CAPITOLO

13

Logaritmi e funzione logaritmica

Un logaritmo risponde a una sola domanda: a quale esponente? (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire il logaritmo, giustificarne l'esistenza e l'unicità, e calcolarlo con la definizione e con la calcolatrice.
2. Dimostrare e usare le proprietà dei logaritmi e la formula del cambiamento di base.
3. Riconoscere la funzione logaritmica come inversa dell'esponenziale, tracciarne il grafico e i grafici deducibili, determinare il dominio di funzioni composte.
4. Risolvere equazioni e disequazioni logaritmiche ed esponenziali, partendo dalle condizioni di esistenza.
5. Usare i logaritmi nei modelli di crescita e decadimento e nelle scale delle scienze (pH, decibel, magnitudo), e leggere i grafici semilogaritmici.

INDICE DEL CAPITOLO

13.1 Il logaritmo 2
13.2 Le proprietà dei logaritmi 5
13.3 La funzione logaritmica 7
13.4 Equazioni esponenziali e logaritmiche 11
13.5 Disequazioni logaritmiche ed esponenziali 13
13.6 I logaritmi nelle scienze: modelli e scale 14

Matematica 3 · Parte IV · Esponenziali e logaritmi · versione 1.0
Capitolo 13: Logaritmi e funzione logaritmica · pagine 327–350 del volume completo · estratto per lo studio

Una coltura di batteri raddoppia ogni ora. Dopo quante ore il numero di batteri sarà mille volte quello iniziale? Se all'inizio ci sono N_0 batteri, dopo t ore ce ne sono $N_0 \cdot 2^t$, e la domanda diventa: per quale t si ha $2^t = 1000$? Poiché $2^9 = 512$ e $2^{10} = 1024$, la risposta sta tra 9 e 10 ore, molto vicino a 10. Ma qual è esattamente quel numero? Nel capitolo 12 abbiamo risolto le equazioni esponenziali in cui i due membri si scrivono come potenze della stessa base; un'equazione come $2^t = 1000$ l'abbiamo potuta solo stimare con il grafico. Ci manca un nome, e un modo di calcolare, per *l'esponente* a cui elevare 2 per ottenere 1000.

Quel numero si chiama **logaritmo**. In questo capitolo lo definiamo, ne studiamo le proprietà (che trasformano i prodotti in somme: per tre secoli i logaritmi sono stati il principale strumento di calcolo degli scienziati), costruiamo la funzione logaritmica come inversa della funzione esponenziale e impariamo a risolvere equazioni e disequazioni in cui l'incognita sta all'esponente o dentro un logaritmo. Alla fine vedremo perché la chimica misura l'acidità con il pH, perché l'intensità di un suono si misura in decibel e perché, quando i dati crescono in modo esponenziale, conviene disegnarli su una scala logaritmica.

13.1 Il logaritmo

13.1.1 Un nome per l'esponente

Alcune equazioni esponenziali si risolvono a mente: $2^x = 8$ ha la soluzione $x = 3$; $2^x = \frac{1}{4}$ ha la soluzione $x = -2$; $2^x = \sqrt{2}$ ha la soluzione $x = \frac{1}{2}$. Ma $2^x = 5$? Nel capitolo 12 ne abbiamo localizzato la soluzione con la bisezione: sta tra 2 e 3, perché $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$, e vale circa 2,32. Il grafico di $y = 2^x$ mostra che cosa abbiamo trovato (Figura 13.1): la retta orizzontale $y = 5$ incontra la curva in *un solo* punto, e 2,32 è la sua ascissa.

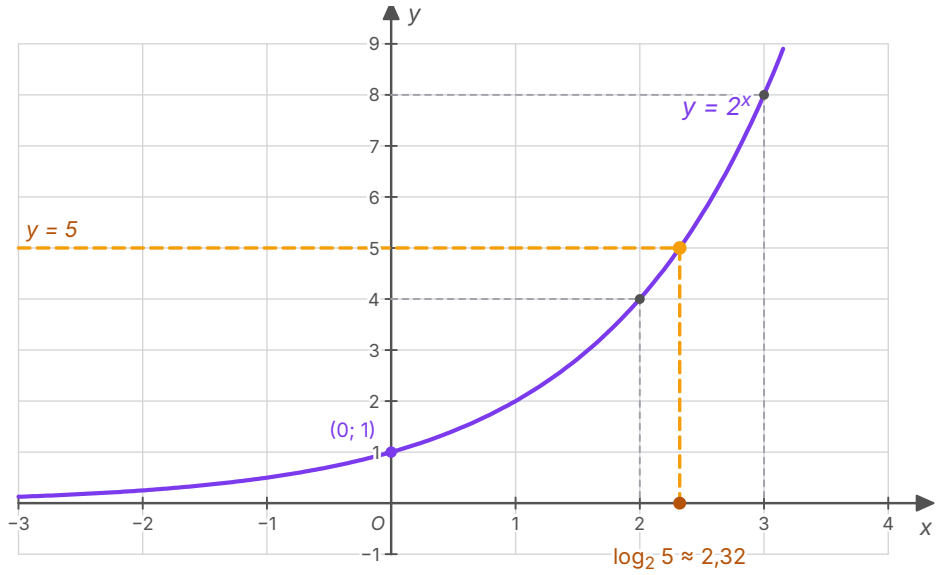


Figura 13.1 Il grafico di $y = 2^x$, calcolato dall'equazione. La retta $y = 5$ incontra la curva in un solo punto: la sua ascissa è l'esponente da dare a 2 per ottenere 5, cioè $\log_2 5 \approx 2{,}32$. In grigio i casi «facili» $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$, tra i quali si trova la soluzione. Le scale sui due assi sono diverse.

Che quel punto esista e sia uno solo non dipende dal numero 5. Dal capitolo 12 sappiamo che, se $a > 0$ e $a \neq 1$, la funzione $y = a^x$ è definita per ogni x reale, è monotona (crescente per $a > 1$, decrescente per $0 < a < 1$) e la sua immagine è tutto l'intervallo $]0; +\infty[$. Ogni retta orizzontale $y = b$ con $b > 0$ incontra quindi il grafico: almeno una volta, perché b appartiene all'immagine; al più una volta, perché una funzione monotona non assume due volte lo stesso valore.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. **Tesi:** esiste uno e un solo numero reale c tale che $a^c = b$.

Definizione. Quel numero si chiama **logaritmo** in base a di b e si scrive $\log_a b$:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

Il numero a è la **base** del logaritmo, il numero b il suo **argomento**. In breve: **il logaritmo è l'esponente** da dare alla base per ottenere l'argomento.

Ognuna delle tre condizioni ha una ragione. La base deve essere positiva perché solo per $a > 0$ la potenza a^x ha senso per ogni esponente reale (capitolo 12); deve essere diversa da 1 perché $1^x = 1$ per ogni x: l'equazione $1^x = 5$ non ha soluzioni, mentre $1^x = 1$ ne ha infinite. L'argomento

deve essere positivo perché una potenza di base positiva è sempre positiva: $2^x = -4$ e $2^x = 0$ non hanno soluzioni, quindi $\log_2(-4)$ e $\log_2 0$ non esistono.

In *Matematica 2*, a proposito della ricerca binaria, hai già incontrato $\log_2 n$, l'esponente a cui elevare 2 per ottenere n: ora la stessa idea vale per ogni base ammessa e ogni argomento positivo. Leggiamo la definizione nei due versi. $\log_2 32 = 5$ perché $2^5 = 32$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ perché $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ perché $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$; $\log_{1/2} 8 = -3$ perché $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$. Il logaritmo può essere positivo, negativo o nullo: a non poter essere negativo è l'*argomento*, non il logaritmo.

Quando base e argomento sono potenze dello stesso numero, il logaritmo si calcola scrivendo tutto in quella base. Per $\log_8 16$ cerchiamo c con $8^c = 16$, cioè $2^{3c} = 2^4$: $c = \frac{4}{3}$. Per $\log_{\sqrt{3}} 9$: $(\sqrt{3})^c = 3^{c/2} = 3^2$, quindi $c = 4$. La definizione serve anche a trovare la base o l'argomento: $\log_x 49 = 2$ significa $x^2 = 49$, e poiché la base deve essere positiva e diversa da 1 si accetta solo $x = 7$; $\log_3 x = -4$ significa $x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$.

Dalla definizione seguono subito quattro uguaglianze, valide per ogni base ammessa: $\log_a 1 = 0$ (perché $a^0 = 1$); $\log_a a = 1$ (perché $a^1 = a$); $\log_a a^x = x$ per ogni x reale (l'esponente da dare ad a per ottenere a^x è proprio x); $a^{\log_a b} = b$ per ogni $b > 0$ (elevando a all'esponente che dà b si ottiene b). Le ultime due dicono che «elevare ad a» e «prendere il logaritmo in base a» sono operazioni che si annullano a vicenda: una disfa l'altra, come elevare al quadrato ed estrarre la radice quadrata di un numero positivo.

13.1.2 Logaritmi decimali e naturali

Due basi hanno un nome e un tasto sulla calcolatrice. Il **logaritmo decimale** ha base 10 e si scrive log senza indice: $\log 1000 = 3$, $\log 0{,}01 = -2$, $\log 1 = 0$. Il **logaritmo naturale** ha per base il numero $e \approx 2{,}718$ del capitolo 12 e si scrive ln: $\ln e = 1$, $\ln e^3 = 3$, $\ln 1 = 0$, $e^{\ln 5} = 5$. Per ogni altra base, in questo libro, la base si scrive sempre: $\log_2$, $\log_{1/3}$.

