CAPITOLO

12

Potenze reali e funzione esponenziale

Sommare la stessa quantità ogni giorno dà una retta; moltiplicare per lo stesso fattore dà una curva che, prima o poi, supera qualunque retta. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire le potenze con esponente reale mediante classi contigue e usarne le proprietà.
2. Conoscere le proprietà e il grafico della funzione esponenziale e dei grafici da essa deducibili.
3. Introdurre il numero e attraverso l'interesse composto e la tangente al grafico di $y = e^x$.
4. Risolvere equazioni e disequazioni esponenziali con la stessa base, con la sostituzione e, quando serve, graficamente o per approssimazione.
5. Costruire e interpretare modelli di crescita e di decadimento esponenziale, discreti e continui, con il tempo di raddoppio e di dimezzamento.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Le potenze con esponente reale 2
12.2 La funzione esponenziale 5
12.3 Il numero e 9
12.4 Equazioni e disequazioni esponenziali 13
12.5 Modelli di crescita e di decadimento 15

Matematica 3 · Parte IV · Esponenziali e logaritmi · versione 1.0
Capitolo 12: Potenze reali e funzione esponenziale · pagine 301–326 del volume completo · estratto per lo studio

Una colonia di batteri raddoppia ogni venti minuti; un capitale in banca cresce dell'1% ogni anno; metà dei nuclei di carbonio-14 contenuti in un osso si trasforma in circa 5730 anni. Sono fenomeni lontanissimi, ma hanno una cosa in comune: in intervalli di tempo uguali la grandezza non aumenta (o diminuisce) della stessa *quantità*, bensì dello stesso *fattore*. Nel capitolo 4 abbiamo descritto questi processi a scatti, con le progressioni geometriche: un valore ogni giorno, ogni anno, ogni generazione. Il tempo però scorre in modo continuo, e i batteri non aspettano lo scoccare dei venti minuti per dividersi.

Per descrivere la crescita istante per istante serve una funzione $y = a^x$ definita per *ogni* numero reale x, anche irrazionale. In questo capitolo diamo un significato a potenze come $2^{\sqrt{2}}$, studiamo la funzione esponenziale e il suo grafico, incontriamo il numero e, la costante che la natura sembra preferire, e impariamo a risolvere equazioni e disequazioni in cui l'incognita sta all'esponente. Chiudiamo con i modelli di crescita e di decadimento esponenziale, che userai in fisica, in chimica, in biologia e in economia.

12.1 Le potenze con esponente reale

12.1.1 Dalle potenze razionali a quelle reali

Nel volume dello scorso anno (*Matematica 2*, cap. 2) abbiamo definito, per una base $a > 0$, la potenza con esponente razionale $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, e abbiamo visto perché la base deve essere positiva: con una base negativa lo stesso simbolo avrebbe due valori diversi. Con questa definizione restano valide tutte le proprietà delle potenze.

Ci serve un'altra proprietà, che useremo continuamente: **se $a > 1$, le potenze razionali di a crescono al crescere dell'esponente**, cioè $r < s$ implica $a^r < a^s$. Il motivo è semplice: $a^s = a^r \cdot a^{s-r}$, e una potenza di base $a > 1$ con esponente razionale positivo è maggiore di 1 (per esempio $a^{1/n} > 1$, perché se fosse $a^{1/n} \le 1$ elevando alla n si avrebbe $a \le 1$). Se invece $0 < a < 1$ accade il contrario: $r < s$ implica $a^r > a^s$.

Che cosa può voler dire $2^{\sqrt{2}}$? Non possiamo scrivere $\sqrt{2}$ come frazione $\frac{m}{n}$, perché è irrazionale. Possiamo però avvicinarci a $\sqrt{2}$ quanto vogliamo con numeri razionali, per difetto e per eccesso: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, poi $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, poi $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, e così via. Per ciascuna coppia calcoliamo le potenze di 2, che sono potenze razionali e quindi già definite. Poiché la base 2 è maggiore di 1, la potenza per difetto è minore di quella per eccesso; la Tabella 12.1 raccoglie i valori.

Tabella 12.1 Approssimazioni di $2^{\sqrt{2}}$: a sinistra gli esponenti razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto e per eccesso, a destra le potenze di 2 corrispondenti (arrotondate alla quarta cifra decimale, per difetto la colonna di sinistra, per eccesso quella di destra). Gli intervalli si restringono di circa dieci volte a ogni riga.

Esponenti	2 elevato all'esponente per difetto	2 elevato all'esponente per eccesso	Ampiezza
$1 < \sqrt{2} < 2$	2	4	2
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	2,6390	2,8285	0,1894
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	2,6573	2,6759	0,0185
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	2,6647	2,6666	0,0018
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$	2,6651	2,6654	0,0002

Le due colonne di potenze formano due classi contigue, come quelle che nel capitolo 8 ci hanno permesso di definire la lunghezza della circonferenza: ogni numero della prima classe è minore di ogni numero della seconda, e la differenza tra un elemento della seconda e uno della prima può diventare piccola quanto vogliamo. Due classi contigue di numeri reali hanno *uno e un solo* elemento separatore: è questo numero che chiamiamo $2^{\sqrt{2}}$. Dalla tabella leggiamo $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$; la Figura 12.1 mostra come gli intervalli, uno dentro l'altro, stringono il valore.

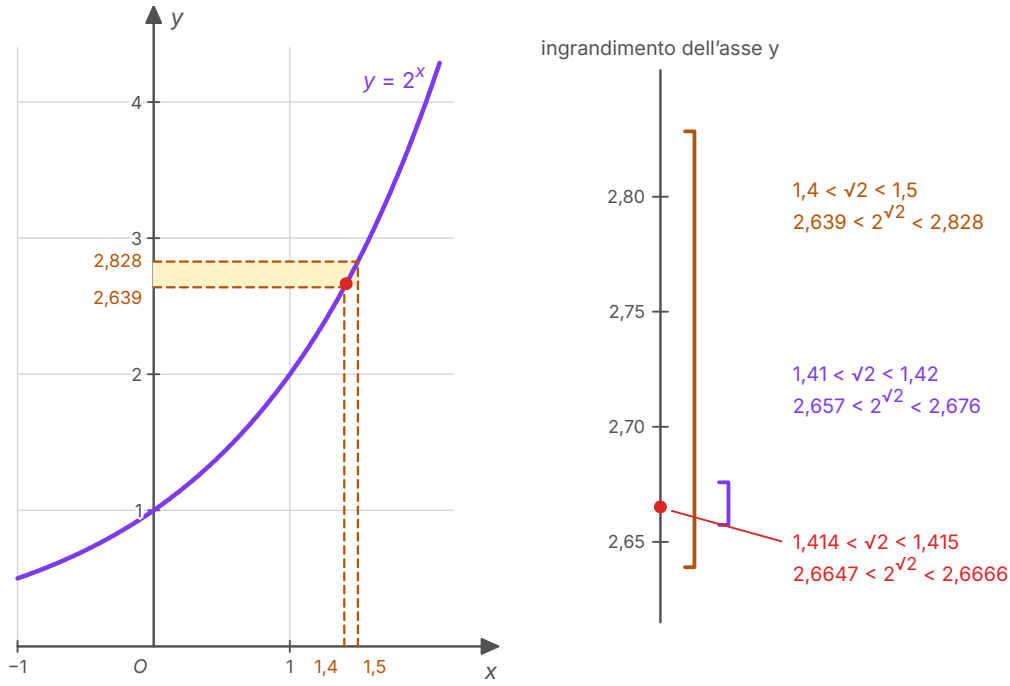


Figura 12.1 Come si «stringe» $2^{\sqrt{2}}$. A sinistra il grafico di $y = 2^x$: all'intervallo $1{,}4 < x < 1{,}5$ dell'asse x corrisponde sull'asse y l'intervallo da 2,639 a 2,828 (fascia colorata). A destra un ingrandimento dell'asse y: gli intervalli delle prime approssimazioni di √2 sono uno dentro l'altro e si restringono attorno a un solo punto, $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}6651$. Valori calcolati.

La stessa costruzione funziona per ogni base $a > 1$ e ogni esponente irrazionale x: le potenze a^r con r razionale minore di x e le potenze a^s con s razionale maggiore di x formano due classi contigue, e il loro elemento separatore si chiama a^x. Per $0 < a < 1$ le disuguaglianze si rovesciano ma il risultato è lo stesso (oppure si pone $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$, riconducendosi a una base maggiore di 1). Infine si pone $1^x = 1$ per ogni x. Abbiamo così definito la **potenza con esponente reale** a^x per ogni base $a > 0$ e ogni esponente reale x.

Questa definizione è anche un metodo di **calcolo approssimato** con errore controllato. Ogni riga della Tabella 12.1 non dà solo un valore, ma un intervallo che contiene sicuramente $2^{\sqrt{2}}$: con gli esponenti 1,414 e 1,415 sappiamo che $2{,}6647 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}6666$, quindi il punto medio 2,6657 differisce dal valore vero meno di un millesimo. Se servono più cifre, basta approssimare meglio √2: nella tabella ogni cifra in più dell'esponente fa guadagnare circa una cifra esatta della potenza. La calcolatrice, che mostra $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665144143$, usa procedimenti più rapidi, ma il risultato che fornisce è sempre un'approssimazione, mai il numero esatto: è un numero razionale con un numero finito di cifre, mentre $2^{\sqrt{2}}$ non lo è (si può dimostrare che è irrazionale, anzi trascendente).

