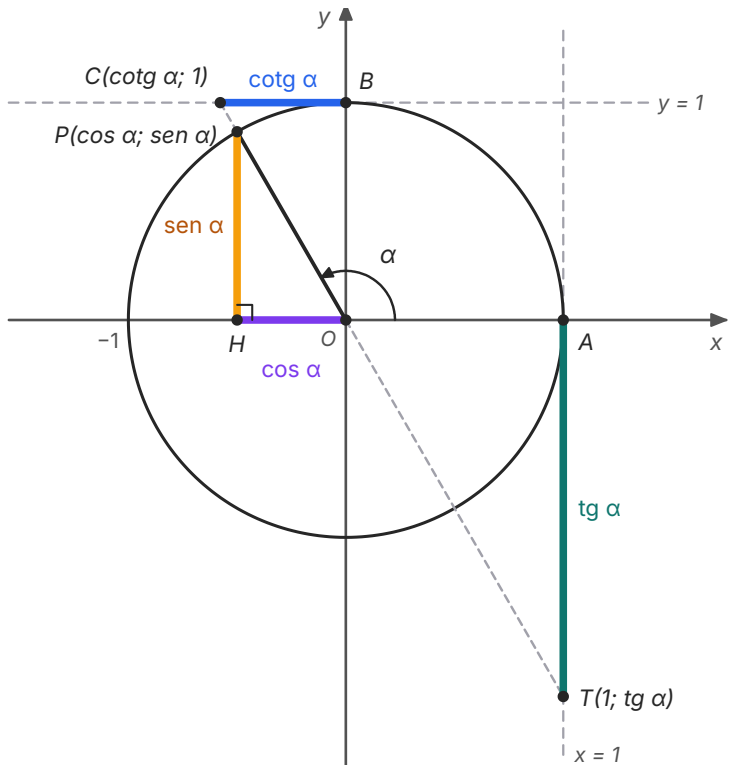


Figura 1.1 La circonferenza goniometrica per un angolo α del secondo quadrante (qui $\alpha = \frac{2\pi}{3}$). $P(\cos\alpha;\ \text{sen}\,\alpha)$ è il punto associato ad α; la retta OP incontra la retta $x = 1$ in $T(1;\ \text{tg}\,\alpha)$ e la retta $y = 1$ in $C(\text{cotg}\,\alpha;\ 1)$. I segmenti colorati sono orientati: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$ e $\text{cotg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono negativi, $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ è positivo.

1.1.2 Angoli di ampiezza qualsiasi

Nulla obbliga il lato termine a fermarsi dopo un giro. L'angolo di 405° si ottiene facendo un giro completo e poi altri 45°; l'angolo di −30° ruotando di 30° in verso orario. Il lato termine di 405° coincide con quello di 45°, e quindi coincide anche il punto P: angoli che differiscono di un numero intero di giri individuano lo stesso punto della circonferenza goniometrica, e hanno lo stesso seno e lo stesso coseno. In radianti, per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

Per calcolare una funzione goniometrica di un angolo «grande» basta dunque togliere i giri completi. Per esempio $\frac{23\pi}{6} = 4\pi - \frac{\pi}{6}$, quindi $\operatorname{sen}\frac{23\pi}{6} = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$; e $1110° = 3 \cdot 360° + 30°$, quindi $\cos 1110° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. In pratica si divide l'angolo per 360° (o per 2π) e si tiene il resto, come fa un orologio, che dopo dodici ore ricomincia da capo.

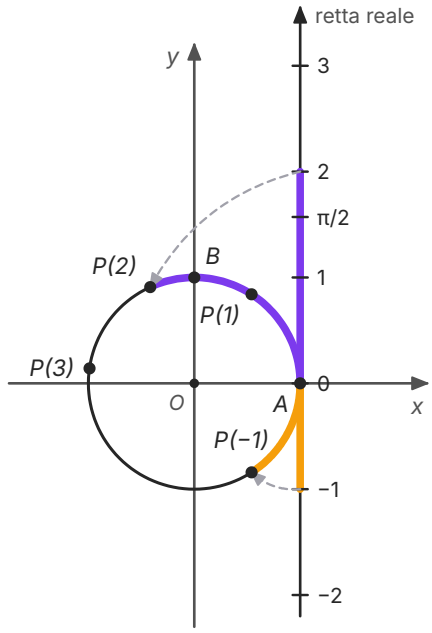
1.1.3 La funzione «avvolgimento»

Possiamo ora dare un senso preciso a un'espressione come sen 2, in cui 2 non è un angolo in gradi ma un numero reale. Immagina la retta reale disposta in verticale, tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A, con lo zero in A e i numeri positivi verso l'alto (Figura 1.2). Avvolgiamo la retta attorno alla circonferenza come un filo attorno a un rocchetto: la parte positiva in verso antiorario, quella negativa in verso orario. Ogni numero reale t finisce così su un punto $P(t)$ della circonferenza, l'estremo dell'arco che parte da A ed è lungo $|t|$.

Poiché il raggio è 1, un arco lungo t è proprio l'arco di un angolo di t radianti: $P(t)$ è il punto associato all'angolo di t radianti, e le sue coordinate sono $(\cos t; \operatorname{sen} t)$. Abbiamo costruito una funzione, che chiamiamo **funzione avvolgimento**, che associa a ogni numero reale t il punto $P(t)$ della circonferenza goniometrica. Non è iniettiva: la circonferenza è lunga 2π, quindi i numeri t, $t + 2\pi$, $t - 2\pi$, … finiscono tutti nello stesso punto. Componendola con «prendi l'ascissa» e «prendi l'ordinata» si ottengono le due funzioni

$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1; 1], \quad \operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to [-1; 1]$$

Seno e coseno diventano così **funzioni reali di variabile reale**, nel senso di *Matematica 3*: la variabile è un numero puro, la lunghezza (con segno) di un arco della circonferenza di raggio 1. Per questo nello studio delle funzioni gli angoli si misurano sempre in radianti; d'ora in poi, quando scriviamo sen x senza il simbolo °, x è un numero reale.



Il punto t della retta va nel punto P(t) della circonferenza: l'arco AP(t), percorso a partire da A, è lungo $|t|$, in verso antiorario se $t > 0$, orario se $t < 0$.

$P(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t)$

$P(t + 2k\pi) = P(t),\ k \in \mathbb{Z}$

Figura 1.2 La funzione avvolgimento. La retta reale, tangente in A alla circonferenza goniometrica, si avvolge su di essa: il tratto da 0 a 2 (in viola) diventa l'arco da A a $P(2)$, percorso in verso antiorario, il tratto da 0 a −1 (in arancione) l'arco da A a $P(-1)$, percorso in verso orario. Il numero $\frac{\pi}{2}$ finisce nel punto $B(0; 1)$.

DA RICORDARE

sen 2 e sen 2° sono numeri diversi: sen 2 ≈ 0,9093 è il seno di 2 radianti (circa 114,6°), mentre sen 2° ≈ 0,0349. Sulla calcolatrice il primo si ottiene in modalità RAD, il secondo in modalità DEG. Nelle formule di questo volume, se il simbolo ° manca, l'angolo è in radianti.

1.2 Cotangente, secante, cosecante

1.2.1 La cotangente

Accanto a seno, coseno e tangente, nella tradizione scolastica italiana si usano altre tre funzioni goniometriche. La più importante è la **cotangente**:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

È definita dove sen $\alpha \neq 0$, cioè per ogni α tranne i multipli di π, che corrispondono ai punti $A(1; 0)$ e $A'(-1; 0)$. Dove sono definite sia la tangente sia la cotangente, cioè per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, l'una è il reciproco dell'altra: $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Attenzione però al caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$: la tangente non esiste, mentre $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$.

Anche la cotangente si legge sulla circonferenza goniometrica. Tracciamo la retta $y = 1$, tangente alla circonferenza nel punto $B(0; 1)$, e chiamiamo C il punto in cui la incontra la retta OP (Figura 1.1). I punti della retta OP sono quelli di coordinate $(\lambda \cos \alpha; \lambda \operatorname{sen} \alpha)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Il punto C ha ordinata 1, quindi $\lambda \operatorname{sen} \alpha = 1$, cioè $\lambda = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, e la sua ascissa è

$$x_C = \lambda \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

La cotangente è dunque l'ascissa del punto C; lo stesso ragionamento con la retta $x = 1$ ritrova la tangente come ordinata di T. Quando α si avvicina a 0 o a π la retta OP diventa quasi orizzontale e C si allontana senza limite; per $\alpha = k\pi$ la retta OP è l'asse x, parallela alla retta $y = 1$, e il punto C non esiste: è la ragione geometrica per cui la cotangente non è definita. I valori notevoli si ottengono dalla Tabella 1.1 facendo il reciproco della tangente: $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$.

1.2.2 Secante e cosecante

Le altre due funzioni sono i reciproci del coseno e del seno, la **secante** e la **cosecante**:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left(\alpha \neq k\pi\right)$$

Il nome «secante» ha un'origine geometrica. La retta tangente alla circonferenza goniometrica in P è perpendicolare al raggio OP e ha equazione $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = 1$; ponendo $y = 0$ si vede che taglia l'asse x nel punto di ascissa $\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$. In questo volume secante e cosecante compaiono di rado: ogni espressione che le contiene si riscrive subito con il seno e il coseno.

1.2.3 Le relazioni tra le funzioni goniometriche

Conoscendo il valore di una funzione goniometrica di α e il quadrante in cui cade α, si possono calcolare tutte le altre. Gli strumenti sono la relazione fondamentale e le definizioni di tangente e cotangente. Dividendo i due membri della relazione fondamentale per $\cos^2\alpha$, con $\cos \alpha \neq 0$, si ottiene $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, cioè

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \mathrm{sen}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Allo stesso modo, dividendo per $\mathrm{sen}^2\alpha$, si trova $\mathrm{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}$. Estraendo le radici quadrate si ottengono le formule della Tabella 1.2. Il doppio segno ± non è un'indecisione: la radice quadrata fornisce soltanto il valore assoluto, e il segno va scelto in base al quadrante, in modo che il risultato abbia il segno che la funzione ha davvero in quel quadrante.

