CAPITOLO

10

L'iperbole

Due rami che non si toccano e due rette che non toccano mai: l'iperbole insegna che ci si può avvicinare quanto si vuole senza arrivare. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire l'iperbole come luogo geometrico e ricavarne l'equazione canonica, con i fuochi sull'asse x o sull'asse y.
2. Riconoscere vertici, assi, asintoti, rettangolo fondamentale ed eccentricità, e disegnare l'iperbole.
3. Determinare l'equazione di un'iperbole da condizioni assegnate.
4. Studiare la posizione di una retta rispetto a un'iperbole e scrivere le tangenti, distinguendo il caso delle rette parallele agli asintoti.
5. Riconoscere l'iperbole equilatera, anche riferita agli asintoti, e il grafico della funzione omografica.
6. Riconoscere un'iperbole traslata dalla sua equazione e usare l'iperbole come modello in fisica, nella navigazione e in economia.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 L'iperbole come luogo geometrico 2
10.2 Asintoti ed eccentricità 6
10.3 Retta e iperbole 9
10.4 L'iperbole equilatera 13
10.5 Funzione omografica e iperbole traslata 15
10.6 L'iperbole nelle scienze e nella tecnica 18

Matematica 3 · Parte III · Ellisse, iperbole e coniche · versione 1.0
Capitolo 10: L'iperbole · pagine 247–272 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente l'ellisse è nata da una *somma* costante di distanze da due punti fissi. Che cosa succede se, al posto della somma, teniamo costante la *differenza*? Nasce una curva molto diversa, fatta di due pezzi separati che si allontanano all'infinito avvicinandosi sempre più a due rette: l'*iperbole*. La incontri più spesso di quanto pensi. Il grafico della proporzionalità inversa $y = k/x$, che hai disegnato fin dal primo anno, è un'iperbole; lo è il grafico della legge di Boyle, che lega la pressione e il volume di un gas a temperatura costante; lungo un'iperbole si muove un corpo che attraversa il Sistema solare troppo veloce per esserne catturato; sulle iperboli si basavano i sistemi di radionavigazione che, prima del GPS, permettevano alle navi di conoscere la propria posizione.

Seguiamo lo stesso percorso dei capitoli sulla parabola, sulla circonferenza e sull'ellisse: partiamo dalla definizione come luogo geometrico, ricaviamo l'equazione canonica, studiamo le posizioni di una retta rispetto alla curva e le tangenti. Poi incontriamo due novità che l'ellisse non aveva: gli *asintoti*, rette a cui la curva si avvicina senza mai toccarle, e la *funzione omografica*, il quoziente di due polinomi di primo grado, il cui grafico è un'iperbole equilatera traslata.

10.1 L'iperbole come luogo geometrico

10.1.1 La definizione

Fissiamo nel piano due punti distinti F_1 e F_2 e indichiamo con $2c$ la loro distanza. Fissiamo poi un numero a con $0 < a < c$.

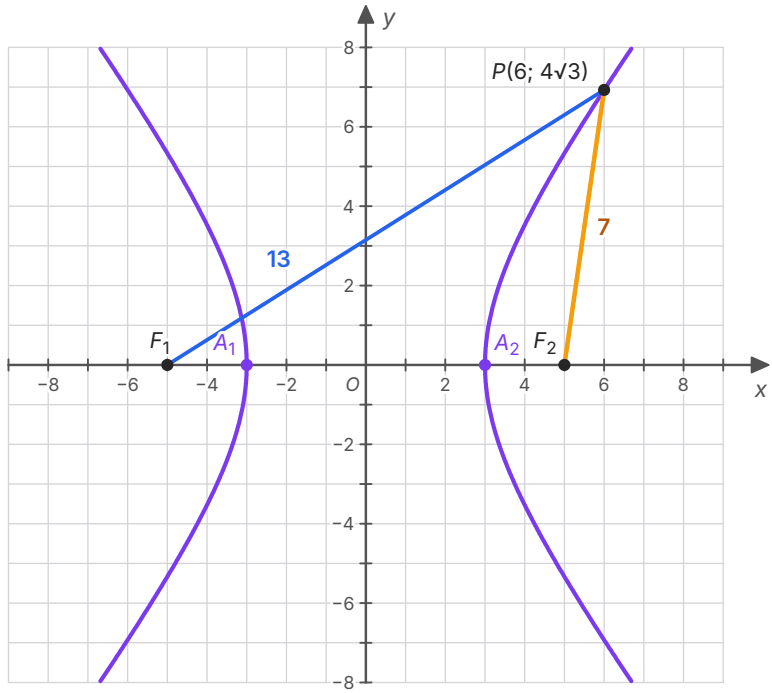
Si chiama **iperbole** di **fuochi** F_1 e F_2 il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante, e uguale a $2a$, il valore assoluto della differenza delle distanze dai due fuochi:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a, \quad \text{con } 0 < 2a < 2c = F_1F_2.$$

Il punto medio O del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'iperbole; c è la semidistanza focale.

La condizione $2a < 2c$ non è un dettaglio. Se P non sta sulla retta F_1F_2, i punti P, F_1, F_2 formano un triangolo e, per la disuguaglianza triangolare, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due: $|PF_1 - PF_2| < F_1F_2 = 2c$. Quindi con $2a > 2c$ il luogo sarebbe vuoto, mentre con $2a = 2c$ si ridurrebbe ai punti della retta F_1F_2 che non sono interni al segmento F_1F_2: due semirette con origine nei fuochi, non una curva.

Il valore assoluto nella definizione nasconde due casi. I punti più vicini a F_2 che a F_1 soddisfano $PF_1 - PF_2 = 2a$ e formano un **ramo** della curva; quelli più vicini a F_1 soddisfano $PF_2 - PF_1 = 2a$ e formano l'altro ramo. A differenza dell'ellisse, l'iperbole non è una curva chiusa e non è nemmeno «in un pezzo solo»: i due rami non hanno punti in comune. La Figura 10.1 mostra un punto P del ramo destro di un'iperbole con $2a = 6$ e $2c = 10$: le sue distanze dai fuochi sono 13 e 7, e la differenza è proprio 6.



$x^2 / 9 - y^2 / 16 = 1$

$a = 3$, $c = 5$

$PF_1 = 13$

$PF_2 = 7$

$PF_1 - PF_2 = 6 = 2a$

Per ogni punto del ramo destro la differenza vale $2a$; per il ramo sinistro vale $PF_2 - PF_1 = 2a$.