IN SINTESI

Proprietà delle potenze con esponente reale. Per $a, b > 0$ e x, y reali qualsiasi:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad a^x : a^y = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad a^0 = 1,\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^x > 0$ per ogni x reale;
- se $a > 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$; se $0 < a < 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$.

Le proprietà valgono per gli esponenti razionali e si conservano passando agli elementi separatori; qui le accettiamo senza dimostrazione. L'ultima riga, la *monotonia*, è la chiave di tutto il capitolo.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola o semplifica: a) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$; b) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; c) $2^{\sqrt{8}} : 2^{\sqrt{2}}$. d) Senza calcolatrice, confronta $2^{\sqrt{3}}$ con $2^{1,7}$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ con $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$.

a) Si sommano gli esponenti: $3^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 3^1 = 3$. Due numeri irrazionali «complicati» hanno per prodotto un intero.

b) Si moltiplicano gli esponenti: $5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 5^3 = 125$.

c) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, quindi $2^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$.

d) Poiché $\sqrt{3} \approx 1{,}732 > 1{,}7$ e la base 2 è maggiore di 1, $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$. Con la base $\frac{1}{2}$, minore di 1, l'ordine si rovescia: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$.

12.2 La funzione esponenziale

12.2.1 Definizione e proprietà

Fissato un numero reale a con $a > 0$ e $a \neq 1$, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = a^x$ si chiama **funzione esponenziale** di base a. A differenza delle potenze del biennio, come $y = x^2$ o $y = x^3$, qui la base è fissa e la *variabile sta all'esponente*.

Perché quelle due condizioni sulla base? Con $a = 1$ si avrebbe la funzione costante $y = 1$, che non ha niente di interessante. Con $a \leq 0$ la potenza non è definita per molti esponenti: 0^{-1} non ha senso, e abbiamo appena ricordato che una base negativa non si eleva a esponenti frazionari. Per esempio «$(-2)^x$» varrebbe -2 per $x = 1$ e 4 per $x = 2$, ma non avrebbe alcun valore per $x = 1/2$: non è una funzione esponenziale.

Disegniamo per punti $y = 2^x$: per $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ si trova $y = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$. Ogni passo di 1 verso destra *raddoppia* l'ordinata, ogni passo verso sinistra la *dimezza*. Verso destra la curva sale sempre più ripida: $2^{10} = 1024$, 2^{20} supera il milione. Verso sinistra si schiaccia sull'asse x senza mai toccarlo: $2^{-10} = 1/1024$, meno di un millesimo, ma sempre positivo. La Figura 12.2 mostra il grafico insieme a quelli di altre basi.

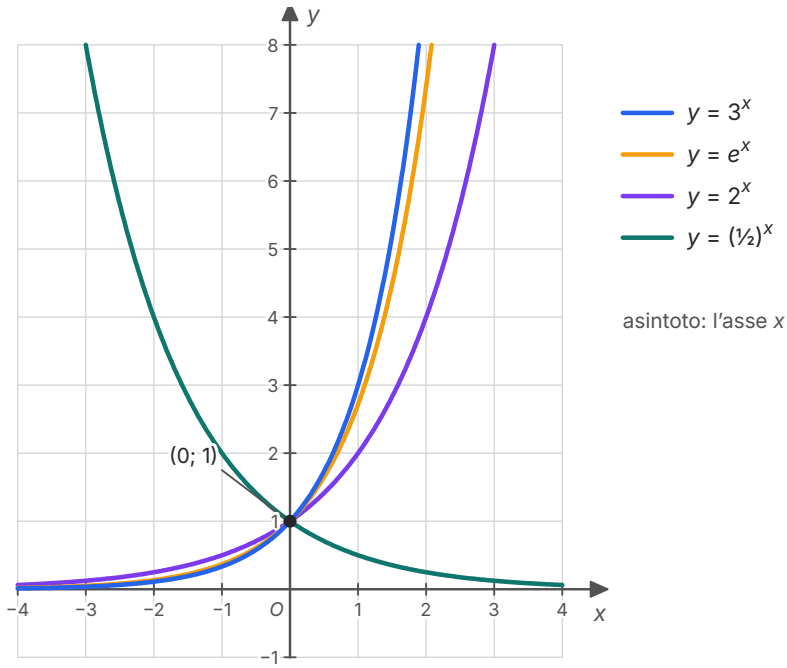


Figura 12.2 I grafici di $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$ e $y = (\frac{1}{2})^x$, calcolati dalle equazioni (stessa unità sui due assi). Tutti passano per (0; 1) e stanno sopra l'asse x, che è il loro asintoto. Per $x > 0$, più grande è la base, più ripida è la curva; il numero $e \approx 2{,}718$, che incontreremo nel prossimo paragrafo, sta tra 2 e 3. Il grafico di $(\frac{1}{2})^x$ è il simmetrico di quello di 2^x rispetto all'asse y.

Le caratteristiche che si leggono sul grafico valgono per ogni base e discendono dalle proprietà delle potenze.

IN SINTESI

La funzione esponenziale $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$):

- ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $]0; +\infty[$: assume tutti i valori positivi e solo quelli;
- il grafico passa per $(0; 1)$, perché $a^0 = 1$, e per $(1; a)$;
- è **crescente** se $a > 1$, **decrescente** se $0 < a < 1$;
- ha come **asintoto** orizzontale l'asse x, la retta $y = 0$: verso sinistra se $a > 1$, verso destra se $0 < a < 1$;
- è iniettiva, anzi biiettiva da $\mathbb{R}$ a $]0; +\infty[$: quindi è invertibile. La sua inversa, la funzione logaritmo, è l'argomento del capitolo 13.

Due osservazioni sulle voci dell'elenco. Che l'immagine sia *tutto* l'intervallo $]0; +\infty[$, senza «buchi», è una conseguenza della completezza dei numeri reali studiata nel capitolo 8: qui la accettiamo guardando il grafico. L'asintoto, invece, lo intendiamo in modo intuitivo: la distanza tra la curva e la retta $y = 0$ diventa piccola quanto vogliamo (basta andare abbastanza a sinistra), ma non si annulla mai. La definizione precisa richiede il concetto di limite, che studierai al quinto anno.

La funzione esponenziale cresce più in fretta di qualunque potenza di x, quando x è abbastanza grande. Confronta 2^x e x^2: per $x = 2$ e $x = 4$ sono uguali (4 e 16), per $x = 3$ vince il quadrato (9 contro 8), ma da $x = 5$ in poi l'esponenziale stacca la potenza (32 contro 25, 1024 contro 100 per $x = 10$). È questo il senso dell'espressione «crescita esponenziale»: alla lunga, una crescita più rapida di qualunque crescita polinomiale.

12.2.2 Basi reciproche e grafici trasformati

Poiché $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$, la funzione $y = (\frac{1}{a})^x$ si ottiene da $y = a^x$ cambiando x in $-x$: come abbiamo visto in *Matematica 2* e nel capitolo 3, il grafico di $y = f(-x)$ è il simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse y. Per questo basta conoscere bene le esponenziali di base maggiore di 1.

Con le trasformazioni del capitolo 3 si ottengono molti altri grafici: $y = 2^{x-3}$ è $y = 2^x$ traslata di 3 verso destra; $y = 2^x + 1$ è traslata di 1 verso l'alto, e il suo asintoto diventa $y = 1$; $y = -2^x$ è la simmetrica rispetto all'asse x, tutta sotto l'asse; $y = 2\text{^}|x|$ coincide con $y = 2^x$ per $x \geq 0$ ed è simmetrica rispetto all'asse y.

ESEMPIO SVOLTO

Studia e disegna $y = 2^{x+1} - 4$.

Trasformazioni. Si parte da $y = 2^x$, si trasla di 1 verso sinistra (x diventa $x + 1$) e di 4 verso il basso. L'ordine non conta, perché le due traslazioni agiscono una sulla x e l'altra sulla y.

Dominio, immagine, asintoto. Il dominio resta $\mathbb{R}$. Poiché $2^{x+1} > 0$, si ha $y > -4$: l'immagine è $]-4; +\infty[$ e l'asintoto è la retta $y = -4$. La funzione è crescente, come 2^x.

Intersezioni. Per $x = 0$: $y = 2 - 4 = -2$, il punto $(0; -2)$. Per $y = 0$: $2^{x+1} = 4 = 2^2$, quindi $x + 1 = 2$, $x = 1$: il punto $(1; 0)$.

Segno. $y > 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} > 2^2 \Leftrightarrow x + 1 > 2 \Leftrightarrow x > 1$, perché la base 2 è maggiore di 1. La funzione è negativa per $x < 1$. Il grafico è nella Figura 12.3.