Tabella 1.2 Ogni funzione goniometrica espressa per mezzo di ciascuna delle altre. Il segno ± si sceglie in base al quadrante in cui cade α.

	con sen α	con cos α	con tg α	con cotg α
sen α =	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}}$
cos α =	$\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\mathrm{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}}$
tg α =	$\pm\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$
cotg α =	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha}}{\mathrm{sen}\,\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	—

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Sapendo che $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$ e che $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcola sen α, cos α, cotg α e sec α.

b) Sapendo che $\mathrm{sen}\,\beta = \dfrac{1}{3}$ e che $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$, calcola cos β e tg β.

Soluzione. a) α è nel IV quadrante, dove il coseno è positivo e il seno negativo. Dalla Tabella 1.2:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+9/16} = \frac{16}{25}, \quad \text{quindi} \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Poi $\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$, negativo come deve essere. Infine $\mathrm{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\dfrac{4}{3}$ e $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{4}$.

b) β è nel II quadrante, dove il coseno è negativo: $\cos\beta = -\sqrt{1-1/9} = -\sqrt{8/9} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Quindi $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \dfrac{1}{3} : \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Controllo. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25} = 1$ e $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{8}{9} = 1$.

1.3 Gli archi associati

Si chiamano **archi associati** a un angolo α gli angoli $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$: le loro funzioni goniometriche si esprimono con quelle di α, a meno del segno o dello scambio tra seno e coseno. In *Matematica 2* hai incontrato i casi legati alle simmetrie rispetto agli assi e all'origine, per angoli acuti. Li riprendiamo per un angolo α qualsiasi e aggiungiamo quelli che coinvolgono $\frac{\pi}{2}$.

1.3.1 Le simmetrie della circonferenza

Una simmetria rispetto a una retta per O che forma l'angolo φ con l'asse x manda il punto associato all'angolo θ nel punto associato all'angolo $2\varphi - \theta$: la retta è la bisettrice dei due lati termine. Con $\varphi = 0$ (asse x), $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (asse y) e $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (bisettrice $y = x$) si ottengono tre dei casi seguenti; il quarto è la simmetria rispetto all'origine.

- **Angoli opposti**, α e $-\alpha$: i punti $P(\alpha)$ e $P(-\alpha)$ sono simmetrici rispetto all'asse x, con la stessa ascissa e ordinate opposte. Quindi $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$, $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$. L'angolo $2\pi - \alpha$ individua lo stesso punto di $-\alpha$.
- **Angoli supplementari**, α e $\pi - \alpha$: simmetria rispetto all'asse y, che cambia segno all'ascissa. Quindi $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.
- **Angoli che differiscono di** π, α e $\pi + \alpha$: $P(\pi + \alpha)$ è il punto diametralmente opposto a $P(\alpha)$, simmetrico rispetto all'origine. Quindi $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, mentre $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$.
- **Angoli complementari**, α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$: simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$, che scambia le coordinate. Quindi $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$.

Il caso $\frac{\pi}{2} + \alpha$ non corrisponde a una simmetria ma a una rotazione di un angolo retto. Scriviamo $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$: si passa da α al complementare $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (simmetria rispetto a $y = x$) e poi al suo supplementare (simmetria rispetto all'asse y). Il punto $P(\cos\alpha; \text{sen}\,\alpha)$ diventa prima $P'(\text{sen}\,\alpha; \cos\alpha)$ e poi $P''(-\text{sen}\,\alpha; \cos\alpha)$ (Figura 1.3). Quindi

$$\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha, \quad \text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$$

Allo stesso modo $\frac{3\pi}{2} - \alpha = \pi + (\frac{\pi}{2} - \alpha)$ e $\frac{3\pi}{2} + \alpha = \pi + (\frac{\pi}{2} + \alpha)$ danno gli ultimi due casi. Tutti i risultati sono raccolti nella Tabella 1.3.

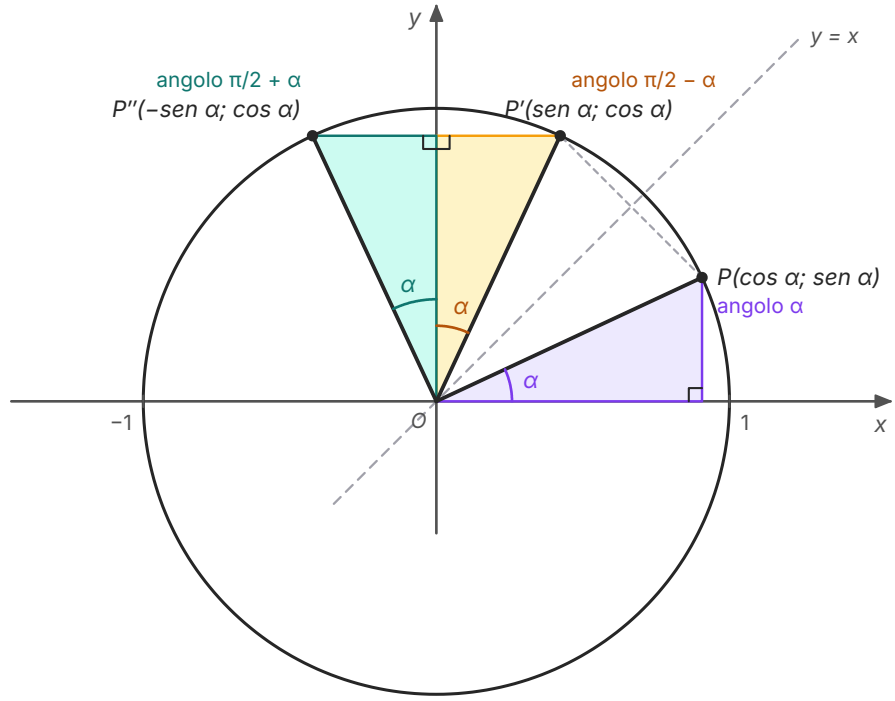


Figura 1.3 Gli archi associati $\frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (qui $\alpha = 25°$). P' è il simmetrico di P rispetto alla bisettrice $y = x$; P'' è il simmetrico di P' rispetto all'asse y. I tre triangoli rettangoli colorati sono congruenti: le coordinate di P' e di P'' sono quelle di P scambiate, con il segno dato dal quadrante.

Tabella 1.3 Gli archi associati. Le formule valgono per ogni α per cui i due membri sono definiti; per la cotangente si usa il reciproco della tangente.

Angolo	seno	coseno	tangente
$-\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

IN SINTESI

La regola degli archi associati. Per calcolare una funzione goniometrica di $k\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, con k intero:

- se k è pari (multipli di π: $\pi\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$, $-\alpha$) la funzione **non cambia**; se k è dispari ($\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$) il seno e il coseno **si scambiano**, e così la tangente e la cotangente;
- il **segno** è quello che la funzione di partenza ha nel quadrante in cui cade $k\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, immaginando α acuto.

Per esempio, in $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ il multiplo di $\frac{\pi}{2}$ è dispari, quindi il coseno diventa seno; per α acuto l'angolo $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ è nel IV quadrante, dove il coseno è positivo: $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$.

Immaginare α acuto serve soltanto a scegliere il segno: le formule ottenute valgono per ogni α, perché le simmetrie da cui derivano valgono per ogni punto della circonferenza. Non c'è nulla da imparare a memoria: nel dubbio basta disegnare il punto P e il suo simmetrico.

1.3.2 Ridurre al primo quadrante

Con gli archi associati il valore di una funzione goniometrica di un angolo qualsiasi si riconduce a quello di un angolo del primo quadrante. Si tolgono i giri completi; si scrive l'angolo rimasto nella forma $\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$ oppure, se conviene, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, con α acuto; si applica la regola.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola senza calcolatrice: a) $\cos\frac{5\pi}{3}$; b) $\text{tg}(-\frac{3\pi}{4})$; c) $\text{sen}\,\frac{17\pi}{4}$; d) $\text{cotg}\,\frac{11\pi}{6}$; e) $\text{sen}\,1230°$; f) $\cos(-840°)$.

Soluzione. a) $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, nel IV quadrante, dove il coseno è positivo: $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

b) La tangente è dispari: $\text{tg}(-\frac{3\pi}{4}) = -\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -\text{tg}(\pi - \frac{\pi}{4}) = -(-\text{tg}\,\frac{\pi}{4}) = 1$. Controllo: $-\frac{3\pi}{4}$ è nel III quadrante, dove la tangente è positiva.

c) $\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$: due giri completi, quindi $\text{sen}\,\frac{17\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, nel IV quadrante, dove la cotangente è negativa: $\text{cotg}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{cotg}\,\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

e) $1230° = 3 \cdot 360° + 150°$ e $150° = 180° - 30°$: $\text{sen}\,1230° = \text{sen}\,150° = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$.

f) Il coseno è pari, quindi $\cos(-840°) = \cos 840°$; inoltre $840° = 2 \cdot 360° + 120°$ e $120° = 90° + 30°$: $\cos 840° = \cos(90° + 30°) = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$.

1.3.3 Espressioni e identità goniometriche

Un'**identità goniometrica** è un'uguaglianza tra due espressioni goniometriche che è vera per tutti i valori della variabile per cui entrambi i membri sono definiti, cioè che soddisfano le **condizioni di esistenza** (C.E.). La relazione fondamentale è un'identità, e lo sono tutte le formule degli archi associati. Un'*equazione* goniometrica, come $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$, è invece vera solo per alcuni valori di α: le equazioni saranno l'argomento del capitolo 3.

Per verificare un'identità si trasforma uno dei due membri, con passaggi leciti, fino a ottenere l'altro; oppure si trasformano entrambi fino alla stessa espressione. Non si deve partire dall'uguaglianza da dimostrare e «portare tutto da una parte» come in un'equazione, perché così si

darebbe per vero proprio ciò che si vuole dimostrare. Prima di cominciare si scrivono le C.E.; alla fine un buon controllo consiste nel sostituire nei due membri un valore numerico.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Semplifica $E(\alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

b) Verifica l'identità $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$.

c) Verifica l'identità $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Soluzione. a) C.E.: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, perché devono esistere $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ e $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$. Con la regola degli archi associati: $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$ (multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$: la cotangente diventa tangente; per α acuto l'angolo è nel III quadrante, dove la cotangente è positiva). Quindi $E(\alpha) = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}^2\alpha$.

b) C.E.: $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ e $\cos\alpha \neq 0$, cioè $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$. Trasformiamo il primo membro: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$, che è il secondo membro.

c) I due membri sono definiti per ogni α. Scomponendo la differenza di quadrati: $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) \cdot 1$.