Figura 10.1 L'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ con fuochi $F_1(-5;\,0)$ e $F_2(5;\,0)$. Per il punto $P(6;\,4\sqrt{3})$ del ramo destro $PF_1 = 13$ e $PF_2 = 7$: la differenza è $6 = 2a$.

Come per l'ellisse, esiste una costruzione meccanica. Si fissa un'asta rigida in F_1, libera di ruotare, e si lega un filo all'altra estremità dell'asta e al punto F_2, con il filo più corto dell'asta; una matita tiene teso il filo appoggiandolo all'asta. Mentre l'asta ruota, la differenza tra la distanza della matita da F_1 e la sua distanza da F_2 resta uguale alla differenza tra la lunghezza dell'asta e quella del filo: la matita traccia un arco di un ramo dell'iperbole.

10.1.2 L'equazione canonica

Scegliamo il sistema di riferimento più comodo, come nel capitolo sull'ellisse: l'asse x sulla retta dei fuochi e l'origine nel centro, così che $F_1(-c;\,0)$ e $F_2(c;\,0)$. Un punto $P(x;\,y)$ appartiene all'iperbole se e solo se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Isoliamo il primo radicale ed eleviamo al quadrato:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Sviluppando i quadrati, i termini x^2, y^2 e c^2 si cancellano e, dividendo per 4, resta

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Eleviamo di nuovo al quadrato (il doppio segno sparisce):

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

cioè

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Poiché $c > a$, il numero $c^2 - a^2$ è positivo e possiamo chiamarlo b^2, con $b > 0$. L'equazione diventa $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e, dividendo per a^2b^2, otteniamo l'**equazione canonica dell'iperbole**:

IN SINTESI

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } c^2 = a^2 + b^2.$$

L'iperbole con i fuochi sull'asse x, simmetrici rispetto all'origine, ha questa equazione; i fuochi sono $F_{1,2}(\pm c;\, 0)$. Attenzione al segno: per l'ellisse $c^2 = a^2 - b^2$, per l'iperbole $c^2 = a^2 + b^2$.

Nella derivazione abbiamo elevato al quadrato due volte, e sai dal capitolo 2 che elevare al quadrato può aggiungere soluzioni. Dobbiamo quindi controllare il viceversa: ogni punto che soddisfa l'equazione canonica appartiene davvero al luogo. Se $P(x;\, y)$ soddisfa l'equazione, allora $y^2 = b^2x^2/a^2 - b^2$ e, con $b^2 = c^2 - a^2$, un calcolo diretto dà

$$PF_2{}^2 = (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2, \quad PF_1{}^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2.$$

Dall'equazione segue $x^2 \geq a^2$, cioè $|x| \geq a$, e quindi $\left|\frac{c}{a}x\right| \geq c > a$. Per $x \geq a$ le due espressioni tra parentesi sono positive, perciò $PF_1 - PF_2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right) - \left(\frac{c}{a}x - a\right) = 2a$; per $x \leq -a$ sono entrambe negative e si ottiene $PF_2 - PF_1 = 2a$. I punti dell'equazione sono dunque *tutti e soli* i punti del luogo. c.v.d.

10.1.3 Vertici, assi e simmetrie

Dall'equazione canonica leggiamo subito le proprietà della curva (Figura 10.2).

- **Simmetrie.** Nell'equazione x e y compaiono solo al quadrato: se $(x;\, y)$ è un punto della curva, lo sono anche $(-x;\, y)$, $(x;\, -y)$ e $(-x;\, -y)$. L'iperbole è simmetrica rispetto ai due assi cartesiani e rispetto all'origine.

- **Intersezioni con gli assi.** Per $y = 0$ si ha $x = \pm a$: i punti $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono i **vertici** dell'iperbole. Per $x = 0$ si avrebbe $y^2 = -b^2$: la curva non taglia l'asse y.
- **Estensione.** Poiché $x^2/a^2 = 1 + y^2/b^2 \geq 1$, ogni punto della curva ha $|x| \geq a$: nella striscia $-a < x < a$ non ci sono punti. Invece y può assumere qualsiasi valore.
- **Assi.** Il segmento A_1A_2, lungo $2a$, è l'**asse trasverso** e a è il semiasse trasverso. I punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ *non* appartengono alla curva; il segmento B_1B_2, lungo $2b$, si chiama **asse non trasverso**, e b è il semiasse non trasverso.

Il rettangolo che ha i lati paralleli agli assi e passa per A_1, A_2, B_1, B_2, con i vertici nei punti $(\pm a; \pm b)$, si chiama **rettangolo fondamentale**. La sua semidiagonale misura $\sqrt{a^2 + b^2} = c$: la circonferenza con centro O che passa per i vertici del rettangolo passa anche per i fuochi. Con il rettangolo, riga e compasso, dati a e b si trovano subito i fuochi.