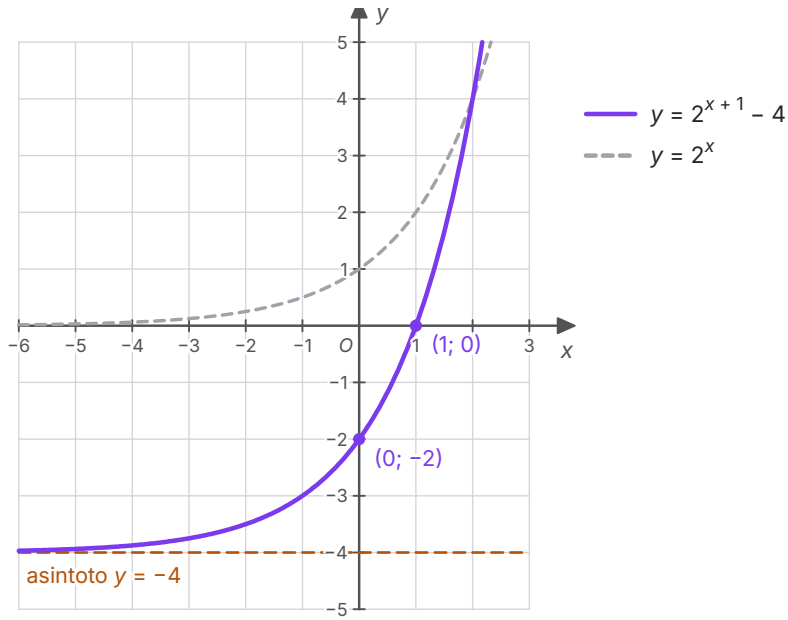


Figura 12.3 Il grafico di $y = 2^{x+1} - 4$ (in viola), ottenuto da quello di $y = 2^x$ (grigio tratteggiato) con una traslazione di vettore $(-1; -4)$. L'asintoto passa da $y = 0$ a $y = -4$ (tratteggiato); la curva taglia gli assi in $(0; -2)$ e $(1; 0)$. Calcolato dall'equazione, stessa unità sui due assi.

ERRORE FREQUENTE

Tre sviste da evitare.

- «$(-2)^x$ è una funzione esponenziale di base -2.» No: la base deve essere positiva e diversa da 1; $(-2)^{1/2}$ non esiste in $\mathbb{R}$.
- «3^x può essere negativo se x è negativo.» No: $3^{-2} = 1/9$. Un'esponenziale è **sempre positiva**; per questo un'equazione come $3^x = -5$ non ha soluzioni.
- «$2^{x+3} = 2^x + 2^3$.» No: l'esponente somma corrisponde a un *prodotto* di potenze, $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$. Allo stesso modo $2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, e non 2^{2x}.

12.3 Il numero *e*

12.3.1 Il problema dell'interesse composto

Immaginiamo una banca molto generosa che offre un interesse del 100% all'anno. Depositiamo 1 euro. Se l'interesse viene accreditato una volta sola, a fine anno, abbiamo $1 + 1 = 2$ euro. Se invece la banca accredita il 50% ogni sei mesi, a metà anno abbiamo 1,5 euro e nel secondo semestre l'interesse si calcola anche sugli interessi già maturati: a fine anno abbiamo $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ euro. È la capitalizzazione composta del capitolo 4.

Se l'anno viene diviso in n periodi, in ognuno il capitale viene moltiplicato per $1 + \dfrac{1}{n}$, e a fine anno diventa $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Accreditando gli interessi sempre più spesso, ogni mese, ogni giorno, ogni secondo, il capitale finale cresce senza limite? La Tabella 12.2 risponde di no.

Tabella 12.2 Il valore di $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$: il capitale finale, in euro, prodotto in un anno da 1 euro al tasso annuo del 100% con l'interesse accreditato n volte (valori arrotondati alla sesta cifra decimale).

Accredito	n	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
annuale	1	2
semestrale	2	2,25
trimestrale	4	2,441406
mensile	12	2,613035
giornaliero	365	2,714567
un milione di volte	10^6	2,718280

I valori crescono, ma sempre più lentamente, e si avvicinano a un numero poco superiore a 2,718 (si può dimostrare che restano tutti minori di 3). Questo numero, il valore a cui si avvicina $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n diventa grandissimo, si indica con la lettera e e si chiama **numero *e*** (o numero di Nepero):

$$e \approx 2{,}718281828$$

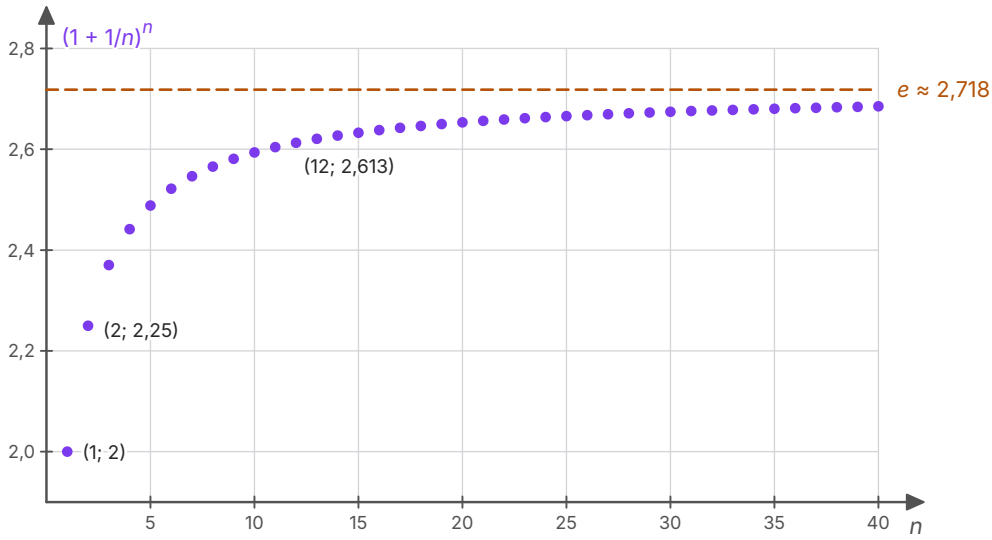


Figura 12.4 I valori di $(1 + \frac{1}{n})^n$ per n da 1 a 40, calcolati: crescono e si avvicinano alla retta tratteggiata $y = e$, senza raggiungerla. Già con $n = 12$ il valore è 2,613, ma per guadagnare ogni nuova cifra esatta di e bisogna aumentare n di circa dieci volte.

Nel linguaggio del quinto anno diremo che e è il *limite* della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$; per ora ci basta l'idea, che la Figura 12.4 rende visibile. Come π, il numero e è irrazionale, e anzi trascendente: non è soluzione di alcuna equazione polinomiale a coefficienti interi. L'irrazionalità fu dimostrata da Eulero, la trascendenza da Charles Hermite nel 1873, nove anni prima di quella di π (capitolo 8).

APPROFONDIMENTO · BREVE STORIA DEL NUMERO E

Il numero e è nato da un problema di interessi. Nel 1683 Jakob Bernoulli si chiese che cosa accade a un capitale quando gli interessi vengono accreditati a intervalli sempre più brevi, cioè proprio il problema della Tabella 12.2, e capì che il risultato resta compreso tra 2 e 3.

Fu Leonhard Eulero a usare per primo la lettera e per questa costante, verso la fine degli anni Venti del Settecento; il simbolo comparve a stampa nella sua *Mechanica* (1736). Eulero ne calcolò molte cifre e dimostrò che il numero è irrazionale. La dimostrazione che e è trascendente arrivò solo nel 1873, con Hermite.

Il nome «numero di Nepero», usato soprattutto in Italia, ricorda John Napier (Nepero), l'inventore dei logaritmi (1614), anche se Nepero non conobbe questa costante nella forma in cui la usiamo oggi: lo incontreremo nel capitolo 13.

12.3.2 La capitalizzazione continua

Torniamo a un caso realistico: un capitale C_0 al tasso annuo i (per esempio $i = 0{,}03$, il 3%). Se l'interesse viene accreditato n volte all'anno, ogni volta il capitale si moltiplica per $1 + \frac{i}{n}$, e dopo t anni diventa $C_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$. Ponendo $k = \frac{n}{i}$, cioè $n = ki$, si può riscrivere:

$$C_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C_0\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{it}$$

Quando n diventa grandissimo, lo diventa anche k, e la quantità tra parentesi quadre si avvicina a e. Il capitale tende quindi a

$$C(t) = C_0 \cdot e^{it}$$

Questa è la **capitalizzazione continua**: l'interesse viene aggiunto istante per istante. Con 1000 euro al 3% per 10 anni si ottiene $1000 \cdot e^{0{,}3} \approx 1349{,}86$ euro, contro $1000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 1343{,}92$ euro con l'accredito annuale: la differenza è piccola, ma il modello continuo è molto più comodo da maneggiare, e lo ritroveremo in molti fenomeni naturali.

12.3.3 Perché *e* è «naturale»

Nel capitolo 6 abbiamo visto che la retta tangente a una curva in un punto è la posizione limite delle rette secanti che passano per quel punto e per un punto vicino. Applichiamo l'idea alle esponenziali nel punto (0; 1), che è comune a tutte. La secante che passa per (0; 1) e per $(h;\, a^h)$ ha coefficiente angolare $\frac{a^h - 1}{h}$; la Tabella 12.3 lo calcola per h sempre più piccolo e per tre basi.

Tabella 12.3 Coefficiente angolare $\frac{a^h - 1}{h}$ della secante al grafico di $y = a^x$ per i punti (0; 1) e $(h; a^h)$, al diminuire di h (valori arrotondati alla quarta cifra decimale).

h	$a = 2$	$a = e$	$a = 3$
1	1	1,7183	2
0,1	0,7177	1,0517	1,1612
0,01	0,6956	1,0050	1,1047
0,001	0,6934	1,0005	1,0992

Le pendenze delle secanti si stabilizzano: per la base 2 attorno a 0,693, per la base 3 attorno a 1,099, per la base e **proprio attorno a 1**. Fra tutte le esponenziali, $y = e^x$ è l'unica la cui tangente nel punto (0; 1) ha coefficiente angolare 1: è la retta $y = x + 1$ della Figura 12.5. Questa è un'osservazione numerica; la dimostrazione richiede il calcolo differenziale.

