Verifica di fine parte IV · Esponenziali e logaritmi

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica. Scrivi tutti i passaggi e controlla le soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 12)* Quale delle seguenti funzioni è decrescente su tutto $\mathbb{R}$?
   A. $y = 2^x$
   B. $y = 1{,}5^x$
   C. $y = 0{,}7^x$
   D. $y = e^x$

2. ● *(0,5 punti · cap. 12)* L'espressione 2^{x+3} è uguale a:
   A. $2^x + 8$
   B. $8 \cdot 2^x$
   C. 2^{3x}
   D. $6 \cdot 2^x$

3. ● *(0,5 punti · cap. 13)* Il valore di $\log_2 48 - \log_2 3$ è:
   A. 4
   B. $\log_2 45$
   C. 16
   D. 2

4. ●● *(0,5 punti · cap. 13)* Il dominio della funzione $y = \log(x^2 - x)$ è:
   A. $x > 1$
   B. $0 < x < 1$
   C. $x \neq 0 \wedge x \neq 1$
   D. $x < 0 \vee x > 1$

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 12)* Risolvi l'equazione $4^{x+1} = 8^{x-1}$.

6. ●● *(1 punto · cap. 12)* Risolvi la disequazione $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$.

7. ●● *(1 punto · cap. 13)* Risolvi l'equazione $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 4) = 3$.

8. ●● *(1 punto · cap. 13)* a) Risolvi $2 \cdot 3^{x} = 11$ (valore approssimato a tre decimali). b) Risolvi $\log_{1/2}(x - 1) \geq -2$.

Problemi

9. ●● *(1 punto · cap. 12–13)* Il numero di batteri in una coltura (dati inventati) è $N(t) = 800\, e^{0{,}35t}$, con t in ore. a) Quanti batteri ci sono dopo 4 ore? b) Calcola il tempo di raddoppio. c) Dopo quanto tempo i batteri sono 20 000?

10. ●● *(1 punto · cap. 13)* Il livello sonoro di un compressore è 78 dB. a) Calcola l'intensità del suono, sapendo che $L = 10 \log (I/I_0)$ con $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. b) Quale livello si misura se quattro compressori uguali funzionano insieme (le intensità si sommano)?

11. ●● *(1 punto · cap. 13)* **Dimostrazione.** Dimostra la formula del cambiamento di base $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a, c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$, $b > 0$). Deduci che $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ quando anche $b \neq 1$ e $c > 0$.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 12–13)* È data l'equazione $9^{x} - 2 \cdot 3^{x+1} + k = 0$, con k parametro reale. a) Per quali valori di k ha due soluzioni reali distinte? b) Risolvila per $k = 5$ (valori approssimati a tre decimali).

Soluzioni

1. C. La base 0,7 è compresa tra 0 e 1.

2. B. $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$.

3. A. $\log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4$.

4. D. Serve $x^2 - x = x(x-1) > 0$: il prodotto è positivo all'esterno delle radici 0 e 1.

5. In base 2: $2^{2x+2} = 2^{3x-3}$, quindi $2x + 2 = 3x - 3$, $x = 5$. Controllo: $4^6 = 4096 = 8^4$ ✓.

6. Con $t = 3^x > 0$: $t^2 - 10t + 9 \le 0$, $1 \le t \le 9$, cioè $3^0 \le 3^x \le 3^2$; base maggiore di 1: $0 \le x \le 2$.

7. C.E. $x > 4$. $\log_3 [(x+2)(x-4)] = 3$, $(x+2)(x-4) = 27$, $x^2 - 2x - 35 = 0$, $x = 7$ oppure $x = -5$. Solo $x = 7$ soddisfa le C.E. Controllo: $\log_3 9 + \log_3 3 = 2 + 1 = 3$ ✓.

8. a) $3^x = 5{,}5$, $x = \log_3 5{,}5 = \frac{\ln 5{,}5}{\ln 3} \approx 1{,}552$ (0,5 punti). b) C.E. $x > 1$; $-2 = \log_{1/2} 4$; base minore di 1, il verso si inverte: $x - 1 \le 4$, $x \le 5$. Soluzioni $1 < x \le 5$ (0,5 punti).

9. a) $800\, e^{1{,}4} \approx 3244$ batteri. b) $T = \frac{\ln 2}{0{,}35} \approx 1{,}98$ h, circa 2 ore. c) $e^{0{,}35t} = 25$, $t = \frac{\ln 25}{0{,}35} \approx 9{,}2$ h.

10. a) $\log (I/I_0) = 7{,}8$, $I = 10^{7{,}8} \cdot 10^{-12} = 10^{-4{,}2} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. b) Intensità quadrupla: $L = 78 + 10 \log 4 \approx 78 + 6{,}0 = 84{,}0$ dB.

11. Sia $y = \log_a b$: $a^y = b$. Applicando $\log_c$ e la proprietà della potenza, $y \log_c a = \log_c b$; poiché $a \ne 1$, $\log_c a \ne 0$ e $y = \log_c b \,/\, \log_c a$. c.v.d. (0,7 punti). Usando una base comune, per esempio e: $\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} = \frac{\ln c}{\ln a} = \log_a c$ (0,3 punti).

12. a) Poiché $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, con $t = 3^x$ l'equazione diventa $t^2 - 6t + k = 0$. Ogni valore $t > 0$ dà una e una sola $x = \log_3 t$, i valori $t \le 0$ nessuna: servono due soluzioni t distinte ed entrambe positive.

$\frac{\Delta}{4} = 9 - k > 0$, prodotto $k > 0$, somma $6 > 0$: $0 < k < 9$ (0,6 punti). (Per $k = 9$ c'è la sola $x = 1$; per $k \le 0$ una sola delle due t è positiva, e resta una soluzione.) b) $t^2 - 6t + 5 = 0$, $t = 1$ oppure $t = 5$: $x = 0$ e $x = \log_3 5 = \ln 5 \,/\, \ln 3 \approx 1{,}465$. Controllo per $x = 0$: $1 - 6 + 5 = 0$ ✓ (0,4 punti).