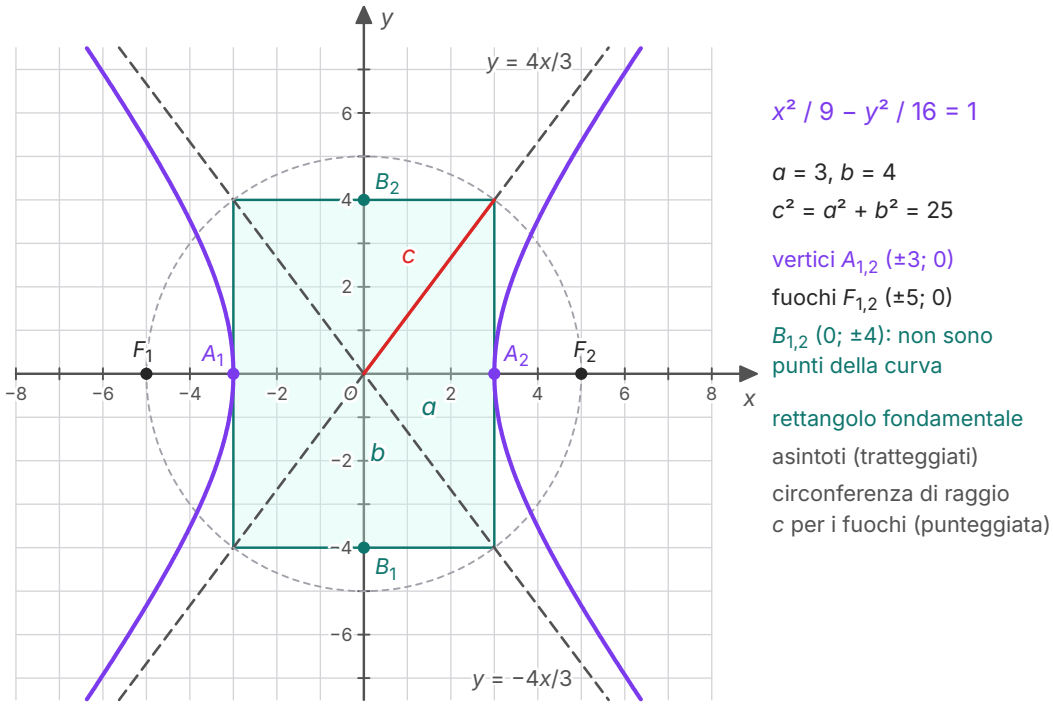


Figura 10.2 Gli elementi dell'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$: vertici A_1 e A_2, punti B_1 e B_2 dell'asse non trasverso, rettangolo fondamentale, asintoti (le rette delle sue diagonali) e fuochi sulla circonferenza di raggio $c = 5$.

10.2 Asintoti ed eccentricità

10.2.1 Gli asintoti

Nella Figura 10.2 i due rami, allontanandosi dal centro, sembrano appoggiarsi alle rette delle diagonali del rettangolo fondamentale, $y = \pm\frac{b}{a}x$. Vediamo perché. Ricaviamo y dall'equazione canonica: per il ramo destro, nel primo quadrante, si ha

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

Confrontiamola con la retta $y = \frac{b}{a}x$. Poiché $\sqrt{x^2 - a^2} < x$, il punto della curva sta sempre *sotto* il punto della retta con la stessa ascissa. La distanza verticale tra i due punti è

$$d(x) = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ (è la stessa razionalizzazione dei radicali del primo biennio). Il numeratore ab è fisso, il denominatore cresce senza limite al crescere di x: la distanza diventa piccola quanto vogliamo, ma non è mai zero. La Tabella 10.1 lo mostra con i numeri.

Tabella 10.1 Ordinata della retta $y = \frac{4}{3}x$ e del ramo dell'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ nel primo quadrante, e distanza verticale $d(x)$ tra i due punti (valori arrotondati).

x	retta $\frac{4}{3}x$	iperbole $\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$	$d(x)$
3	4	0	4
5	6,667	5,333	1,333
10	13,333	12,719	0,614
30	40,000	39,799	0,201
100	133,333	133,273	0,060
1000	1333,333	1333,327	0,006

Per simmetria lo stesso accade negli altri quadranti, con la retta $y = -\frac{b}{a}x$ nel secondo e nel quarto. Le due rette $y = \pm\frac{b}{a}x$ si chiamano **asintoti** dell'iperbole: rette a cui la curva si avvicina

indefinitamente, allontanandosi dal centro, senza mai incontrarle. In questo corso usiamo la parola in senso intuitivo; la definizione precisa, con il concetto di limite, è un argomento del quinto anno.

Gli asintoti sono una guida preziosa per disegnare: si traccia il rettangolo fondamentale, si prolungano le diagonali, si segnano i vertici e si disegnano i rami, che partono dai vertici perpendicolari all'asse x e poi si accostano alle diagonali.

10.2.2 L'eccentricità

Anche per l'iperbole si definisce l'eccentricità come rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse trasverso:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

Per l'ellisse era $0 \le e < 1$; per l'iperbole, poiché $c > a$, è sempre $e > 1$. L'ultima uguaglianza lega l'eccentricità alla pendenza degli asintoti: $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$. Se e è appena maggiore di 1, gli asintoti sono quasi orizzontali e i rami molto stretti; al crescere di e gli asintoti si raddrizzano e i rami si aprono (Figura 10.3). Il caso $e = \sqrt{2}$, cioè $b = a$, avrà un ruolo speciale nel paragrafo sull'iperbole equilatera.

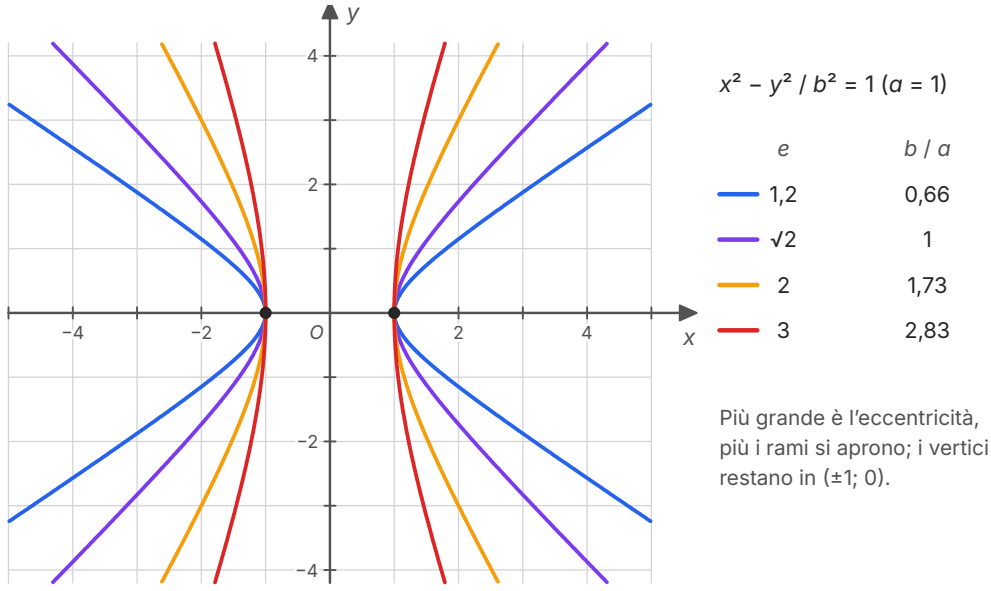


Figura 10.3 Iperboli con lo stesso semiasse trasverso $a = 1$ e diverse eccentricità: $e = 1{,}2;\ \sqrt{2};\ 2;\ 3$. Al crescere di e cresce $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ e i rami si aprono.