Il logaritmo decimale di un numero dice quante cifre ha. Se un intero positivo N ha k cifre, allora $10^{k-1} \le N < 10^k$, e quindi $k - 1 \le \log N < k$: la parte intera di $\log N$ è $k - 1$. Un esempio che senza logaritmi richiederebbe un lungo calcolo: quante cifre ha 2^{100}? La calcolatrice dà $\log 2 \approx 0{,}30103$, e vedremo tra poco che $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30{,}103$. Dunque 2^{100} ha 31 cifre.

APPROFONDIMENTO · NEPERO, BRIGGS E LE TAVOLE DEI LOGARITMI

All'inizio del Seicento l'astronomia e la navigazione richiedevano enormi quantità di moltiplicazioni e divisioni tra numeri di molte cifre, eseguite a mano. Lo scozzese John Napier (in italiano Nepero) lavorò per anni a un metodo per sostituirle con addizioni e sottrazioni, molto più rapide e meno soggette a errori. Nel 1614 pubblicò in latino la *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* («Descrizione della meravigliosa regola dei logaritmi»), con una tavola numerica. La parola *logaritmo*, coniata da lui, unisce i termini greci *lógos* («rapporto», «proporzione») e *arithmós* («numero»).

I logaritmi di Nepero non coincidono con nessuno di quelli che usiamo oggi, ma l'idea è la stessa: a un prodotto di numeri corrisponde una somma di logaritmi. Henry Briggs, professore di geometria al Gresham College di Londra, lesse l'opera e nel 1615 andò a trovare Nepero a Edimburgo; i due si accordarono su logaritmi con $\log 1 = 0$ e base 10, i nostri logaritmi decimali. Nepero morì nel 1617; nel 1624 Briggs pubblicò l'*Arithmetica logarithmica*, con i logaritmi decimali degli interi da 1 a 20 000 e da 90 000 a 100 000, calcolati a mano con 14 cifre decimali. Le **tavole dei logaritmi** e i regoli calcolatori (che sommano logaritmi come lunghezze) sono rimasti strumenti di lavoro quotidiano di scienziati e ingegneri fino alla diffusione delle calcolatrici elettroniche, negli anni Settanta del Novecento.

13.2 Le proprietà dei logaritmi

13.2.1 Prodotto, quoziente, potenza

Le proprietà dei logaritmi sono le proprietà delle potenze lette «dalla parte degli esponenti». Moltiplicando due potenze della stessa base gli esponenti si sommano; poiché i logaritmi *sono* esponenti, il logaritmo di un prodotto sarà la somma dei logaritmi.

IN SINTESI

Teorema (proprietà dei logaritmi). Ipotesi: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, k reale. **Tesi:**

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ (logaritmo del prodotto)

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (logaritmo del quoziente)

$\log_a x^k = k \log_a x$ (logaritmo della potenza)

Dimostrazione. Poniamo $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$. Per definizione $a^u = x$ e $a^v = y$. Allora $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$, cioè $u + v$ è l'esponente da dare ad a per ottenere xy: $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. Allo stesso modo $\dfrac{x}{y} = a^u : a^v = a^{u-v}$ dà la seconda uguaglianza, e $x^k = (a^u)^k = a^{ku}$ dà $\log_a x^k = ku = k \log_a x$. c.v.d.

Due casi particolari della terza proprietà si usano spesso: con $k = -1$, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$; con $k = \frac{1}{n}$, $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$. Ecco come Briggs avrebbe calcolato log 8 e log 5 conoscendo solo log 2 ≈ 0,3010: log 8 = log 2^3 = 3 log 2 ≈ 0,9031; log 5 = log $\frac{10}{2}$ = log 10 − log 2 ≈ 1 − 0,3010 = 0,6990.

Le proprietà permettono di calcolare espressioni i cui termini, presi uno per uno, non sono semplici: $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$ (eppure $\log_6 4 \approx 0{,}774$); $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 27 = 3$; $2 \log 5 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$. Lette da destra a sinistra, riducono un'espressione a un solo logaritmo: prima i coefficienti diventano esponenti, poi le somme diventano prodotti e le differenze quozienti. Per $a, b, c > 0$: $2 \ln a - 3 \ln b + \frac{1}{2} \ln c = \ln a^2 - \ln b^3 + \ln \sqrt{c} = \ln \frac{a^2 \sqrt{c}}{b^3}$.

ERRORE FREQUENTE

Il logaritmo di una somma non è la somma dei logaritmi. $\log(a + b) \neq \log a + \log b$: per esempio $\log(1 + 1) = \log 2 \approx 0{,}301$, mentre $\log 1 + \log 1 = 0$. Per una somma non esiste alcuna regola. Sono sbagliate anche $\log a \cdot \log b = \log(ab)$ e $\frac{\log a}{\log b} = \log \frac{a}{b}$: le proprietà trasformano prodotti in *somme* e quozienti in *differenze*.

Le proprietà valgono solo per argomenti positivi. L'espressione $\log x^2$ esiste per ogni $x \neq 0$, mentre $2 \log x$ esiste solo per $x > 0$. Per $x = -10$: $\log(-10)^2 = \log 100 = 2$, ma $2 \log(-10)$ non ha senso. La regola corretta, per ogni $x \neq 0$, è $\log x^2 = 2 \log |x|$. Allo stesso modo $\ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ esiste solo per $x > 1$, mentre $\ln(x^2 - 1)$ esiste anche per $x < -1$.

13.2.2 Il cambiamento di base

La calcolatrice ha solo i tasti log e ln. Come si calcola $\log_2 5$? Poniamo $c = \log_2 5$, cioè $2^c = 5$, e prendiamo il logaritmo decimale dei due membri (numeri positivi uguali hanno logaritmi uguali): $\log 2^c = \log 5$, cioè $c \log 2 = \log 5$, e quindi $c = \frac{\log 5}{\log 2} \approx \frac{0{,}69897}{0{,}30103} \approx 2{,}3219$. Lo stesso ragionamento, con basi qualsiasi, dimostra la formula del **cambiamento di base**: se $a, c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$ e $b > 0$,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dimostrazione. Sia $y = \log_a b$, cioè $a^y = b$. Applicando $\log_c$ ai due membri e la proprietà della potenza: $y \log_c a = \log_c b$. Poiché $a \neq 1$, $\log_c a \neq 0$ e si può dividere. c.v.d.

Conseguenze. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (con $b \neq 1$) e $\log_{1/a} x = -\log_a x$. Inoltre ogni base positiva è una potenza di e: $a = e^{\ln a}$, quindi $a^x = e^{x \ln a}$. È il numero annunciato nel capitolo 12: $2 = e^{\ln 2} \approx e^{0{,}693}$, e un modello $N_0 \cdot a^t$ si riscrive $N_0\, e^{kt}$ con costante di crescita $k = \ln a$.

Il risultato non dipende dalla base c scelta: $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx \dfrac{1{,}60944}{0{,}69315} \approx 2{,}3219$, come prima. In pratica si usa log o ln, quello che si preferisce. **Esempio.** $\log_3 20 = \dfrac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}7268$; controllo con il tasto delle potenze: $3^{2{,}7268} \approx 20{,}00$. Fare il controllo è una buona abitudine: l'errore più comune è dividere nell'ordine sbagliato ($\dfrac{\ln 3}{\ln 20} \approx 0{,}367$ è $\log_{20} 3$, un'altra cosa).

13.3 La funzione logaritmica

13.3.1 L'inversa dell'esponenziale

Nel capitolo 3 abbiamo visto che una funzione biiettiva $f\colon A \to B$ ha un'inversa $f^{-1}\colon B \to A$, che a ogni y di B associa l'unico x di A con $f(x) = y$. Per $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $]0; +\infty[$: è proprio il teorema del paragrafo precedente. Che cosa fa la sua inversa? A ogni $x > 0$ associa l'esponente c con $a^c = x$, cioè $\log_a x$.

IN SINTESI

La **funzione logaritmica** di base a ($a > 0$, $a \neq 1$) è la funzione $y = \log_a x$, inversa di $y = a^x$.

- Dominio $]0; +\infty[$; immagine $\mathbb{R}$. Il grafico passa per $(1; 0)$ e per $(a; 1)$.
- Se $a > 1$ è crescente: $\log_a x < 0$ per $0 < x < 1$, $\log_a x > 0$ per $x > 1$.
- Se $0 < a < 1$ è decrescente: $\log_a x > 0$ per $0 < x < 1$, $\log_a x < 0$ per $x > 1$.
- L'asse y (la retta $x = 0$) è un asintoto verticale: avvicinandosi a 0 da destra, il grafico scende (se $a > 1$) o sale (se $0 < a < 1$) senza limite.

Il grafico di una funzione inversa è il simmetrico del grafico della funzione rispetto alla bisettrice $y = x$ (capitolo 3), purché le unità di misura sui due assi siano uguali. Se il punto $(2; 4)$ sta sul grafico di $y = 2^x$, il punto $(4; 2)$ sta su quello di $y = \log_2 x$: $2^2 = 4$ si legge anche $\log_2 4 = 2$ (Figura 13.2). Ogni proprietà dell'esponenziale ha la sua immagine speculare: l'asintoto orizzontale $y = 0$ di $y = 2^x$ diventa l'asintoto verticale $x = 0$ di $y = \log_2 x$; il punto $(0; 1)$ diventa $(1; 0)$; la crescita sempre più rapida dell'esponenziale diventa la crescita sempre più lenta del logaritmo.

