Matematica 3 · Parte II · Retta, parabola e circonferenza · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte II · pagine 219–220 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte II · Retta, parabola e circonferenza

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: lascia i risultati in forma esatta. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione; un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La distanza del punto $P(1;\,2)$ dalla retta $3x - 4y + 10 = 0$ è:
   - **A.** 5
   - **B.** $\frac{1}{5}$
   - **C.** 1
   - **D.** 3

2. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Il fuoco della parabola $y = \frac{1}{8}x^2$ è il punto:
   - **A.** $(0;\,2)$
   - **B.** $(0;\,\frac{1}{32})$
   - **C.** $(2;\,0)$
   - **D.** $(0;\,8)$

3. ● *(0,5 punti · cap. 7)* La circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ ha:
   - **A.** centro $(-2;\,3)$ e raggio 4
   - **B.** centro $(2;\,-3)$ e raggio 16
   - **C.** centro $(-4;\,6)$ e raggio 3
   - **D.** centro $(2;\,-3)$ e raggio 4

4. ● *(0,5 punti · cap. 8)* Quale affermazione è vera?
   - **A.** π è irrazionale ma algebrico
   - **B.** $\mathbb{Q}$ è numerabile
   - **C.** un settore circolare di 90° in un cerchio di raggio 2 ha area 2π
   - **D.** $\sqrt{2}$ è trascendente

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 5)* Scrivi le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette $r\colon 3x + 4y - 2 = 0$ e $s\colon 4x + 3y + 1 = 0$, considerate come luogo dei punti equidistanti dalle due rette, e verifica che sono perpendicolari.

6. ●● *(1 punto · cap. 6)* Determina l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti $A(0;3)$, $B(1;0)$ e $C(3;0)$. Trova il vertice, il fuoco, la direttrice e la retta tangente alla parabola in B.

7. ●● *(1 punto · cap. 7)* Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(1;2)$ tangente alla retta $3x + 4y + 4 = 0$ e trova il punto di tangenza.

8. ● *(1 punto · cap. 8)* In un cerchio di raggio 4 cm una corda sottende un angolo al centro di 120°. Calcola, in forma esatta, la lunghezza dell'arco minore e l'area del segmento circolare minore.

9. ●● *(1 punto · cap. 5–6)* Dimostra che il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto $F(0;1)$ e dalla retta $y = -1$ è la parabola $y = \frac{1}{4}x^2$. Spiega perché il procedimento individua *tutti e soli* i punti del luogo.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 7)* Tre ripetitori si trovano, in un riferimento con unità il chilometro, nei punti $A(0;0)$, $B(10;0)$ e $C(0;6)$. Un telefono si trova a 5 km da A, a $3\sqrt{5}$ km da B e a 5 km da C. a) Scrivi le equazioni delle tre circonferenze. b) Ricava l'asse radicale delle circonferenze di centri A e B e i loro punti comuni. c) Usa la terza circonferenza per determinare la posizione del telefono.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 6–8)* La parabola $y = 4 - x^2$ e l'asse x delimitano un segmento parabolico. a) Calcolane l'area con il teorema di Archimede. b) Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $(-2;0)$, $(2;0)$ e $(0;4)$. c) Dimostra che la circonferenza e la parabola hanno in comune soltanto questi tre punti e che nel vertice della parabola sono tangenti (hanno la stessa retta tangente). d) Il segmento parabolico ha area maggiore o minore del semicerchio di diametro uguale alla sua base? Motiva la risposta senza calcolatrice.

Soluzioni

1. C. $d = |3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 10| \,/\, \sqrt{(9 + 16)} = 5/5 = 1$.

2. A. $a = 1/8$: il fuoco è $(0; 1/(4a)) = (0; 2)$, la direttrice $y = -2$.

3. D. Centro $(-a/2; -b/2) = (2; -3)$; $r^2 = 4 + 9 + 3 = 16$, $r = 4$.

4. B. $\mathbb{Q}$ è numerabile (enumerazione a zig-zag). π è trascendente; il settore di 90° ha area $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 = \pi$; $\sqrt{2}$ è algebrico, soluzione di $x^2 - 2 = 0$.