10.2.3 Iperbole con i fuochi sull'asse y

Se i fuochi stanno sull'asse y, in $F_{1,2}(0;\pm c)$, gli stessi passaggi (con i ruoli di x e y scambiati) portano all'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,\quad \text{cioè}\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\quad \text{con } c^2=a^2+b^2.$$

Ora i vertici sono $(0;\pm b)$ e stanno sull'asse y: l'asse trasverso è il segmento di estremi $(0;-b)$ e $(0;b)$, lungo $2b$, e la curva non taglia l'asse x. L'eccentricità è il rapporto tra c e il semiasse trasverso, quindi qui $e=c/b$. Gli asintoti invece *non cambiano*: ricavando y si trova di nuovo che la curva si avvicina alle rette $y=\pm\frac{b}{a}x$. Le due iperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, che hanno lo stesso rettangolo fondamentale e gli stessi asintoti, si dicono **iperboli coniugate**.

ERRORE FREQUENTE

Usare le formule dell'ellisse. Per l'iperbole $c^2=a^2+b^2$ (non a^2-b^2), e non è affatto detto che sia $a>b$: in $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ il semiasse trasverso è 2 e l'altro è 5. Che cosa fa da semiasse trasverso lo decide il *segno*, non la grandezza dei denominatori: il termine positivo indica l'asse su cui stanno vertici e fuochi.

Sbagliare gli asintoti dell'iperbole con fuochi sull'asse *y*. Per $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ gli asintoti sono ancora $y=\pm\frac{4}{3}x$: si ottengono sempre ponendo uguale a zero il primo membro, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0$, qualunque sia il segno del secondo.

10.2.4 Determinare l'equazione

L'equazione canonica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ contiene due parametri, a^2 e b^2: servono due condizioni indipendenti. Possono essere i vertici, i fuochi, l'eccentricità, gli asintoti, il passaggio per un punto. Quando le condizioni sono passaggi per punti conviene prendere come incognite $u=\frac{1}{a^2}$ e $v=\frac{1}{b^2}$: le equazioni diventano lineari.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi in $F_1(-4;\,0)$ e $F_2(4;\,0)$ e passa per $P(4;\,6)$; trova poi l'eccentricità e gli asintoti.

Con la definizione. $PF_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ e $PF_2 = 6$ (il punto sta sulla verticale di F_2). Quindi $2a = |10 - 6| = 4$, $a = 2$, e $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$. L'equazione è $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Con l'equazione. Da $c = 4$: $a^2 + b^2 = 16$; dal passaggio per P: $\frac{16}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1$. Sostituendo $b^2 = 16 - a^2$ e moltiplicando per $a^2(16 - a^2)$ si ottiene $16(16 - a^2) - 36a^2 = a^2(16 - a^2)$, cioè $a^4 - 68a^2 + 256 = 0$, con soluzioni $a^2 = 4$ e $a^2 = 64$. La seconda va scartata perché darebbe $b^2 = -48 < 0$ (e infatti $a = 8 > c$). Ritroviamo $a^2 = 4$, $b^2 = 12$.

Elementi. $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$; $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$, quindi gli asintoti sono $y = \pm\sqrt{3}x$. Il primo metodo è più rapido perché sfrutta la proprietà che definisce la curva: un esempio della differenza tra ragionamento sintetico e analitico.

10.3 Retta e iperbole

10.3.1 Le posizioni di una retta

Per trovare i punti comuni a una retta e a un'iperbole si risolve il sistema delle due equazioni. Sostituendo l'equazione della retta in quella dell'iperbole si ottiene l'equazione risolvente, che *di solito* è di secondo grado. Ma per l'iperbole c'è un caso nuovo, che per la circonferenza e per l'ellisse non si presentava: il coefficiente di x^2 può annullarsi.

Prendiamo la retta $y = mx + q$ e l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Moltiplicando per a^2b^2 e sostituendo:

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mqx - a^2(q^2 + b^2) = 0.$$

Il coefficiente di x^2 è zero se e solo se $m = \pm\frac{b}{a}$, cioè se la retta è *parallela a un asintoto*. In quel caso l'equazione diventa di primo grado, $-2a^2mqx = a^2(q^2 + b^2)$: se $q \neq 0$ ha esattamente una soluzione, se $q = 0$ (la retta è l'asintoto stesso) non ne ha nessuna. Una retta parallela a un asintoto, diversa dall'asintoto, incontra quindi l'iperbole in *un solo punto*, e attraversa la curva: non è tangente. Se invece $m \neq \pm\frac{b}{a}$, l'equazione è di secondo grado e decide il discriminante, come già sai:

IN SINTESI

Retta $y = mx + q$ e iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

- $m = \pm\frac{b}{a}$ (retta parallela a un asintoto): un solo punto comune se la retta non è l'asintoto, nessuno se lo è;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta > 0$: retta **secante**, due punti comuni;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta = 0$: retta **tangente**, un punto comune contato due volte;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta < 0$: retta **esterna**, nessun punto comune.

Le rette verticali $x = k$ sono secanti se $|k| > a$, tangenti nei vertici se $|k| = a$, esterne se $|k| < a$.

Una retta secante può incontrare lo stesso ramo in due punti oppure ciascun ramo in un punto. Un caso semplice: le rette per il centro, $y = mx$. Sostituendo si ha $(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2$, che ha due soluzioni opposte se $b^2 - a^2m^2 > 0$, cioè $|m| < \frac{b}{a}$, e nessuna altrimenti: una retta per il centro taglia l'iperbole (un punto per ramo) solo se è «meno ripida» degli asintoti.

10.3.2 Le tangenti

Per le rette tangenti valgono i due metodi dei capitoli precedenti. Le **tangenti da un punto** P_0 si cercano nel fascio di rette per P_0, imponendo $\Delta = 0$ all'equazione risolvente; il punto può dare due, una o nessuna tangente. La **tangente in un punto** $P_0(x_0; y_0)$ della curva si scrive più rapidamente con la formula di sdoppiamento, che hai già usato per la parabola, la circonferenza e l'ellisse: in x^2 si sostituisce x_0x, in y^2 si sostituisce y_0y.

La retta tangente all'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nel suo punto $P_0(x_0; y_0)$ ha quindi equazione

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

e per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ il secondo membro è -1.