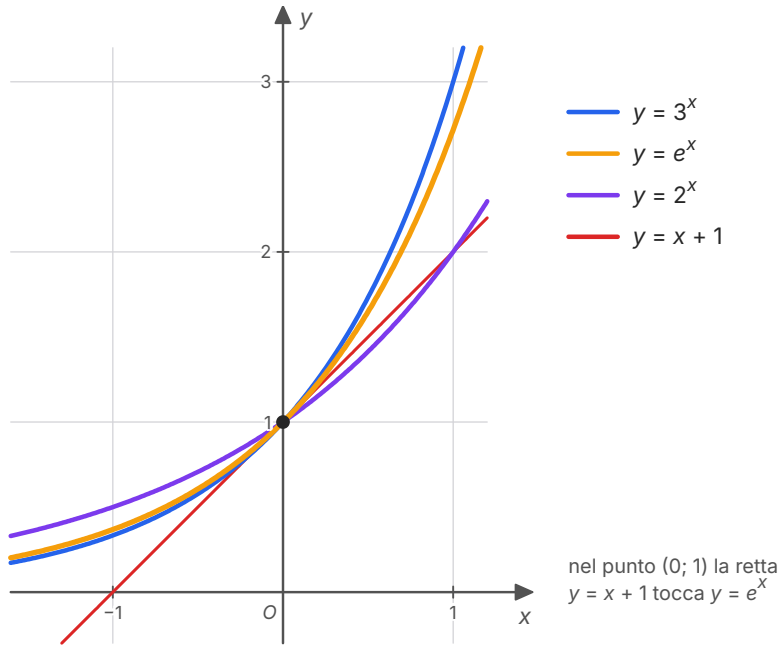


Figura 12.5 Vicino al punto (0; 1) i grafici di $y = 2^x$, $y = e^x$ e $y = 3^x$ attraversano la retta $y = x + 1$, tranne quello di $y = e^x$, che la tocca senza attraversarla: è la sua tangente, con coefficiente angolare 1. Curve calcolate, stessa unità sui due assi.

Da qui segue una proprietà notevole. In un punto qualsiasi $(x_0; e^{x_0})$ la secante verso il punto di ascissa $x_0 + h$ ha pendenza

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

e quando h si avvicina a 0 il secondo fattore si avvicina a 1: la pendenza della tangente nel punto di ascissa x_0 è e^{x_0}, **uguale all'ordinata del punto**. La funzione $y = e^x$, chiamata **funzione esponenziale naturale**, cresce con una velocità uguale al proprio valore. Per questo e è la base preferita nelle scienze: con essa le formule diventano più semplici, come accade per gli angoli quando si misurano in radianti.

DA RICORDARE

$e \approx 2{,}718$ è il valore a cui si avvicina $(1+\frac{1}{n})^n$ al crescere di n. È irrazionale e trascendente. La funzione $y = e^x$ ha nel punto $(0;1)$ la tangente $y = x + 1$, e in ogni punto una pendenza uguale alla propria ordinata. Sulla calcolatrice: tasto e^x (spesso la seconda funzione di «ln»).

12.4 Equazioni e disequazioni esponenziali

12.4.1 Equazioni riconducibili alla stessa base

Un'**equazione esponenziale** è un'equazione in cui l'incognita compare all'esponente, come $2^{x+1} = 32$. La più semplice ha la forma $a^x = b$: poiché a^x assume solo valori positivi, se $b \le 0$ l'equazione è **impossibile**; se $b > 0$ ha **una e una sola** soluzione, perché la funzione esponenziale è biiettiva da $\mathbb{R}$ a $]0;+\infty[$.

Quando i due membri si possono scrivere come potenze della stessa base, l'iniettività permette di «togliere» la base:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = g(x) \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

Le condizioni di esistenza sono quelle degli esponenti $f(x)$ e $g(x)$: per esponenti polinomiali, nessuna.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi: a) $2^{x^2-3x} = 1/4$; b) $9^x = 27^{x-1}$; c) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$.

a) $1/4 = 2^{-2}$, quindi $x^2 - 3x = -2$, cioè $x^2 - 3x + 2 = 0$: $x = 1 \vee x = 2$. Verifica: $2^{1-3} = 2^{-2}$ ✓, $2^{4-6} = 2^{-2}$ ✓.

b) Base comune 3: $9^x = 3^{2x}$ e $27^{x-1} = 3^{3x-3}$. Quindi $2x = 3x - 3$, $x = 3$. Verifica: $9^3 = 729 = 27^2$ ✓.

c) I due termini hanno esponenti diversi, ma si può raccogliere 3^x: $3^x(3 + \frac{1}{3}) = 30$, cioè $\frac{10}{3}\cdot 3^x = 30$, $3^x = 9 = 3^2$, $x = 2$. Verifica: $27 + 3 = 30$ ✓.

12.4.2 Equazioni con la sostituzione t = a^x

Alcune equazioni contengono a^x e $a^{2x} = (a^x)^2$. Ponendo $t = a^x$ diventano equazioni di secondo grado in t; delle soluzioni si tengono **solo quelle positive**, perché $t = a^x$ è sempre positivo.

Per esempio, risolviamo $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$. Poiché $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$, poniamo $t = 2^x$, con $t > 0$: $t^2 - 3t - 4 = 0$, $(t - 4)(t + 1) = 0$, $t = 4 \vee t = -1$. La soluzione $t = -1$ si scarta: $2^x = -1$ è impossibile. Resta $2^x = 4$, cioè $x = 2$. Verifica: $16 - 12 - 4 = 0$ ✓.

12.4.3 Quando la base comune non c'è

L'equazione $2^x = 5$ ha una e una sola soluzione, perché 5 è positivo; ma 5 non è una potenza razionale «visibile» di 2. Possiamo intanto *localizzarla*: $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$, quindi la soluzione è tra 2 e 3. Con il metodo di bisezione, già usato nel capitolo 2, la stringiamo: $2^{2{,}5} \approx 5{,}66 > 5$, quindi la soluzione è tra 2 e 2,5; $2^{2{,}25} \approx 4{,}76 < 5$, quindi tra 2,25 e 2,5; $2^{2{,}375} \approx 5{,}19$, quindi tra 2,25 e 2,375, e così via, fino alla precisione voluta: $x \approx 2{,}32$. Nel capitolo 13 daremo un nome a questo numero, il logaritmo in base 2 di 5, e lo calcoleremo con la calcolatrice.

Anche le equazioni che mescolano esponenziali e polinomi, come $2^x = x + 2$, si affrontano **graficamente**: si disegnano $y = 2^x$ e $y = x + 2$ e si contano le intersezioni. Qui sono due: una si vede subito, $x = 2$ ($2^2 = 4 = 2 + 2$), l'altra è negativa, tra -2 e -1, e la bisezione dà $x \approx -1{,}69$. Nessun metodo algebrico di questo corso la fornisce in forma esatta: «risolvere» significa qui approssimare con un errore garantito.

12.4.4 Disequazioni esponenziali

Una **disequazione esponenziale** ha l'incognita all'esponente. Con una base comune, decide tutto la monotonia della funzione esponenziale:

- Se $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (il verso si **conserva**);
- se $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (il verso si **inverte**);
- $a^{f(x)} > b$ con $b \leq 0$ è vera per ogni x del dominio; $a^{f(x)} < b$ con $b \leq 0$ è impossibile.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi: a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 9$; b) $2^{x^2} \le 8 \cdot 2^{2x}$; c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$.

a) $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, quindi $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. La base è minore di 1: il verso si inverte, $x - 1 < -2$, $x < -1$.

Controllo con un punto: per $x = -2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27 > 9$ ✓; per $x = 0$, $3 > 9$ è falso ✓.

b) $8 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+3}$; base 2 maggiore di 1: $x^2 \le 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 \le 0$, $(x - 3)(x + 1) \le 0$: $-1 \le x \le 3$, cioè $[-1; 3]$.

c) Con $t = 2^x > 0$: $t^2 - 5t + 4 < 0$, $(t - 1)(t - 4) < 0$, $1 < t < 4$. Quindi $2^0 < 2^x < 2^2$ e, con la base 2, $0 < x < 2$, cioè $]0; 2[$. (Qui la condizione $t > 0$ è già soddisfatta dall'intervallo $1 < t < 4$; in altri casi taglia via una parte delle soluzioni.)

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di invertire il verso. Da $(0{,}5)^x > (0{,}5)^3$ *non* segue $x > 3$: la funzione $y = 0{,}5^x$ è decrescente, e per $x = 4$ si ha $0{,}0625 < 0{,}125$. La soluzione è $x < 3$. Prima di «togliere la base», chiediti sempre se è maggiore o minore di 1.

Dimenticare che $t = a^x$ è positivo. In $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 > 0$, con $t = 3^x$, si ottiene $(t - 3)(t + 1) > 0$, cioè $t < -1 \vee t > 3$. Ma $t < -1$ è impossibile: resta $3^x > 3$, cioè $x > 1$.