5. Il punto $(x; y)$ è equidistante dalle due rette se e solo se $|3x + 4y - 2|/5 = |4x + 3y + 1|/5$, cioè $3x + 4y - 2 = \pm(4x + 3y + 1)$. Con il segno +: $x - y + 3 = 0$; con il segno −: $7x + 7y - 1 = 0$. I coefficienti angolari sono 1 e −1, il cui prodotto è −1: le bisettrici sono perpendicolari.

6. Le soluzioni 1 e 3 di $y = 0$ danno $y = a(x - 1)(x - 3)$; il passaggio per A dà $3a = 3$, $a = 1$: $y = x^2 - 4x + 3$ (verifica: $y(0) = 3$, $y(1) = y(3) = 0$). $\Delta = 16 - 12 = 4$. Vertice $(2; -1)$; fuoco $(2; (1 - \Delta)/4) = (2; -3/4)$; direttrice $y = -(1 + \Delta)/4 = -5/4$. Tangente in B: $m = 2 \cdot 1 - 4 = -2$, $y = -2x + 2$ (controllo: $x^2 - 4x + 3 = -2x + 2$ dà $(x - 1)^2 = 0$, $\Delta = 0$).

7. Il raggio è la distanza del centro dalla retta: $r = |3 + 8 + 4|/5 = 3$. Equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$, cioè $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Il punto di tangenza è il piede della perpendicolare da C: la retta per C perpendicolare alla tangente è $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$; messa a sistema con la tangente dà $T(-4/5; -2/5)$ (verifica: $(-9/5)^2 + (-12/5)^2 = 225/25 = 9$).

8. $\alpha = 120° = 2\pi/3$. Arco $l = 4 \cdot 2\pi/3 = 8\pi/3$ cm. Segmento: $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (2\pi/3 - \operatorname{sen} 120°) = 8(2\pi/3 - \sqrt{3}/2) = (16\pi/3 - 4\sqrt{3})$ cm^2 (circa 9,8 cm^2).

9. Il punto $P(x; y)$ appartiene al luogo se e solo se PF è uguale alla distanza di P dalla retta, cioè $\sqrt{(x^2 + (y - 1)^2)} = |y + 1|$. I due membri sono non negativi, quindi l'uguaglianza equivale a quella dei quadrati: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$, cioè $x^2 = 4y$, $y = x^2/4$. Poiché ogni passaggio è un'equivalenza (anche l'elevamento al quadrato, tra quantità non negative), un punto soddisfa l'equazione finale se e solo se ha la proprietà: l'equazione descrive tutti e soli i punti del luogo.

10. a) $x^2 + y^2 = 25$; $(x - 10)^2 + y^2 = 45$; $x^2 + (y - 6)^2 = 25$. b) Sottraendo la seconda dalla prima: $20x - 100 = -20$, asse radicale $x = 4$; allora $y^2 = 9$: punti comuni (4; 3) e (4; −3). c) (4; 3): $16 + 9 = 25$ ✓; (4; −3): $16 + 81 = 97 \neq 25$. Il telefono è in (4; 3).

11. a) La base è il segmento da (−2; 0) a (2; 0), lungo 4; l'altezza (vertice (0; 4)) è 4. Area $= \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 = 32/3$. b) Centro sull'asse y (asse della corda): $(0; k)$ con $4 + k^2 = (4 - k)^2$, $k = 3/2$, $r = 5/2$: $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$. c) Sostituendo $x^2 = 4 - y$: $y^2 - 4y = 0$, $y = 0$ (punti $(\pm 2; 0)$) o $y = 4$ (solo $x = 0$). Nel vertice la tangente alla parabola è $y = 4$ ($m = -2 \cdot 0 = 0$); la tangente alla circonferenza in (0; 4) è perpendicolare al raggio verticale, quindi è anch'essa $y = 4$: sono tangenti. d) Il semicerchio di raggio 2 ha area 2π, e $2\pi < 2 \cdot 22/7 = 44/7 < 32/3$ (perché $44 \cdot 3 = 132 < 224 = 32 \cdot 7$): il segmento parabolico è maggiore.