CAPITOLO

11

Le coniche: sintesi e approfondimenti

Un cono, un piano che si inclina: e quattro curve che sembravano diverse si rivelano una sola famiglia. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Ottenere circonferenza, ellisse, parabola, iperbole e le coniche degeneri come sezioni di un cono, secondo l'inclinazione del piano.
2. Dimostrare con le sfere di Dandelin che una sezione del cono è un'ellisse e confrontare metodo sintetico e metodo analitico.
3. Usare la definizione unitaria con fuoco, direttrice ed eccentricità e calcolare le direttrici di ellisse e iperbole.
4. Riconoscere la conica rappresentata da un'equazione di secondo grado senza termine in xy, compresi i casi degeneri.
5. Risolvere problemi di luoghi geometrici e sistemi di due coniche, e rappresentare regioni di piano delimitate da coniche.
6. Risolvere graficamente disequazioni irrazionali con le semiconiche e riconoscere le coniche nei modelli di fisica e tecnica.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 Le sezioni di un cono 2
11.2 Sintetico e analitico: le sfere di Dandelin 4
11.3 Fuoco, direttrice ed eccentricità 8
11.4 L'equazione generale di secondo grado 10
11.5 Luoghi geometrici e sistemi di coniche 12
11.6 Disequazioni, semiconiche e modelli 14

Matematica 3 · Parte III · Ellisse, iperbole e coniche · versione 1.0
Capitolo 11: Le coniche: sintesi e approfondimenti · pagine 273–296 del volume completo · estratto per lo studio

Accendi una torcia in una stanza buia e puntala verso il pavimento. Se la tieni perpendicolare, la macchia di luce è un cerchio; se la inclini, il cerchio si allunga in un'ellisse; inclinandola ancora, la macchia si apre e il suo bordo diventa una parabola e poi un ramo di iperbole. Il fascio di luce è un cono, il pavimento è un piano: le quattro curve che hai studiato nei capitoli 6, 7, 9 e 10 sono tutte *sezioni* dello stesso cono. Per questo si chiamano coniche.

Questo capitolo raccoglie i fili della Parte III e li annoda. Vedremo come nascono le coniche dal cono, come una dimostrazione puramente geometrica, quella delle sfere di Dandelin, ritrova i fuochi che finora avevamo solo calcolato, e come un'unica definizione, con fuoco, direttrice ed eccentricità, le contenga tutte. Impareremo poi a riconoscere una conica da un'equazione di secondo grado qualsiasi, a intersecare due coniche, a disegnare regioni di piano e a usare le semiconiche per risolvere disequazioni. Alla fine torneremo alla realtà: orbite, ponti, specchi.

11.1 Le sezioni di un cono

11.1.1 Il cono a due falde

Prendiamo una retta a e un punto V su di essa. Facciamo ruotare attorno ad a un'altra retta g, che passa per V e forma con a un angolo acuto α. La superficie descritta da g è una **superficie conica** (o, più brevemente, un cono): V è il suo **vertice**, a il suo **asse**, ogni posizione della retta g una **generatrice**, l'angolo α l'**angolo di semiapertura**. Poiché le generatrici sono rette intere e non semirette, la superficie è formata da due «coppe» opposte al vertice, le due **falde** del cono.

Attenzione alla differenza con il cono della geometria solida, che studierai nel prossimo volume: quello è un solido limitato da una base; qui il cono è soltanto una superficie, illimitata in entrambe le direzioni. È proprio questo che permette all'iperbole di avere due rami: uno per ciascuna falda.

11.1.2 Come cambia la sezione con l'inclinazione del piano

Tagliamo il cono con un piano π che *non* passa per il vertice, e chiamiamo β l'angolo che π forma con l'asse ($\beta = 90°$ quando π è perpendicolare all'asse, $\beta = 0°$ quando è parallelo all'asse). La curva intersezione si chiama **sezione conica**, e il suo tipo dipende soltanto dal confronto tra β e α (Figura 11.1).

- **$\beta = 90°$**: il piano è perpendicolare all'asse e taglia tutte le generatrici di una falda alla stessa distanza dal vertice. La sezione è una **circonferenza**, con centro sull'asse.
- **$\alpha < \beta < 90°$**: il piano è inclinato, ma forma con l'asse un angolo maggiore di quello delle generatrici; taglia ancora tutte le generatrici di una sola falda, e la sezione è una curva chiusa:

un'**ellisse**.

- **$\beta = \alpha$**: il piano è parallelo a una generatrice. Quella sola generatrice non viene tagliata, e la curva «si apre» lungo la sua direzione: è una **parabola**.
- **$\beta < \alpha$**: il piano è più vicino alla direzione dell'asse delle generatrici stesse e taglia entrambe le falde. La sezione ha due rami, uno per falda: è un'**iperbole**.

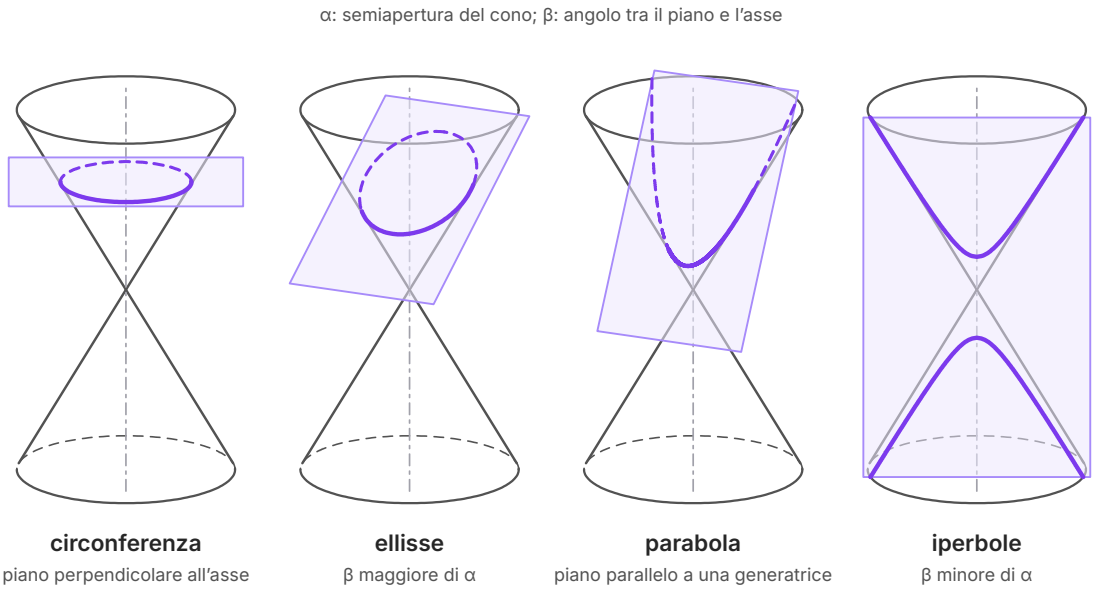


Figura 11.1 Le quattro sezioni di uno stesso cono a due falde ($\alpha = 30°$), disegnate in proiezione ortogonale da un modello tridimensionale: piano perpendicolare all'asse ($\beta = 90°$), piano inclinato di $\beta = 60°$, piano parallelo a una generatrice ($\beta = \alpha = 30°$), piano parallelo all'asse ($\beta = 0°$). Le parti delle curve sul lato nascosto del cono sono tratteggiate.

Se invece il piano passa per il vertice V, la sezione si riduce a figure «povere», le **coniche degeneri**: un solo punto (il vertice) se $\beta > \alpha$, una sola retta (una generatrice, contata due volte, perché il piano è tangente al cono) se $\beta = \alpha$, due rette incidenti se $\beta < \alpha$. Ritroveremo esattamente questi casi, scritti come equazioni, nel paragrafo sull'equazione generale (Tabella 11.1).

Tabella 11.1 Le sezioni di un cono di semiapertura α con un piano che forma un angolo β con l'asse.

Angolo β	Piano che non passa per il vertice	Piano che passa per il vertice
$\beta = 90°$	circonferenza	un punto
$\alpha < \beta < 90°$	ellisse	un punto
$\beta = \alpha$	parabola	una retta (generatrice)
$0° \le \beta < \alpha$	iperbole (due rami)	due rette incidenti

Perché la circonferenza sia una sezione si vede subito: nel piano perpendicolare all'asse, tutti i punti del cono sono alla stessa distanza dal punto in cui il piano incontra l'asse. Che le altre sezioni siano proprio le curve definite nei capitoli precedenti come luoghi, con fuochi e somme o differenze di distanze, è invece un teorema tutt'altro che ovvio. Lo dimostreremo per l'ellisse nel prossimo paragrafo.

APPROFONDIMENTO · APOLLONIO E I NOMI DELLE CONICHE

Le coniche erano studiate dai matematici greci già nel IV secolo a.C.; secondo la tradizione, il primo a definirle fu Menecmo. Allora si usavano tre coni diversi, tagliati con un piano perpendicolare a una generatrice: l'angolo al vertice acuto, retto o ottuso dava l'ellisse, la parabola o un ramo di iperbole.