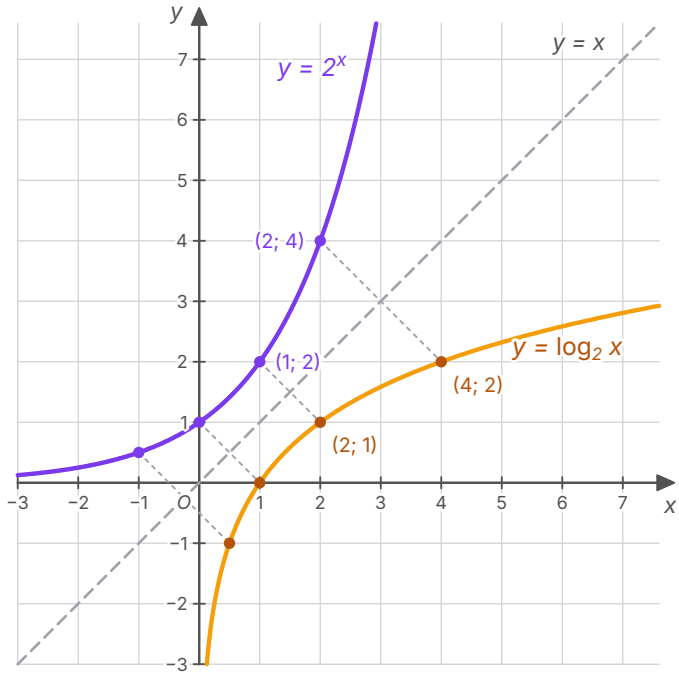


Figura 13.2 I grafici di $y = 2^x$ (viola) e $y = \log_2 x$ (arancio), calcolati dalle equazioni, sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$ (tratteggiata). Le coppie di punti corrispondenti, come (1; 2) e (2; 1), sono unite da segmenti perpendicolari alla bisettrice. Le scale sui due assi sono uguali.

Quanto è lenta la crescita del logaritmo? $\log_2 x$ vale 10 per $x = 1024$ e 20 per $x = 2^{20} = 1\,048\,576$: per far crescere il logaritmo di 10 unità bisogna moltiplicare x per più di mille. Eppure il logaritmo non è limitato: supera qualunque numero M fissato, purché sia $x > 2^M$.

La Figura 13.3 mostra i grafici di $y = \log_a x$ per quattro basi. Tutti passano per (1; 0), perché $\log_a 1 = 0$ per ogni base; ciascuno incontra la retta $y = 1$ nel punto di ascissa a. Per $a > 1$, più grande è la base, più lentamente cresce il logaritmo. Il grafico di $y = \log_{1/2} x$ è il simmetrico di quello di $y = \log_2 x$ rispetto all'asse x, perché $\log_{1/2} x = -\log_2 x$.

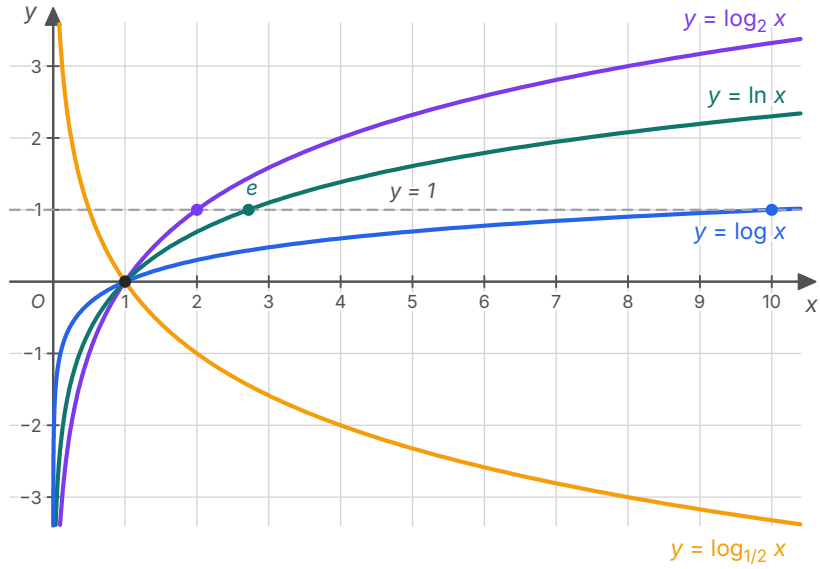


Figura 13.3 Grafici di $y = \log_a x$ per $a = 2$, $a = e$, $a = 10$ (crescenti) e $a = \frac{1}{2}$ (decrescente), calcolati con la formula del cambiamento di base. Tutti passano per (1; 0); la retta tratteggiata $y = 1$ incontra ogni curva crescente nel punto che ha per ascissa la sua base. Le scale sui due assi sono uguali.

Dalla monotonia seguono due regole che useremo per risolvere equazioni e disequazioni. Per $x, y > 0$: $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ (la funzione è iniettiva); se $a > 1$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$; se $0 < a < 1$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$. Con una base minore di 1 il verso delle disuguaglianze **si inverte**.

Il logaritmo naturale ha una proprietà che giustifica il suo nome. Nel capitolo 12 abbiamo osservato che la retta tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto (0; 1) ha coefficiente angolare 1: è la retta $y = x + 1$. Per simmetria rispetto a $y = x$, la tangente al grafico di $y = \ln x$ nel punto (1; 0) è la retta $y = x - 1$, anch'essa di coefficiente angolare 1.

13.3.2 Grafici deducibili e domini

Le trasformazioni del capitolo 3 si applicano anche ai logaritmi. Il grafico di $y = \ln(x - 2)$ è quello di $y = \ln x$ traslato di 2 verso destra: il dominio diventa $x > 2$, l'asintoto la retta $x = 2$, lo zero $x = 3$. Il grafico di $y = \log_2 x + 1$ è traslato di 1 verso l'alto e taglia l'asse x in $x = \frac{1}{2}$. $y = -\ln x$ è il simmetrico rispetto all'asse x, $y = \ln(-x)$ il simmetrico rispetto all'asse y (dominio $x < 0$). Infine $y = |\ln x|$ si ottiene ribaltando sopra l'asse x la parte del grafico con $0 < x < 1$, mentre $y = \ln|x|$, definita per $x \neq 0$, è una funzione pari: per $x > 0$ coincide con $\ln x$, e la parte per $x < 0$ è la sua simmetrica rispetto all'asse y.

Per una funzione composta $y = \log_a A(x)$ la condizione di esistenza è una disequazione: **l'argomento deve essere positivo**, $A(x) > 0$. Gli strumenti sono quelli dei capitoli 1–3. Per esempio $y = \log(3 - x)$ richiede $x < 3$; $y = \log_2 \dfrac{x+1}{x-2}$ richiede $\dfrac{x+1}{x-2} > 0$, cioè $x < -1 \vee x > 2$; $y = \sqrt{\log x}$ richiede $x > 0$ e $\log x \geq 0$, cioè $x \geq 1$; $y = \dfrac{1}{\ln x}$ richiede $x > 0$ e $x \neq 1$.

ESEMPIO SVOLTO

Studia il dominio e il segno di $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$.

Dominio. $x^2 - 4x + 3 > 0$. Il trinomio ha zeri 1 e 3 ed è positivo all'esterno: $D =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$, cioè $x < 1 \vee x > 3$.

Zeri. $\ln A = 0 \Leftrightarrow A = 1$: $x^2 - 4x + 3 = 1$, $x^2 - 4x + 2 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Entrambi stanno nel dominio: $2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59 < 1$ e $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 > 3$.

Segno. Poiché la base e è maggiore di 1, $\ln A > 0 \Leftrightarrow A > 1$: $x^2 - 4x + 2 > 0$, cioè $x < 2 - \sqrt{2} \vee x > 2 + \sqrt{2}$. Nel resto del dominio, $2 - \sqrt{2} < x < 1$ e $3 < x < 2 + \sqrt{2}$, la funzione è negativa: l'argomento è positivo ma minore di 1.

Il risultato è riassunto nella Figura 13.4, sotto il grafico della funzione: avvicinandosi a 1 da sinistra e a 3 da destra l'argomento tende a 0 e il grafico scende senza limite, come quello di $\ln x$ vicino a 0.

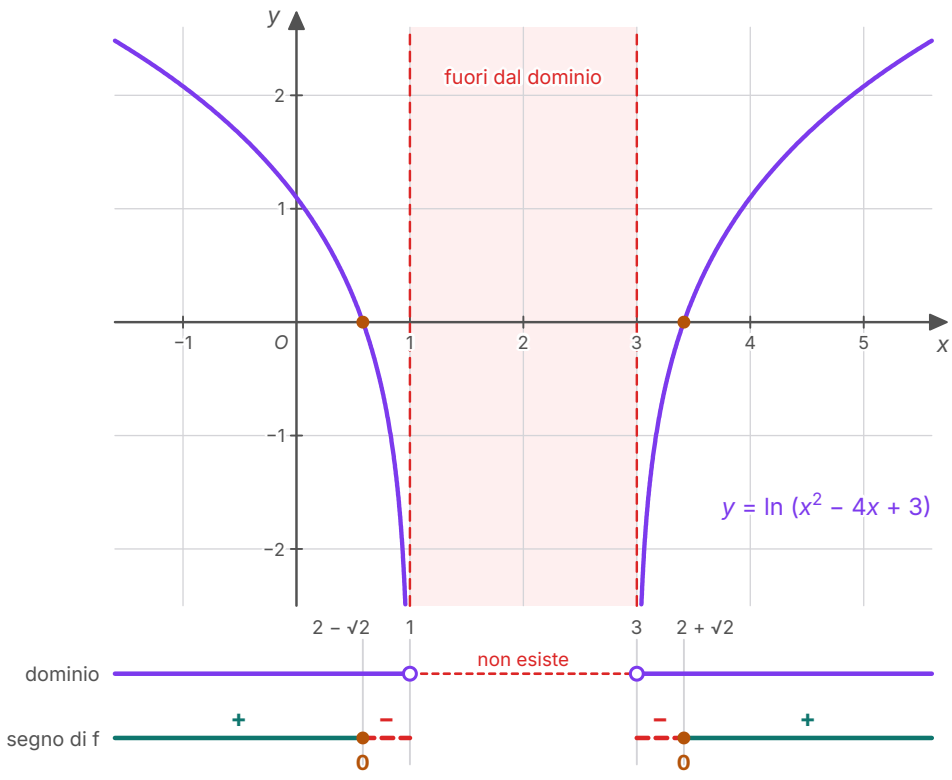


Figura 13.4 Il grafico di $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$, calcolato dall'equazione, con lo schema del dominio e del segno allineato sotto. La fascia rossa $1 \le x \le 3$ è esclusa dal dominio; le rette $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali. Gli zeri $2 \pm \sqrt{2}$ separano gli intervalli in cui f è positiva da quelli in cui è negativa.

