Verifica di fine parte I · Equazioni, funzioni e successioni

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* L'insieme delle soluzioni della disequazione $|x - 3| \le 2$ è:
   A. $]1; 5[$
   B. $[1; 5]$
   C. $x \le 5$
   D. $x \le 1 \vee x \ge 5$

2. ● *(0,5 punti · cap. 2)* L'equazione $\sqrt{x + 2} = x$ ha come soluzioni:
   A. $x = 2$ e $x = -1$
   B. solo $x = -1$
   C. solo $x = 2$
   D. nessuna soluzione

3. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$ è:
   A. $x \ge 1$
   B. $x \ne 3$
   C. $x > 3$
   D. $x \ge 1 \wedge x \ne 3$

4. ● *(0,5 punti · cap. 4)* In una progressione geometrica $a_1 = 3$ e $q = 2$. Il termine a_6 è:
   A. 96
   B. 192
   C. 48
   D. 18

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 1)* Risolvi l'equazione $|2x - 1| = x + 4$.

6. ●● *(1 punto · cap. 2)* Risolvi l'equazione $\sqrt{x + 7} = x - 5$.

7. ●● *(1 punto · cap. 2)* Risolvi la disequazione $\sqrt{x + 3} < x + 1$.

8. ●● *(1 punto · cap. 3)* Date $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x^2$: a) scrivi $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$ e calcolale per $x = 1$; b) determina la funzione inversa di f.

9. ●● *(1 punto · cap. 4)* Dimostra per induzione che $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$ per ogni $n \geq 1$.

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 4)* Un atleta corre 2 km il primo giorno di allenamento e ogni giorno 0,5 km in più del giorno precedente. a) Quanti chilometri corre il quindicesimo giorno? b) Quanti in tutto nei primi 15 giorni? c) In quale giorno corre, per la prima volta, più di 10 km?

11. ●● *(1 punto · cap. 1, 3)* a) Un perno deve avere un diametro di 25 mm con una tolleranza di 0,2 mm. Scrivi la condizione con un valore assoluto e l'intervallo dei diametri accettabili. b) Un oggetto percorre $s(t) = 5t^2$ metri in t secondi. Calcola il tasso medio di variazione di s tra $t = 1$ s e $t = 3$ s e spiegane il significato.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 1, 4)* Per quali valori di x la serie $1 + |x - 1| + |x - 1|^2 + |x - 1|^3 + \ldots$ ha una somma finita? Per quali valori di x questa somma è minore di 2?

Soluzioni

1. B. $|x-3| \le 2$ equivale a $-2 \le x-3 \le 2$, cioè $1 \le x \le 5$: i punti che distano da 3 al più 2.

2. C. Elevando al quadrato: $x+2 = x^2$, $x = 2$ oppure $x = -1$. La verifica scarta $x = -1$ ($\sqrt{1} = 1 \neq -1$); oppure: serve $x \ge 0$.

3. D. Radicando non negativo ($x \ge 1$) e denominatore non nullo ($x \neq 3$).

4. A. $a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

5. Serve $x + 4 \ge 0$, cioè $x \ge -4$. Poi $2x - 1 = x + 4$, da cui $x = 5$, oppure $2x - 1 = -(x + 4)$, da cui $x = -1$. Entrambe soddisfano $x \ge -4$. Verifica: $|9| = 9$, $|-3| = 3$. Soluzioni: $x = -1$, $x = 5$.

6. Sistema equivalente: $x - 5 \ge 0$ e $x + 7 = (x-5)^2$. Da $x^2 - 11x + 18 = 0$: $x = 2$ oppure $x = 9$; solo $x = 9$ soddisfa $x \ge 5$. Verifica: $\sqrt{16} = 4 = 9 - 5$. Soluzione: $x = 9$.

7. $\sqrt{A} < B$ equivale al sistema $A \ge 0$, $B > 0$, $A < B^2$: $x \ge -3$, $x > -1$, $x + 3 < x^2 + 2x + 1$. L'ultima dà $x^2 + x - 2 > 0$, cioè $x < -2 \vee x > 1$. Intersecando: $x > 1$, cioè $]1; +\infty[$. (Controllo: per $x = 0$ si ha $\sqrt{3} > 1$, falso; per $x = 2$, $\sqrt{5} < 3$, vero.)

8. a) $(g \circ f)(x) = (2x-3)^2$, $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 3$; per $x = 1$ valgono 1 e -1: la composizione non è commutativa. b) Da $y = 2x - 3$: $x = \dfrac{y+3}{2}$, quindi $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

9. Passo base: $n = 1$: $1 = \dfrac{3-1}{2}$. Passo induttivo: se $1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$, aggiungendo 3^n si ottiene $\dfrac{3^n - 1}{2} + 3^n = \dfrac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$, che è la formula per $n + 1$. c.v.d.

10. Progressione aritmetica con $a_1 = 2$, $d = 0{,}5$. a) $a_{15} = 2 + 14 \cdot 0{,}5 = 9$ km. b) $S_{15} = \dfrac{15 \cdot (2+9)}{2} = 82{,}5$ km. c) $2 + 0{,}5(n-1) > 10$ dà $n - 1 > 16$, cioè $n \ge 18$: il diciottesimo giorno (10,5 km; il diciassettesimo corre esattamente 10 km).

11. a) $|x - 25| \le 0{,}2$, cioè $24{,}8 \le x \le 25{,}2$ (in mm): $[24{,}8; 25{,}2]$. b) $\dfrac{s(3) - s(1)}{3-1} = \dfrac{45-5}{2} = 20$ m/s: è la velocità media nell'intervallo di tempo da 1 s a 3 s.

12. Per $x = 1$ tutti i termini dopo il primo sono nulli e la somma vale 1. Per $x \neq 1$ è una serie geometrica di ragione $q = |x-1| > 0$. In entrambi i casi la somma è finita se $|x-1| < 1$, cioè $0 < x < 2$, e vale $S = \dfrac{1}{1 - |x-1|}$. Poiché il denominatore è positivo, $S < 2$ equivale a $1 < 2 - 2|x-1|$, cioè $|x-1| < \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}$. (Controllo: per $x = 1$, $S = 1$; per $x = 1{,}6$, $S = 2{,}5$.)