12.5 Modelli di crescita e di decadimento

12.5.1 Dal discreto al continuo

Una coltura di laboratorio (dati inventati) contiene 500 batteri, e il loro numero raddoppia ogni 20 minuti. Misurando ogni 20 minuti si trovano 500, 1000, 2000, … batteri: una progressione geometrica di ragione 2, come nel capitolo 4, con $N_n = 500 \cdot 2^n$ dopo n intervalli. Ma la coltura esiste anche tra una misura e l'altra. Poiché dopo t minuti sono trascorsi $\frac{t}{20}$ intervalli, il modello continuo è

$$N(t) = 500 \cdot 2^{t/20}$$

definito per ogni $t \ge 0$. Per esempio dopo 30 minuti, un intervallo e mezzo, $N(30) = 500 \cdot 2^{1{,}5} \approx 1414$. La progressione geometrica è fatta dai valori della funzione esponenziale negli istanti multipli di 20 minuti: i suoi punti stanno *sulla* curva continua (Figura 12.6).

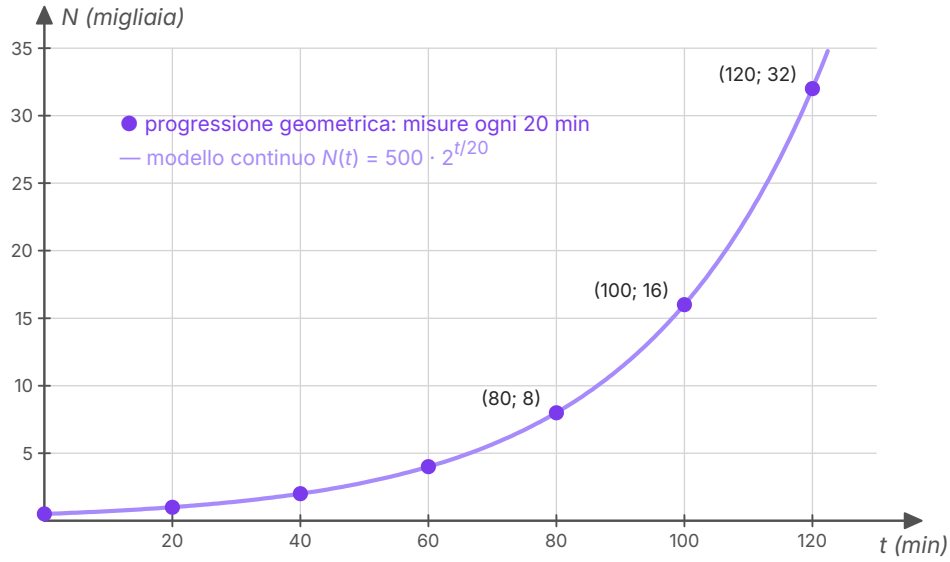


Figura 12.6 Crescita di una coltura batterica (dati inventati): i punti sono i valori misurati ogni 20 minuti, una progressione geometrica di ragione 2; la curva è il modello continuo $N(t) = 500 \cdot 2^{t/20}$, che passa per tutti i punti. Ordinate in migliaia di batteri; curva calcolata.

12.5.2 La proprietà che caratterizza la crescita esponenziale

Un **modello esponenziale** descrive una grandezza con una legge del tipo $N(t) = N_0 \cdot a^t$, oppure, in modo equivalente, $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$. Le due scritture sono la stessa cosa: ogni base positiva si scrive come potenza di e, $a = e^k$ (per esempio $2 \approx e^{0{,}693}$, come suggeriva la Tabella 12.3), e il numero k si calcolerà con i logaritmi del capitolo 13. $N_0 = N(0)$ è il valore iniziale; il numero k si chiama **costante di crescita**: se $k > 0$ la grandezza cresce, se $k < 0$ decresce, e allora si parla di *decadimento*.

Che cosa distingue un modello esponenziale da uno lineare? Prendiamo un intervallo di tempo di durata Δt, a partire da un istante t qualsiasi:

$$\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{k(t+\Delta t)}}{N_0 e^{kt}} = e^{k\Delta t}$$

Il rapporto non dipende da t: **in intervalli di tempo uguali, la grandezza viene sempre moltiplicata per lo stesso fattore**. Di conseguenza anche la variazione relativa $\dfrac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)} = e^{k\Delta t} - 1$, cioè l'aumento percentuale, è costante. Nel modello lineare $N(t) = N_0 + mt$ è invece costante l'aumento *assoluto* $m\Delta t$.

Ricordando il tasso medio di variazione del capitolo 3, la stessa proprietà si può scrivere così:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{e^{k\Delta t} - 1}{\Delta t} \cdot N(t)$$

Su intervalli di uguale durata, la **velocità media di variazione è proporzionale al valore della grandezza**: più batteri ci sono, più in fretta ne nascono di nuovi; più atomi radioattivi restano, più ne decadono. È questa la proprietà che definisce la crescita esponenziale, ed è il motivo per cui la ritroviamo in tanti fenomeni diversi. Il rapporto $\frac{\Delta N}{N} : \Delta t$, variazione relativa per unità di tempo, si chiama **tasso di variazione relativo**; nel modello esponenziale è lo stesso su tutti gli intervalli della stessa durata, e quando Δt diventa piccolissimo si avvicina a k (per lo stesso motivo per cui le pendenze della Tabella 12.3 si avvicinano a 1 con la base e).

12.5.3 Tempo di raddoppio e tempo di dimezzamento

Se una grandezza cresce in modo esponenziale, il tempo che impiega a raddoppiare è sempre lo stesso, da qualunque istante si parta: è il **tempo di raddoppio** T, e il modello si scrive $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$. Allo stesso modo una grandezza in decadimento esponenziale si dimezza sempre nello stesso tempo, il **tempo di dimezzamento** T, e

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$$

L'esempio più famoso è il **decadimento radioattivo**. I nuclei di un isotopo instabile si trasformano spontaneamente in nuclei diversi (il carbonio-14, per esempio, in azoto-14); non si può prevedere quando decadrà un singolo nucleo, ma in un campione con moltissimi nuclei il numero di quelli rimasti segue con ottima precisione la legge esponenziale. Il carbonio-14, presente in tutti gli organismi viventi, ha un tempo di dimezzamento di circa 5730 anni (è il valore usato da tempo per la datazione; le misure più recenti danno circa 5700 anni). Quando un organismo muore smette di assorbirne, e il carbonio-14 che contiene diminuisce come nella Figura 12.7: misurando la quantità rimasta si stima da quanto tempo è morto.

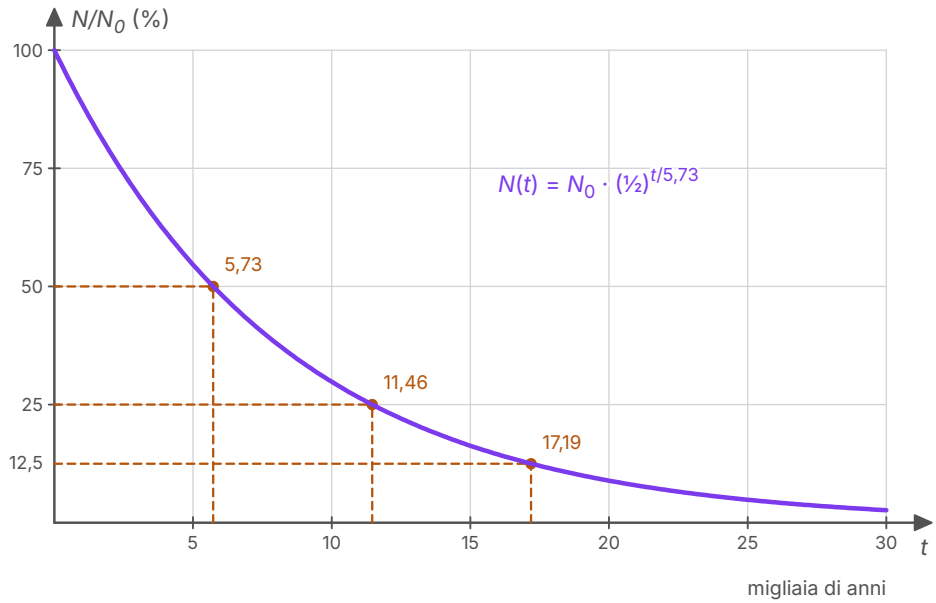


Figura 12.7 Decadimento del carbonio-14, calcolato da $N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t/5730}$ con t in anni; nel grafico t è misurato in migliaia di anni, e la stessa legge si scrive $N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t/5,73}$. Dopo un tempo di dimezzamento (circa 5730 anni) resta il 50% dei nuclei iniziali, dopo due il 25%, dopo tre il 12,5%: in tempi uguali, la quantità si dimezza sempre.

ESEMPIO SVOLTO

Datazione con il carbonio-14. In un frammento di legno resta il 25% del carbonio-14 presente quando l'albero era vivo. Quanto tempo è passato? E quale percentuale resterebbe dopo 10 000 anni?

Con $T = 5730$ anni: $\frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^{t/5730} = 0{,}25 = (\frac{1}{2})^2$. Stessa base, quindi $\frac{t}{5730} = 2$, $t = 11\,460$ anni: due tempi di dimezzamento, cioè circa 11 500 anni, perché il dato iniziale ha solo due cifre significative.

Dopo 10 000 anni: $(\frac{1}{2})^{10\,000/5730} \approx 0{,}5^{1{,}745} \approx 0{,}298$, circa il 30%. Il risultato è coerente con il grafico: 10 000 anni sono tra uno e due tempi di dimezzamento, e la percentuale sta tra il 50% e il 25%.