13.4 Equazioni esponenziali e logaritmiche

13.4.1 Equazioni esponenziali risolte con i logaritmi

Ora possiamo risolvere ogni equazione della forma $a^x = b$: se $b > 0$ la soluzione è $x = \log_a b$; se $b \le 0$ l'equazione è impossibile. Così $2^t = 1000$ dell'introduzione ha la soluzione $t = \log_2 1000 = \dfrac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9{,}97$ ore. Quando le basi sono diverse, si prende il logaritmo (in una base qualsiasi, di solito ln) dei due membri, che sono positivi. Un caso particolare: se $a \neq b$, l'equazione $a^x = b^x$ ha la sola soluzione $x = 0$, perché dividendo per $b^x > 0$ diventa $(a/b)^x = 1$.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $e^{2x} = 7$; b) $3^x = 2^{x+1}$; c) $5^{x+1} + 5^x = 12$; d) $4^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$.

a) $2x = \ln 7$, $x = \dfrac{\ln 7}{2} \approx 0{,}973$.

b) Prendiamo ln dei due membri: $x \ln 3 = (x+1) \ln 2$, cioè $x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2$, e $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}5} \approx 1{,}710$. Controllo: $3^{1{,}710} \approx 6{,}54$ e $2^{2{,}710} \approx 6{,}54$ ✓.

c) Raccogliamo 5^x: $5^x(5+1) = 12$, $5^x = 2$, $x = \log_5 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 5} \approx 0{,}431$.

d) Con $t = 2^x$ (sostituzione del capitolo 12) si ha $4^x = t^2$ e $t^2 - 3t - 10 = 0$: $t = 5$ oppure $t = -2$. Il valore $t = -2$ si scarta, perché $2^x > 0$. Da $2^x = 5$: $x = \log_2 5 \approx 2{,}32$.

13.4.2 Equazioni logaritmiche

Un'**equazione logaritmica** contiene l'incognita nell'argomento (o nella base) di un logaritmo. Il metodo ha tre passi, e il primo non si salta mai.

1. **Condizioni di esistenza.** Si impone che ogni argomento sia positivo (e ogni base positiva e diversa da 1).
2. **Riduzione.** Con le proprietà si porta l'equazione alla forma $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, che equivale ad $A(x) = B(x)$ perché il logaritmo è iniettivo, oppure alla forma $\log_a A(x) = c$, che equivale ad $A(x) = a^c$ per la definizione.
3. **Controllo.** Si accettano solo le soluzioni che soddisfano le condizioni di esistenza.

Perché il controllo è indispensabile? Le proprietà dei logaritmi, usate da destra a sinistra, *allargano* il dominio: $\log_a A + \log_a B$ esiste solo se $A > 0$ e $B > 0$, mentre $\log_a (AB)$ esiste anche quando A e B sono entrambi negativi. L'equazione trasformata può quindi avere soluzioni che quella di partenza non ha.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=5$; b) $2\ln x=\ln(x+6)$; c) $(\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$; d) $\log_2 x+\log_4 x=6$.

a) C.E.: $x+3>0$ e $x-1>0$, cioè $x>1$. Con la proprietà del prodotto: $\log_2[(x+3)(x-1)]=5$, quindi $(x+3)(x-1)=2^5=32$, $x^2+2x-35=0$, $x=5$ oppure $x=-7$. Solo $x=5$ soddisfa le C.E. Controllo: $\log_2 8+\log_2 4=3+2=5$ ✓. Il valore -7 rende negativi entrambi gli argomenti iniziali, ma positivo il loro prodotto: è proprio la soluzione «in più» di cui si parlava.

b) C.E.: $x>0$ (e $x>-6$, già compresa). Allora $2\ln x=\ln x^2$ e l'equazione diventa $x^2=x+6$: $x=3$ oppure $x=-2$. Si accetta solo $x=3$. Senza le C.E. si sarebbe accettato anche $x=-2$, per cui $\ln x$ non esiste.

c) C.E.: $x>0$. Con $t=\log_3 x$: $t^2-t-2=0$, $t=2$ oppure $t=-1$. Quindi $x=3^2=9$ oppure $x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$, entrambe accettabili.

d) C.E.: $x>0$. Portiamo tutto in base 2: $\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$. L'equazione diventa $\dfrac{3}{2}\log_2 x=6$, $\log_2 x=4$, $x=16$. Controllo: $4+2=6$ ✓.

Non tutte le equazioni si risolvono così. L'equazione $\ln x=2-x$ mescola un logaritmo e un polinomio, e nessuna trasformazione la riduce a una forma che sappiamo risolvere. I grafici di $y=\ln x$ (crescente) e $y=2-x$ (decrescente) si incontrano in un solo punto, con ascissa tra 1 e 2: infatti $g(x)=\ln x+x-2$ vale $g(1)=-1<0$ e $g(2)=\ln 2\approx 0{,}69>0$. Con il metodo di bisezione del capitolo 2 si restringe l'intervallo a metà a ogni passo; dopo dieci passi si sa che la soluzione è $x\approx 1{,}557$, con un errore inferiore a un millesimo.

13.5 Disequazioni logaritmiche ed esponenziali

Una **disequazione logaritmica** si risolve come un'equazione logaritmica, con una sola differenza decisiva: nel passare dai logaritmi agli argomenti bisogna guardare la base. Per la monotonia della funzione logaritmica, con $A, B>0$:

$$a>1:\ \log_a A<\log_a B \Leftrightarrow A<B \qquad 0<a<1:\ \log_a A<\log_a B \Leftrightarrow A>B$$

La stessa regola vale per le potenze, perché anche a^x è crescente per $a>1$ e decrescente per $0<a<1$. Le C.E. vanno messe a sistema con la disequazione ottenuta: la soluzione è l'*intersezione*.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $\log_2(x-1) < 3$; b) $\log_{1/3}(2x-1) \geq -2$; c) $\log x + \log(x-3) \leq 1$; d) $0{,}8^x < 0{,}5$.

a) C.E. $x > 1$. Scriviamo $3 = \log_2 8$: $\log_2(x-1) < \log_2 8$; base maggiore di 1, il verso resta: $x - 1 < 8$, $x < 9$. Intersecando con le C.E.: $1 < x < 9$, cioè $]1; 9[$.

b) C.E. $x > \frac{1}{2}$. $-2 = \log_{1/3} 9$, perché $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$. Base minore di 1: il verso si inverte, $2x - 1 \leq 9$, $x \leq 5$. Soluzioni: $\frac{1}{2} < x \leq 5$.

c) C.E. $x > 0$ e $x > 3$, cioè $x > 3$. $\log[x(x-3)] \leq \log 10$, quindi $x^2 - 3x - 10 \leq 0$, $-2 \leq x \leq 5$. Con le C.E.: $3 < x \leq 5$.

d) Prendiamo il logaritmo naturale (funzione crescente: il verso resta): $x \ln 0{,}8 < \ln 0{,}5$. Ora attenzione: $\ln 0{,}8 \approx -0{,}223$ è **negativo**, e dividendo il verso si inverte: $x > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8} \approx 3{,}106$. Ha senso: le potenze di 0,8 diminuiscono, e scendono sotto 0,5 da un certo esponente in poi ($0{,}8^3 = 0{,}512$, $0{,}8^4 \approx 0{,}410$).

Per le disequazioni esponenziali con la sostituzione vale quanto visto nel capitolo 12, con in più la possibilità di risolvere $2^x > 3$ come $x > \log_2 3$. Per esempio $4^x - 2^{x+1} - 3 > 0$ diventa, con $t = 2^x$, $t^2 - 2t - 3 > 0$, cioè $t < -1 \vee t > 3$; la prima è impossibile ($t > 0$), la seconda dà $x > \log_2 3 \approx 1{,}585$.

In sintesi, per ogni disequazione logaritmica o esponenziale:

- Prima di tutto le **condizioni di esistenza**: argomenti positivi, basi positive e diverse da 1.
- Base maggiore di 1: il verso si conserva. Base tra 0 e 1: il verso si inverte.
- Dividere per un logaritmo è come dividere per qualunque numero: se è negativo il verso si inverte. $\ln x$ e $\log x$ sono negativi per $0 < x < 1$.
- La soluzione finale è l'intersezione tra le C.E. e le soluzioni della disequazione trasformata.

13.6 I logaritmi nelle scienze: modelli e scale

13.6.1 Quanto tempo ci vuole?

Nei modelli di crescita e decadimento esponenziale del capitolo 12 la domanda più naturale è «quando?»: quando la popolazione raddoppierà, quando resterà un decimo della sostanza radioattiva, quando il capitale raggiungerà una cifra. Sono tutte equazioni esponenziali, e ora sappiamo risolverle. Nel modello $N(t) = N_0\, e^{kt}$ del capitolo 12, se la costante di crescita è $k > 0$ il tempo di raddoppio T soddisfa $e^{kT} = 2$, cioè $kT = \ln 2$: $T = \frac{\ln 2}{k}$. Se $k < 0$ (decadimento), il tempo di dimezzamento soddisfa $e^{kT} = \frac{1}{2}$, cioè $kT = -\ln 2$: $T = \frac{\ln 2}{|k|}$. Viceversa, conoscendo T si ricava

k. Entrambi non dipendono da N_0: il tempo per raddoppiare è lo stesso partendo da mille o da un milione.