Apollonio di Perga (III–II secolo a.C.) scrisse le *Coniche*, un trattato in otto libri: i primi quattro ci sono giunti in greco, i tre successivi solo in una traduzione araba, l'ottavo è perduto. Apollonio ottenne tutte le coniche da un unico cono a due falde, cambiando soltanto l'inclinazione del piano, e diede alle curve i nomi che usiamo ancora: *élleipsis* («mancanza»), *parabolé* («accostamento», «confronto») e *hyperbolé* («eccesso»). I nomi vengono da un problema di aree studiato dai Pitagorici: per l'ellisse un'area «manca» rispetto a un confronto, per l'iperbole lo «eccede», per la parabola lo eguaglia esattamente.

COLLEGAMENTI · LUCI E OMBRE

Una lampada da tavolo con un paralume circolare manda verso l'alto e verso il basso due coni di luce con lo stesso asse verticale: proprio le due falde di un cono. Se la lampada è accostata a una parete verticale, la parete è un piano parallelo all'asse ($\beta = 0°$) e il confine tra luce e ombra disegna sul muro i due rami di un'iperbole, uno sopra e uno sotto il paralume. Inclinando una torcia verso il pavimento, invece, si passa dal cerchio all'ellisse e, quando il bordo superiore del fascio diventa parallelo al pavimento, alla parabola. Anche l'ombra della punta dello gnomone di una meridiana descrive, nel corso di un giorno, un arco di conica: i raggi di Sole che passano per la punta formano, con ottima approssimazione, un cono con il vertice nella punta, e il piano del quadrante lo taglia.

11.2 Sintetico e analitico: le sfere di Dandelin

Nel capitolo 9 abbiamo definito l'ellisse come luogo dei punti per cui $PF_1 + PF_2 = 2a$. Nel paragrafo precedente l'abbiamo ottenuta tagliando un cono. Sono la stessa curva? Nel 1822 Germinal Pierre Dandelin trovò una dimostrazione puramente geometrica, senza coordinate, così elegante da essere entrata in tutti i libri. Ci serve un solo fatto sulle sfere.

Da un punto P esterno a una sfera di centro O e raggio r si possono condurre infinite rette tangenti; i segmenti che vanno da P al punto di contatto si chiamano **segmenti di tangenza**. Se T è un punto di contatto, il raggio OT è perpendicolare alla tangente, e per il teorema di Pitagora

$PT = \sqrt{\overline{PO^2 - r^2}}$: un valore che non dipende da quale tangente abbiamo scelto. Dunque **i segmenti di tangenza condotti da un punto a una sfera sono tutti congruenti**, esattamente come quelli condotti a una circonferenza.

IN SINTESI

Teorema (Dandelin, 1822). **Ipotesi:** un piano π, che non passa per il vertice, taglia tutte le generatrici di una falda di un cono (cioè $\alpha < \beta < 90°$). **Tesi:** la sezione è un'ellisse, e i suoi fuochi sono i punti in cui π tocca le due sfere inscritte nel cono e tangenti a π.

Dimostrazione. Nella falda tagliata esistono due sfere che toccano il cono lungo tutta una circonferenza e sono tangenti al piano π: una piccola, Σ_1, tra il vertice e il piano, e una grande, Σ_2, dall'altra parte del piano (Figura 11.2). Si chiamano **sfere di Dandelin**. Siano F_1 e F_2 i punti in cui toccano π, e γ_1, γ_2 le circonferenze lungo le quali toccano il cono: stanno in due piani perpendicolari all'asse, quindi paralleli tra loro.

Sia P un punto qualsiasi della sezione. La generatrice per P incontra γ_1 in un punto A e γ_2 in un punto B. Ora osserviamo che:

- PF_1 e PA sono due segmenti di tangenza condotti da P alla sfera Σ_1: PF_1 perché il piano π, che contiene P, è tangente a Σ_1 in F_1; PA perché la generatrice è tangente a Σ_1 in A. Quindi $PF_1 = PA$.
- Per lo stesso motivo, rispetto alla sfera Σ_2, $PF_2 = PB$.

Sommando, $PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB$, perché P sta tra A e B sulla generatrice. Ma AB è il tratto di generatrice compreso tra i due piani paralleli di γ_1 e γ_2, e questo tratto è lo stesso per tutte le generatrici, perché il cono è di rotazione. Dunque $PF_1 + PF_2$ ha lo stesso valore per ogni punto P della sezione: la sezione è un'ellisse di fuochi F_1 e F_2. c.v.d.

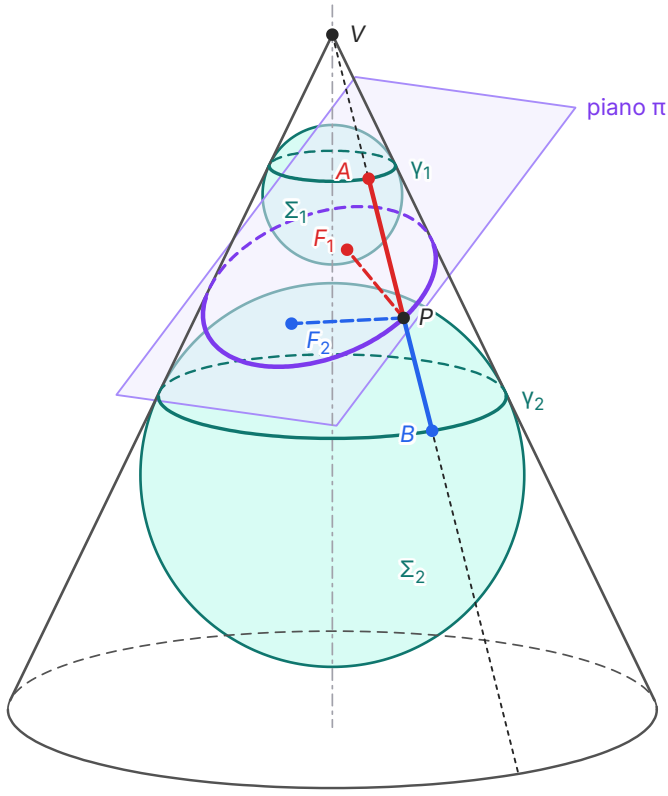


Figura 11.2 Le sfere di Dandelin, in proiezione ortogonale da un modello tridimensionale calcolato ($\alpha = 25°$). Σ_1 e Σ_2 toccano il cono lungo le circonferenze γ_1, γ_2 e il piano π nei punti F_1, F_2. Per ogni punto P della sezione: $PF_1 = PA$ (in rosso) e $PF_2 = PB$ (in blu), quindi $PF_1 + PF_2 = AB$, costante.

Lo stesso ragionamento funziona per l'iperbole, con una sfera per ciascuna falda (al posto della somma si ottiene la differenza), e per la parabola, che ha una sola sfera di Dandelin. Le sfere nascondono anche le direttrici, che incontreremo nel prossimo paragrafo: il piano della circonferenza γ_1 taglia il piano π lungo una retta, ed è proprio la direttrice relativa al fuoco F_1.

11.2.1 Lo stesso teorema in due modi: la proprietà focale dell'ellisse

Nel capitolo 9 abbiamo dimostrato in modo sintetico la proprietà focale: la tangente in un punto P dell'ellisse forma angoli uguali con PF_1 e PF_2, e quindi un raggio che parte da un fuoco si riflette passando per l'altro. Ricordiamo l'idea: tutti i punti della tangente diversi da P sono esterni all'ellisse, quindi per essi la somma delle distanze dai fuochi supera $2a$; P è dunque il punto della tangente che rende minima quella somma, e il percorso minimo di Erone (capitolo 5) forma angoli uguali con la retta. Ora ritroviamo lo stesso fatto con il calcolo, su un esempio.

ESEMPIO SVOLTO

Verifica la proprietà focale dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ nel punto $P(3; \frac{16}{5})$.

Dati. $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{25 - 16} = 3$: $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$. Il punto sta sull'ellisse: $\frac{9}{25} + \frac{256}{400} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

Tangente. Con la formula di sdoppiamento: $\frac{3x}{25} + \frac{16}{5} \cdot \frac{y}{16} = 1$, cioè t: $3x + 5y = 25$. (Controllo: sostituendo $y = \frac{25 - 3x}{5}$ nell'equazione dell'ellisse si ottiene $x^2 - 6x + 9 = 0$, con $\Delta = 0$.)

Riflessione. Invece di misurare gli angoli, riflettiamo F_2 rispetto a t: se la proprietà è vera, il simmetrico F_2' deve stare sulla retta F_1P. Con il vettore normale $(3; 5)$ di t si trova $F_2'(\frac{99}{17}; \frac{80}{17})$. Il coefficiente angolare di F_1P è $\frac{16/5}{6} = \frac{8}{15}$; quello di F_1F_2' è $\frac{80/17}{99/17 + 3} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15}$. I tre punti sono allineati (Figura 11.3).

Un controllo in più. $F_1F_2' = \frac{10}{17}\sqrt{15^2 + 8^2} = \frac{10}{17} \cdot 17 = 10 = 2a$: il percorso spezzato $F_1P + PF_2$ è lungo quanto il segmento rettilineo F_1F_2', come vuole il ragionamento di Erone.