12.5.4 Il raffreddamento di un corpo

Una tazza di tè bollente lasciata sul tavolo si raffredda prima rapidamente, poi sempre più lentamente, avvicinandosi alla temperatura della stanza. Una descrizione semplice è la **legge di**

raffreddamento di Newton: la *differenza* tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente decresce in modo esponenziale. Se T_a è la temperatura dell'ambiente e T_0 quella iniziale del corpo,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt} \quad (k > 0)$$

La costante k dipende dal corpo e dal recipiente; la legge funziona bene quando la differenza di temperatura non è troppo grande e l'ambiente resta a temperatura costante.

Per esempio, un tè a 90 °C è in una stanza a 20 °C; per questa tazza (dati inventati) $k = 0{,}05$ al minuto. Qual è la temperatura dopo 10, 20 e 40 minuti? A quale temperatura si avvicina? Il modello è $T(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}05t}$, con t in minuti e T in °C, e $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}5} \approx 20 + 70 \cdot 0{,}607 \approx 62{,}5$ °C; $T(20) = 20 + 70 \cdot e^{-1} \approx 45{,}8$ °C; $T(40) = 20 + 70 \cdot e^{-2} \approx 29{,}5$ °C.

Nei primi 10 minuti la temperatura scende di circa 27,5 °C, fra il 20° e il 40° minuto, in un tempo doppio, di soli 16 °C circa: la velocità di raffreddamento è proporzionale alla differenza $T - 20$, che diminuisce. Poiché $e^{-0{,}05t}$ si avvicina a 0 al crescere di t, la temperatura si avvicina a 20 °C senza mai scendere sotto: la retta $T = 20$ è un asintoto orizzontale del grafico.

12.5.5 Discreto o continuo? Scegliere il modello

Nel capitolo 4 abbiamo descritto la crescita con una progressione geometrica, qui con una funzione. Quale dei due modelli è «giusto»? Dipende dalla domanda e dal fenomeno. Un capitale a cui la banca accredita gli interessi una volta all'anno cambia davvero a scatti: tra un accredito e l'altro resta fermo, e il modello discreto $C_n = C_0(1 + i)^n$ lo descrive esattamente. Una popolazione di batteri, un campione radioattivo o una tazza che si raffredda cambiano invece in ogni istante, e il modello continuo è più fedele; i dati che raccogliamo, però, sono sempre una serie di misure a intervalli, cioè una successione, e il modello continuo è la curva che le collega.

In entrambi i casi vale la stessa regola: un modello è una descrizione semplificata, valida in un certo *dominio* di tempi e di condizioni. Il modello esponenziale funziona finché resta vera l'ipotesi da cui nasce, cioè che la velocità di variazione sia proporzionale alla quantità presente. Quando il nutrimento dei batteri si esaurisce, quando una tazza di tè viene riscaldata, quando la banca cambia il tasso, l'ipotesi cade e con lei il modello. Per questo, ogni volta che usiamo un modello per prevedere, dobbiamo chiederci per quali valori della variabile è stato controllato e se ha senso estenderlo oltre.

COLLEGAMENTI

Epidemie e «crescita esponenziale» nelle notizie. Nella prima fase di un'epidemia, quando quasi tutta la popolazione può ancora ammalarsi, ogni malato contagia in media un certo numero di persone e i nuovi casi sono proporzionali ai casi già presenti: il numero di contagi cresce in modo approssimativamente esponenziale. Supponiamo (dati inventati) 100 casi oggi e un tempo di raddoppio di 3 giorni: dopo 30 giorni, dieci raddoppi, i casi sarebbero $100 \cdot 2^{10} = 102\,400$. Un fenomeno che sembra piccolo diventa enorme in poche settimane: per questo si interviene presto.

Due avvertenze. Nessuna crescita esponenziale reale dura per sempre: le persone guariscono, si immunizzano, cambiano comportamento, e la curva rallenta; lo stesso vale per i batteri, che esauriscono il nutrimento. E nel linguaggio dei giornali «crescita esponenziale» significa spesso soltanto «crescita rapida». In matematica significa una cosa precisa: *moltiplicazione per lo stesso fattore in tempi uguali*. Una grandezza che aumenta di 1000 unità al giorno cresce in fretta, ma in modo lineare.

SINTESI

- Per $a > 0$ e x irrazionale, a^x è l'elemento separatore delle due classi contigue formate dalle potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto e per eccesso (per esempio $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$). Tutte le proprietà delle potenze restano valide.
- La funzione esponenziale $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ha dominio $\mathbb{R}$, immagine $]0; +\infty[$, passa per $(0; 1)$, ha l'asse x come asintoto ed è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.
- I grafici di $y = a^x$ e di $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sono simmetrici rispetto all'asse y; con le trasformazioni del capitolo 3 si ottengono i grafici di funzioni come $y = 2^{x+1} - 4$.
- Il numero $e \approx 2{,}718$ è il valore a cui si avvicina $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di n; è irrazionale e trascendente (Hermite, 1873).
- Con la capitalizzazione continua un capitale C_0 al tasso i diventa $C_0 \cdot e^{it}$ dopo t anni.
- La tangente a $y = e^x$ in $(0; 1)$ è $y = x + 1$; in ogni punto la pendenza della tangente a $y = e^x$ è uguale all'ordinata.
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$; con la sostituzione $t = a^x$ si scartano i valori $t \leq 0$; $a^x = b$ è impossibile se $b \leq 0$.
- Nelle disequazioni il verso si conserva se $a > 1$ e si inverte se $0 < a < 1$.
- Le equazioni senza base comune si risolvono per ora graficamente o con la bisezione; il capitolo 13 le risolverà con i logaritmi.
- In un modello esponenziale $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ la grandezza si moltiplica per lo stesso fattore in tempi uguali, e la velocità di variazione è proporzionale al valore della grandezza.
- Tempo di raddoppio e tempo di dimezzamento: $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$ e $N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t/T}$; carbonio-14: T di circa 5730 anni. Raffreddamento: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-kt}$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti è una funzione esponenziale?

   A. $y = 0{,}7^x$

   B. $y = x^2$

   C. $y = (-3)^x$

   D. $y = 1^x$

2. ● L'immagine della funzione $y = 3^x - 2$ è:

   A. $\mathbb{R}$
   B. $]-2; +\infty[$
   C. $]0; +\infty[$
   D. $[-2; +\infty[$

3. ● La disequazione $(0{,}5)^x > (0{,}5)^3$ equivale a:

   A. $x > 3$
   B. $x > -3$
   C. $x < -3$
   D. $x < 3$

4. ● Il valore di $(1 + \frac{1}{12})^{12}$, arrotondato al centesimo, è:

   A. 2,25
   B. 2,72
   C. 3,00
   D. 2,61

5. ● Una grandezza decresce secondo la legge $N = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{t/8}$, con t in ore. Dopo 24 ore resta:

   A. metà del valore iniziale
   B. un terzo del valore iniziale
   C. un ottavo del valore iniziale
   D. un sesto del valore iniziale

6. ● Il grafico di $y = (\frac{1}{3})^x$ si ottiene da quello di $y = 3^x$ con:

   A. la simmetria rispetto all'asse y
   B. la simmetria rispetto all'asse x
   C. la simmetria rispetto all'origine
   D. una traslazione verso il basso

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$ per ogni x reale. b) $2^x + 2^x = 4^x$ per ogni x reale. c) $(0{,}2)^x > 0$ per ogni x reale. d) Se $0 < a < 1$, allora $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. e) La retta tangente al grafico di $y = e^x$ nel punto $(0; 1)$ ha coefficiente angolare 1.

8. ● Completa. «La funzione $y = a^x$, con a _____ e a _____, ha dominio _____ e immagine _____; è crescente se _____ e decrescente se _____; il suo grafico passa per il punto _____ e ha come asintoto la retta _____.»

Calcolare

9. ● Semplifica: a) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$; b) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; c) $2^{\sqrt{8}} : 2^{\sqrt{2}}$; d) $(4^{\pi})^{1/2} : 2^{\pi}$.

10. ● Ordina in senso crescente senza calcolatrice: a) $2^{\sqrt{3}}$, $2^{1,7}$, $2^{7/4}$; b) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{1,4}$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$.

11. ●● Per ciascuna funzione indica dominio, immagine, asintoto, intersezioni con gli assi e monotonia, poi traccia il grafico: a) $y = 2^{x-1}$; b) $y = 3 - 3^x$; c) $y = (\frac{1}{2})^x - 4$.

12. ●● Determina il dominio: a) $y = \sqrt{(2^x - 8)}$; b) $y = \frac{1}{e^x - 1}$; c) $y = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^{\frac{}{x}}}$; d) $y = \frac{1}{9^x - 3^{x+1}}$.

13. ● Risolvi: a) $2^{x+1} = 32$; b) $3^{x^2-1} = 27$; c) $5^{2x-1} = \frac{1}{125}$; d) $4^x = 8^{x-1}$; e) $(\frac{1}{2})^x = 2\sqrt{2}$.

14. ●● Risolvi: a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; b) $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$; c) $2^{x+2} - 2^x = 24$; d) $5^x + 5^{1-x} = 6$.

15. ●● Risolvi le disequazioni: a) $3^{x-2} > \frac{1}{9}$; b) $(\frac{1}{2})^{x^2} \geq \frac{1}{16}$; c) $2^{x^2-x} < 4$; d) $(0{,}2)^{3-x} \leq 25$.