ESEMPIO SVOLTO

a) Capitale. Si depositano 5000 € a un interesse composto annuo del 3%. Dopo quanti anni il capitale supera 8000 €?

Dopo n anni il capitale è $5000 \cdot 1{,}03^n$ (capitolo 4). Serve $1{,}03^n \geq 1{,}6$; prendendo i logaritmi (base $e > 1$, verso conservato) e dividendo per $\ln 1{,}03 > 0$: $n \geq \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}03} \approx 15{,}9$. Poiché gli interessi si aggiungono una volta all'anno, servono 16 anni: dopo 15 anni il capitale è circa 7789 €, dopo 16 circa 8023 €.

b) Datazione con il carbonio-14. Il tempo di dimezzamento del carbonio-14 è di circa 5730 anni. In un reperto di legno resta il 40% del carbonio-14 presente quando l'albero era vivo. Quanti anni ha, all'incirca? Qual è la costante k del modello $N_0\, e^{kt}$?

Con il tempo di dimezzamento il modello si scrive $N(t) = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/5730}$. Imponiamo $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/5730} = 0{,}4$: $\dfrac{t}{5730} = \log_{1/2} 0{,}4 = \dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}5} \approx 1{,}322$, quindi $t \approx 7575$ anni, cioè circa 7600 anni (tra uno e due tempi di dimezzamento, come deve essere: il 40% sta tra il 50% e il 25%). La costante è $k = -\dfrac{\ln 2}{5730} \approx -1{,}21 \cdot 10^{-4}$ all'anno. (Le datazioni reali usano curve di calibrazione; il modello esponenziale dà l'ordine di grandezza.)

La regola del 70. Una stima rapida, molto usata in economia, è la **regola del 70**. Una grandezza che cresce del p% a ogni periodo raddoppia in $n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + p/100)}$ periodi. Per p piccolo $\ln(1 + p/100)$ è circa $p/100$ (è la tangente $y = x$ al grafico di $y = \ln(1 + x)$ in 0) e $\ln 2 \approx 0{,}693$, quindi $n \approx \dfrac{70}{p}$. Al 3% annuo: la regola dà 23,3 anni, il calcolo esatto $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$. Per crescite del 10% o più l'errore aumenta: al 10% la regola dà 7 periodi, il valore esatto è circa 7,27.

13.6.2 Le scale logaritmiche

Molte grandezze in natura variano su moltissimi ordini di grandezza. Per descriverle si usa spesso il logaritmo della grandezza invece della grandezza stessa: si ottiene una **scala logaritmica**, in cui a ogni passo di un'unità corrisponde una *moltiplicazione* per un fattore fisso (di solito 10), non un'addizione.

Il pH. L'acidità di una soluzione acquosa dipende dalla concentrazione degli ioni idrogeno $[H^+]$, misurata in mol/L, che nelle soluzioni comuni va da circa 1 mol/L a circa 10^{-14} mol/L. In prima approssimazione il **pH** è definito come $\text{pH} = -\log [H^+]$. Nell'acqua pura a 25 °C $[H^+] = 10^{-7}$ mol/L, quindi il pH è 7: la soluzione è neutra; le soluzioni acide hanno pH minore di 7, quelle

basiche maggiore (Figura 13.5). Per una soluzione con $[H^+] = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ mol/L: $\text{pH} = -\log(3{,}2 \cdot 10^{-4}) = 4 - \log 3{,}2 \approx 3{,}49$.

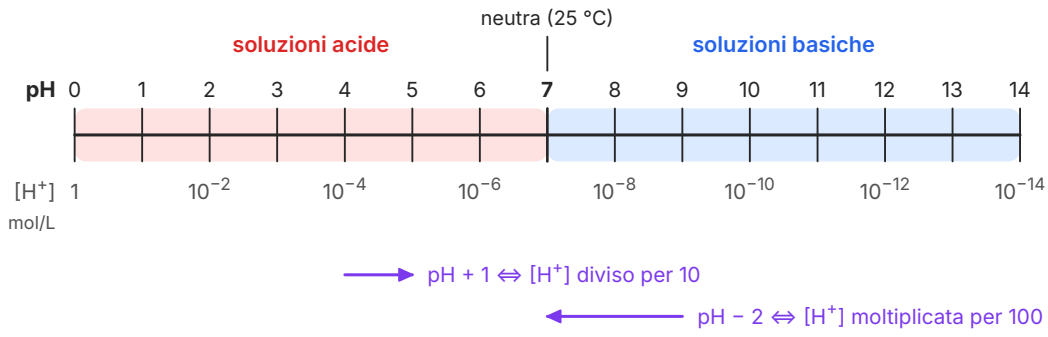


Figura 13.5 La scala del pH con la concentrazione corrispondente degli ioni idrogeno. Passi uguali sulla scala corrispondono a rapporti uguali: aumentare il pH di 1 significa dividere $[H^+]$ per 10, diminuirlo di 2 significa moltiplicarla per 100. Il pH 7 indica una soluzione neutra a 25 °C.

Il segno meno rende positivi i valori, ma inverte il verso: pH più basso, concentrazione più alta. Una soluzione a pH 3 non è «un po' più acida» di una a pH 4: ha una concentrazione di ioni idrogeno dieci volte maggiore, e cento volte maggiore di una a pH 5. In chimica vedrai che la definizione rigorosa usa l'*attività* degli ioni invece della concentrazione, e che il valore 7 della neutralità dipende dalla temperatura; per le soluzioni diluite a 25 °C la formula $\text{pH} = -\log[H^+]$ è un'ottima approssimazione.

Il decibel. L'orecchio umano percepisce suoni di intensità molto diverse: l'intensità I (potenza per unità di superficie, in W/m²) dei suoni udibili si estende su più di dodici ordini di grandezza. Il **livello di intensità sonora** L, in **decibel** (dB), è

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

dove $I_0 = 10^{-12}$ W/m² è un'intensità di riferimento, vicina alla soglia di udibilità. Un suono con $I = 10^{-5}$ W/m² ha livello $L = 10 \log 10^7 = 70$ dB. Ogni volta che l'intensità si moltiplica per 10, il livello aumenta di 10 dB; se l'intensità raddoppia, il livello aumenta di $10 \log 2 \approx 3$ dB. Per questo due macchine uguali, che insieme emettono un'intensità doppia, non fanno «il doppio dei decibel» ma solo 3 dB in più.

COLLEGAMENTI

Scienze della Terra: la magnitudo dei terremoti. Nel 1935 il sismologo Charles F. Richter introdusse la **magnitudo**, un numero che misura la «grandezza» di un terremoto a partire dall'ampiezza delle oscillazioni registrate dai sismografi. È una scala logaritmica in base 10: secondo lo United States Geological Survey (USGS), a ogni aumento di un'unità di magnitudo corrisponde un'ampiezza misurata dieci volte maggiore, e un'energia liberata circa 32 volte maggiore. Un terremoto di magnitudo 6 produce quindi, nelle stesse condizioni di misura, oscillazioni 100 volte più ampie di uno di magnitudo 4. Oggi per i terremoti forti i sismologi usano un'altra scala, la magnitudo momento; la scala di Richter resta in uso per i terremoti piccoli registrati localmente.

13.6.3 Dati esponenziali e grafici semilogaritmici

Supponiamo che una grandezza segua il modello $y = A \cdot b^x$. Prendendo il logaritmo decimale:

$$\log y = \log A + x \log b$$

Il logaritmo di y è una funzione **lineare** di x: se nel grafico si mette in ordinata $\log y$ invece di y, i punti si allineano su una retta, con pendenza $\log b$ e intercetta $\log A$. Un **grafico semilogaritmico** fa esattamente questo: l'asse orizzontale ha la scala usuale, quello verticale una scala logaritmica, su cui distanze uguali corrispondono a rapporti uguali (tra 100 e 1000 c'è la stessa distanza che tra 1000 e 10 000). Sulla scala verticale si scrivono i valori di y, non i loro logaritmi.

Tabella 13.1 Numero N di batteri in una coltura, contati ogni ora (dati inventati) e logaritmo decimale dei conteggi. Le differenze tra logaritmi successivi sono tutte circa 0,204.

t (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	300	480	768	1229	1966	3146	5033	8053	12 885
$\log N$	2,477	2,681	2,885	3,090	3,294	3,498	3,702	3,906	4,110

La Tabella 13.1 riporta i conteggi di una coltura di batteri (dati inventati). Nel grafico ordinario i punti disegnano una curva che si impenna; nel grafico semilogaritmico si allineano su una retta (Figura 13.6). Il controllo numerico è semplice: le differenze tra i logaritmi di ore successive sono costanti, circa 0,204, cioè i rapporti tra conteggi successivi sono costanti, circa $10^{0{,}204} \approx 1{,}6$. La crescita è esponenziale, del 60% all'ora.

