Matematica 3 · Parte III · Ellisse, iperbole e coniche · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 297–298 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Ellisse, iperbole e coniche

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: lascia i risultati in forma esatta. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione; un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 9)* L'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ è:

   A. $\frac{3}{5}$

   B. $\frac{4}{5}$

   C. $\frac{5}{4}$

   D. $\frac{3}{4}$

2. ● *(0,5 punti · cap. 10)* Gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sono:

   A. $y = \pm\frac{4}{3}x$

   B. $y = \pm\frac{9}{16}x$

   C. $y = \pm\frac{3}{4}x$

   D. $y = \pm x$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 10)* Il centro di simmetria del grafico di $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$ è:

   A. $(-3;\ 2)$

   B. $(3;\ 2)$

   C. $(\frac{1}{2};\ 0)$

   D. $(-3;\ -\frac{1}{3})$

4. ●● *(0,5 punti · cap. 11)* L'equazione $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ rappresenta:
   A. un'ellisse
   B. un'iperbole con i fuochi sull'asse x
   C. due rette incidenti
   D. un'iperbole con i fuochi sull'asse y

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 9)* Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi in $(\pm 2; 0)$ che passa per il punto $(0; 4)$; calcolane l'eccentricità e l'area.

6. ● *(1 punto · cap. 9)* Verifica che $P(3; 1)$ appartiene all'ellisse $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ e scrivi l'equazione della retta tangente in P.

7. ●● *(1 punto · cap. 10)* Scrivi l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ che ha per asintoti le rette $y = \pm 2x$ e passa per il punto $(2; 2)$. Calcolane i fuochi e l'eccentricità.

8. ●● *(1 punto · cap. 10)* Disegna il grafico della funzione $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$: centro, asintoti, intersezioni con gli assi.

9. ●● *(1 punto · cap. 11)* Dimostra che il luogo dei punti P la cui distanza dal punto $F(0; 2)$ è metà della distanza dalla retta $y = 8$ è un'ellisse. Scrivine l'equazione e verifica che F è uno dei suoi fuochi.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 9 e 11)* L'imbocco di una galleria è una semiellisse con la base di 12 m e l'altezza di 4 m. a) Scrivi l'equazione dell'arco in un riferimento con l'origine al centro della base. b) Un camion largo 4 m e alto 3,5 m, che percorre la galleria al centro, riesce a passare? c) Quale larghezza massima potrebbe avere un veicolo alto 3,5 m per passare (al centro)?

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 10–11)* Considera la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ e l'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. a) Stabilisci, al variare di r, quanti punti hanno in comune. b) Per $r = 3$ trova i punti comuni e rappresenta la regione del piano definita da $x^2 + y^2 \le 9$ e $\frac{x^2}{4} - y^2 \ge 1$.

Soluzioni

1. B. $c = 4$, $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

2. C. $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$.

3. A. Funzione omografica con $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 3$: centro $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}) = (-3; 2)$.

4. D. $9y^2 - 4x^2 = 36$, cioè $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$: iperbole con i fuochi sull'asse y.

5. $c = 2$; il punto $(0; 4)$ è un vertice sull'asse y, quindi $b = 4$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 20$: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$.
$e = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; area $\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4 = 8\sqrt{5}\pi$.

6. $\frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1$ ✓. Sdoppiamento: $\frac{3x}{12} + \frac{y}{4} = 1$, cioè $x + y = 4$. (Controllo: sostituendo $y = 4 - x$ si ottiene $4(x - 3)^2 = 0$, $\Delta = 0$.)

7. $\frac{b}{a} = 2$, quindi $b = 2a$. Passaggio per $(2; 2)$:
$\frac{4}{a^2} - \frac{4}{4a^2} = 1$, $\frac{3}{a^2} = 1$, $a^2 = 3$, $b^2 = 12$:
$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$. $c^2 = 15$: fuochi $(\pm\sqrt{15}; 0)$;
$e = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$.

8. $c = 1 \neq 0$ e $ad - bc = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 5 \neq 0$: è un'iperbole equilatera traslata. Centro $(-1; 3)$, asintoti $x = -1$ e $y = 3$. Intersezioni: con l'asse x per $3x - 2 = 0$, $(\frac{2}{3}; 0)$; con l'asse y $(0; -2)$. Poiché $y = 3 - \frac{5}{x+1}$, i rami stanno nel secondo e nel quarto «quadrante» rispetto al centro.

9. $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2}|y - 8|$; elevando al quadrato (membri non negativi):
$4x^2 + 4y^2 - 16y + 16 = y^2 - 16y + 64$, cioè $4x^2 + 3y^2 = 48$, $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$: ellisse con i fuochi sull'asse y ($b = 4 > a = 2\sqrt{3}$). $c^2 = 16 - 12 = 4$: fuochi $(0; \pm 2)$, e F è uno di essi. (È la definizione unitaria con $e = \frac{1}{2}$: infatti $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.)

10. a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ con $y \geq 0$, cioè $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}$. b) Ai bordi del camion $x = \pm 2$: $y = 4\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$; poiché $(\frac{8\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{128}{9} > \frac{49}{4} = 3{,}5^2$ (512 > 441), l'arco è più alto di 3,5 m: il camion passa. c) $4\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} = \frac{7}{2}$ dà $x^2 = \frac{135}{16}$, $x = \pm\frac{3\sqrt{15}}{4}$: larghezza massima $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ m (circa 5,8 m).

11. a) Da $x^2 = 4 + 4y^2$: $4 + 5y^2 = r^2$, $y^2 = \frac{r^2 - 4}{5}$. Per $r < 2$ nessun punto; per $r = 2$ $y = 0$, $x = \pm 2$: due punti (i vertici, dove le curve sono tangenti); per $r > 2$ due valori opposti di y e due di x: quattro punti. b) $y^2 = 1$, $x^2 = 8$: i punti $(\pm 2\sqrt{2}; \pm 1)$. La regione è formata da due parti simmetriche: a destra, i punti del cerchio che stanno «dentro» il ramo destro dell'iperbole (dalla parte del fuoco), delimitati dall'arco di iperbole tra $(2\sqrt{2}; \pm 1)$ e dall'arco di circonferenza tra gli stessi punti, che passa per $(3; 0)$; a sinistra la parte simmetrica. Prova: $(2{,}5; 0)$ appartiene alla regione, $(0; 0)$ no.