Controllo. In a), per $\alpha = \frac{\pi}{3}$: $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{cotg}\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -3$, e infatti $-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} = -3$.

1.4 Proprietà e grafici delle funzioni goniometriche

In *Matematica 3* (cap. 3) hai imparato a descrivere una funzione attraverso le sue proprietà: dominio, immagine, zeri e segno, monotonia, simmetrie, periodicità. Applichiamo ora quel linguaggio alle funzioni goniometriche. I grafici di $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$ li conosci da *Matematica 2*; qui li rileggiamo, ne aggiungiamo uno, quello della cotangente, e ne deduciamo altri.

1.4.1 Periodo e parità

Una funzione f è **periodica** di periodo $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio, e T è il più piccolo numero positivo con questa proprietà. Seno e coseno hanno periodo 2π. L'uguaglianza $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ l'abbiamo vista con la funzione avvolgimento; e nessun numero minore va bene, perché il seno assume il valore massimo 1 soltanto nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, che distano 2π l'uno dall'altro. Lo stesso ragionamento vale per il coseno.

Tangente e cotangente hanno invece periodo π. Infatti $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}\ x$ per gli archi associati: $P(x)$ e $P(x + \pi)$ sono diametralmente opposti, stanno sulla stessa retta per O, e questa incontra la retta $x = 1$ in un unico punto T. Un periodo più piccolo non esiste, perché gli zeri della tangente, $x = k\pi$, distano π l'uno dall'altro: un periodo T con $0 < T < \pi$ porterebbe lo zero $x = 0$ in un nuovo zero $x = T$, che non c'è.

Dagli angoli opposti segue la parità: il coseno è una funzione **pari**, $\cos(-x) = \cos x$, e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y; seno, tangente e cotangente sono funzioni **dispari**, $f(-x) = -f(x)$, con il grafico simmetrico rispetto all'origine. La Tabella 1.4 raccoglie tutte le proprietà.

Tabella 1.4 Le proprietà delle funzioni goniometriche ($k \in \mathbb{Z}$).

	$y = \text{sen}\ x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg}\ x$	$y = \text{cotg}\ x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq k\pi$
Immagine	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Periodo	2π	2π	π	π
Parità	dispari	pari	dispari	dispari
Zeri	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
Crescente in	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$	$[-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$	—
Decrescente in	$[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$	$[2k\pi; \pi + 2k\pi]$	—	$]k\pi; \pi + k\pi[$
Massimo	1 in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	1 in $2k\pi$	—	—
Minimo	−1 in $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	−1 in $\pi + 2k\pi$	—	—

1.4.2 Monotonia e segno

La monotonia si legge sulla circonferenza. Quando x cresce da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, il punto $P(x)$ sale da $(0; -1)$ a $(0; 1)$ lungo la semicirconferenza di destra e la sua ordinata cresce: il seno è **crescente** in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, lungo la semicirconferenza di sinistra, P scende e il seno decresce. Allo stesso modo il coseno decresce in $[0; \pi]$, mentre P va da $(1; 0)$ a $(-1; 0)$ passando per B, e cresce in $[\pi; 2\pi]$.

La tangente è crescente in ogni intervallo $]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$, ma *non* è crescente nel suo dominio: $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ e tuttavia $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$. È la stessa situazione della funzione $y = \frac{1}{x}$ di *Matematica 3*, monotona in ciascun intervallo del dominio ma non nella loro unione. Il segno, infine, dipende dal quadrante: $\operatorname{sen} x > 0$ per $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$; $\cos x > 0$ per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; tangente e cotangente sono positive nel I e nel III quadrante, cioè per $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

1.4.3 Il grafico della cotangente

La cotangente ha dominio $x \neq k\pi$, periodo π, è dispari e si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Quando x si avvicina a 0 da destra, $\cos x$ si avvicina a 1 e $\operatorname{sen} x$ a 0 con valori positivi: $\operatorname{cotg} x$ assume valori positivi sempre più grandi. Quando x si avvicina a 0 da sinistra, $\operatorname{sen} x$ è negativo e $\operatorname{cotg} x$ assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto. Le rette $x = k\pi$ sono **asintoti verticali** del grafico (Figura 1.4); tra un asintoto e il successivo la cotangente è decrescente e assume tutti i valori reali.

Il grafico si può anche dedurre da quello della tangente. Per la disparità e per gli archi associati, $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = -\operatorname{cotg} x$, cioè $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$: il grafico della cotangente si ottiene traslando quello della tangente di $\frac{\pi}{2}$ verso destra e ribaltandolo poi rispetto all'asse x.

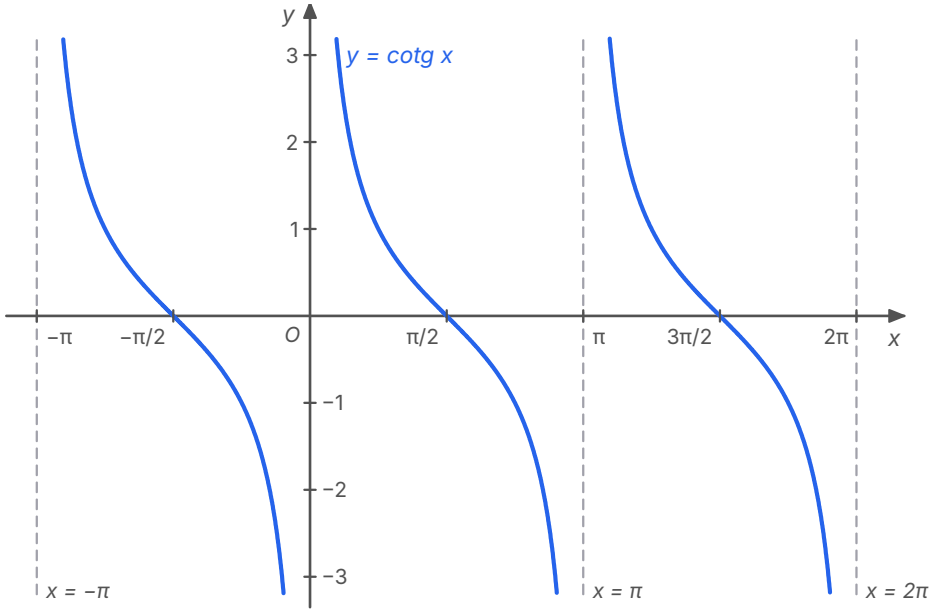


Figura 1.4 Il grafico di $y = \text{cotg}\, x$ per $-\pi < x < 2\pi$, con gli asintoti verticali $x = k\pi$ (l'asse y è l'asintoto $x = 0$). La funzione ha periodo π, è decrescente in ogni intervallo $]k\pi;\ \pi + k\pi[$ e si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Stessa unità sui due assi.

1.4.4 Grafici deducibili

Le trasformazioni studiate in *Matematica 3* si applicano senza cambiamenti. Vediamo le più utili.

- $y = a \operatorname{sen} x + b$, con $a \neq 0$: dilatazione verticale di fattore $|a|$ (con ribaltamento se $a < 0$) seguita dalla traslazione verticale di b. Il periodo resta 2π e l'immagine diventa $[b - |a|;\ b + |a|]$. Per esempio $f(x) = 3 - 2 \operatorname{sen} x$ ha immagine $[1; 5]$: il massimo 5 si ha dove $\operatorname{sen} x = -1$, cioè per $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, il minimo 1 dove $\operatorname{sen} x = 1$, cioè per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, e la funzione non ha zeri.
- $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$: traslazione di $\frac{\pi}{4}$ verso destra. Gli asintoti si spostano in $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ e gli zeri in $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; per $x = 0$ la funzione vale $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$.
- $y = |\operatorname{sen} x|$: le parti del grafico che stanno sotto l'asse x si ribaltano sopra. La funzione è pari, ha immagine $[0; 1]$ e periodo π, non 2π (Figura 1.5a).
- $y = \operatorname{sen} |x|$: per $x \geq 0$ coincide con $\operatorname{sen} x$; per $x < 0$ vale $\operatorname{sen}(-x)$, quindi il suo grafico è il simmetrico, rispetto all'asse y, del ramo con $x \geq 0$ (Figura 1.5b). La funzione è pari ma **non è periodica**: vicino all'origine ci sono due archi positivi consecutivi, su $]-\pi;\ 0[$ e su $]0;\ \pi[$, mentre

altrove archi positivi e negativi si alternano, e nessuna traslazione può riportare il grafico su se stesso.

- $y = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$: dove $\cos x = \pm 1$ anche la secante vale ±1; dove $|\cos x|$ diminuisce, $|\sec x|$ aumenta, e dove $\cos x = 0$ la secante non è definita e il grafico ha gli asintoti verticali $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Il grafico è formato da archi a forma di U, rivolti verso l'alto dove $\cos x > 0$ e verso il basso dove $\cos x < 0$; l'immagine è $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ e il periodo 2π.