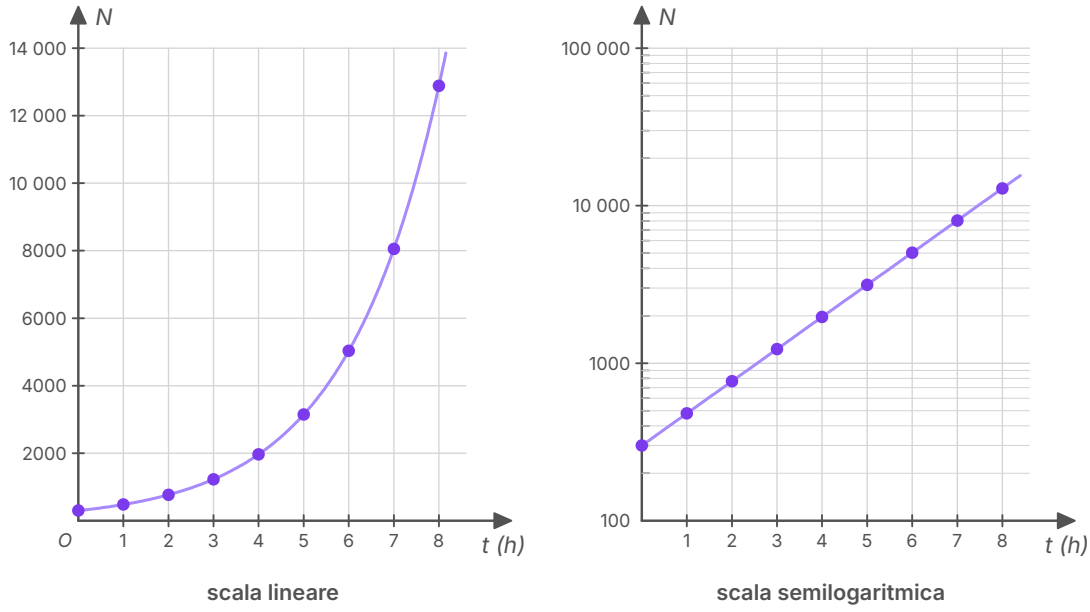


Figura 13.6 I dati della Tabella 13.1 in un grafico con scala lineare (a sinistra) e in un grafico semilogaritmico (a destra), con la curva del modello $N = 300 \cdot 1{,}6^t$. Sulla scala logaritmica i valori 100, 1000, 10 000, 100 000 sono equidistanti, e la curva esponenziale diventa una retta.

ESEMPIO SVOLTO

Ricava il modello $N = A \cdot b^t$ dai dati della Tabella 13.1, usando il primo e l'ultimo punto, e prevedi dopo quante ore la coltura supererà 50 000 batteri, se il modello resta valido.

Retta dei logaritmi. I punti (0; log 300) e (8; log 12 885) hanno ordinate 2,477 e 4,110. Pendenza: $\dfrac{4{,}110 - 2{,}477}{8} \approx 0{,}204$; intercetta 2,477. Quindi $\log N \approx 2{,}477 + 0{,}204\,t$.

Ritorno alle potenze. $A = 10^{2{,}477} \approx 300$, $b = 10^{0{,}204} \approx 1{,}60$: $N \approx 300 \cdot 1{,}6^t$.

Previsione. $300 \cdot 1{,}6^t > 50\,000 \Leftrightarrow 1{,}6^t > \dfrac{500}{3} \Leftrightarrow t > \dfrac{\ln(500/3)}{\ln 1{,}6} \approx 10{,}9$ h. È un'estrapolazione: nessuna coltura cresce in modo esponenziale per sempre, perché prima o poi finiscono lo spazio e il nutrimento. Nel capitolo 14 vedremo come scegliere la retta che meglio approssima dati che non sono perfettamente allineati (la retta di regressione), anche dopo averne preso i logaritmi.

SINTESI

- Per $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ il logaritmo $\log_a b$ è l'unico numero c con $a^c = b$: è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento. Esiste ed è unico perché a^x è monotona con immagine $]0; +\infty[$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a b} = b$. log indica la base 10, ln la base e.
- Per argomenti positivi: $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$. Per una somma non c'è regola; $\log x^2 = 2 \log |x|$.
- Cambiamento di base: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; con la calcolatrice $\log_a b = \ln b / \ln a$.
- La funzione logaritmica $y = \log_a x$ è l'inversa di $y = a^x$: dominio $]0; +\infty[$, immagine $\mathbb{R}$, passa per $(1; 0)$, crescente per $a > 1$ e decrescente per $0 < a < 1$, asintoto verticale $x = 0$. Il suo grafico è il simmetrico dell'esponenziale rispetto a $y = x$.
- Il dominio di $\log_a A(x)$ si trova risolvendo $A(x) > 0$.
- $a^x = b$ ha la soluzione $x = \log_a b$ se $b > 0$ ed è impossibile se $b \leq 0$; con basi diverse si prende il logaritmo dei due membri.
- Equazioni e disequazioni logaritmiche: prima le condizioni di esistenza, poi la riduzione a logaritmi della stessa base, infine il controllo o l'intersezione con le C.E.
- Nelle disequazioni il verso si conserva con base maggiore di 1 e si inverte con base tra 0 e 1; dividendo per un logaritmo negativo il verso si inverte.
- Tempi di raddoppio e di dimezzamento: $T = \ln 2 / |k|$; regola del 70 per crescite percentuali piccole.
- Scale logaritmiche: $\text{pH} = -\log [H^+]$, $L = 10 \log (I/I_0)$ dB, magnitudo dei terremoti: un passo della scala è un fattore.
- Se $y = A \cdot b^x$, allora $\log y$ è lineare in x: su un grafico semilogaritmico i dati esponenziali si allineano su una retta di pendenza $\log b$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il numero $\log_3 81$ è uguale a:

   A. 27

   B. 4

   C. 3

   D. $\dfrac{1}{4}$

2. ● Quale delle seguenti espressioni ha significato?
   A. $\log_2(-8)$
   B. $\log_1 5$
   C. $\log_{1/2} 4$
   D. $\log_0 1$

3. ● Il valore di $\log 20 + \log 5$ è:
   A. $\log 25$
   B. 100
   C. $\log 4$
   D. 2

4. ●● Il dominio della funzione $y = \ln(4 - x^2)$ è:
   A. $]-2; 2[$
   B. $[-2; 2]$
   C. $]2; +\infty[$
   D. $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

5. ●● Il grafico di $y = \log_{1/3} x$:
   A. è crescente e passa per (0; 1)
   B. è crescente e passa per (1; 0)
   C. è decrescente e passa per (1; 0)
   D. è decrescente e ha l'asintoto $y = 0$

6. ●● Una soluzione ha pH 3, un'altra pH 5. La concentrazione di ioni idrogeno della prima, rispetto a quella della seconda, è:
   A. 2 volte maggiore
   B. 100 volte maggiore
   C. 100 volte minore
   D. $\frac{5}{3}$ volte maggiore

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\log_a 1 = 0$ per ogni base ammessa. b) $\ln x^2 = 2 \ln x$ per ogni $x \neq 0$. c) $\log_2 5$ è compreso tra 2 e 3. d) Se $0 < a < 1$, allora $\log_a x > 0$ per ogni $x > 1$. e) $\log(ab) = \log a \cdot \log b$ per $a, b > 0$.

8. ● Completa la tabella scrivendo ogni uguaglianza nell'altra forma. a) $2^6 = 64 \Leftrightarrow$ _____ ; b) $\log_5 \frac{1}{125} = -3 \Leftrightarrow$ _____ ; c) $10^{-2} = 0{,}01 \Leftrightarrow$ _____ ; d) $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow$ _____ ; e) $8^{2/3} = 4 \Leftrightarrow$ _____ .

Calcolare

9. ● Calcola: a) $\log_2 64$; b) $\log_3 \frac{1}{27}$; c) $\log_{1/2} 16$; d) $\log 0{,}0001$; e) $\ln \sqrt{e}$; f) $\log_4 32$; g) $\log_{\sqrt{2}} 8$.

10. ● Trova x: a) $\log_x 81 = 4$; b) $\log_5 x = -2$; c) $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$; d) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$.

11. ●● Calcola con le proprietà, senza calcolatrice: a) $\log_6 9 + \log_6 4$; b) $\log_2 40 - \log_2 5$; c) $3 \log 2 + \log 125$; d) $\ln (e^2 \cdot \sqrt{e})$; e) $\log_3 18 - 2 \log_3 \sqrt{2}$.

12. ●● a) Sviluppa, con $x, y > 0$: $\log_2 \frac{8x^3}{\sqrt{y}}$. b) Scrivi come un solo logaritmo, con $a, b, c > 0$: $2 \ln a - \ln b + \frac{1}{3} \ln c$. c) Sapendo che $\log 2 \approx 0{,}3010$ e $\log 3 \approx 0{,}4771$, calcola $\log 12$, $\log 1{,}5$, $\log 0{,}6$.

13. ●● Usa la formula del cambiamento di base e la calcolatrice (quattro cifre decimali): a) $\log_2 7$; b) $\log_5 0{,}2$; c) $\log_3 100$; d) $\log_{0,5} 10$.

14. ●● Determina il dominio delle funzioni: a) $y = \log (3 - x)$; b) $y = \ln (x^2 - 9)$; c) $y = \log_2 \frac{x+1}{x-2}$; d) $y = \sqrt{\ln x}$; e) $y = \frac{1}{\log (x+1)}$.

15. ●● Per ciascuna funzione indica dominio, asintoto verticale, intersezioni con gli assi e la trasformazione che porta al grafico dalla funzione logaritmica di partenza; poi disegnala. a) $y = \ln (x - 1)$; b) $y = 1 + \log_2 x$; c) $y = -\log_3 x$; d) $y = \log_2 (x + 4) - 1$.

16. ●● Risolvi le equazioni esponenziali (dove serve, valori approssimati a tre decimali): a) $3^x = 10$; b) $5 \cdot 2^x = 40$; c) $e^{3x-1} = 4$; d) $7^x = -7$; e) $2^{x-1} = 5^x$; f) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; g) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

17. ●● Risolvi le equazioni logaritmiche: a) $\log_3 (2x + 1) = 2$; b) $\log (x + 2) + \log (x - 1) = 1$; c) $\ln (x + 1) - \ln (x - 2) = \ln 4$; d) $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$; e) $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$; f) $\log_3 x + \log_9 x = 3$.

18. ●● Risolvi le disequazioni logaritmiche: a) $\log_2 (x - 3) \leq 2$; b) $\log_{1/2} (x + 1) > -3$; c) $\ln (2x - 1) \geq 0$; d) $\log (x^2 - 15x) < 2$.

19. ●● Risolvi le disequazioni esponenziali (valori approssimati a tre decimali): a) $2^x > 12$; b) $0{,}9^x \geq 0{,}5$; c) $3^x < 5^{x-1}$; d) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra la proprietà del quoziente $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $(x, y > 0)$ in due modi: direttamente dalla definizione e usando le proprietà del prodotto e della potenza.