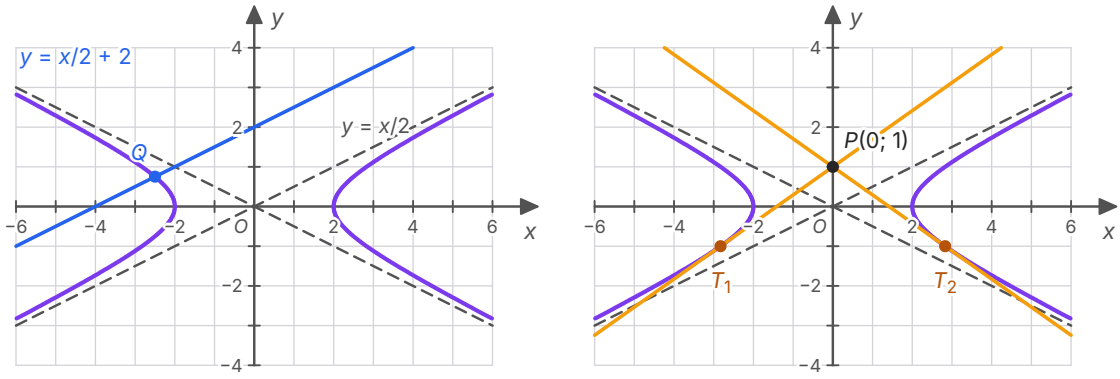
ESEMPIO SVOLTO

Problema. Data l'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, a) studia la posizione della retta $y = \frac{x}{2} + 2$; b) trova le tangenti condotte dal punto $P(0; 1)$ e i punti di tangenza.

a) Qui $a = 2$, $b = 1$ e gli asintoti sono $y = \pm\frac{x}{2}$: la retta è parallela a un asintoto. Moltiplicando l'equazione dell'iperbole per 4: $x^2 - 4y^2 = 4$; sostituendo, $x^2 - 4(\frac{x}{2} + 2)^2 = 4$, cioè $x^2 - x^2 - 8x - 16 = 4$. I termini in x^2 si cancellano: $x = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{4}$. Un solo punto comune, $Q(-\frac{5}{2}; \frac{3}{4})$, ma la retta non è tangente: passa dall'interno di un ramo all'esterno (Figura 10.4, a sinistra). Verifica: $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

b) Le rette per P non verticali sono $y = mx + 1$ (la retta $x = 0$ non incontra la curva). Sostituendo: $x^2 - 4(mx + 1)^2 = 4$, cioè $(1 - 4m^2)x^2 - 8mx - 8 = 0$. Escludiamo $m = \pm\frac{1}{2}$ (rette parallele agli asintoti, che non sono tangenti) e imponiamo $\frac{\Delta}{4} = 16m^2 + 8(1 - 4m^2) = 8 - 16m^2 = 0$: $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le tangenti sono $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$.

Con $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ l'equazione diventa $-x^2 - 4\sqrt{2}x - 8 = 0$, cioè $(x + 2\sqrt{2})^2 = 0$: tangenza in $T_1(-2\sqrt{2}; -1)$; per simmetria l'altra tangente tocca la curva in $T_2(2\sqrt{2}; -1)$. Controllo con lo sdoppiamento in T_2: $\frac{2\sqrt{2}\,x}{4} - (-1)y = 1$, cioè $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$: coincide.



una sola intersezione, senza tangenza

le due tangenti da P

Figura 10.4 L'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ e i suoi asintoti $y = \pm\frac{x}{2}$. A sinistra, la retta $y = \frac{x}{2} + 2$, parallela a un asintoto, incontra la curva nel solo punto Q senza esserle tangente. A destra, le due tangenti condotte da $P(0; 1)$, con i punti di tangenza T_1 e T_2.

APPROFONDIMENTO · LA PROPRIETÀ FOCALE DELL'IPERBOLE

Si dimostra che la tangente all'iperbole in un punto P è la bisettrice dell'angolo F_1PF_2. Verifichiamolo su un esempio. Per l'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ e il suo punto $P(6; 4\sqrt{3})$ della Figura 10.1, il teorema della bisettrice dice che la bisettrice dell'angolo in P del triangolo F_1PF_2 divide il lato F_1F_2 in parti proporzionali a $PF_1 = 13$ e $PF_2 = 7$: taglia l'asse x nel punto D con $F_1D : DF_2 = 13 : 7$, cioè $D(\frac{3}{2}; 0)$. La tangente in P, per sdoppiamento, è $\frac{6x}{9} - \frac{4\sqrt{3}\,y}{16} = 1$, e per $y = 0$ dà proprio $x = \frac{3}{2}$.

La conseguenza fisica: un raggio di luce diretto verso uno dei fuochi che, prima di raggiungerlo, incontra dalla parte convessa uno specchio a forma del ramo d'iperbole che circonda quel fuoco, viene riflesso verso l'altro fuoco. Per questo molti telescopi riflettori, come quelli di tipo Cassegrain, usano uno specchio primario parabolico e uno secondario iperbolico: la luce raccolta dal primo converge verso il suo fuoco, ma il secondo, che ha un fuoco in comune con il primario, la rimanda verso il secondo fuoco, dietro lo specchio principale, dove si osserva l'immagine.

10.4 L'iperbole equilatera

10.4.1 Asintoti perpendicolari

Un'iperbole con i semiassi uguali, $a = b$, si chiama **iperbole equilatera**. La sua equazione canonica è

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{(oppure } x^2 - y^2 = -a^2 \text{ con i fuochi sull'asse } y\text{)}.$$

Il rettangolo fondamentale è un quadrato, gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, $y = x$ e $y = -x$, e quindi sono *perpendicolari*. Viceversa, se gli asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$ sono perpendicolari, il prodotto dei coefficienti angolari è -1: $-b^2/a^2 = -1$, cioè $b = a$. Inoltre $c^2 = 2a^2$, $c = a\sqrt{2}$ e l'eccentricità è $e = \sqrt{2}$ per ogni iperbole equilatera: tutte le iperboli equilatere hanno la stessa forma e differiscono solo per la scala, come tutte le circonferenze.