16. ●● Risolvi: a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$; b) $9^x - 3^x - 6 > 0$; c) $3^x + 3^{2-x} < 10$.

17. ●● Risolvi graficamente: indica quante soluzioni ha ciascuna equazione e trova quelle intere, verificandole. a) $2^x = 3 - x$; b) $2^x = x + 2$; c) $(\frac{1}{2})^x = x^2$.

18. ●● L'equazione $3^x = 20$ ha una sola soluzione. a) Tra quali interi consecutivi si trova? b) Esegui due passi del metodo di bisezione e indica l'intervallo ottenuto e l'errore massimo commesso prendendone il punto medio.

19. ●● Calcola il tasso medio di variazione di $f(x) = 2^x$ sugli intervalli $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$ e $[3; 4]$. Che cosa osservi? Confronta con $g(x) = 2x$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) soddisfa $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni x, y, e che il rapporto $f(x + 1) : f(x)$ non dipende da x. Deduci che il tasso medio di variazione di f su $[x; x + 1]$ è $(a - 1) \cdot a^x$.

21. ●● Spiega perché le equazioni a) $3^x = -2$ e b) $4^x + 2^x + 1 = 0$ non hanno soluzioni reali, e perché c) $7^x = 5$ ne ha esattamente una.

22. ●● *Trova l'errore.* a) Luca scrive: «$(\frac{1}{2})^x > \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$, quindi $x > 3$». b) Sara scrive: «$3^x + 3^x = 81$, cioè $3^{2x} = 3^4$, quindi $x = 2$». Correggi.

23. ●●● Sia $N(t) = N_0 \cdot a^t$ con $a > 1$, e sia T il numero tale che $a^T = 2$. a) Dimostra che $N(t + T) = 2N(t)$ per ogni t: il tempo di raddoppio non dipende dall'istante di partenza. b) Mostra con un esempio che nel modello lineare $N(t) = N_0 + mt$ (N_0, $m > 0$) il tempo necessario a raddoppiare cresce con l'istante di partenza.

Problemi

24. ● Una coltura contiene 800 batteri e il loro numero raddoppia ogni 30 minuti (dati inventati). a) Scrivi il modello $N(t)$ con t in minuti. b) Quanti batteri ci sono dopo 3 ore? c) Dopo quanto tempo i batteri sono 12 800?

25. ●● Un isotopo usato in medicina ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni (dati dell'esercizio). Un campione contiene inizialmente 200 mg dell'isotopo. a) Scrivi il modello. b) Quanto ne resta dopo 24 giorni? c) Dopo quanti giorni ne restano 6,25 mg?

26. ●● Un capitale di 5000 € è investito al tasso annuo del 2%. Calcola il montante dopo 10 anni a) con l'accredito annuale degli interessi; b) con la capitalizzazione continua. c) Di quanto differiscono?

27. ●● Un caffè a 85 °C viene lasciato in una stanza a 20 °C; secondo la legge di Newton, con t in minuti, $T(t) = 20 + 65 \cdot e^{-0{,}04t}$ (dati inventati). a) Qual è la temperatura dopo 15 minuti? b) Con la calcolatrice, per tentativi, trova tra quali minuti interi consecutivi la temperatura scende sotto 40 °C. c) Il caffè può raffreddarsi sotto i 20 °C? Perché?

28. ●● Un reperto contiene un ottavo del carbonio-14 di un organismo vivo. a) Quanti anni ha, con un tempo di dimezzamento di 5730 anni? b) Un altro reperto ne contiene il 30%: spiega perché la sua età è compresa tra 5730 e 11 460 anni e, con la calcolatrice, verifica che è vicina a 10 000 anni.

29. ●● All'inizio di un'epidemia (dati inventati) si contano 50 casi, e i casi aumentano del 20% al giorno. a) Scrivi il modello discreto C_n dopo n giorni e calcola i casi dopo una settimana. b) Dopo quanti giorni interi i casi superano per la prima volta il doppio di quelli iniziali? c) Quanti casi prevede il modello dopo 30 giorni? Commenta.

Con il computer

30. ●● In un foglio di calcolo scrivi nella colonna A i valori $n = 1, 2, \ldots, 1000$; nella colonna B la formula $(1 + 1/n)^n$ e nella colonna C la formula $(1 + 1/n)^{n+1}$. a) Che cosa osservi sulle due colonne? b) Quali valori ottieni per $n = 1000$? Quante cifre decimali di e sono sicure?

31. ●● In un software di geometria dinamica crea un cursore a tra 0,1 e 5 e disegna $y = a^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ e la retta $y = x + 1$. a) Che cosa accade al grafico per $a = 1$? b) Per quale valore di a, approssimativamente, la retta è tangente al grafico di $y = a^x$ nel punto (0; 1), cioè lo tocca senza attraversarlo? c) Verifica la simmetria dei due grafici rispetto all'asse y.

Verso la verifica

32. ●● Data $f(x) = 2^{x+1} - 8$: a) indica dominio, immagine, asintoto e intersezioni con gli assi; b) studia il segno di f; c) traccia il grafico.

33. ●● Risolvi il sistema formato dalle equazioni $2^x \cdot 4^y = 32$ e $3^{x-y} = \frac{1}{3}$.

34. ●● Risolvi: a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 \leq 0$; b) $2^{x+1} + 2^{x-1} \geq 20$.

35. ●●● *Sfida.* Per quali valori del parametro reale k l'equazione $4^x - 2^{x+1} + k = 0$ ha due soluzioni reali distinte?

PER APPROFONDIRE

- [MAE] Maor, *e: The Story of a Number*: l'interesse composto, Bernoulli, Eulero e la nascita della funzione esponenziale.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Eulero e la notazione dell'analisi nel Settecento.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la funzione esponenziale, il numero e e la crescita naturale.

Glossario del capitolo

Capitalizzazione continua
Regime in cui l'interesse viene aggiunto al capitale istante per istante: un capitale C_0 al tasso annuo i diventa $C_0 \cdot e^{it}$ dopo t anni.

Costante di crescita
Il numero k del modello $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$: se $k > 0$ la grandezza cresce, se $k < 0$ decresce.

Decadimento radioattivo
Trasformazione spontanea dei nuclei di un isotopo instabile; in un campione grande il numero di nuclei rimasti diminuisce in modo esponenziale.

Disequazione esponenziale
Disequazione in cui l'incognita compare all'esponente di una potenza.

Equazione esponenziale
Equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una potenza, come $2^{x+1} = 32$.

Funzione esponenziale
La funzione $y = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$: dominio $\mathbb{R}$, immagine $]0; +\infty[$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.

Funzione esponenziale naturale
La funzione esponenziale di base e, $y = e^x$; in ogni punto la pendenza della sua tangente è uguale all'ordinata.

Legge di raffreddamento di Newton
Modello secondo cui la differenza tra la temperatura di un corpo e quella dell'ambiente decresce in modo esponenziale: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$.

Modello esponenziale
Descrizione di una grandezza con una legge $N(t) = N_0 \cdot a^t$ (o $N_0 \cdot e^{kt}$): in tempi uguali la grandezza si moltiplica per lo stesso fattore.

Numero e
Il numero, circa 2,718 281 8, a cui si avvicina $(1 + 1/n)^n$ al crescere di n; è irrazionale e trascendente. Detto anche numero di Nepero.

Potenza con esponente reale
Per $a > 0$ e x irrazionale, il numero a^x separatore delle classi contigue delle potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto e per eccesso.

Tasso di variazione relativo
Il rapporto tra la variazione relativa $\Delta N/N$ di una grandezza e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene; nei modelli esponenziali non dipende dall'istante iniziale.

Tempo di dimezzamento
Il tempo T in cui una grandezza in decadimento esponenziale si riduce a metà: $N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t/T}$.

Tempo di raddoppio
Il tempo T in cui una grandezza in crescita esponenziale raddoppia, da qualunque istante si parta: $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$.

Soluzioni

1. A. La base 0,7 è positiva e diversa da 1. $y = x^2$ è una potenza con la variabile alla base; la base −3 è negativa; $1^x = 1$ è costante.

2. B. $3^x > 0$, quindi $3^x - 2 > -2$, e si assumono tutti i valori maggiori di −2; −2 non è assunto.

3. D. La base 0,5 è minore di 1: il verso si inverte.

4. D. $(1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2{,}613$ (accredito mensile della Tabella 12.2); 2,72 è e arrotondato, che si raggiunge solo per n molto grandi.

5. C. 24 ore sono 3 tempi di dimezzamento: $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

6. A. $(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$: si cambia x in $-x$.

7. a) V: $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$. b) F: $2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$; per $x = 2$ si ha $2^2 + 2^2 = 8$, mentre $4^2 = 16$. c) V: un'esponenziale è sempre positiva. d) F: con base minore di 1, $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$. e) V.

8. $a > 0$; $a \neq 1$; $\mathbb{R}$; $]0; +\infty[$; $a > 1$; $0 < a < 1$; $(0; 1)$; $y = 0$.

9. a) 3. b) $5^3 = 125$. c) $2^{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$. d) $(4^{\pi})^{1/2} = 2^{\pi}$, quindi 1.

10. a) $1{,}7 < \sqrt{3} \approx 1{,}732 < 1{,}75$, base 2 maggiore di 1: $2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{7/4}$. b) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, base minore di 1, l'ordine si inverte: $(\frac{1}{3})^{1{,}5} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}} < (\frac{1}{3})^{1{,}4}$.