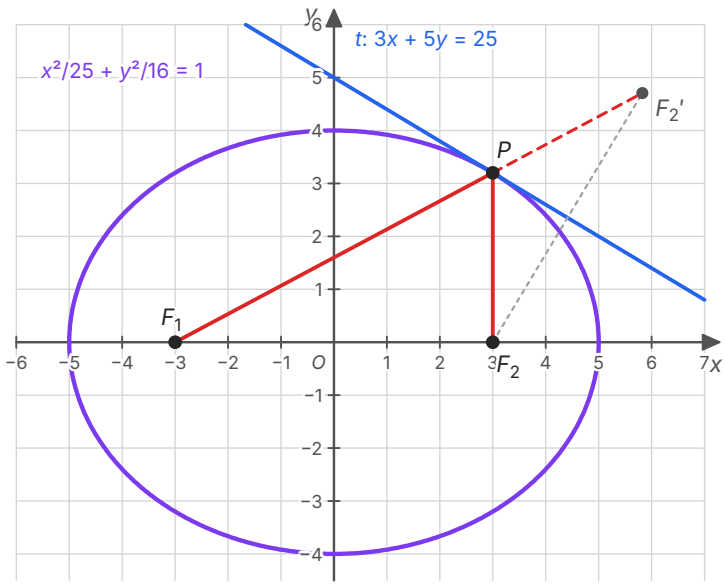


Figura 11.3 La proprietà focale dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ nel punto $P(3; \frac{16}{5})$: il simmetrico F_2' del fuoco F_2 rispetto alla tangente t sta sulla retta F_1P, quindi PF_1 e PF_2 formano angoli uguali con t.

I due procedimenti mostrano cose diverse. Quella **sintetica** spiega *perché* la proprietà vale per ogni ellisse e ogni punto: discende dalla definizione come luogo e dal problema di minimo di Erone, e non richiede calcoli. Quella **analitica** si applica a una curva e a un punto dati, è meccanica e verificabile riga per riga, ma da sola non spiega nulla: per farne una dimostrazione generale bisognerebbe ripeterla con lettere al posto dei numeri. Le Indicazioni nazionali chiedono proprio di saper confrontare i due approcci: il primo dà l'idea, il secondo la certezza del calcolo e la possibilità di affidarlo a una macchina.

11.3 Fuoco, direttrice ed eccentricità

11.3.1 Una definizione per tre curve

Nel capitolo 6 la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un fuoco e da una direttrice. Generalizziamo: invece di chiedere che le due distanze siano uguali, chiediamo che siano in un rapporto fisso.

Dati un punto F (*fuoco*), una retta d che non passa per F (*direttrice*) e un numero $e > 0$ (*eccentricità*), il luogo dei punti P del piano tali che

$$PF = e \cdot d(P, d)$$

è un'**ellisse** se $0 < e < 1$, una **parabola** se $e = 1$, un'**iperbole** se $e > 1$.

Questa è la **definizione unitaria delle coniche**, già nota ai matematici greci. Per dimostrarla scegliamo il riferimento più comodo: il fuoco nell'origine, $F(0;\,0)$, e la direttrice verticale d: $x = -k$ con $k > 0$. Per un punto $P(x;\,y)$ si ha $PF = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $d(P,\,d) = |x + k|$. Entrambe le distanze sono positive o nulle, quindi possiamo elevare al quadrato senza perdere né aggiungere soluzioni:

$$x^2 + y^2 = e^2(x + k)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2kx - e^2k^2 = 0$$

Guardiamo i coefficienti di x^2 e di y^2. Quello di y^2 è 1. Quello di x^2 è $1 - e^2$, che è positivo se $e < 1$, nullo se $e = 1$, negativo se $e > 1$. Nel prossimo paragrafo dimostreremo che un'equazione di questo tipo, senza termine in xy, rappresenta un'ellisse quando i due coefficienti hanno lo stesso segno, una parabola quando uno dei due è nullo, un'iperbole quando hanno segni opposti (e qui non ci sono casi degeneri, perché il luogo contiene punti diversi da F). Per $e = 1$ ritroviamo la parabola $y^2 = 2kx + k^2$, con asse orizzontale. La Figura 11.4 mostra le tre curve ottenute con lo stesso fuoco e la stessa direttrice.

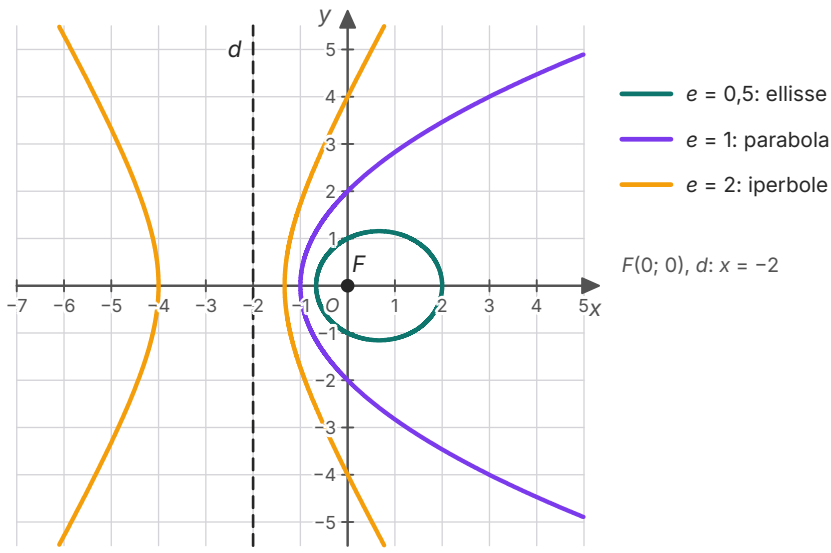


Figura 11.4 Tre coniche con lo stesso fuoco $F(0;\,0)$ e la stessa direttrice d: $x = -2$, calcolate da $x^2 + y^2 = e^2(x+2)^2$: ellisse ($e = 0{,}5$), parabola ($e = 1$) e iperbole ($e = 2$), il cui secondo ramo sta dall'altra parte della direttrice. Al crescere di e la curva si apre.

La circonferenza manca all'appello. Non è un caso: nell'equazione trovata i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali solo per $e = 0$, che la definizione esclude. La circonferenza si può pensare come il caso limite in cui l'eccentricità tende a 0 e la direttrice si allontana all'infinito; è per questo che le si attribuisce eccentricità 0, come nel capitolo 9.

11.3.2 Le direttrici dell'ellisse e dell'iperbole

Ora facciamo il cammino inverso: partiamo dall'ellisse canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, $c^2 = a^2 - b^2$ ed $e = \frac{c}{a}$, e cerchiamo la sua direttrice. Per un punto $P(x;\,y)$ dell'ellisse, $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, quindi la distanza dal fuoco $F_2(c;\,0)$ è

$$PF_2{}^2 = (x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = (a - ex)^2$$

(abbiamo usato $b^2 = a^2 - c^2$). Poiché $|x| \le a$ ed $e < 1$, il numero $a - ex$ è positivo, quindi $PF_2 = a - ex = e\left(\frac{a}{e} - x\right)$. L'ultima parentesi è la distanza di P dalla retta $x = \frac{a}{e}$: ecco la direttrice

relativa a F_2. Per simmetria, la direttrice relativa a F_1 è $x = -\frac{a}{e}$. Per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 + b^2$, lo stesso calcolo dà $PF_2{}^2 = (ex - a)^2$: le direttrici hanno la stessa equazione.

IN SINTESI

Ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ e iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: le **direttrici** sono le rette $x = \pm\frac{a}{e}$, ciascuna relativa al fuoco che sta dalla sua parte. Per l'ellisse sono esterne alla curva ($\frac{a}{e} > a$), per l'iperbole cadono tra i due rami ($\frac{a}{e} < a$). Per ogni punto P della curva vale $PF = e \cdot d(P, d)$, con F e d dalla stessa parte.

ESEMPIO SVOLTO

Trova le direttrici e verifica la proprietà in un punto.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $e = \frac{4}{5}$; direttrici $x = \pm 5 : \frac{4}{5} = \pm\frac{25}{4}$. Prendiamo $P(0; 3)$ e il fuoco $F_2(4; 0)$: $PF_2 = \sqrt{16 + 9} = 5$; la distanza di P da $x = \frac{25}{4}$ è $\frac{25}{4}$, e $\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} = 5$. ✓

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{16 + 9} = 5$, $e = \frac{5}{4}$; direttrici $x = \pm 4 : \frac{5}{4} = \pm\frac{16}{5}$. Per $x = 8$: $y^2 = 9(4 - 1) = 27$, quindi $P(8; 3\sqrt{3})$. $PF_2 = \sqrt{9 + 27} = 6$; la distanza da $x = \frac{16}{5}$ è $8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5}$, e $\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{5} = 6$. ✓

ERRORE FREQUENTE

Tre sviste tipiche. 1) Scrivere le direttrici come $x = \pm ae$: per l'ellisse $\frac{25}{4}$ non è $5 \cdot \frac{4}{5} = 4$, che è l'ascissa del fuoco. Controllo rapido: la direttrice dell'ellisse sta *fuori* dalla curva, oltre il vertice. 2) Usare la direttrice dell'altro lato: $PF_2 = e \cdot d(P, d)$ vale con la direttrice $x = +\frac{a}{e}$, che sta dalla parte di F_2. 3) Invertire il rapporto: è la distanza dal *fuoco* a essere e volte la distanza dalla *direttrice*, non il contrario; con $e < 1$ i punti dell'ellisse sono più vicini al fuoco che alla direttrice.