10.4.2 L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

Poiché gli asintoti sono perpendicolari, viene naturale usarli come assi cartesiani. Invece di cambiare il riferimento, ruotiamo la curva: la rotazione di $45°$ in senso antiorario intorno all'origine porta l'asintoto $y = -x$ sull'asse x e l'asintoto $y = x$ sull'asse y. Ricordando dal volume dello scorso anno che $\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la rotazione manda il punto $(x; y)$ nel punto $(x'; y')$ con

$$x' = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

Si controlla facilmente su qualche punto: $(1; 0)$ va in $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, sulla bisettrice del primo quadrante, alla stessa distanza 1 dall'origine; $(1; -1)$ va in $(\sqrt{2}; 0)$. Ora basta moltiplicare: $x'y' = \frac{(x-y)(x+y)}{2} = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Se $(x; y)$ sta sull'iperbole $x^2 - y^2 = a^2$, il punto ruotato soddisfa $x'y' = \frac{a^2}{2}$. Rinominando le coordinate:

IN SINTESI

L'**iperbole equilatera riferita agli asintoti** ha equazione

$$xy = k, \quad k \neq 0, \quad \text{con } |k| = \frac{a^2}{2}.$$

Gli asintoti sono gli assi cartesiani. Se $k > 0$ i rami stanno nel primo e nel terzo quadrante, i vertici sono $(\sqrt{k}; \sqrt{k})$ e $(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$ e i fuochi stanno sulla bisettrice $y = x$ a distanza $c = a\sqrt{2} = 2\sqrt{k}$ dall'origine. Se $k < 0$ (rotazione in senso orario) i rami stanno nel secondo e nel quarto quadrante, e vertici e fuochi sulla bisettrice $y = -x$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova vertici, fuochi e asintoti dell'iperbole $xy = 4$ e verifica la definizione di iperbole sul suo punto $P(1; 4)$.

Soluzione. $k = 4 > 0$: rami nel primo e nel terzo quadrante, asintoti gli assi cartesiani. Da $a^2/2 = 4$ si ha $a^2 = 8$, $a = 2\sqrt{2}$: è l'iperbole $x^2 - y^2 = 8$ ruotata di 45° (Figura 10.5). I vertici stanno su $y = x$ e sulla curva: $x^2 = 4$, quindi $(2; 2)$ e $(-2; -2)$; la loro distanza dall'origine è $2\sqrt{2} = a$, come deve essere. Poi $c = a\sqrt{2} = 4$: i fuochi sono i punti di $y = x$ a distanza 4 dall'origine, $F_1(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ e $F_2(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Verifica. Le distanze di P dai fuochi sono

$$PF_2 = \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2 + (4 - 2\sqrt{2})^2} \approx \sqrt{3{,}343 + 1{,}373} \approx 2{,}172,$$

$$PF_1 = \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2 + (4 + 2\sqrt{2})^2} \approx \sqrt{14{,}657 + 46{,}627} \approx 7{,}828.$$

La differenza è circa 5,657, cioè $4\sqrt{2} = 2a$ (con il calcolo esatto si ottiene proprio $4\sqrt{2}$).

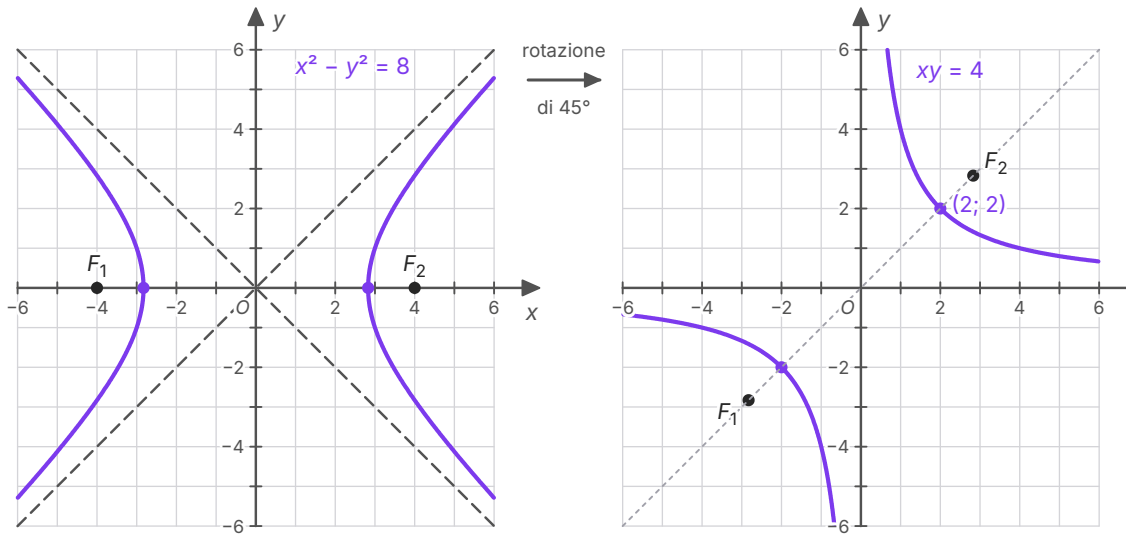


Figura 10.5 A sinistra, l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 8$ con gli asintoti $y = \pm x$ e i fuochi $(\pm 4; 0)$. A destra, la stessa curva ruotata di 45° in senso antiorario: l'iperbole $xy = 4$, che ha come asintoti gli assi, vertici $(2; 2)$ e $(-2; -2)$, fuochi sulla bisettrice $y = x$.

Scritta come $y = k/x$, l'equazione $xy = k$ è la proporzionalità inversa che conosci dal primo anno: due grandezze sono inversamente proporzionali quando il loro prodotto è costante. Nel primo volume abbiamo chiamato il suo grafico iperbole equilatera; ora sappiamo che il nome è esatto: è un'iperbole equilatera a tutti gli effetti, con fuochi, vertici e asintoti.

DA RICORDARE

Ellisse e iperbole a confronto (fuochi sull'asse x): somma costante $PF_1 + PF_2 = 2a$ contro differenza costante $|PF_1 - PF_2| = 2a$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contro $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $c^2 = a^2 - b^2$ contro $c^2 = a^2 + b^2$; $e < 1$ contro $e > 1$; curva chiusa e limitata contro curva illimitata in due rami, con due asintoti. Formula di sdoppiamento e metodo del discriminante funzionano allo stesso modo, ma per l'iperbole bisogna escludere a parte le rette parallele agli asintoti.