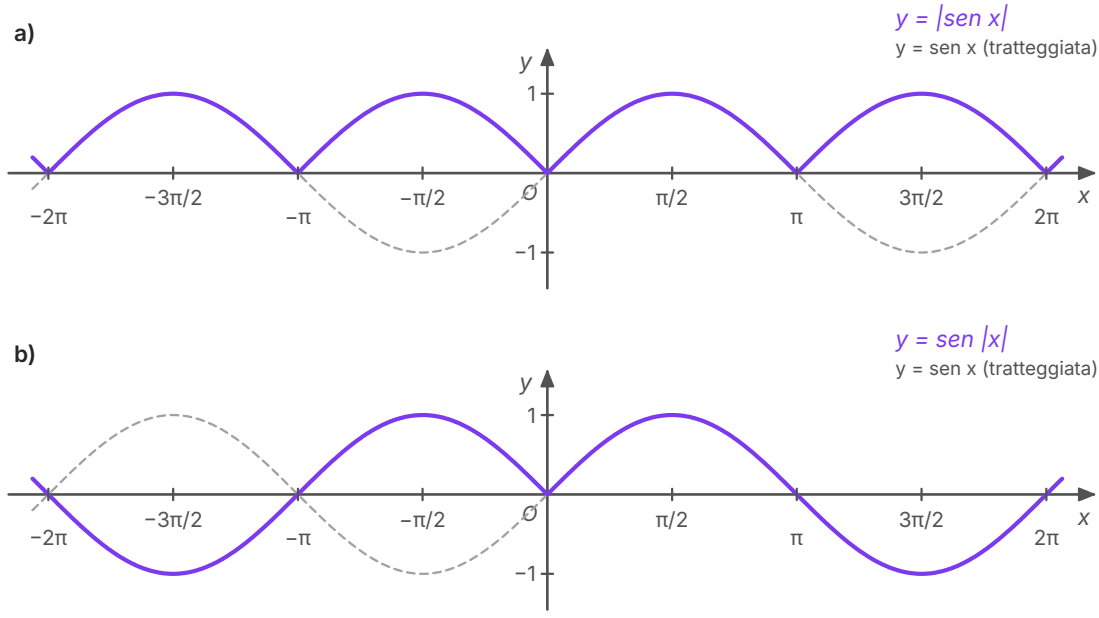


Figura 1.5 a) Il grafico di $y = |\text{sen } x|$: gli archi negativi di $y = \text{sen } x$ (tratteggiata) sono ribaltati sopra l'asse x e il periodo diventa π. b) Il grafico di $y = \text{sen } |x|$: per $x \geq 0$ coincide con $y = \text{sen } x$, per $x < 0$ è il simmetrico rispetto all'asse y. La funzione è pari e non è periodica.

1.5 Le funzioni goniometriche inverse

1.5.1 Restringere per invertire

Torniamo alla ruota panoramica: conosciamo l'altezza della cabina e cerchiamo l'angolo. In termini matematici: dato un numero m, cerchiamo x tale che $\text{sen } x = m$. In *Matematica 3* hai visto che una funzione è invertibile se è biiettiva, e che una funzione non iniettiva può diventarlo se se ne considera una **restrizione**, cioè la stessa legge su un dominio più piccolo, in cui ogni valore viene assunto una sola volta.

La funzione seno, da $\mathbb{R}$ a $[-1; 1]$, è suriettiva ma non iniettiva: la retta $y = \frac{1}{2}$ incontra il suo grafico in infiniti punti, $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, ... Restringiamola all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Qui il seno è crescente, quindi iniettivo, e assume tutti i valori tra -1 e 1: la restrizione è una biiezione di $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ su $[-1; 1]$. Non è l'unica scelta possibile (anche $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ andrebbe bene), ma è la più naturale, perché l'intervallo contiene lo 0 ed è simmetrico; è quella fissata per convenzione, ed è la stessa delle calcolatrici.

1.5.2 L'arcoseno

La funzione inversa della restrizione si chiama **arcoseno** e si indica con arcsen:

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

In parole: arcsen x è l'unico angolo dell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, misurato in radianti, il cui seno è x. Il dominio è $[-1; 1]$, l'immagine $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Per esempio $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcsen}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, mentre arcsen 2 non esiste. Il nome ricorda che l'angolo in radianti è la lunghezza di un arco della circonferenza goniometrica: arcsen x è «l'arco il cui seno è x».

Il grafico di $y = \operatorname{arcsen} x$ è il simmetrico, rispetto alla bisettrice $y = x$, del grafico del seno ristretto (Figura 1.6); perché la simmetria si veda, i due assi devono avere la stessa unità di misura. Dal grafico, o dalle proprietà del seno ristretto, si leggono le proprietà dell'arcoseno. È **crescente**, perché è l'inversa di una funzione crescente. È **dispari**, $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$, perché lo è il seno. Agli estremi del dominio il grafico diventa verticale: è il simmetrico dei tratti in cui il seno, vicino al massimo e al minimo, è quasi orizzontale.

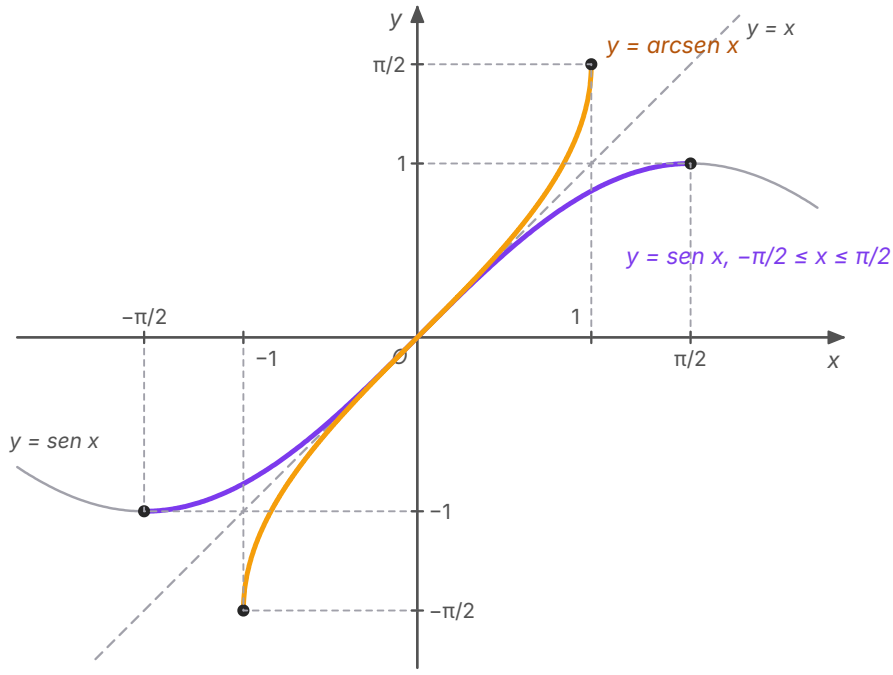


Figura 1.6 In viola il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (in grigio il resto del grafico del seno); in arancione il grafico della sua inversa $y = \arcsen x$, simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$. Il punto $(\frac{\pi}{2}; 1)$ del primo grafico corrisponde al punto $(1; \frac{\pi}{2})$ del secondo. Stessa unità sui due assi.

1.5.3 L'arcocoseno e l'arcotangente

Il coseno non è monotono in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, dove prima cresce e poi decresce, quindi per invertirlo si sceglie un altro intervallo: $[0; \pi]$, dove il coseno è decrescente e assume tutti i valori di $[-1; 1]$. L'inversa della restrizione è l'**arcocoseno**:

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \wedge 0 \le y \le \pi$$

Il dominio è $[-1; 1]$, l'immagine $[0; \pi]$, e la funzione è **decrescente**. Per esempio $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, $\arccos(-1) = \pi$. L'arcocoseno non è né pari né dispari: non è dispari perché i suoi valori non sono mai negativi, e non è pari perché $\arccos(-1) = \pi$ mentre $\arccos 1 = 0$. Vale invece

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1; 1]$$

Infatti, posto $y = \arccos x$, l'angolo $\pi - y$ sta ancora in $[0; \pi]$ e $\cos(\pi - y) = -\cos y = -x$: dunque $\pi - y$ è proprio l'arcocoseno di $-x$. Sul grafico questo significa che i punti $(x; y)$ e $(-x; \pi - y)$ stanno entrambi sulla curva: il punto $(0; \frac{\pi}{2})$ è un centro di simmetria (Figura 1.7a).

La tangente si restringe all'intervallo aperto $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, dove è crescente e assume tutti i valori reali. La sua inversa è l'**arcotangente**:

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, l'immagine $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; la funzione è crescente e dispari, con $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Gli asintoti verticali $x = \pm\frac{\pi}{2}$ della tangente ristretta diventano, nella simmetria rispetto alla bisettrice, gli **asintoti orizzontali** $y = \pm\frac{\pi}{2}$ del grafico dell'arcotangente (Figura 1.7b): per x molto grande $\operatorname{arctg} x$ è vicino a $\frac{\pi}{2}$ senza mai raggiungerlo. Analogamente, restringendo la cotangente a $]0; \pi[$ si ottiene l'*arcocotangente*, $\operatorname{arccotg}: \mathbb{R} \to]0; \pi[$, che in questo volume non useremo.

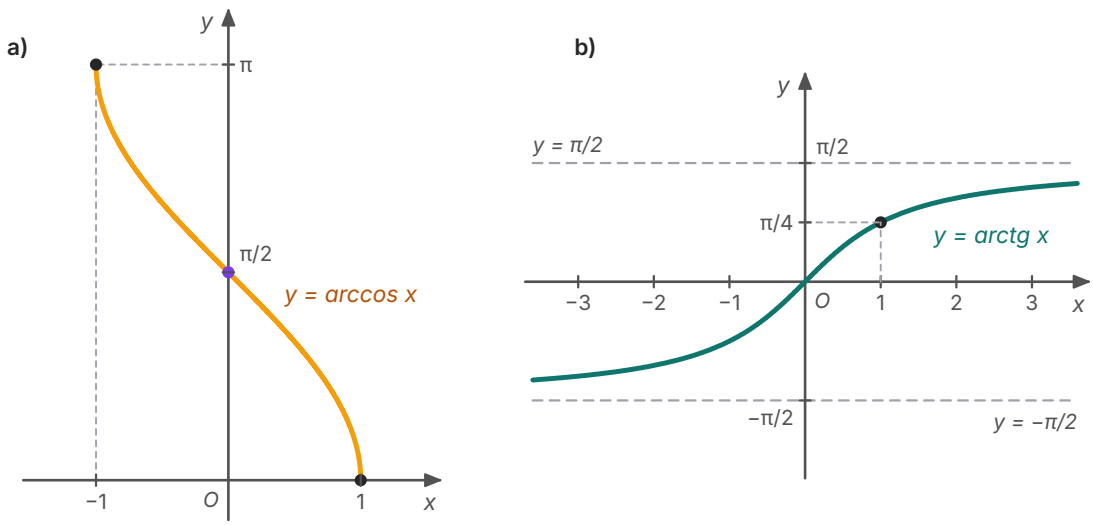


Figura 1.7 a) Il grafico di $y = \arccos x$: dominio $[-1; 1]$, immagine $[0; \pi]$, funzione decrescente, simmetrica rispetto al punto $(0; \frac{\pi}{2})$. b) Il grafico di $y = \operatorname{arctg} x$ con gli asintoti orizzontali $y = \pm\frac{\pi}{2}$; il punto evidenziato è $(1; \frac{\pi}{4})$. In ciascun grafico i due assi hanno la stessa unità.