11.4 L'equazione generale di secondo grado

Nei capitoli precedenti ogni conica è nata da una definizione e ci ha dato la sua equazione. Ora facciamo la domanda inversa: data un'equazione di secondo grado in x e y, quale curva rappresenta? Ci limitiamo alle equazioni *senza il termine in xy*, cioè a quelle della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad \text{con } A, B \text{ non entrambi nulli}$$

che si chiama **equazione generale di secondo grado** (senza termine rettangolare). Sono le coniche con gli assi paralleli agli assi cartesiani. Le lettere maiuscole servono a non confondere i coefficienti con i semiassi a, b.

11.4.1 Il metodo: completare i quadrati

Il metodo è sempre lo stesso, già usato per la circonferenza e per l'ellisse traslata: si raccolgono i termini in x e quelli in y, si completano i quadrati e si porta il termine noto a destra. Se A e B sono entrambi diversi da zero, si arriva a

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = K$$

e la curva è la conica di centro $(x_0; y_0)$ che si ottiene traslando $AX^2 + BY^2 = K$. Se uno dei due coefficienti, per esempio B, è nullo, l'equazione $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ si risolve rispetto a y quando $D \neq 0$: è la parabola $y = -\dfrac{Ax^2 + Cx + E}{D}$, con asse verticale. Tutti i casi sono nella Tabella 11.2.

Tabella 11.2 Che cosa rappresenta $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (dopo aver completato i quadrati).

Coefficienti	Forma ridotta	Curva
$AB > 0$ (stesso segno)	$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = K$	K con il segno di A: ellisse (circonferenza se $A = B$); $K = 0$: un punto; K di segno opposto: nessun punto
$AB < 0$ (segni opposti)	$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = K$	$K \neq 0$: iperbole (fuochi su una parallela all'asse x se K ha il segno di A, all'asse y altrimenti); $K = 0$: due rette incidenti
$B = 0$, $D \neq 0$	$y = ax^2 + bx + c$	parabola con asse verticale
$A = 0$, $C \neq 0$	$x = ay^2 + by + c$	parabola con asse orizzontale
$B = 0$, $D = 0$	$Ax^2 + Cx + E = 0$	due rette parallele all'asse y, una retta (contata due volte) o nessun punto, secondo il segno di Δ

Ellissi e iperboli hanno un centro di simmetria e si dicono per questo **coniche a centro**; la parabola non ne ha. Notiamo anche che la regola del segno di AB è la stessa che abbiamo trovato con la definizione unitaria: là i coefficienti erano $1 - e^2$ e 1.

ESEMPIO SVOLTO

Riconosci le curve.

a) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$. Raccogliamo: $9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11$. Completiamo: $9(x + 1)^2 - 9 + 4(y - 2)^2 - 16 = 11$, cioè $9(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$. Dividendo per 36: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. È un'ellisse di centro $(-1; 2)$, con semiassi 2 (orizzontale) e 3 (verticale): i fuochi stanno sulla retta $x = -1$.

b) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$. $(x + 1)^2 - 1 - 4(y - 1)^2 + 4 = 7$, cioè $(x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = 4$, e $\frac{(x+1)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1$: un'iperbole di centro $(-1; 1)$, con $a = 2$, $b = 1$, fuochi sulla retta $y = 1$ e asintoti $y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$.

c) $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$. $(x - 1)^2 - y^2 = 0$: qui $K = 0$, e l'equazione si scompone in $(x - 1 - y)(x - 1 + y) = 0$. Non è un'iperbole ma la coppia di rette $y = x - 1$ e $y = -x + 1$: le due rette sono gli asintoti delle iperboli $(x - 1)^2 - y^2 = K$ con $K \neq 0$, e la curva è degenere.

APPROFONDIMENTO · IL TERMINE IN XY

Se nell'equazione compare anche un termine Fxy, la conica ha gli assi obliqui rispetto agli assi cartesiani. Si dimostra che si può sempre eliminare quel termine con una **rotazione degli assi** di un angolo opportuno; vediamolo nel caso dell'iperbole $xy = k$ del capitolo 10. Ruotiamo il riferimento di 45°: le nuove coordinate $(X; Y)$ sono legate alle vecchie da

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

(una rotazione di 45°: il punto $(1; 0)$ del nuovo riferimento è $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel vecchio). Allora $xy = \frac{(X - Y)(X + Y)}{2} = \frac{X^2 - Y^2}{2}$, e $xy = k$ diventa $X^2 - Y^2 = 2k$: un'iperbole equilatera con $a^2 = 2k$ se $k > 0$. È il risultato del capitolo 10, letto al contrario: $x^2 - y^2 = a^2$ ruotata di 45° diventa $xy = \frac{a^2}{2}$. La teoria generale delle rotazioni non fa parte del programma.

11.5 Luoghi geometrici e sistemi di coniche

11.5.1 Luoghi che portano a una conica

Molti problemi di luogo geometrico, una volta tradotti in coordinate come nel capitolo 5, si riducono a un'equazione di secondo grado: il paragrafo precedente ci permette di riconoscerla. Spesso, però, conviene prima *pensare* alla geometria: se si riesce a riscrivere la condizione come

una delle definizioni delle coniche (somma o differenza di distanze da due punti, rapporto tra distanza da un punto e da una retta), la risposta è pronta senza calcoli.

ESEMPIO SVOLTO

Trova il luogo dei centri delle circonferenze tangenti esternamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e tangenti alla retta $y = -3$, situate sopra la retta.

Ragionamento sintetico. Sia P il centro e ρ il raggio di una tale circonferenza. Tangenza esterna con la circonferenza di centro O e raggio 1: $PO = \rho + 1$. Tangenza con la retta: la distanza di P dalla retta è ρ. Quindi $PO = d(P, y = -3) + 1$, cioè P è equidistante da O e dalla retta $y = -4$, che sta un'unità più in basso. Il luogo è la parabola di fuoco O e direttrice $y = -4$.

Ragionamento analitico. Con $P(x; y)$ e $y > -3$: $\sqrt{x^2 + y^2} = y + 4$. Elevando al quadrato (entrambi i membri sono positivi): $x^2 + y^2 = y^2 + 8y + 16$, da cui $y = \dfrac{x^2}{8} - 2$.

Controllo «tutti e soli». Il punto più basso della parabola è $(0; -2)$: sta sopra la retta, e la sua distanza da O è $2 > 1$, quindi ogni punto della parabola è esterno alla circonferenza data e il raggio $\rho = y + 3$ è positivo. Ogni punto della parabola è dunque il centro di una circonferenza con le proprietà richieste, e viceversa.

Un secondo esempio porta a un'ellisse. Una circonferenza di centro P e raggio ρ sia tangente internamente alla circonferenza di centro O e raggio 5 e tangente esternamente a quella di centro $A(2; 0)$ e raggio 1 (interna alla prima). Allora $PO = 5 - \rho$ e $PA = 1 + \rho$: sommando, $PO + PA = 6$. Il luogo dei centri è l'ellisse di fuochi O e A con $2a = 6$: centro $(1; 0)$, $a = 3$, $c = 1$, $b^2 = 8$, cioè $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$. Senza l'idea della somma delle distanze, la stessa equazione si otterrebbe con due elevamenti al quadrato e parecchi calcoli.

11.5.2 Intersezioni di due coniche

I punti comuni a due coniche si trovano risolvendo il sistema delle loro equazioni, entrambe di secondo grado. Si dimostra che, se le due coniche non hanno una parte in comune, i punti comuni sono **al massimo quattro**: eliminando un'incognita si arriva, nel caso peggiore, a un'equazione di quarto grado. Nei casi che incontreremo il sistema si risolve per sostituzione o per riduzione, sfruttando le simmetrie.

Prendiamo l'ellisse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ e le circonferenze $x^2 + y^2 = r^2$ con lo stesso centro. Il sistema contiene solo x^2 e y^2: è lineare nelle incognite x^2 e y^2. Per $r^2 = 5$, moltiplicando la prima equazione per 36: $4x^2 + 9y^2 = 36$; sostituendo $y^2 = 5 - x^2$ si ha $4x^2 + 45 - 9x^2 = 36$, quindi $x^2 = \dfrac{9}{5}$ e $y^2 = \dfrac{16}{5}$. Ogni valore di x^2 dà due valori opposti di x, e così per y: i punti comuni sono

quattro, $(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}; \pm\frac{4}{\sqrt{5}})$. Il disegno (Figura 11.5) ci dice anche come cambia il numero dei punti con r: nessuno per $r < 2$, due (i vertici sull'asse y, dove le curve sono tangenti) per $r = 2$, quattro per $2 < r < 3$, due per $r = 3$, nessuno per $r > 3$.