10.5 Funzione omografica e iperbole traslata

10.5.1 La funzione omografica

Si chiama **funzione omografica** una funzione del tipo

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

Il dominio è $x \neq -d/c$. Per capire il grafico eseguiamo la divisione del numeratore per il denominatore: $ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + b - \frac{ad}{c}$, quindi

$$y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}, \quad \text{con} \quad k = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Posto $x_0 = -\frac{d}{c}$ e $y_0 = \frac{a}{c}$, la funzione è $y - y_0 = k/(x - x_0)$: per il capitolo 3 il suo grafico si ottiene da quello di $y = k/x$ con la traslazione di vettore $(x_0; y_0)$. Il grafico di una funzione omografica è quindi un'iperbole equilatera traslata, con *centro* $C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ e asintoti paralleli agli assi: l'asintoto verticale $x = -\frac{d}{c}$ (dove si annulla il denominatore) e l'asintoto orizzontale $y = \frac{a}{c}$ (il rapporto dei coefficienti di x).

Le due condizioni escludono i **casi degeneri**. Se $c = 0$ (e $d \neq 0$), la funzione è $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$: una retta. Se $ad - bc = 0$, allora $k = 0$ e la funzione è costante, $y = a/c$, per ogni x del dominio: il grafico è una retta orizzontale *privata del punto* di ascissa $-d/c$. Per esempio $y = \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2}$ vale 2 per ogni $x \neq -2$.

ESEMPIO SVOLTO

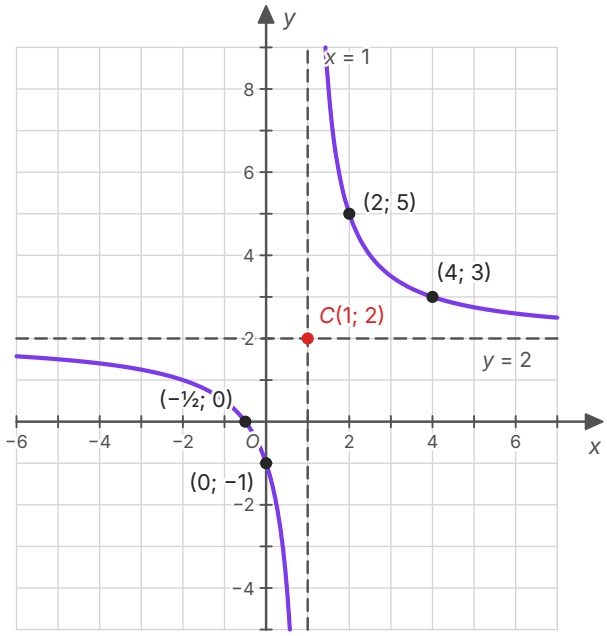
Problema. Studia e disegna la funzione $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Controllo. $c = 1 \neq 0$ e $ad - bc = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$: è un'iperbole. Dominio: $x \neq 1$.

Centro e asintoti. $C(1; 2)$; asintoti $x = 1$ e $y = 2$. Dividendo: $y = 2 + \frac{3}{x-1}$, cioè $(x - 1)(y - 2) = 3$: l'iperbole equilatera $XY = 3$ traslata di vettore $(1; 2)$, con $k = 3 > 0$ e i rami nei «quadranti» primo e terzo rispetto al centro.

Intersezioni con gli assi. $y = 0$ per $2x + 1 = 0$: $(-\frac{1}{2}; 0)$; $x = 0$ dà $y = -1$: $(0; -1)$. Altri punti: $(2; 5)$, $(4; 3)$, $(-2; 1)$, simmetrico di $(4; 3)$ rispetto al centro.

Immagine e monotonia. L'equazione $y = 2$ non ha soluzioni $(3/(x - 1) \neq 0)$: l'immagine è $y \neq 2$. La funzione è decrescente in $]-\infty; 1[$ e decrescente in $]1; +\infty[$, ma *non* è decrescente nel suo dominio: $f(0) = -1 < f(2) = 5$ benché $0 < 2$. Il grafico è nella Figura 10.6.



$y = (2x + 1) / (x - 1)$

$= 2 + 3 / (x - 1)$

centro $C(1; 2)$

asintoti $x = 1$ e $y = 2$

È l'iperbole equilatera $xy = 3$ traslata con vettore $(1; 2)$.

Figura 10.6 Il grafico della funzione omografica $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$: un'iperbole equilatera con centro $C(1; 2)$ e asintoti $x = 1$ e $y = 2$.

La funzione omografica è biiettiva tra $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ e $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, quindi è invertibile (capitolo 3). Ricavando x da $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ si trova $x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$: l'inversa di una funzione omografica è ancora una funzione omografica. Il grafico dell'inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$, e infatti il centro $(-d/c; a/c)$ va nel centro $(a/c; -d/c)$.

Il grafico aiuta anche a risolvere disequazioni fratte. Per esempio $\dfrac{2x+1}{x-1} > 2$ chiede dove il grafico della Figura 10.6 sta sopra l'asintoto orizzontale: sul ramo destro, cioè per $x > 1$; algebricamente, $\dfrac{2x+1}{x-1} - 2 = \dfrac{3}{x-1} > 0$ per $x > 1$.

10.5.2 L'iperbole traslata

Più in generale, la traslazione di vettore $(x_0; y_0)$ trasforma l'iperbole canonica nell'**iperbole traslata**

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1,$$

con centro $C(x_0; y_0)$, assi di simmetria $x = x_0$ e $y = y_0$, asintoti $y - y_0 = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)$. Vertici e fuochi si ottengono traslando quelli dell'iperbole canonica. Sviluppando i quadrati si arriva a un'equazione del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \text{con } A \text{ e } B \text{ discordi},$$

e, viceversa, un'equazione di questo tipo si riconosce completando i quadrati, come per l'ellisse traslata (dove A e B erano concordi). Bisogna però fare attenzione al termine noto finale: se, dopo aver completato i quadrati, il secondo membro è zero, l'equazione è $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = 0$ con A, B discordi, che si scompone in due rette per C: un'iperbole *degenere*, formata dai soli asintoti.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Riconosci la curva $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ e trovane gli elementi.