IN SINTESI

Le funzioni goniometriche inverse.

• arcsen: $[-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, crescente, dispari.

• arccos: $[-1; 1] \to [0; \pi]$, decrescente, né pari né dispari: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

• arctg: $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, crescente, dispari, con gli asintoti orizzontali $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Ciascuna restituisce l'unico angolo del proprio intervallo che ha il valore dato: il **valore principale**.

1.5.4 Funzioni composte con le inverse

Per definizione, arcsen x è un angolo il cui seno è x; quindi $\text{sen}(\arcsen x) = x$ per ogni $x \in [-1; 1]$, e analogamente $\cos(\arccos x) = x$ per ogni $x \in [-1; 1]$ e $\text{tg}(\text{arctg}\, x) = x$ per ogni x reale. Nell'ordine opposto le cose cambiano. arcsen(sen x) è definito per ogni x reale, ma è un angolo di $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: coincide con x soltanto se x sta già in quell'intervallo. Per esempio $\arcsen(\text{sen}\, \frac{5\pi}{6}) = \arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, non $\frac{5\pi}{6}$.

Componendo una funzione goniometrica con l'inversa di un'altra si ottengono espressioni algebriche. Calcoliamo $\cos(\arcsen x)$: posto $y = \arcsen x$, si ha $\text{sen}\, y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, dove il coseno non è negativo; quindi $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Per esempio $\cos(\arcsen \frac{3}{5}) = \sqrt{1 - 9/25} = \frac{4}{5}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \arcsen(\sen x)$.

Soluzione. Il dominio è $\mathbb{R}$, perché $\sen x \in [-1; 1]$ per ogni x, e l'immagine è contenuta in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Poiché $\sen x$ ha periodo 2π, anche f ha periodo 2π: basta studiarla su un intervallo lungo 2π, per esempio $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

- Se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, x è già nell'intervallo di restrizione e $f(x) = x$.
- Se $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, l'angolo $\pi - x$ sta in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e ha lo stesso seno di x (angoli supplementari); quindi $f(x) = \arcsen(\sen(\pi - x)) = \pi - x$.

Il grafico (Figura 1.8) è una linea spezzata «a zig-zag», formata da segmenti di pendenza alternativamente 1 e −1, compresa tra le rette $y = \pm\frac{\pi}{2}$, con i vertici nei punti di ascissa $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Fuori da $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ si ripete con periodo 2π: per esempio, per $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$ si ha $f(x) = x - 2\pi$.

Controllo. $f(\frac{5\pi}{6}) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, come trovato sopra; $f(2) = \pi - 2 \approx 1{,}1416$, e la calcolatrice in modalità RAD dà proprio $\sin^{-1}(\sin 2) \approx 1{,}1416$.

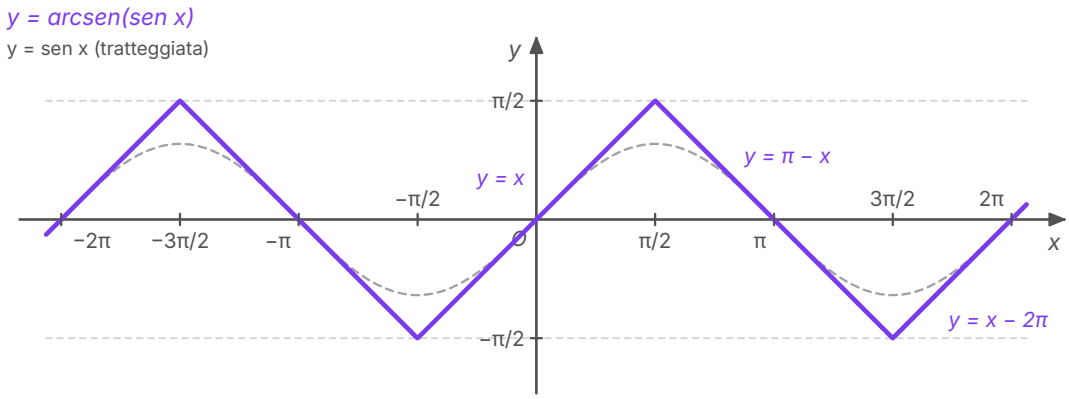


Figura 1.8 Il grafico di $y = \arcsen(\sen x)$: una spezzata periodica di periodo 2π, che coincide con $y = x$ solo per $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. In grigio tratteggiato il grafico di $y = \sen x$: i vertici della spezzata cadono dove il seno ha i massimi e i minimi. Stessa unità sui due assi.

1.5.5 Due identità con le funzioni inverse

IN SINTESI

Teorema. Per ogni $x \in [-1; 1]$ si ha $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Ipotesi: $x \in [-1; 1]$. **Tesi:** $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Dimostrazione. Sia $y = \arcsen x$: allora $\operatorname{sen} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. L'angolo $\frac{\pi}{2} - y$ soddisfa $0 \le \frac{\pi}{2} - y \le \pi$ e, per gli archi associati, $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \operatorname{sen} y = x$. Dunque $\frac{\pi}{2} - y$ è un angolo di $[0; \pi]$ il cui coseno è x; poiché in $[0; \pi]$ un angolo con questa proprietà è unico, $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$, cioè $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. c.v.d.

Con lo stesso metodo si dimostra che, per ogni $x \neq 0$,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ se } x > 0, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ se } x < 0$$

Per $x > 0$, se $y = \operatorname{arctg} x$ allora $0 < y < \frac{\pi}{2}$, e $\frac{\pi}{2} - y$ è un angolo di $]0; \frac{\pi}{2}[$ la cui tangente è $\operatorname{cotg} y = \frac{1}{x}$: quindi è $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. Il caso $x < 0$ segue dalla disparità dell'arcotangente (è un esercizio). L'identità ha un'interpretazione semplice: in un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 1 e x, i due angoli acuti hanno tangenti x e $\frac{1}{x}$, e sono complementari.

1.5.6 Le inverse sulla calcolatrice

I tasti $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ della calcolatrice calcolano arcsen, arccos e arctg, cioè il valore principale; il risultato è in radianti o in gradi secondo la modalità, RAD o DEG. Per esempio, in modalità RAD $\sin^{-1} 0{,}3 \approx 0{,}3047$, in modalità DEG $\sin^{-1} 0{,}3 \approx 17{,}46°$. Ma nell'intervallo $[0; 2\pi]$ gli angoli con seno 0,3 sono due: $\arcsen 0{,}3 \approx 0{,}3047$ e il supplementare $\pi - \arcsen 0{,}3 \approx 2{,}8369$. La calcolatrice ne dà uno solo; il secondo, e tutti quelli che differiscono da questi due di $2k\pi$, li dobbiamo trovare noi, come faremo nel capitolo 3. Analogamente $\cos^{-1}(-0{,}4) \approx 1{,}9823$ rad, cioè circa 113,58°: un angolo del secondo quadrante, come deve essere, perché il valore principale dell'arcocoseno sta in $[0; \pi]$.

ERRORE FREQUENTE

• Il simbolo $\sin^{-1}$ della calcolatrice indica la funzione inversa, non il reciproco: $\sin^{-1} x$ è arcsen x, mentre $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ è cosec x. Per esempio arcsen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$, ma $\frac{1}{\operatorname{sen}(1/2)} \approx 2{,}0858$. Per evitare l'equivoco, in questo libro scriviamo sempre arcsen, arccos, arctg.

• $\operatorname{sen}^2 x$ significa $(\operatorname{sen} x)^2$, mentre sen x^2 significa $\operatorname{sen}(x^2)$: per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} = 1$, ma sen $\frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}6243$.

• arcsen(sen x) = x è vero solo per $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, e arccos(cos x) = x solo per $0 \le x \le \pi$: per esempio $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

• arccos(−x) non è −arccos x: $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, non $-\frac{\pi}{3}$, che non appartiene nemmeno all'immagine dell'arcocoseno.

APPROFONDIMENTO · DA «CORDA» A «SENO»

Il nome «seno» ha una storia curiosa. Gli astronomi greci, come Tolomeo, calcolavano le *corde* degli archi di circonferenza; i matematici indiani preferirono la *semicorda*, che è il nostro seno, e la chiamarono con la parola sanscrita *jyā*, che indica la corda di un arco da tiro. I traduttori arabi trascrissero il termine come *jība*, una parola priva di significato in arabo, scritta, come d'uso, senza vocali.

Quando nel XII secolo i testi arabi furono tradotti in latino, la parola fu letta, secondo la ricostruzione più diffusa, come *jayb*, che in arabo significa «piega, tasca», e fu tradotta con il latino *sinus*, che ha un significato simile: «piega, curva, insenatura». Il nome «coseno», abbreviazione di «seno del complemento», è molto più tardo. Una corda di un arco da tiro diventata, per un errore di lettura, una piega: un piccolo esempio di come le idee matematiche abbiano viaggiato da una cultura all'altra.

1.6 Angoli da pendenze e da rapporti

Le funzioni inverse servono ogni volta che di un angolo conosciamo un rapporto tra due lunghezze e vogliamo l'angolo stesso. È la situazione più comune nei problemi di misura, di fisica e di geometria.

1.6.1 L'angolo di una retta

In *Matematica 2* hai visto che il coefficiente angolare di una retta $y = mx + q$ è la tangente dell'angolo α, con $0 \le \alpha < \pi$, di cui bisogna ruotare in verso antiorario il semiasse positivo delle x per

renderlo parallelo alla retta: $m = \text{tg}\,\alpha$. Ora possiamo leggere la relazione al contrario. Se $m \geq 0$ l'angolo è acuto o nullo e coincide con il valore principale: $\alpha = \text{arctg}\,m$. Se $m < 0$ l'angolo è ottuso, mentre arctg m è negativo: bisogna aggiungere π, cioè $\alpha = \pi + \text{arctg}\,m$.