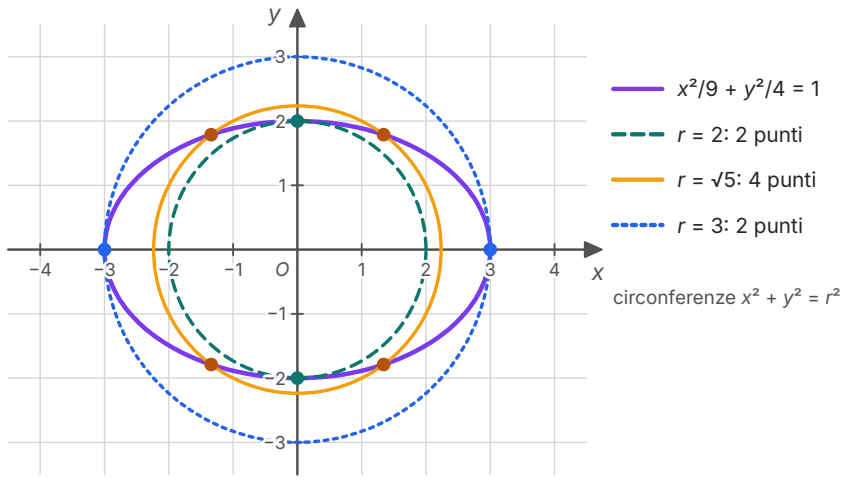


Figura 11.5 L'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e tre circonferenze concentriche: con $r = 2$ e $r = 3$ le curve sono tangenti in due punti; con $r = \sqrt{5}$ si tagliano nei quattro punti $(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}; \pm\frac{4}{\sqrt{5}})$.

Non sempre i punti sono in numero pari. La parabola $y = x^2 - 2$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$: dalla prima $x^2 = y + 2$, e sostituendo nella seconda $y^2 + y - 2 = 0$, con soluzioni $y = 1$ e $y = -2$. Per $y = 1$, $x^2 = 3$: due punti $(\pm\sqrt{3}; 1)$. Per $y = -2$, $x^2 = 0$: il solo punto $(0; -2)$, in cui le due curve sono tangenti (è il vertice della parabola e il punto più basso della circonferenza). In tutto tre punti. Attenzione: ogni valore di y va controllato, perché $x^2 = y + 2$ deve essere positivo o nullo; un valore che desse $x^2 < 0$ non corrisponderebbe a nessun punto.

11.6 Disequazioni, semiconiche e modelli

11.6.1 Regioni del piano delimitate da coniche

Una conica divide il piano in regioni. Per l'ellisse canonica, i punti con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ formano la **regione interna**, quelli con … > 1 la regione esterna; la stessa idea vale per la circonferenza e per la parabola ($y > ax^2 + bx + c$ è la regione «dentro» la concavità se $a > 0$). In generale, se scriviamo l'equazione di una curva nella forma $f(x; y) = 0$, l'espressione $f(x; y)$ ha segno costante in

ciascuna regione delimitata dalla curva (per le curve che usiamo, cambia segno solo attraversandola): basta quindi controllare **un punto di prova** per regione, come per le disequazioni lineari in due variabili del volume 2.

Un sistema di disequazioni rappresenta l'intersezione delle regioni. Il sistema

$$y \geq x^2 - 4x + 3 \quad \text{e} \quad y \leq x - 1$$

descrive i punti che stanno sopra (o sulla) parabola e sotto (o sulla) retta. Le due curve si incontrano dove $x^2 - 4x + 3 = x - 1$, cioè $x^2 - 5x + 4 = 0$, per $x = 1$ e $x = 4$: nei punti $A(1; 0)$ e $B(4; 3)$. Il punto di prova $(2; 0)$ soddisfa entrambe le disequazioni ($0 \geq -1$ e $0 \leq 1$): la regione cercata è il segmento parabolico compreso tra la corda AB e l'arco di parabola (Figura 11.6). Per il teorema di Archimede del capitolo 6, la sua area è i $\frac{2}{3}$ del parallelogramma costruito sulla corda AB e avente il lato opposto sulla tangente parallela ad AB.

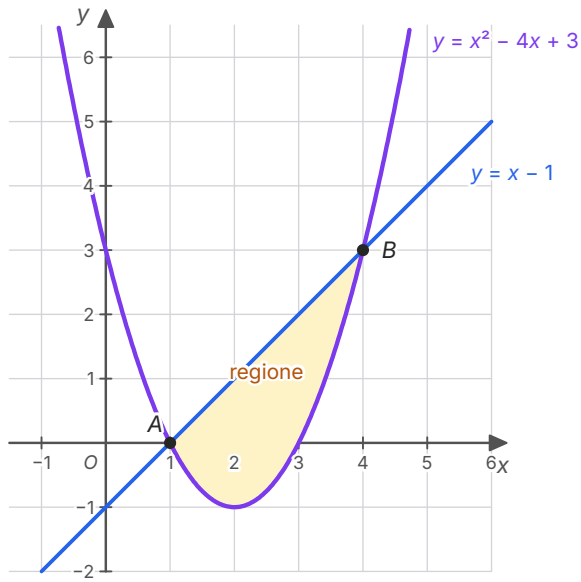


Figura 11.6 La regione $y \geq x^2 - 4x + 3$, $y \leq x - 1$: è il segmento parabolico tra la corda di estremi $A(1; 0)$ e $B(4; 3)$ e l'arco di parabola. Il bordo appartiene alla regione, perché le disuguaglianze sono larghe.

11.6.2 Semiconiche e disequazioni

Un'equazione come $y = \sqrt{9 - x^2}$ non rappresenta una circonferenza intera ma la sua metà superiore: elevando al quadrato si ottiene $x^2 + y^2 = 9$, con la condizione $y \geq 0$. Allo stesso modo $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ è la metà superiore dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ la metà inferiore dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, $y = \sqrt{x}$ il ramo superiore della parabola $y^2 = x$. Curve come queste si chiama-

no **semiconiche**: sono i grafici delle funzioni irrazionali più semplici, e permettono di risolvere a colpo d'occhio molte disequazioni del capitolo 2. Allo stesso modo, il grafico di $y = |f(x)|$ si ottiene da quello della conica $y = f(x)$ ribaltando le parti sotto l'asse x, come nel capitolo 1.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi graficamente e algebricamente $\sqrt{x^2 - 1} < 3 - x$.

Le due curve. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ è la metà superiore dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$, definita per $x \le -1$ o $x \ge 1$; i suoi asintoti sono $y = \pm x$. La retta $y = 3 - x$ ha coefficiente angolare -1: è parallela all'asintoto $y = -x$. Cerchiamo le ascisse in cui la semi-iperbole sta *sotto* la retta (Figura 11.7).

Punti comuni. $x^2 - 1 = (3 - x)^2$ dà $x^2 - 1 = 9 - 6x + x^2$, cioè $x = \frac{5}{3}$, con $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \ge 0$: il punto $P(\frac{5}{3}; \frac{4}{3})$. È l'unico: una retta parallela a un asintoto incontra l'iperbole una volta sola, e non è tangente.

Lettura del grafico. Il ramo sinistro sta tutto sotto la retta: si avvicina all'asintoto $y = -x$ restando sotto di esso, mentre la retta corre parallela all'asintoto, 3 unità più in alto; il ramo destro è sotto la retta da $x = 1$ fino a P. Soluzioni: $x \le -1 \vee 1 \le x < \frac{5}{3}$, cioè $]-\infty; -1] \cup [1; \frac{5}{3}[$.

Controllo algebrico (capitolo 2). $\sqrt{A} < B$ equivale a $A \ge 0$, $B > 0$, $A < B^2$: $x^2 - 1 \ge 0$, $x < 3$ e $x < \frac{5}{3}$. L'intersezione è la stessa. Prova con un punto per intervallo: per $x = -3$, $\sqrt{8} \approx 2{,}83 < 6$ ✓; per $x = 1{,}5$, $\sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12 < 1{,}5$ ✓; per $x = 2$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73 < 1$ ✗.

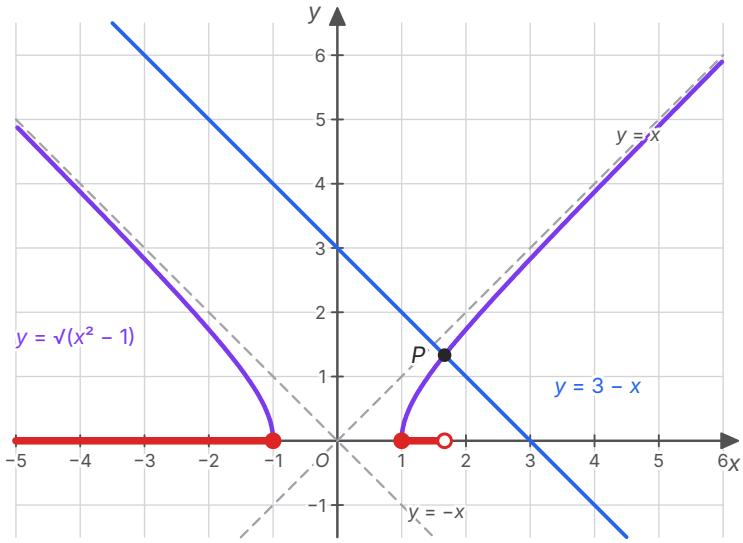


Figura 11.7 La semi-iperbole $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (in viola), i suoi asintoti (tratteggiati) e la retta $y = 3 - x$, parallela all'asintoto $y = -x$: la incontra solo in $P(\frac{5}{3}; \frac{4}{3})$. In rosso sull'asse x le soluzioni di $\sqrt{x^2 - 1} < 3 - x$.