21. ●● Dimostra che, per $a, b > 0$ diversi da 1, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, e che $\log_{1/a} x = -\log_a x$ per ogni $x > 0$. Che cosa dice la seconda uguaglianza sui grafici di $y = \log_a x$ e $y = \log_{1/a} x$?

22. ●● **Trova l'errore.** Marta risolve $\log_2 x^2 = 4$ così: «$2 \log_2 x = 4$, $\log_2 x = 2$, $x = 4$». Spiega che cosa ha sbagliato e risolvi correttamente.

23. ●●● Dimostra che $\log 2$ è un numero irrazionale. (Suggerimento: supponi $\log 2 = \frac{p}{q}$ con p, q interi positivi e deduci un'uguaglianza tra interi impossibile.)

24. ●●● Dimostra che un intero positivo N ha esattamente k cifre se e solo se $k - 1 \le \log N < k$. Deduci quante cifre hanno 2^{100} e 3^{50}.

Problemi

25. ● Una soluzione ha $[H^+] = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol/L. a) Calcola il pH (due decimali). b) Un'altra soluzione ha pH 8,3: quanto vale $[H^+]$? È acida o basica (a 25 °C)? c) Di quanto cambia il pH se la concentrazione di ioni idrogeno diventa mille volte minore?

26. ●● Un macchinario produce un suono di intensità $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2. a) Calcola il livello sonoro in decibel ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2). b) Quale livello si ha con dieci macchinari uguali accesi insieme (le intensità si sommano)? c) Quale intensità corrisponde a 85 dB?

27. ●● Un capitale di 10 000 € è investito all'interesse composto annuo del 2,5%. a) Dopo quanti anni (interi) il capitale avrà superato il doppio? b) Confronta con la stima della regola del 70. c) Quale tasso annuo servirebbe per raddoppiare in 15 anni?

28. ●● Un isotopo radioattivo usato in laboratorio (dati inventati) ha un tempo di dimezzamento di 6 ore. a) Scrivi la massa $m(t)$ di un campione di 80 mg dopo t ore, nella forma $m_0\, e^{kt}$ del capitolo 12, calcolando la costante k. b) Dopo quanto tempo resta il 5% della massa iniziale? c) Quanta massa resta dopo un giorno?

29. ●● Secondo lo USGS, a ogni unità in più di magnitudo corrisponde un'ampiezza delle oscillazioni misurate dieci volte maggiore. a) Quante volte è maggiore l'ampiezza di un terremoto di magnitudo 6,2 rispetto a uno di magnitudo 4,7? b) Due registrazioni nelle stesse condizioni hanno ampiezze una 250 volte l'altra: qual è la differenza di magnitudo?

Con il computer

30. ● Nel foglio di calcolo inserisci nella colonna A i tempi 0, 1, ..., 8 e nella colonna B i conteggi della Tabella 13.1. a) Nella colonna C calcola il logaritmo decimale di ogni conteggio (funzione LOG10) e nella colonna D le differenze tra valori successivi della colonna C: che cosa osservi? b) Crea un grafico a dispersione dei dati e poi imposta la scala logaritmica sull'asse verticale (opzioni dell'asse): descrivi come cambia il grafico. c) Ripeti con dati di crescita lineare, per esempio $N = 300 + 1500t$: sul grafico semilogaritmico i punti sono allineati?

31. ● Nel foglio di calcolo costruisci una tabella con $x = 0{,}5$; 1; 2; 5; 10; 100; 1000 e le colonne LN(x), LOG10(x) e LOG(x; 2) (logaritmo in base 2). a) Aggiungi una colonna con LN(x)/LN(2) e confrontala con LOG(x; 2): quale formula stai verificando? b) Aggiungi la colonna LOG10(x)/LN(x): perché è costante, e quale valore assume? c) Trova il più piccolo intero x per cui $\log_2 x > 20$.

Verso la verifica

32. ●● Studia dominio, zeri e segno di $f(x) = \log_2 (x^2 - 2x)$.

33. ●● Risolvi $2^x + 2^{2-x} = 5$.

34. ●● Risolvi $\log_2(x+1) > \log_4(x+7)$.

35. ●●● **Sfida.** Risolvi $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$.

PER APPROFONDIRE

- [MAE] Maor, *e: The Story of a Number*: Nepero, Briggs e le prime tavole, il logaritmo naturale e il legame con l'interesse composto.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: l'invenzione dei logaritmi nel quadro della matematica del Seicento.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la funzione esponenziale, il logaritmo e il numero *e*.

Glossario del capitolo

Argomento (di un logaritmo)
il numero b in $\log_a b$; deve essere positivo.

Base (di un logaritmo)
il numero a in $\log_a b$; deve essere positivo e diverso da 1.

Cambiamento di base
la formula $\log_a b = \log_c b / \log_c a$, che permette di calcolare un logaritmo in base qualsiasi con i logaritmi in un'altra base (per esempio con i tasti log e ln).

Disequazione logaritmica
disequazione in cui l'incognita compare nell'argomento o nella base di un logaritmo; passando agli argomenti il verso si conserva se la base è maggiore di 1 e si inverte se è tra 0 e 1.

Equazione logaritmica
equazione in cui l'incognita compare nell'argomento o nella base di un logaritmo; si risolve imponendo prima le condizioni di esistenza.

Funzione logaritmica
la funzione $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), inversa della funzione esponenziale $y = a^x$; ha dominio $]0; +\infty[$ e immagine $\mathbb{R}$.

Grafico semilogaritmico
grafico con scala lineare sull'asse orizzontale e logaritmica su quello verticale; i dati di una crescita o decrescita esponenziale vi si dispongono su una retta.

Livello di intensità sonora
grandezza $L = 10 \log (I/I_0)$, misurata in decibel (dB), con $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2; un aumento di 10 dB corrisponde a un'intensità dieci volte maggiore.

Logaritmo
dati $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, il logaritmo in base a di b, $\log_a b$, è l'unico numero c tale che $a^c = b$: l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento.

Logaritmo decimale
logaritmo in base 10, indicato con log senza indice; per un intero positivo, la sua parte intera aumentata di 1 dà il numero delle cifre.

Logaritmo naturale
logaritmo in base e, indicato con ln; la funzione $y = \ln x$ è l'inversa della funzione $y = e^x$.

Magnitudo
numero che misura la grandezza di un terremoto su una scala logaritmica in base 10: a un'unità in più corrisponde un'ampiezza delle oscillazioni registrate dieci volte maggiore.

PH
misura dell'acidità di una soluzione acquosa: in prima approssimazione $pH = -\log [H^+]$, con la concentrazione in mol/L; a 25 °C le soluzioni neutre hanno pH 7.

Regola del 70
stima del numero di periodi necessari a raddoppiare una grandezza che cresce del p% a ogni periodo: circa 70/p; è accurata per p piccolo.

Scala logaritmica
scala su cui passi uguali corrispondono a moltiplicazioni per uno stesso fattore; si usa per grandezze che variano su molti ordini di grandezza.

Soluzioni

1. B. $3^4 = 81$.

2. C. $\log_{1/2} 4 = -2$. L'argomento -8 è negativo; le basi 1 e 0 non sono ammesse.

3. D. $\log (20 \cdot 5) = \log 100 = 2$.

4. A. Serve $4 - x^2 > 0$, cioè $-2 < x < 2$; gli estremi sono esclusi perché ln 0 non esiste.

5. C. La base è tra 0 e 1, quindi la funzione è decrescente; $\log_{1/3} 1 = 0$; l'asintoto è $x = 0$, non $y = 0$.

6. B. $10^{-3} : 10^{-5} = 10^2 = 100$: pH più basso significa concentrazione più alta.

7. a) Vero: $a^0 = 1$. b) Falso: per $x < 0$ il secondo membro non esiste; è vero $\ln x^2 = 2 \ln |x|$. c) Vero: $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$. d) Falso: con base tra 0 e 1, $\log_a x < 0$ per $x > 1$. e) Falso: $\log (ab) = \log a + \log b$.

8. a) $\log_2 64 = 6$; b) $5^{-3} = \frac{1}{125}$; c) $\log 0{,}01 = -2$; d) $e^0 = 1$; e) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$.

9. a) 6; b) -3; c) -4, perché $(\frac{1}{2})^{-4} = 16$; d) -4; e) $\frac{1}{2}$; f) $4^c = 32$, $2^{2c} = 2^5$, $c = \frac{5}{2}$; g) $2^{c/2} = 2^3$, $c = 6$.

10. a) $x^4 = 81$ con $x > 0$, $x \neq 1$: $x = 3$. b) $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$. c) $x^{-3/2} = \frac{1}{8}$, cioè $x^{3/2} = 8$, $x = 8^{2/3} = 4$. d) $x^{1/2} = 3$, $x = 9$.

11. a) $\log_6 36 = 2$. b) $\log_2 8 = 3$. c) $\log 8 + \log 125 = \log 1000 = 3$. d) $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. e) $2 \log_3 \sqrt{2} = \log_3 2$, quindi $\log_3 9 = 2$.

12. a) $3 + 3 \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 y$. b) $\ln \frac{a^2 \sqrt[3]{c}}{b}$. c) $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 1{,}0791$; $\log 1{,}5 = \log 3 - \log 2 \approx 0{,}1761$; $\log 0{,}6 = \log 6 - 1 = \log 2 + \log 3 - 1 \approx -0{,}2219$.

13. a) $\frac{\ln 7}{\ln 2} \approx 2{,}8074$. b) Esattamente -1, perché $0{,}2 = 5^{-1}$. c) $\frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{0{,}4771\ldots} \approx 4{,}1918$. d) $\frac{1}{\log 0{,}5} \approx -3{,}3219$.