Per esempio la retta $y = 2x - 1$ forma con l'asse x l'angolo $\alpha = \text{arctg}\,2 \approx 1{,}1071$ rad, cioè circa 63,43°; la retta $y = -\frac{x}{3} + 4$ forma l'angolo $\alpha = \pi + \text{arctg}(-\frac{1}{3})$, cioè circa $180° - 18{,}43° = 161{,}57°$. Nel capitolo 2 le formule di sottrazione ci daranno l'angolo fra due rette qualsiasi.

1.6.2 Pendenze, elevazioni, angoli visuali

La **pendenza** di una strada è il rapporto tra il dislivello e lo spostamento orizzontale, spesso espresso in percentuale: una pendenza del 10% significa che la strada sale di 10 m ogni 100 m percorsi in orizzontale. L'angolo θ che la strada forma con l'orizzontale ha dunque $\text{tg}\,\theta = 0{,}10$, cioè $\theta = \text{arctg}\,0{,}10 \approx 5{,}71°$. Attenzione: una pendenza del 100% corrisponde a un angolo di 45°, non a una parete verticale, che avrebbe pendenza «infinita».

L'**angolo di elevazione** di un oggetto è l'angolo che la retta dall'occhio dell'osservatore all'oggetto forma con il piano orizzontale. Se la cima di un campanile si trova 48 m più in alto degli occhi di chi la guarda e a 60 m di distanza in orizzontale, l'angolo di elevazione è $\text{arctg}\,\frac{48}{60} = \text{arctg}\,0{,}8 \approx 38{,}66°$.

COLLEGAMENTI

Fisica: l'angolo limite di attrito. Un blocco appoggiato su un piano inclinato di un angolo θ resta fermo finché la componente del peso parallela al piano, $mg\,\text{sen}\,\theta$, non supera la forza di attrito statico massima, $\mu_s\, mg\,\cos\theta$. Il blocco comincia a scivolare quando $mg\,\text{sen}\,\theta > \mu_s\, mg\,\cos\theta$, cioè quando $\text{tg}\,\theta > \mu_s$. L'angolo limite è quindi

$$\theta_{\text{lim}} = \text{arctg}\,\mu_s$$

e non dipende dalla massa del blocco. Con $\mu_s = 0{,}40$, per esempio, $\theta_{\text{lim}} = \text{arctg}\,0{,}40 \approx 21{,}8°$. Inclinare lentamente un piano finché un oggetto comincia a scivolare è dunque un modo semplice per misurare il coefficiente d'attrito statico: $\mu_s = \text{tg}\,\theta_{\text{lim}}$.

Più interessante è l'angolo sotto cui si vede un oggetto che non tocca il suolo, per esempio un quadro appeso a una parete. Se il bordo inferiore è a un'altezza a sopra gli occhi, il bordo superiore a un'altezza $b > a$ e l'osservatore è a distanza d dalla parete, i due bordi si vedono sotto gli angoli di elevazione $\text{arctg}\,\frac{a}{d}$ e $\text{arctg}\,\frac{b}{d}$, e il quadro sotto l'**angolo visuale**

$$\theta(d) = \text{arctg}\,\frac{b}{d} - \text{arctg}\,\frac{a}{d}$$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un murale alto 2,0 m ha il bordo inferiore 1,5 m più in alto degli occhi di un visitatore. Sotto quale angolo lo vede il visitatore da 2 m, da 3 m e da 6 m di distanza? Conviene avvicinarsi il più possibile?

Soluzione. Qui $a = 1{,}5$ m e $b = 1{,}5 + 2{,}0 = 3{,}5$ m. Con la calcolatrice in modalità DEG:

- $d = 2$ m: $\theta = \operatorname{arctg} 1{,}75 - \operatorname{arctg} 0{,}75 \approx 60{,}26° - 36{,}87° = 23{,}39°$;
- $d = 3$ m: $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{3{,}5}{3} - \operatorname{arctg} 0{,}5 \approx 49{,}40° - 26{,}57° = 22{,}83°$;
- $d = 6$ m: $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{3{,}5}{6} - \operatorname{arctg} 0{,}25 \approx 30{,}26° - 14{,}04° = 16{,}22°$.

Allontanarsi riduce l'angolo, ma avvicinarsi troppo non conviene: a un passo dalla parete il murale si vede di scorcio e l'angolo torna a diminuire. Per $d = 0{,}5$ m, infatti, $\theta = \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 3 \approx 81{,}87° - 71{,}57° = 10{,}30°$. Esiste quindi una distanza migliore, compresa tra 0,5 m e 3 m: la cercheremo per tentativi con il foglio di calcolo negli esercizi.

SINTESI

- Gli angoli orientati possono avere ampiezza qualsiasi; angoli che differiscono di $2k\pi$ (o di $k \cdot 360°$) individuano lo stesso punto della circonferenza goniometrica e hanno le stesse funzioni goniometriche.
- La funzione avvolgimento associa a ogni numero reale t il punto $P(t) = (\cos t; \text{sen } t)$ della circonferenza goniometrica: per questo seno e coseno sono funzioni reali di variabile reale, con la variabile in radianti.
- $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$ è l'ascissa del punto in cui la retta OP incontra la retta $y = 1$; $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$.
- Ogni funzione goniometrica si esprime per mezzo di ciascuna delle altre con la relazione fondamentale; il segno si sceglie in base al quadrante.
- Archi associati: i multipli di π non cambiano la funzione, i multipli dispari di $\dfrac{\pi}{2}$ scambiano seno e coseno, tangente e cotangente; il segno è quello della funzione di partenza nel quadrante di arrivo.
- Un'identità goniometrica è vera per tutti i valori che soddisfano le C.E.; si verifica trasformando un membro nell'altro.
- Seno e coseno hanno periodo 2π e immagine $[-1; 1]$; tangente e cotangente hanno periodo π, immagine $\mathbb{R}$ e asintoti verticali. Il coseno è pari, le altre tre sono dispari.
- Dai grafici noti si deducono quelli di $y = a \text{ sen } x + b$, $y = |\text{sen } x|$ (periodo π), $y = \text{sen } |x|$ (pari, non periodica), $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $y = \sec x$.
- Restringendo seno, coseno e tangente a $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $[0; \pi]$ e $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ si ottengono arcsen, arccos e arctg; i loro grafici sono i simmetrici dei grafici ristretti rispetto alla bisettrice $y = x$.
- $\text{sen}(\text{arcsen } x) = x$ per $x \in [-1; 1]$, ma $\text{arcsen}(\text{sen } x) = x$ solo per $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; inoltre $\text{arcsen } x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ e $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
- L'angolo di una retta di coefficiente angolare m è $\text{arctg } m$ se $m \geq 0$, $\pi + \text{arctg } m$ se $m < 0$; pendenze, elevazioni e angoli visuali si calcolano con l'arcotangente.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● L'angolo di $-870°$ individua sulla circonferenza goniometrica lo stesso punto dell'angolo:
   - **A.** $210°$
   - **B.** $150°$
   - **C.** $30°$
   - **D.** $330°$

2. ● $\text{cotg}\ \frac{2\pi}{3}$ vale:
   - **A.** $\sqrt{3}$
   - **B.** $-\sqrt{3}$
   - **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
   - **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. ● Quale uguaglianza è vera per ogni α per cui i due membri sono definiti?
   - **A.** $\text{sen}(\pi + \alpha) = \text{sen}\ \alpha$
   - **B.** $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \text{sen}\ \alpha$
   - **C.** $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$
   - **D.** $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

4. ● Il periodo della funzione $y = |\cos x|$ è:
   - **A.** 2π
   - **B.** π
   - **C.** $\frac{\pi}{2}$
   - **D.** 4π

5. ●● $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ vale:
   - **A.** $\frac{3\pi}{4}$
   - **B.** $-\frac{\pi}{4}$
   - **C.** $\frac{5\pi}{4}$
   - **D.** $\frac{\pi}{4}$

6. ●● Quale funzione ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$?

   A. $y = \text{arcsen } x$
   B. $y = \arccos x$
   C. $y = \text{tg } x$
   D. $y = \text{arctg } x$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) La funzione avvolgimento è iniettiva.
   b) $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ per ogni α per cui è definita la cotangente.
   c) La funzione $y = \text{sen } x$ è crescente nell'intervallo $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
   d) $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen } x$ per ogni $x \in [-1; 1]$.
   e) La tangente è crescente nel suo dominio.

8. ● Completa.
   a) $\arccos x$ è l'unico angolo dell'intervallo _____ il cui coseno è x.
   b) Il dominio della cotangente è _____ .
   c) Le rette _____ sono asintoti orizzontali del grafico di $y = \text{arctg } x$.
   d) Per la regola degli archi associati, $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) =$ _____ .

9. ●● Spiega perché per invertire il seno si sceglie l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e non $[0; \pi]$. Quale intervallo si sceglie per il coseno, e perché non andrebbe bene lo stesso intervallo scelto per il seno?

Calcolare

10. ● Calcola senza calcolatrice.
    a) $\text{sen } \frac{7\pi}{6}$ b) $\cos(-\frac{11\pi}{4})$ c) $\text{tg } \frac{13\pi}{3}$ d) $\text{cotg}(-\frac{5\pi}{6})$ e) $\cos 1035°$ f) $\text{sen}(-1500°)$

11. ● Sapendo che $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ e che $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcola $\text{sen } \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{cotg } \alpha$, $\sec \alpha$ e $\text{cosec } \alpha$.

12. ●● Sapendo che $\text{cotg } \alpha = 2$ e che $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcola $\text{sen } \alpha$ e $\cos \alpha$.

13. ●● Per α nel II quadrante esprimi $\text{sen } \alpha$ e $\text{tg } \alpha$ in funzione di $\cos \alpha$; poi calcolali per $\cos \alpha = -0{,}6$.