11.6.3 Le coniche come modelli

Orbite. Keplero, nell'*Astronomia nova* (1609), stabilì che i pianeti percorrono ellissi con il Sole in un fuoco: è la prima legge di Keplero, che hai incontrato nel capitolo 9. Le eccentricità delle orbite planetarie sono piccole, e le orbite sono quasi circolari; quelle delle comete periodiche sono invece molto allungate. I corpi che arrivano da fuori del Sistema solare e non vi restano legati percorrono archi di iperbole; la parabola è il caso limite tra le due situazioni.

Ponti e archi. Un arco a tutto sesto è una semicirconferenza; un arco ribassato, più basso di metà della luce, può avere la forma di una semiellisse, che a parità di luce e di altezza resta alto più a lungo vicino alle imposte; i cavi di un ponte sospeso, che sostengono un impalcato con un carico uniforme lungo l'orizzontale, assumono con buona approssimazione la forma di una parabola. Un esercizio ti chiede di confrontare un arco ellittico e uno parabolico con la stessa luce e la stessa altezza.

Specchi. Le tre proprietà focali (parabola: i raggi paralleli all'asse convergono nel fuoco; ellisse: i raggi da un fuoco convergono nell'altro; iperbole: i raggi diretti verso un fuoco vengono riflessi verso l'altro) sono alla base di molti strumenti. Nel telescopio di tipo Cassegrain la luce raccolta da uno specchio principale concavo parabolico viene intercettata, prima del fuoco, da uno specchio secondario convesso iperbolico che ha un fuoco in comune con la parabola, e rinviata verso l'altro fuoco, dietro lo specchio principale, dove si trova l'oculare o il sensore.

Traiettorie. Un proiettile lanciato in assenza di aria descrive una parabola (capitolo 6); è un'approssimazione valida per piccole distanze, in cui si può considerare la gravità costante in

intensità e direzione. Su scala planetaria la stessa caduta diventa un'orbita ellittica attorno al centro della Terra, e la parabola ne è l'approssimazione vicino alla superficie.

APPROFONDIMENTO · KEPLERO E NEWTON: PERCHÉ PROPRIO LE CONICHE

Keplero ricavò le sue leggi dalle osservazioni, senza sapere perché i pianeti seguissero delle ellissi. La risposta arrivò con Isaac Newton, nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687): se un corpo è attratto verso un punto fisso da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come la gravità, la sua traiettoria è una conica con un fuoco in quel punto. Il tipo di conica dipende dall'energia del corpo: un'ellisse se è legato, un'iperbole se ha abbastanza velocità da sfuggire, una parabola nel caso limite. Oggi la si dimostra con il calcolo differenziale; ne studierai le linee essenziali in fisica negli anni successivi.

SINTESI

- Una superficie conica a due falde, tagliata da un piano che non passa per il vertice, dà una circonferenza ($\beta = 90°$), un'ellisse ($\alpha < \beta < 90°$), una parabola ($\beta = \alpha$) o un'iperbole ($\beta < \alpha$), dove α è la semiapertura e β l'angolo tra piano e asse; un piano per il vertice dà le coniche degeneri.
- Le sfere di Dandelin dimostrano in modo sintetico che la sezione è un'ellisse: per ogni punto P, $PF_1 = PA$, $PF_2 = PB$ (segmenti di tangenza), quindi $PF_1 + PF_2 = AB$, costante.
- Il metodo sintetico spiega perché una proprietà vale in generale; il metodo analitico la verifica con un calcolo meccanico su dati precisi.
- Definizione unitaria: il luogo dei punti con $PF = e \cdot d(P, d)$ è un'ellisse se $e < 1$, una parabola se $e = 1$, un'iperbole se $e > 1$.
- Le direttrici dell'ellisse e dell'iperbole canoniche sono $x = \pm \frac{a}{e}$; per l'ellisse sono esterne alla curva, per l'iperbole cadono tra i rami.
- Nell'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ si completano i quadrati: $AB > 0$ ellisse (o punto, o nessun punto), $AB < 0$ iperbole (o due rette incidenti), un coefficiente nullo parabola (o rette parallele).
- Il termine in xy si elimina con una rotazione degli assi: $xy = k$ ruotata di 45° è $X^2 - Y^2 = 2k$.
- Un luogo geometrico si riconosce spesso come conica riscrivendo la condizione come somma o differenza di distanze, o come rapporto tra distanza da un punto e da una retta.
- Due coniche distinte hanno al massimo quattro punti in comune; nei sistemi con soli quadrati conviene risolvere rispetto a x^2 e y^2.
- Una conica divide il piano in regioni in cui l'espressione $f(x; y)$ ha segno costante: un punto di prova per regione basta a decidere.
- Le semiconiche, come $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ o $y = \sqrt{(x^2 - 1)}$, sono i grafici delle funzioni irrazionali più semplici e permettono di risolvere graficamente le disequazioni irrazionali.
- Orbite (Keplero, Newton), archi, cavi, specchi e telescopi sono modelli in cui compaiono le coniche e le loro proprietà focali.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Un piano che non passa per il vertice ed è parallelo a una sola generatrice di un cono lo taglia secondo:
   - **A.** un'ellisse
   - **B.** una parabola
   - **C.** un'iperbole
   - **D.** due rette incidenti

2. ● La conica definita da $PF = e \cdot d(P, d)$ con $e = 1{,}5$ è:
   - **A.** un'ellisse
   - **B.** una parabola
   - **C.** un'iperbole
   - **D.** una circonferenza

3. ●● L'equazione $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$ rappresenta:
   - **A.** un'iperbole di centro (1; 0)
   - **B.** una circonferenza
   - **C.** un'ellisse di centro (−1; 0)
   - **D.** un'ellisse di centro (1; 0)

4. ●● Le direttrici dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ sono:
   - **A.** $x = \pm\frac{25}{3}$
   - **B.** $x = \pm 3$
   - **C.** $x = \pm\frac{5}{3}$
   - **D.** $x = \pm\frac{16}{3}$

5. ●● Due coniche distinte e non degeneri possono avere in comune al massimo:
   - **A.** 2 punti
   - **B.** 3 punti
   - **C.** 4 punti
   - **D.** infiniti punti

6. ●● Il punto (1; 1), rispetto all'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, è:

   A. esterno
   B. interno
   C. un punto dell'ellisse
   D. uno dei fuochi

7. ●● L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta:

   A. un solo punto
   B. un'iperbole equilatera
   C. l'insieme vuoto
   D. due rette incidenti

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni sezione piana di un cono è una conica non degenere. b) Nella definizione $PF = e \cdot d(P, d)$, il valore $e = 1$ dà la parabola. c) L'equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$ rappresenta una circonferenza. d) Nella dimostrazione di Dandelin, i fuochi dell'ellisse sono i punti in cui le sfere toccano il piano secante.

9. ● Completa. a) Se nell'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ i coefficienti A e B sono _____ , la curva, se non è degenere, è un'ellisse; se sono _____ , è un'iperbole; se uno dei due è _____ , è una parabola. b) La direttrice relativa al fuoco $F_2(c; 0)$ dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ha equazione _____ . c) I segmenti di tangenza condotti da un punto esterno a una sfera sono tutti _____ .

Calcolare

10. ● Riconosci la conica e trovane gli elementi (centro o vertice, semiassi). a) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 1 = 0$ b) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y - 4 = 0$ c) $y^2 - 4y - 4x = 0$

11. ●● Stabilisci che cosa rappresentano le equazioni (attenzione ai casi degeneri). a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ b) $4x^2 - y^2 + 8x + 4 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 2y + 5 = 0$ d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

12. ● Calcola l'eccentricità e le direttrici dell'ellisse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, e verifica la relazione $PF_2 = e \cdot d(P, d)$ nel punto $P(0; 6)$.

13. ●● Calcola l'eccentricità e le direttrici dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; trova il punto P del ramo destro con ascissa 4 e ordinata positiva e verifica per esso la proprietà della direttrice rispetto al fuoco $F_2(3; 0)$.

14. ●● Scrivi l'equazione del luogo dei punti P tali che $PF = \frac{1}{2} d(P, d)$, con $F(2; 0)$ e d: $x = 8$. Riconosci la conica e controlla che F ne sia un fuoco e d una direttrice.

15. ●● Scrivi l'equazione del luogo dei punti P tali che $PF = 2 \cdot d(P, d)$, con $F(4; 0)$ e d: $x = 1$. Riconosci la conica, calcola semiassi ed eccentricità.

16. ●● Trova i punti comuni alla parabola $y = x^2 - 3$ e alla circonferenza $x^2 + y^2 = 9$. In quale di essi le curve sono tangenti?

17. ●● Trova i punti comuni all'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e all'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

18. ●● Rappresenta la regione del piano definita da $x^2 + y^2 \le 4$ e $y \ge x^2 - 2$; trova i punti in cui si incontrano i bordi e stabilisci quali tra i punti $A(0; 1)$, $B(1{,}5; -1)$, $C(-1; 1{,}5)$, $D(0; 2{,}5)$ appartengono alla regione.

19. ●● Risolvi graficamente, con una semiellisse e una retta, la disequazione $\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \ge x - 1$, e controlla il risultato algebricamente.

20. ●●● Risolvi $\sqrt{x^2 - 4} < x - 1$ prima algebricamente, poi interpretando i due membri come una semi-iperbole e una retta. Perché la retta incontra la semi-iperbole in un solo punto?