11. a) Dominio $\mathbb{R}$, immagine $]0; +\infty[$, asintoto $y = 0$, interseca l'asse y in $(0; \frac{1}{2})$, nessuno zero, crescente (traslazione di 1 a destra). b) Dominio $\mathbb{R}$, immagine $]-\infty; 3[$, asintoto $y = 3$, punti $(0; 2)$ e $(1; 0)$, decrescente (simmetrica di 3^x rispetto all'asse x, poi traslata di 3 in alto). c) Dominio $\mathbb{R}$, immagine $]-4; +\infty[$, asintoto $y = -4$, punti $(0; -3)$ e $(-2; 0)$ perché $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$, decrescente.

12. a) $2^x \geq 8 = 2^3$: $x \geq 3$, $[3; +\infty[$. b) $e^x \neq 1$: $x \neq 0$. c) $(\frac{1}{2})^x \leq 1 = (\frac{1}{2})^0$, base minore di 1: $x \geq 0$. d) $3^x(3^x - 3) \neq 0$; 3^x non si annulla mai, quindi $3^x \neq 3$: $x \neq 1$.

13. a) $x + 1 = 5$, $x = 4$. b) $x^2 - 1 = 3$, $x = \pm 2$. c) $2x - 1 = -3$, $x = -1$. d) $2^{2x} = 2^{3x-3}$, $x = 3$. e) $2^{-x} = 2^{3/2}$, $x = -\frac{3}{2}$.

14. a) $t = 3^x$: $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = 1 \vee t = 3$: $x = 0 \vee x = 1$. b) $t = 2^x$: $t^2 - 2t - 8 = 0$, $t = 4$ ($t = -2$ si scarta): $x = 2$. c) $2^x(4 - 1) = 24$, $2^x = 8$, $x = 3$. d) $t = 5^x$: $t + \frac{5}{t} = 6$, $t^2 - 6t + 5 = 0$, $t = 1 \vee t = 5$: $x = 0 \vee x = 1$.

15. a) $x - 2 > -2$: $x > 0$. b) base minore di 1: $x^2 \leq 4$, $-2 \leq x \leq 2$. c) $x^2 - x < 2$, $(x - 2)(x + 1) < 0$: $-1 < x < 2$. d) $0{,}2 = 5^{-1}$, quindi $5^{x-3} \leq 5^2$: $x \leq 5$.

16. a) $t = 2^x$: $(t - 2)(t - 4) \leq 0$, $2 \leq t \leq 4$: $1 \leq x \leq 2$. b) $(t - 3)(t + 2) > 0$ con $t = 3^x > 0$: $t > 3$, $x > 1$. c) $t + \frac{9}{t} < 10$; moltiplicando per $t > 0$: $t^2 - 10t + 9 < 0$, $1 < t < 9$: $0 < x < 2$.

17. a) Una soluzione (una funzione crescente e una decrescente si incontrano al più una volta): $x = 1$, perché $2 = 3 - 1$. b) Due soluzioni: $x = 2$ ($4 = 4$) e una tra −2 e −1, $x \approx -1{,}69$. c) Tre soluzioni: $x = -2$ ($4 = 4$), $x = -4$ ($16 = 16$) e una tra 0 e 1, $x \approx 0{,}77$.

18. a) $3^2 = 9 < 20 < 27 = 3^3$: tra 2 e 3. b) $3^{2{,}5} \approx 15{,}6 < 20$: intervallo $[2{,}5; 3]$; $3^{2{,}75} \approx 20{,}5 > 20$: intervallo $[2{,}5; 2{,}75]$. Il punto medio 2,625 dista dalla soluzione meno di 0,125 (la soluzione è $x \approx 2{,}727$).

19. f: 1, 2, 4, 8. Il tasso raddoppia a ogni passo, come il valore della funzione: su intervalli di ampiezza 1 il tasso medio è $2^{x+1} - 2^x = 2^x$, uguale al valore iniziale. Per g il tasso è sempre 2: crescita lineare.

20. $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. $f(x + 1) : f(x) = a^{x+1} : a^x = a$, costante. Tasso medio: $[a^{x+1} - a^x] : 1 = a^x(a - 1)$: proporzionale al valore a^x.

21. a) $3^x > 0$ per ogni x. b) Con $t = 2^x > 0$ il primo membro è $t^2 + t + 1$, somma di termini positivi (e comunque $\Delta < 0$): non si annulla. c) $y = 7^x$ è biiettiva da $\mathbb{R}$ a $]0; +\infty[$ e 5 è positivo: c'è uno e un solo x, compreso tra 0 e 1.

22. a) La base è minore di 1: il verso si inverte, $x < 3$. (Controllo: per $x = 4$, $\frac{1}{16} > \frac{1}{8}$ è falso.) b) $3^x + 3^x = 2 \cdot 3^x$, non 3^{2x}: $3^x = 40{,}5$, una soluzione compresa tra 3 e 4 (27 e 81). Con $x = 2$: $9 + 9 = 18 \neq 81$.

23. a) $N(t + T) = N_0\, a^t \cdot a^T = 2N_0\, a^t = 2N(t)$. b) Da t_0, il raddoppio richiede Δt con $m\Delta t = N(t_0)$, cioè $\Delta t = \frac{N_0 + mt_0}{m}$, che cresce con t_0. Per esempio, con $N = 100 + 10t$: da $t = 0$ servono 10 unità di tempo (da 100 a 200), da $t = 10$ ne servono 20 (da 200 a 400).

24. a) $N(t) = 800 \cdot 2^{t/30}$. b) 3 ore = 180 min = 6 raddoppi: $800 \cdot 2^6 = 51\,200$. c) $2^{t/30} = 16 = 2^4$: $t = 120$ min, cioè 2 ore.

25. a) $m(t) = 200 \cdot (\frac{1}{2})^{t/8}$, t in giorni. b) 3 dimezzamenti: 25 mg. c) $200 : 6{,}25 = 32 = 2^5$: 5 dimezzamenti, 40 giorni.

26. a) $5000 \cdot 1{,}02^{10} \approx 6094{,}97$ €. b) $5000 \cdot e^{0{,}2} \approx 6107{,}01$ €. c) Circa 12,04 €: la capitalizzazione continua rende un po' di più.

27. a) $20 + 65 \cdot e^{-0{,}6} \approx 55{,}7$ °C. b) $T(29) \approx 40{,}4$ °C, $T(30) \approx 39{,}6$ °C: tra il 29° e il 30° minuto (il valore è circa 29,5 min). c) No: $65 \cdot e^{-0{,}04t} > 0$, quindi $T(t) > 20$; 20 °C è il valore asintotico.

28. a) $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$: 3 tempi di dimezzamento, 17 190 anni (circa 17 000). b) 30% sta tra 50% (un dimezzamento) e 25% (due dimezzamenti), e la funzione è decrescente. Con $t = 10\,000$: $0{,}5^{10\,000/5730} \approx 0{,}298$, cioè circa il 30% ✓ (l'età è circa 9950 anni).

29. a) $C_n = 50 \cdot 1{,}2^n$; $C_7 \approx 179$. b) $1{,}2^3 = 1{,}728$, $1{,}2^4 \approx 2{,}07$: dopo 3 giorni i casi non sono ancora raddoppiati, dopo 4 sì: servono 4 giorni (il raddoppio avviene tra il 3° e il 4° giorno). c) $50 \cdot 1{,}2^{30} \approx 11\,869$: un modello esponenziale non resta valido a lungo, perché i contagi rallentano (guarigioni, immunità, misure di contenimento); la previsione va presa con cautela.

30. a) La colonna B cresce, la C decresce, e e è sempre compreso tra le due (approssimazioni per difetto e per eccesso, come nelle classi contigue). b) $n = 1000$: 2,71692 e 2,71964; quindi $2{,}716 < e < 2{,}720$: sono sicure solo la parte intera e le prime due cifre decimali (2,71...).

31. a) Diventa la retta $y = 1$ (funzione costante). b) Per $a \approx 2{,}72$, cioè $a = e$. c) Il punto $(x; a^x)$ del primo grafico ha come simmetrico $(-x; a^x)$, che appartiene al secondo perché $(\frac{1}{a})^{-x} = a^x$.

32. a) Dominio $\mathbb{R}$, immagine $]-8; +\infty[$, asintoto $y = -8$; punti $(0; -6)$ e $(2; 0)$. b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} > 2^3 \Leftrightarrow x > 2$; negativa per $x < 2$. c) $y = 2^x$ traslata di 1 a sinistra e 8 in basso.

33. $2^{x+2y} = 2^5$ e $3^{x-y} = 3^{-1}$: $x + 2y = 5$, $x - y = -1$. Sottraendo: $3y = 6$, $y = 2$, $x = 1$. Soluzione $(1; 2)$.

34. a) $t = 5^x$: $(t - 1)(t - 5) \leq 0$, $1 \leq t \leq 5$: $0 \leq x \leq 1$. b) $2^x(2 + \frac{1}{2}) \geq 20$, $2^x \geq 8$: $x \geq 3$.

35. Con $t = 2^x > 0$: $t^2 - 2t + k = 0$. Servono due soluzioni t distinte *entrambe positive* (ognuna dà un solo x): $\Delta/4 = 1 - k > 0$, prodotto $k > 0$, somma $2 > 0$. Quindi $0 < k < 1$. (Per $k = 1$ una sola soluzione, $x = 0$; per $k \leq 0$ una sola radice positiva.)