14. ● Semplifica le espressioni, indicando le condizioni di esistenza.
    a) $\text{sen}(\pi - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \text{sen}(-\alpha)$
    b) $\text{tg}(\pi - \alpha) \cdot \text{cotg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\cos(-\alpha)}$
    c) $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cos(\pi - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \text{sen}(\pi + \alpha)$

15. ●● Calcola il valore delle espressioni.
a) $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} + \cos\ \frac{4\pi}{3} - \text{tg}\ \frac{7\pi}{4}$
b) $2\cos(-\frac{\pi}{3}) \cdot \text{cotg}\ \frac{5\pi}{4} - \text{sen}^2\frac{11\pi}{6}$
c) $\sec\ \frac{2\pi}{3} + \text{cosec}(-\frac{\pi}{6})$

16. ●● Verifica le identità, indicando le condizioni di esistenza.
a) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \text{tg}^2\alpha) = \text{tg}^2\alpha$
b) $\frac{1}{1 - \text{sen}\ \alpha} + \frac{1}{1 + \text{sen}\ \alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$
c) $(\text{sen}\ \alpha + \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

17. ●● Determina immagine e periodo delle funzioni e indica i punti di massimo e di minimo.
a) $y = 2\cos x + 1$ b) $y = 1 - 3\ \text{sen}\ x$ c) $y = |\cos x| - 1$

18. ●● Traccia il grafico deducibile e indicane dominio, zeri e asintoti.
a) $y = \text{tg}(x + \frac{\pi}{3})$ b) $y = -\text{cotg}\ x$ c) $y = |\text{tg}\ x|$

19. ● Calcola.
a) $\text{arcsen}(-\frac{1}{2})$ b) $\arccos\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\text{arctg}(-1)$ d) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ e) $\text{arcsen}\ 1 + \arccos 1$ f) $\text{arctg}\ \sqrt{3} - \text{arcsen}\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

20. ●● Calcola, se esistono.
a) $\text{sen}(\arccos(-\frac{4}{5}))$ b) $\text{tg}(\text{arcsen}\ \frac{5}{13})$ c) $\text{arcsen}(\text{sen}\ \frac{2\pi}{3})$ d) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4}))$
e) $\text{arctg}(\text{tg}\ \frac{5\pi}{4})$ f) $\arccos\ \frac{3}{2}$ g) $\cos(\text{arctg}\ 2)$

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra, con le simmetrie della circonferenza goniometrica, che $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ e $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$ per ogni α.

22. ●● Dimostra che la cotangente è una funzione dispari e periodica di periodo π.

23. ●● Dimostra che $\text{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ per ogni $x \in [-1; 1]$. Perché davanti alla radice non c'è il doppio segno?

24. ●●● Dimostra che $\text{arctg}\ x + \text{arctg}\ \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ per ogni $x < 0$, usando il caso $x > 0$ dimostrato nel testo.

25. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «arcsen(sen $\frac{3\pi}{4}$) = $\frac{3\pi}{4}$, perché arcsen e sen sono l'una l'inversa dell'altra». Spiega dove sbaglia e calcola il valore corretto.

Problemi

26. ● Un cartello stradale indica una pendenza del 12%. Quale angolo forma la strada con l'orizzontale? Quale pendenza percentuale corrisponde invece a una strada inclinata di 3°?

27. ●● Determina l'angolo, in gradi con due decimali, che ciascuna retta forma con il semiasse positivo delle x.
a) $y = 3x - 2$ b) $y = -2x + 5$ c) $2x + 5y - 1 = 0$

28. ●● Una scala lunga 4,5 m è appoggiata a un muro verticale, con il piede a 1,6 m dal muro.
a) Calcola con l'arcocoseno l'angolo che la scala forma con il pavimento.
b) Calcola lo stesso angolo con l'arcotangente, dopo aver trovato l'altezza a cui la scala tocca il muro.
c) Supponi che, per sicurezza, l'angolo debba essere compreso tra 70° e 80°. Entro quali distanze dal muro va posto il piede della scala? La posizione iniziale va bene?

29. ●● Un'antenna alta 12 m è montata sul tetto di un edificio alto 30 m. Un osservatore, con gli occhi a 1,6 m da terra, si trova a 50 m dall'edificio.
a) Calcola gli angoli di elevazione della base e della cima dell'antenna.
b) Sotto quale angolo l'osservatore vede l'antenna?

30. ●●● Un punto parte da $A(1; 0)$ e si muove in verso antiorario sulla circonferenza goniometrica, percorrendo un arco lungo 10 (il raggio è l'unità di misura).
a) In quale quadrante si ferma?
b) Quali sono le sue coordinate, con quattro decimali?
c) Qual è l'arco positivo più corto che porta nello stesso punto? E qual è, tra tutti gli archi con segno che portano nello stesso punto, quello di valore assoluto minimo?

Con il computer

31. ●● Con un software di geometria dinamica, traccia $y = \text{sen } x$ e, con un altro colore, la sua restrizione a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; aggiungi $y = \arcsen x$ e la retta $y = x$ e verifica la simmetria (imposta la stessa unità sui due assi). Poi traccia $y = \arcsen(\text{sen } x)$ e $y = \arccos(\cos x)$: descrivi i due grafici, indicane il periodo e stabilisci quale dei due è una funzione pari.

32. ●● In un foglio di calcolo riprendi l'esempio del murale (a = 1,5 m, b = 3,5 m). Nella colonna A scrivi le distanze d da 0,5 m a 6 m con passo 0,1 m; nella colonna B calcola l'angolo visuale in gradi, per esempio con la formula =GRADI(ARCTAN(3,5/A2)−ARCTAN(1,5/A2)). Trova la distanza per cui l'angolo è massimo e raffina la ricerca con passo 0,01 m. Confronta il risultato con $\sqrt{ab}$.

Verso la verifica

33. ●● Sapendo che $\text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{3}$ e che $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$:

    a) calcola $\cos\alpha$ e $\text{cotg}\,\alpha$;

    b) calcola $E = \cos(\pi - \alpha) + \text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \text{sen}(\pi + \alpha)$;

    c) dimostra che E vale 0 per ogni α per cui è definita.

34. ●● Considera la funzione $f(x) = \arccos(2x - 1)$.

    a) Determina dominio e immagine.

    b) Calcola $f(0), f(\frac{1}{4}), f(1)$.

    c) Stabilisci se f è crescente o decrescente, motivando la risposta.

    d) Risolvi l'equazione $f(x) = \frac{\pi}{3}$.

35. ●●● **Sfida.** Dimostra che $\text{arctg}\,\frac{1}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

    Suggerimento: considera i punti $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(1; 3)$; dimostra che il triangolo OAB è rettangolo isoscele in A, deduci che $\text{arctg}\,3 - \text{arctg}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$ e usa un'identità di questo capitolo.

PER APPROFONDIRE

- MAOT — i capitoli sulla nascita del seno e sulle funzioni goniometriche inverse, con molti problemi di misura.
- BOY — i capitoli sulla trigonometria indiana e araba e sulla sua trasmissione all'Europa medievale.
- POL — per il metodo: nei problemi con un angolo incognito, «disegna una figura» e cerca il rapporto che lo determina.

Glossario del capitolo

Angolo di elevazione
Angolo che la retta dall'occhio dell'osservatore a un oggetto forma con il piano orizzontale.

Angolo orientato
Angolo descritto dalla rotazione che porta il lato origine sul lato termine; positivo se la rotazione è antioraria, negativo se è oraria. Può avere ampiezza qualsiasi.

Angolo visuale
Angolo sotto cui un osservatore vede un oggetto, cioè l'angolo tra le rette che vanno dall'occhio agli estremi dell'oggetto.

Archi associati
Gli angoli $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$, $\pi/2 \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$, le cui funzioni goniometriche si esprimono con quelle di α a meno del segno o dello scambio tra seno e coseno.

Arcocoseno
Funzione inversa del coseno ristretto a $[0; \pi]$: arccos: $[-1; 1] \to [0; \pi]$.

Arcoseno
Funzione inversa del seno ristretto a $[-\pi/2; \pi/2]$: arcsen: $[-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$.

Arcotangente
Funzione inversa della tangente ristretta a $]-\pi/2; \pi/2[$: arctg: $\mathbb{R} \to]-\pi/2; \pi/2[$.

Asintoto verticale
Retta $x = c$ a cui il grafico si avvicina indefinitamente mentre i valori della funzione crescono senza limite in valore assoluto; per tg x sono le rette $x = \pi/2 + k\pi$, per cotg x le rette $x = k\pi$.

Circonferenza goniometrica
Circonferenza con centro nell'origine e raggio 1; il punto associato all'angolo α ha coordinate $(\cos \alpha; \text{sen } \alpha)$.

Cosecante
$\text{cosec } \alpha = 1 / \text{sen } \alpha$, definita per $\alpha \neq k\pi$.

Cotangente
$\text{cotg } \alpha = \cos \alpha / \text{sen } \alpha$, definita per $\alpha \neq k\pi$; è l'ascissa del punto in cui la retta OP incontra la retta $y = 1$.

Funzione avvolgimento
Funzione che associa a ogni numero reale t il punto P(t) della circonferenza goniometrica estremo di un arco con origine in A(1; 0) lungo $|t|$, antiorario se $t > 0$.

Funzione periodica
Funzione per cui esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio; il più piccolo T con questa proprietà è il periodo.

Identità goniometrica
Uguaglianza tra espressioni goniometriche vera per tutti i valori della variabile che soddisfano le condizioni di esistenza.

Pendenza
Rapporto tra dislivello e spostamento orizzontale, spesso in percentuale; è la tangente dell'angolo con l'orizzontale.

Relazione fondamentale
L'identità $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valida per ogni α.

Restrizione
La stessa legge di una funzione considerata su un sottoinsieme del dominio; si usa per rendere iniettiva, e quindi invertibile, una funzione che non lo è.

Secante
$\sec \alpha = 1 / \cos \alpha$, definita per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$.

Valore principale
L'angolo restituito da una funzione goniometrica inversa (e dai tasti $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ della calcolatrice): l'unico dell'intervallo di restrizione con il valore dato.

Soluzioni

1. A. $-870° + 3 \cdot 360° = 210°$ (e anche $-150°$, che però non è tra le risposte).

2. C. $\text{cotg}\ \frac{2\pi}{3} = \frac{\cos(2\pi/3)}{\text{sen}(2\pi/3)} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. D. Angoli supplementari. Le altre sono false: $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$.

4. B. Il valore assoluto ribalta sopra l'asse gli archi negativi; poiché $\cos(x + \pi) = -\cos x$, si ha $|\cos(x + \pi)| = |\cos x|$, e nessun numero positivo minore di π funziona (gli zeri distano π).