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che il luogo dei centri delle circonferenze tangenti esternamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ e tangenti alla retta $y = -3$, situate sopra la retta, è una parabola. Scrivine l'equazione, il fuoco e la direttrice.

22. ●● Dimostra che i centri delle circonferenze tangenti internamente alla circonferenza di centro $O(0; 0)$ e raggio 5 e tangenti esternamente alla circonferenza di centro $A(2; 0)$ e raggio 1 stanno sull'ellisse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

23. ●● *L'ellissografo.* Un'asta AB lunga 5 scivola con l'estremo A sull'asse x e l'estremo B sull'asse y. Dimostra che il punto P dell'asta con $PA = 2$ descrive l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, e che i suoi semiassi misurano PB e PA. (Uno strumento basato su questo principio, l'**ellissografo**, serve a tracciare ellissi.)

24. ●● Spiega perché la definizione $PF = e \cdot d(P, d)$, con $e > 0$, non può mai dare una circonferenza.

25. ●● *Trova l'errore.* «L'equazione $x^2 - 4y^2 + 2x + 1 = 0$ rappresenta un'iperbole, perché i coefficienti di x^2 e di y^2 hanno segni opposti.» Correggi il ragionamento.

26. ●●● Dimostra che, per ogni punto $P(x; y)$ del ramo destro dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la distanza dal fuoco $F_2(c; 0)$ è $PF_2 = ex - a$, e deduci che $x = \frac{a}{e}$ è la direttrice relativa a F_2.

27. ●● Spiega con il ragionamento delle sfere di Dandelin perché un piano perpendicolare all'asse di un cono lo taglia secondo una circonferenza. (Dove toccano il piano le due sfere?)

Problemi

28. ●● Un satellite percorre un'orbita ellittica con il centro della Terra in un fuoco. La sua distanza minima dal centro della Terra è 7000 km, la massima 9000 km (dati di un esempio). Calcola semiasse maggiore, semidistanza focale, eccentricità e semiasse minore, e scrivi l'equazione dell'orbita in un riferimento con il centro dell'ellisse nell'origine e l'asse maggiore sull'asse x (unità: km).

29. ●● Un ponte ad arco ha luce 40 m e altezza 10 m. a) Scrivi l'equazione dell'arco se è una semiellisse e se è un arco di parabola, con l'origine al centro della base. b) Quanto è alto ciascun arco a 5 m dall'imposta? c) Qual è la larghezza disponibile all'altezza di 6 m nei due casi?

30. ● In una «galleria dei sussurri» la pianta della volta è un'ellisse con asse maggiore 20 m e asse minore 12 m. A quale distanza devono mettersi due persone, e dove, perché un sussurro dell'una sia sentito dall'altra grazie alla proprietà focale?

31. ●● Una lampada ha un paralume che lascia uscire verso l'alto e verso il basso due coni di luce con asse verticale e semiapertura 30°; la lampadina, che consideriamo il vertice, è a 1 m da una parete verticale. Con un riferimento sulla parete che ha l'origine nel punto più vicino alla lampadina, l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, scrivi l'equazione del confine tra luce e ombra e riconosci la curva. Lungo la verticale dell'origine, a partire da quale distanza sopra e sotto la lampadina la parete è illuminata? (Il cono ha equazione $X^2 + Y^2 = Z^2 \operatorname{tg}^2 30°$ con il vertice nell'origine e l'asse Z verticale.)

32. ●● Un'aiuola ha la forma della regione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le 1$ (misure in metri); al centro c'è una fontana circolare $x^2 + y^2 \le 4$. Verifica che la fontana sia tutta dentro l'aiuola e calcola l'area da seminare.

Verso la verifica

33. ●● Data l'equazione $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$: a) riconosci la conica e trovane centro e semiassi; b) calcola fuochi, eccentricità e direttrici; c) trova i punti comuni con la retta $y = \frac{x}{2}$.

34. ●● Rappresenta la regione $y \le -x^2 + 4$, $y \ge x^2 - 4$. a) Trova i punti in cui si incontrano le due parabole. b) Il punto $(1; 2)$ appartiene alla regione? c) Usando il teorema di Archimede sul segmento parabolico (capitolo 6), calcola l'area della regione.

35. ●●● *Sfida.* Scrivi l'equazione della conica con fuoco $F(1; 1)$, direttrice d: $x + y = 0$ ed eccentricità 1. Che conica è? Perché nella sua equazione compare il termine in xy? Trova il suo vertice.

PER APPROFONDIRE

- [HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*: le sezioni del cono, le sfere di Dandelin e la proprietà fuoco-direttrice, con figure e dimostrazioni sintetiche.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Apollonio e le *Coniche*; Keplero, Newton e le orbite.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le coniche, le loro proprietà focali e l'equazione generale di secondo grado.

Glossario del capitolo

Angolo di semiapertura
L'angolo acuto α che ogni generatrice di una superficie conica forma con l'asse.

Conica a centro
Conica dotata di un centro di simmetria: l'ellisse (con la circonferenza) e l'iperbole.

Conica degenere
Sezione di un cono con un piano passante per il vertice: un punto, una retta o due rette incidenti; per estensione, le equazioni di secondo grado che rappresentano punti, rette o nessun punto.

Definizione unitaria delle coniche
Le coniche non degeneri diverse dalla circonferenza sono i luoghi dei punti P con $PF = e \cdot d(P, d)$: ellisse se $e < 1$, parabola se $e = 1$, iperbole se $e > 1$.

Ellissografo
Strumento che traccia un'ellisse con un'asta i cui estremi scorrono su due guide perpendicolari: un punto fisso dell'asta descrive l'ellisse.

Equazione generale di secondo grado
Equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (eventualmente con un termine in xy), che rappresenta una conica, una conica degenere o nessun punto.

Falda
Ciascuna delle due parti, opposte al vertice, di una superficie conica.

Generatrice
Ciascuna delle rette per il vertice che formano una superficie conica.

Regione interna
Per un'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, l'insieme dei punti con $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$; analogamente per circonferenza e parabola.

Rotazione degli assi
Cambio di riferimento che ruota gli assi cartesiani attorno all'origine; permette di eliminare il termine in xy di una conica.

Segmenti di tangenza
I segmenti che congiungono un punto esterno a una sfera (o a una circonferenza) con i punti di contatto delle tangenti; sono tutti congruenti.

Semiconica
Metà di una conica tagliata da un suo asse di simmetria, grafico di una funzione come $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ o $y = \sqrt{(x^2 - 1)}$.

Sezione conica
La curva intersezione di una superficie conica con un piano che non passa per il vertice: circonferenza, ellisse, parabola o iperbole.

Sfere di Dandelin
Le sfere inscritte in un cono e tangenti al piano secante; i punti di contatto con il piano sono i fuochi della sezione.

Superficie conica
La superficie generata da una retta che ruota attorno a un asse passando sempre per un punto fisso (il vertice) e formando con l'asse un angolo costante.

Soluzioni

1. B. Il piano è parallelo a una generatrice ($\beta = \alpha$).

2. C. $e > 1$.

3. D. $4(x-1)^2 + 9y^2 = 36$, cioè $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. A. $c = 3$, $e = \frac{3}{5}$, $\frac{a}{e} = 5 : \frac{3}{5} = \frac{25}{3}$.

5. C. Il sistema delle due equazioni porta al più a un'equazione di quarto grado.

6. B. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$.

7. D. $(x-y)(x+y) = 0$: le rette $y = x$ e $y = -x$.

8. a) Falso: se il piano passa per il vertice si ottiene una conica degenere (un punto, una retta, due rette). b) Vero. c) Falso: $x^2 + y^2 = -1$ non ha soluzioni reali, nessun punto. d) Vero.

9. a) dello stesso segno; di segno opposto; nullo. b) $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$. c) congruenti (uguali in lunghezza).

10. a) $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 16$, $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$: ellisse di centro $(1; -2)$, semiassi 4 e 2. b) $9(x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 36$, $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$: iperbole di centro $(-2; 1)$, $a = 2$, $b = 3$, fuochi sulla retta $y = 1$. c) $(y-2)^2 = 4(x+1)$: parabola con asse orizzontale $y = 2$ e vertice $(-1; 2)$, cioè $x = \frac{y^2}{4} - y$.

11. a) $(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 0$: il solo punto $(1; -1)$. b) $4(x+1)^2 - y^2 = 0$: le due rette $y = 2x + 2$ e $y = -2x - 2$. c) $x^2 + (y-1)^2 = -4$: nessun punto. d) $(x-3)^2 = 0$: la retta $x = 3$ contata due volte.

12. $a = 10$, $b = 6$, $c = 8$, $e = \frac{4}{5}$; direttrici $x = \pm\frac{25}{2}$. $PF_2 = \sqrt{64 + 36} = 10$; $d(P, d) = \frac{25}{2}$ e $\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{2} = 10$. ✓

13. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{4 + 5} = 3$, $e = \frac{3}{2}$; direttrici $x = \pm\frac{4}{3}$. Per $x = 4$: $y^2 = 5(4-1) = 15$, $P(4; \sqrt{15})$. $PF_2 = \sqrt{1 + 15} = 4$; $d(P, d) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ e $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4$. ✓

14. $(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-8)^2$; moltiplicando per 4: $4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 16x + 64$, cioè $3x^2 + 4y^2 = 48$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$: ellisse con $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$. Fuoco $(2; 0)$ ✓; $e = \frac{1}{2}$ e $\frac{a}{e} = 8$ ✓.