14. a) $x < 3$. b) $x < -3 \vee x > 3$. c) $x < -1 \vee x > 2$. d) $x > 0$ e $\ln x \geq 0$: $x \geq 1$. e) $x + 1 > 0$ e $\log (x + 1) \neq 0$, cioè $x > -1$ e $x \neq 0$.

15. a) Traslazione di 1 verso destra: dominio $x > 1$, asintoto $x = 1$, zero $x = 2$, nessuna intersezione con l'asse y. b) Traslazione di 1 verso l'alto: dominio $x > 0$, asintoto $x = 0$, zero $x = \frac{1}{2}$. c) Simmetria rispetto all'asse x: dominio $x > 0$, asintoto $x = 0$, zero $x = 1$, decrescente. d) Traslazione di 4 a sinistra e di 1 in basso: dominio $x > -4$, asintoto $x = -4$; zero: $\log_2 (x + 4) = 1$, $x = -2$; intersezione con l'asse y: $\log_2 4 - 1 = 1$, punto $(0; 1)$.

16. a) $x = \log_3 10 \approx 2{,}096$. b) $2^x = 8$, $x = 3$. c) $3x - 1 = \ln 4$, $x = \frac{1 + \ln 4}{3} \approx 0{,}795$. d) Impossibile: $7^x > 0$. e) $(x - 1) \ln 2 = x \ln 5$, $x (\ln 2 - \ln 5) = \ln 2$, $x = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln 5} \approx -0{,}756$. f) $t = 3^x$: $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = 1$ o $t = 3$: $x = 0$, $x = 1$. g) $t = e^x$: $t = 2$ o $t = 3$: $x = \ln 2 \approx 0{,}693$, $x = \ln 3 \approx 1{,}099$.

17. a) C.E. $x > -\frac{1}{2}$; $2x + 1 = 9$, $x = 4$. b) C.E. $x > 1$; $(x + 2)(x - 1) = 10$, $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ ($x = -4$ non accettabile). c) C.E. $x > 2$; $x + 1 = 4(x - 2)$, $x = 3$, accettabile. d) C.E. $x > 2$; $x(x - 2) = 8$, $x = 4$ ($x = -2$ non accettabile). e) C.E. $x > 0$; $t = \log_2 x$: $t = 1$ o $t = 2$, $x = 2$, $x = 4$. f) C.E. $x > 0$; $\frac{3}{2} \log_3 x = 3$, $\log_3 x = 2$, $x = 9$.

18. a) C.E. $x > 3$; $x - 3 \leq 4$: $3 < x \leq 7$. b) C.E. $x > -1$; base minore di 1: $x + 1 < 8$: $-1 < x < 7$. c) C.E. $x > \frac{1}{2}$; $2x - 1 \geq 1$: $x \geq 1$. d) C.E. $x < 0 \vee x > 15$; $x^2 - 15x < 100$, $-5 < x < 20$; intersezione: $-5 < x < 0 \vee 15 < x < 20$.

19. a) $x > \log_2 12 \approx 3{,}585$. b) $x \ln 0{,}9 \geq \ln 0{,}5$; $\ln 0{,}9 < 0$, il verso si inverte: $x \leq \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}579$. c) $x \ln 3 < (x - 1) \ln 5$, $x (\ln 3 - \ln 5) < -\ln 5$;

$\ln 3 - \ln 5 < 0$: $x > \dfrac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3} \approx 3{,}151$. d) $t = 2^x > 0$: $t^2 - 3t - 4 \geq 0$, $t \leq -1$ (impossibile) o $t \geq 4$: $x \geq 2$.

20. 1) Con $u = \log_a x$, $v = \log_a y$: $x/y = a^u / a^v = a^{u-v}$, quindi $\log_a (x/y) = u - v$. 2) $x/y = x \cdot y^{-1}$: $\log_a (x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$. c.v.d.

21. Con il cambiamento di base in base e: $\dfrac{\ln b}{\ln a} \cdot \dfrac{\ln a}{\ln b} = 1$. Poi $\log_{1/a} x = \dfrac{\ln x}{\ln (1/a)} = \dfrac{\ln x}{-\ln a} = -\log_a x$. I due grafici sono simmetrici rispetto all'asse x: il punto $(x; y)$ sta sul primo se e solo se $(x; -y)$ sta sul secondo.

22. Il passaggio $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$ vale solo per $x > 0$, mentre l'equazione ha C.E. $x \neq 0$: Marta ha ristretto il dominio e perso una soluzione. Correttamente $x^2 = 2^4 = 16$, $x = \pm 4$ (oppure $2 \log_2 |x| = 4$, $|x| = 4$). Controllo: $\log_2 16 = 4$ per entrambe.

23. log 2 è positivo (perché $2 > 1$). Se fosse $\log 2 = p/q$ con p, q interi positivi, si avrebbe $10^{p/q} = 2$, cioè $10^p = 2^q$. Ma $10^p = 2^p \cdot 5^p$ è divisibile per 5, mentre 2^q non lo è (per l'unicità della scomposizione in fattori primi): assurdo. Quindi log 2 è irrazionale. c.v.d.

24. N ha k cifre $\Leftrightarrow 10^{k-1} \leq N < 10^k$ (il più piccolo numero di k cifre è 10^{k-1}, il più piccolo di $k+1$ cifre è 10^k) $\Leftrightarrow k - 1 \leq \log N < k$, perché log è crescente. $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30{,}10$: 31 cifre. $\log 3^{50} = 50 \log 3 \approx 23{,}86$: 24 cifre.

25. a) $\text{pH} = -\log (4{,}0 \cdot 10^{-3}) = 3 - \log 4 \approx 2{,}40$. b) $[H^+] = 10^{-8{,}3} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ mol/L; basica (pH maggiore di 7). c) Aumenta di 3 unità.

26. a) $L = 10 \log (3{,}2 \cdot 10^6) = 10 (6 + \log 3{,}2) \approx 65{,}1$ dB. b) Intensità dieci volte maggiore: $65{,}1 + 10 = 75{,}1$ dB. c) $\log (I/I_0) = 8{,}5$, $I = 10^{8{,}5} \cdot 10^{-12} = 10^{-3{,}5} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ W/m^2.

27. a) $1{,}025^n > 2$: $n > \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}025} \approx 28{,}07$; dopo 28 anni il fattore è $1{,}025^{28} \approx 1{,}996$, quindi servono 29 anni. b) $70 / 2{,}5 = 28$ anni: buona stima del tempo di raddoppio (28,07). c) $(1 + i)^{15} = 2$, $1 + i = 2^{1/15} \approx 1{,}0473$: circa il 4,73% annuo.

28. a) $e^{6k} = \dfrac{1}{2}$, $k = -\dfrac{\ln 2}{6} \approx -0{,}1155$ h^{-1}, $m(t) = 80\, e^{-0{,}1155\, t}$ mg. b) $e^{kt} = 0{,}05$: $kt = \ln 0{,}05 = -\ln 20$, $t = \dfrac{6 \ln 20}{\ln 2} = 6 \log_2 20 \approx 25{,}9$ h. c) Un giorno = 24 h = 4 tempi di dimezzamento: $80 / 2^4 = 5$ mg.

29. a) $10^{6{,}2 - 4{,}7} = 10^{1{,}5} \approx 31{,}6$ volte. b) $\Delta = \log 250 \approx 2{,}4$.

30. a) Le differenze sono tutte circa 0,204 (tra 0,203 e 0,205, per gli arrotondamenti dei conteggi): i rapporti tra conteggi successivi sono costanti, circa $10^{0{,}204} \approx 1{,}6$. b) Con scala logaritmica i punti si allineano su una retta (Figura 13.6). c) No: per una crescita lineare i punti disegnano sul grafico semilogaritmico una curva che si appiattisce, perché le differenze tra i logaritmi successivi, $\log \dfrac{N_{t+1}}{N_t}$, diminuiscono.

31. a) Le colonne coincidono: è la formula del cambiamento di base $\log_2 x = \ln x / \ln 2$. b) $\log x / \ln x = \log x / (\log x / \log e) = \log e \approx 0{,}4343$, costante (per $x \neq 1$; per $x = 1$ il rapporto non è definito). c) $x > 2^{20} = 1\,048\,576$: il più piccolo intero è 1 048 577.

32. Dominio: $x^2 - 2x > 0$, $x < 0 \vee x > 2$. Zeri: $x^2 - 2x = 1$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$ (cioè circa $-0{,}41$ e $2{,}41$, entrambi nel dominio). Positiva per $x^2 - 2x > 1$: $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$; negativa per $1 - \sqrt{2} < x < 0 \vee 2 < x < 1 + \sqrt{2}$.

33. $t = 2^x$: $t + \dfrac{4}{t} = 5$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t = 1$ o $t = 4$: $x = 0$, $x = 2$. Controllo: $1 + 4 = 5$, $4 + 1 = 5$ ✓.

34. C.E. $x > -1$. $\log_4 (x + 7) = \dfrac{1}{2} \log_2 (x + 7)$: $2 \log_2 (x + 1) > \log_2 (x + 7)$, e poiché $x + 1 > 0$, $\log_2 (x + 1)^2 > \log_2 (x + 7)$: $(x + 1)^2 > x + 7$, $x^2 + x - 6 > 0$, $x < -3 \vee x > 2$. Con le C.E.: $x > 2$.

35. C.E. $x > 0$, $x \neq 1$. Con $t = \log_2 x$ (che è $\neq 0$) si ha $\log_x 2 = \dfrac{1}{t}$: $\dfrac{1}{t} + t = \dfrac{5}{2}$, $2t^2 - 5t + 2 = 0$, $t = 2$ o $t = \dfrac{1}{2}$. Quindi $x = 4$ o $x = \sqrt{2}$. Controllo per $x = 4$: $\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$ ✓.