5. A. $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

6. D. arcsen e arccos hanno dominio $[-1; 1]$; la tangente ha immagine $\mathbb{R}$.

7. a) Falso: t e $t + 2\pi$ hanno la stessa immagine. b) Falso: per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la cotangente vale 0 e la tangente non esiste; l'uguaglianza vale per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$. c) Falso: in quell'intervallo il seno è decrescente. d) Vero. e) Falso: è crescente in ogni intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, ma $\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = 1 > \text{tg}\ \frac{3\pi}{4} = -1$.

8. a) $[0; \pi]$; b) $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $y = \pm\frac{\pi}{2}$; d) $-\cos\alpha$.

9. In $[0; \pi]$ il seno non è iniettivo ($\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{6}$) e assume solo valori non negativi; in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ è crescente e assume tutti i valori di $[-1; 1]$. Per il coseno si sceglie $[0; \pi]$, dove è decrescente e assume tutti i valori di $[-1; 1]$; in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ il coseno è pari, quindi non iniettivo, e assume solo valori di $[0; 1]$.

10. a) $-\frac{1}{2}(\pi + \frac{\pi}{6})$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{3\pi}{4})$; c) $\sqrt{3}(\frac{13\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi}{3})$; d) $\sqrt{3}(-\text{cotg}\ \frac{5\pi}{6} = \text{cotg}\ \frac{\pi}{6})$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1035° - 720° = 315°)$; f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(-\text{sen}\ 1500° = -\text{sen}\ 60°)$.

11. III quadrante: $\text{sen}\ \alpha = -\sqrt{1 - 25/169} = -\frac{12}{13}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{12}{5}$; $\text{cotg}\ \alpha = \frac{5}{12}$; $\sec\alpha = -\frac{13}{5}$; $\text{cosec}\ \alpha = -\frac{13}{12}$.

12. $\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{1 + \text{cotg}^2\alpha} = \frac{1}{5}$; nel III quadrante $\text{sen}\ \alpha < 0$: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \text{cotg}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

13. Nel II quadrante $\text{sen}\ \alpha > 0$: $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ e $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ (negativa perché $\cos\alpha < 0$). Per $\cos\alpha = -0{,}6$: $\text{sen}\ \alpha = 0{,}8$, $\text{tg}\ \alpha = -\frac{4}{3}$.

14. a) $\text{sen}\ \alpha - \text{sen}\ \alpha - \text{sen}\ \alpha = -\text{sen}\ \alpha$, per ogni α. b) C.E. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $(-\text{tg}\ \alpha)(-\text{tg}\ \alpha) + 1 = \text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. c) $\cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) - (-\text{sen}\ \alpha)(-\text{sen}\ \alpha) = -\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = -1$, per ogni α.

15. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (-1) = 1$; b) $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; c) $-2 + (-2) = -4$.

16. a) C.E. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\text{sen}^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \text{tg}^2\alpha$. b) C.E. $\text{sen}\ \alpha \neq \pm 1$, cioè $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\frac{(1 + \text{sen}\ \alpha) + (1 - \text{sen}\ \alpha)}{1 - \text{sen}^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$. c) Per ogni α: sviluppando, $2\,\text{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$ (i doppi prodotti si elidono).

17. Dominio $\mathbb{R}$ in tutti e tre i casi. a) Immagine $[-1; 3]$, periodo 2π; massimo 3 per $x = 2k\pi$, minimo -1 per $x = \pi + 2k\pi$. b) Immagine $[-2; 4]$, periodo 2π; massimo 4 per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, minimo -2 per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. c) Immagine $[-1; 0]$, periodo π; massimo 0 per $x = k\pi$, minimo -1 per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

18. a) Traslazione di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra: dominio $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$, zeri $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, asintoti $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. b) Simmetrico di $y = \text{cotg}\, x$ rispetto all'asse x: dominio $x \neq k\pi$, zeri $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, asintoti $x = k\pi$; la funzione è crescente in ogni intervallo $]k\pi; \pi + k\pi[$. c) Gli archi negativi si ribaltano: dominio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, zeri $x = k\pi$, asintoti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; immagine $[0; +\infty[$, funzione pari di periodo π.

19. a) $-\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $-\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{5\pi}{6}$; e) $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$; f) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

20. a) $\frac{3}{5}$ (l'angolo sta in $[0; \pi]$, dove il seno non è negativo); b) $\frac{5}{12}$ (l'angolo è acuto, con coseno $\frac{12}{13}$); c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) non esiste, perché $\frac{3}{2} \notin [-1; 1]$; g) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (l'angolo sta in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, dove il coseno è positivo, e $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{5}$).

21. Traccia. $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$: la simmetria rispetto a $y = x$ porta $P(\cos\alpha; \text{sen}\,\alpha)$ in $P'(\text{sen}\,\alpha; \cos\alpha)$, quella rispetto all'asse y porta P' in $P''(-\text{sen}\,\alpha; \cos\alpha)$; l'ascissa di P'' è $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$. Analogamente $\frac{3\pi}{2} - \alpha = \pi + (\frac{\pi}{2} - \alpha)$: la simmetria rispetto all'origine porta P' in $(-\text{sen}\,\alpha; -\cos\alpha)$, la cui ordinata è $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$.

22. Traccia. Per $\alpha \neq k\pi$: $\text{cotg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha} = -\text{cotg}\,\alpha$. Inoltre $\text{cotg}(\alpha + \pi) = \frac{-\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$; nessun numero T con $0 < T < \pi$ è un periodo, perché gli zeri $\frac{\pi}{2} + k\pi$ distano π.

23. Traccia. Posto $y = \arccos x$, si ha $\cos y = x$ e $0 \le y \le \pi$; in questo intervallo $\text{sen}\, y \ge 0$, quindi $\text{sen}\, y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Il segno è determinato perché l'immagine dell'arcocoseno sta nei quadranti in cui il seno non è negativo.

24. Traccia. Se $x < 0$, allora $-x > 0$ e, per il caso dimostrato, $\text{arctg}(-x) + \text{arctg}(-\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. Per la disparità dell'arcotangente il primo membro è $-\text{arctg}\, x - \text{arctg}\, \frac{1}{x}$; quindi $\text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

25. $\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x$ solo per $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, e $\frac{3\pi}{4}$ non appartiene a questo intervallo. Il valore corretto: $\text{sen}\, \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi $\text{arcsen}\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (è $\pi - \frac{3\pi}{4}$).

26. $\text{arctg}\, 0{,}12 \approx 6{,}84°$; $\text{tg}\, 3° \approx 0{,}0524$, cioè una pendenza di circa il 5,2%.

27. a) $\text{arctg}\, 3 \approx 71{,}57°$; b) $180° - \text{arctg}\, 2 \approx 180° - 63{,}43° = 116{,}57°$; c) $m = -\frac{2}{5}$: $180° - \text{arctg}\, 0{,}4 \approx 180° - 21{,}80° = 158{,}20°$.

28. a) $\theta = \arccos \frac{1{,}6}{4{,}5} \approx 69{,}17°$. b) $h = \sqrt{4{,}5^2 - 1{,}6^2} = \sqrt{17{,}69} \approx 4{,}21$ m; $\theta = \text{arctg}\, \frac{4{,}206}{1{,}6} \approx 69{,}17°$. c) Distanza $d = 4{,}5 \cos\theta$: tra $4{,}5 \cos 80° \approx 0{,}78$ m e $4{,}5 \cos 70° \approx 1{,}54$ m. A 1,6 m l'angolo è di poco inferiore a 70°: il piede va avvicinato al muro.

29. a) Base: dislivello $30 - 1{,}6 = 28{,}4$ m, $\text{arctg}\, \frac{28{,}4}{50} \approx 29{,}60°$; cima: dislivello 40,4 m, $\text{arctg}\, \frac{40{,}4}{50} \approx 38{,}94°$. b) $38{,}94° - 29{,}60° \approx 9{,}34°$.

30. a) $10 - 2\pi \approx 3{,}7168$ e $\pi < 3{,}7168 < \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7124$: III quadrante. b) $(\cos 10; \operatorname{sen} 10) \approx (-0{,}8391; -0{,}5440)$. c) $10 - 2\pi \approx 3{,}7168$; l'arco di valore assoluto minimo è $10 - 4\pi \approx -2{,}5664$.

31. Traccia. Il grafico di $y = \arcsen(\operatorname{sen} x)$ è la spezzata della Figura 1.8. Il grafico di $y = \arccos(\cos x)$ coincide con $y = |x|$ per $-\pi \le x \le \pi$ e si ripete con periodo 2π: è una spezzata «a denti» tra $y = 0$ e $y = \pi$. Entrambe hanno periodo 2π; è pari la seconda (perché il coseno è pari), mentre la prima è dispari.

32. L'angolo massimo si ha per $d \approx 2{,}29$ m e vale circa 23,58°; infatti $\sqrt{ab} = \sqrt{1{,}5 \cdot 3{,}5} = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$ m.

33. a) III quadrante: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - 4/9} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{-\sqrt{5}/3}{-2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$; quindi $E = \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0$. c) E è definita per $\alpha \neq k\pi$, dove esiste $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$; per questi α: $E = -\cos\alpha + (-\operatorname{cotg}\alpha)(-\operatorname{sen}\alpha) = -\cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$.

34. a) $-1 \le 2x - 1 \le 1$, cioè dominio $[0; 1]$; immagine $[0; \pi]$. b) $f(0) = \arccos(-1) = \pi$; $f(\frac{1}{4}) = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$; $f(1) = \arccos 1 = 0$. c) Decrescente: $2x - 1$ è crescente e arccos è decrescente, quindi se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$. d) $2x - 1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, che appartiene al dominio.

35. Traccia. I vettori $OA = (2; 1)$ e $AB = (-1; 2)$ hanno lunghezza $\sqrt{5}$ e prodotto scalare $-2 + 2 = 0$: il triangolo OAB è rettangolo isoscele in A, quindi l'angolo AOB è $\frac{\pi}{4}$. La retta OA forma con l'asse x l'angolo $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, la retta OB l'angolo $\operatorname{arctg} 3$, e B si ottiene ruotando in verso antiorario; quindi $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Poiché $\operatorname{arctg} 3 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ (identità di $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$), si ottiene $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$, cioè la tesi.