15. $(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2$, $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4$, $3x^2 - y^2 = 12$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$: iperbole con $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$, $e = 2$ (e infatti $\frac{a}{e} = 1$: la direttrice è quella data).

16. $x^2 = y + 3$; sostituendo: $y^2 + y - 6 = 0$, $y = 2$ o $y = -3$. Punti $(\pm\sqrt{5}; 2)$ e $(0; -3)$. In $(0; -3)$, vertice della parabola e punto più basso della circonferenza, le curve sono tangenti.

17. Da $x^2 = 1 + y^2$: $\frac{1 + y^2}{4} + y^2 = 1$, $5y^2 = 3$, $y^2 = \frac{3}{5}$, $x^2 = \frac{8}{5}$. Quattro punti: $(\pm\frac{2\sqrt{10}}{5}; \pm\frac{\sqrt{15}}{5})$.

18. Bordi: $x^2 = y + 2$, $y^2 + y - 2 = 0$, punti $(\pm\sqrt{3}; 1)$ e $(0; -2)$. La regione è la parte del cerchio sopra la parabola. *A*: $1 \le 4$, $1 \ge -2$: sì. *B*: $3{,}25 \le 4$ ma $-1 \ge 0{,}25$ è falso: no. *C*: $3{,}25 \le 4$, $1{,}5 \ge -1$: sì. *D*: $6{,}25 > 4$: no.

19. $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ è la metà superiore dell'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, definita su $[-2; 2]$. Per $x < 1$ la retta è sotto l'asse x: disequazione vera. Per $x \ge 1$: $4 - x^2 \ge 4(x-1)^2$, $5x^2 - 8x \le 0$, $0 \le x \le \frac{8}{5}$. Soluzioni: $-2 \le x \le \frac{8}{5}$. Prova: per $x = 1{,}8$, $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}76} \approx 0{,}44 < 0{,}8$: non è soluzione ✓.

20. C.E. $x \le -2 \vee x \ge 2$; serve $x - 1 > 0$, quindi $x \ge 2$; elevando: $x^2 - 4 < x^2 - 2x + 1$, $x < \frac{5}{2}$. Soluzioni $2 \le x < \frac{5}{2}$. $y = \sqrt{x^2 - 4}$ è la metà superiore dell'iperbole $x^2 - y^2 = 4$, con asintoti $y = \pm x$; la retta $y = x - 1$ è parallela all'asintoto $y = x$, quindi incontra l'iperbole in un solo punto, $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$.

21. Centro P, raggio ρ: $PO = \rho + 2$ e $\rho = y + 3$, quindi $PO = y + 5$: P è equidistante da O e dalla retta $y = -5$. Parabola di fuoco $O(0; 0)$ e direttrice $y = -5$: $x^2 + y^2 = (y + 5)^2$, $y = \frac{x^2}{10} - \frac{5}{2}$. Il vertice $(0; -\frac{5}{2})$ ha distanza $\frac{5}{2} > 2$ da O e sta sopra la retta: tutti i punti vanno bene.

22. Se ρ è il raggio: $PO = 5 - \rho$ (tangenza interna), $PA = 1 + \rho$ (tangenza esterna); sommando $PO + PA = 6$. È l'ellisse di fuochi O e A: centro $(1; 0)$, $a = 3$, $c = 1$, $b^2 = 9 - 1 = 8$. Viceversa, ogni punto dell'ellisse ha $PO < 5$ e dà $\rho = 5 - PO > 0$.

23. $A(u; 0)$, $B(0; w)$, $u^2 + w^2 = 25$. P divide AB con $AP : AB = 2 : 5$: $P(\frac{3}{5}u; \frac{2}{5}w)$. Quindi $u = \frac{5}{3}x$, $w = \frac{5}{2}y$, e $\frac{25}{9}x^2 + \frac{25}{4}y^2 = 25$, cioè $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$: semiassi $3 = PB$ e $2 = PA$. c.v.d.

24. Con $F(0; 0)$ e d: $x = -k$ il luogo è $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2kx - e^2k^2 = 0$: i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali solo se $e = 0$, che è escluso; una circonferenza ha invece coefficienti uguali. (In un riferimento qualsiasi si ragiona allo stesso modo, perché si può sempre scegliere quello comodo.) Più geometricamente: sulla circonferenza la distanza dal centro è costante, ma la distanza da una retta no.

25. Completando i quadrati: $(x + 1)^2 - 4y^2 = 0$, con termine noto nullo: è la coppia di rette $y = \pm\frac{x + 1}{2}$, una conica degenere. Il segno opposto dei coefficienti dice solo che non è un'ellisse: bisogna controllare K.

26. $y^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)$, quindi $PF_2^2 = (x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$; con $b^2 = c^2 - a^2$: $PF_2^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = (ex - a)^2$. Sul ramo destro $x \ge a$ ed $e > 1$, quindi $ex - a > 0$ e $PF_2 = ex - a = e(x - \frac{a}{e})$: l'ultima parentesi è la distanza di P dalla retta $x = \frac{a}{e}$, che sta tra il centro e il vertice (perché $a/e < a$). c.v.d.

27. Le due sfere hanno il centro sull'asse e il piano è perpendicolare all'asse: entrambe lo toccano nello stesso punto, il piede dell'asse, quindi $F_1 = F_2 = F$. Per ogni punto della sezione $PF_1 + PF_2 = 2PF$ è costante: PF è costante e la sezione è una circonferenza di centro F.

28. $a = (7000 + 9000) : 2 = 8000$ km; $c = 9000 - 8000 = 1000$ km; $e = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $b = \sqrt{8000^2 - 1000^2} = 3000\sqrt{7} \approx 7937$ km. Equazione: $\frac{x^2}{64\,000\,000} + \frac{y^2}{63\,000\,000} = 1$.

29. a) Semiellisse: $y = 10\sqrt{1 - \frac{x^2}{400}}$; parabola: $y = 10 - \frac{x^2}{40}$, per $-20 \le x \le 20$. b) A 5 m dall'imposta $x = 15$: ellisse $10\sqrt{\frac{175}{400}} \approx 6{,}61$ m, parabola $10 - 5{,}625 = 4{,}375$ m. c) Ellisse: $1 - x^2/400 = 0{,}36$, $x = \pm 16$, larghezza 32 m; parabola: $x^2 = 160$, $x = \pm 4\sqrt{10} \approx \pm 12{,}65$, larghezza $\approx 25{,}3$ m. L'arco ellittico resta alto più a lungo.

30. $a = 10$ m, $b = 6$ m, $c = \sqrt{100 - 36} = 8$ m: le due persone devono stare nei fuochi, sull'asse maggiore a 8 m dal centro da parti opposte, cioè a 16 m l'una dall'altra (e a 2 m dalla parete più vicina).

31. Sulla parete $Y = 1$: $X^2 + 1 = \frac{Z^2}{3}$, cioè, con $x = X$ e $y = Z$: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$. È un'iperbole con i fuochi sull'asse y, vertici $(0; \pm\sqrt{3})$ e asintoti $y = \pm\sqrt{3}\,x$. I punti illuminati sono quelli interni al cono, cioè quelli con $\frac{y^2}{3} - x^2 \ge 1$: sulla verticale dell'origine la parete è illuminata da $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ m sopra la lampadina in su e da $\sqrt{3}$ m sotto in giù; il tratto intermedio resta in ombra.

32. Il raggio della fontana, 2 m, è minore del semiasse minore dell'aiuola, 3 m: ogni punto con

$x^2 + y^2 \le 4$ ha $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le \frac{x^2 + y^2}{9} \le \frac{4}{9} < 1$. Area: $\pi \cdot 4 \cdot 3 - \pi \cdot 2^2 = 8\pi \approx 25{,}1\ m^2$.

33. a) $(x - 2)^2 + 4y^2 = 4$, $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$: ellisse di centro (2; 0), $a = 2$, $b = 1$. b) $c = \sqrt{3}$: fuochi $(2 \pm \sqrt{3}; 0)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; direttrici $x = 2 \pm \frac{a}{e} = 2 \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$. c) $x^2 + x^2 - 4x = 0$: $x = 0$ o $x = 2$; punti (0; 0) e (2; 1).

34. a) $-x^2 + 4 = x^2 - 4$, $x^2 = 4$: punti (−2; 0) e (2; 0). b) $2 \le 3$ e $2 \ge -3$: sì. c) La regione è formata da due segmenti parabolici con la corda da (−2; 0) a (2; 0); ciascuno è i $\frac{2}{3}$ del rettangolo 4×4 costruito sulla corda: $\frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$. Area totale $\frac{64}{3}$.

35. $PF = d(P, d)$: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{(x+y)^2}{2}$, cioè $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. È una parabola ($e = 1$). Il suo asse è la perpendicolare a d per F, cioè la retta $y = x$, obliqua rispetto agli assi cartesiani: per questo compare il termine in xy. Il vertice è il punto medio tra F e il piede della perpendicolare da F a d, che è (0; 0): $V(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ (e infatti soddisfa l'equazione).