Completiamo i quadrati. $4(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) = 29$; aggiungiamo 4 dentro la prima parentesi e 1 dentro la seconda: al primo membro abbiamo così aggiunto 16 e tolto 9, e facciamo lo stesso al secondo: $4(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 29 + 16 - 9 = 36$. Dividendo per 36:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Elementi. È un'iperbole traslata con centro $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, fuochi sulla retta $y = -1$. Vertici $(2 \pm 3; -1)$, cioè $(-1; -1)$ e $(5; -1)$; fuochi $(2 \pm \sqrt{13}; -1)$; eccentricità $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3} \approx 1{,}20$; asintoti $y + 1 = \pm\dfrac{2}{3}(x - 2)$, cioè $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{3}$ e $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. Controllo: il vertice $(5; -1)$ soddisfa l'equazione data, $100 - 9 - 80 + 18 - 29 = 0$.

10.6 L'iperbole nelle scienze e nella tecnica

10.6.1 La legge di Boyle

Una quantità fissata di gas, mantenuta a temperatura costante, segue con buona approssimazione la *legge di Boyle*, studiata nel Seicento dal fisico e chimico Robert Boyle, nato in Irlanda: la pressione p e il volume V sono inversamente proporzionali,

$$pV = k \quad (k \text{ costante, a temperatura costante}).$$

Nel piano con il volume in ascissa e la pressione in ordinata, gli stati possibili del gas stanno su un ramo di iperbole equilatera riferita agli asintoti (solo il ramo con $V > 0$ e $p > 0$ ha senso fisico). Questa curva si chiama isoterma. Il modello mostra anche i suoi limiti: matematicamente, comprimendo il volume verso zero la pressione dovrebbe crescere senza limite; in realtà, a

pressioni molto alte o vicino alla liquefazione, i gas reali si allontanano dalla legge di Boyle. È un esempio di un'idea che ritroverai spesso: un modello vale in un dominio di validità.

10.6.2 Navigare con le iperboli

Due stazioni radio A e B, in posizioni note, trasmettono segnali sincronizzati. Una nave riceve i due segnali e misura la *differenza* dei tempi di arrivo. Poiché le onde radio viaggiano a velocità nota (circa 300 000 km/s), la differenza dei tempi dà la differenza delle distanze della nave dalle due stazioni: la nave si trova quindi su un ramo dell'iperbole che ha i fuochi nelle stazioni. Con una seconda coppia di stazioni si ottiene una seconda iperbole, e la posizione della nave è un punto di intersezione delle due curve. Su questo principio funzionava il sistema LORAN (dall'inglese *LOng RAnge Navigation*), sviluppato negli Stati Uniti durante la seconda guerra mondiale e usato poi per decenni nella navigazione marittima e aerea.

Vediamo con i numeri come funziona. Supponiamo che le stazioni distino 100 km e che la nave riceva il segnale di B 100 microsecondi prima di quello di A. In un microsecondo le onde radio percorrono circa 0,3 km, quindi la nave è circa 30 km più vicina a B che ad A: si trova sul ramo, dalla parte di B, dell'iperbole con i fuochi nelle due stazioni e $2a = 30$ km. Una differenza di tempo nulla corrisponderebbe invece all'asse del segmento AB, il caso «degenere» in cui le due distanze sono uguali. Nota che una sola misura non basta: individua una curva, non un punto. Servono due curve, e quindi due coppie di stazioni; i due rami possono incontrarsi in due punti, e allora si sceglie quello compatibile con la rotta. Un problema degli esercizi completa il calcolo.

10.6.3 Sintetico e analitico, ancora una volta

In questo capitolo abbiamo usato spesso due strade. La definizione come luogo, che lavora con distanze e triangoli, è il punto di vista *sintetico*: ci ha dato in una riga l'equazione dell'iperbole per $P(4; 6)$, perché bastava misurare due distanze, e ci ha spiegato perché deve essere $2a < 2c$ (la disuguaglianza triangolare). L'equazione canonica è il punto di vista *analitico*: è meno intuitiva, ma trasforma ogni domanda in un calcolo che si può fare sempre, anche quando non si vede la strada geometrica, come per le tangenti condotte da un punto o per riconoscere una curva da un'equazione con i quadrati da completare. La proprietà focale dell'Approfondimento mostra l'incontro delle due strade: il teorema della bisettrice, sintetico, e la formula di sdoppiamento, analitica, danno lo stesso punto. Nel prossimo capitolo, con le sezioni del cono, il confronto tra i due approcci diventerà esplicito.

COLLEGAMENTI

Astronomia: le orbite iperboliche. Nel capitolo precedente hai visto che i pianeti percorrono ellissi con il Sole in un fuoco (prima legge di Keplero). La teoria della gravitazione di Newton, che studierai in fisica, prevede anche un altro caso: un corpo che arriva da molto lontano con velocità sufficientemente grande non viene catturato, ma descrive un ramo di iperbole con il Sole in un fuoco, si avvicina, gira intorno al Sole e si allontana per sempre lungo una direzione vicina all'altro asintoto. Il primo oggetto interstellare osservato, scoperto il 19 ottobre 2017 dal telescopio Pan-STARRS 1 alle Hawaii e chiamato ʻOumuamua, percorre un'orbita di questo tipo, con eccentricità circa 1,20.

Chimica e fisica: le isoterme. Il grafico della legge di Boyle è un ramo d'iperbole equilatera; il prodotto pV è uguale per tutti i punti dell'isoterma, ed è per questo che il rettangolo con vertici O, $(V; 0)$, $(V; p)$ e $(0; p)$ ha la stessa area per tutti i punti della curva.

Anche in economia compaiono funzioni omografiche. Se un'azienda ha un costo fisso di 2000 € e ogni pezzo prodotto costa 5 €, il costo medio per pezzo quando si producono x pezzi è $C(x) = \dfrac{5x + 2000}{x} = 5 + \dfrac{2000}{x}$: un ramo di iperbole con asintoto orizzontale $y = 5$. Al crescere della produzione il costo fisso si «spalma» su più pezzi e il costo medio si avvicina al costo di un singolo pezzo, senza mai raggiungerlo (dati inventati).

SINTESI

- L'iperbole è il luogo dei punti P con $|PF_1 - PF_2| = 2a$, dove $0 < 2a < 2c = F_1F_2$; è formata da due rami.
- Con i fuochi in $(\pm c; 0)$ l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 + b^2$; vertici $(\pm a; 0)$, nessun punto con $|x| < a$.
- Gli asintoti $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono le rette delle diagonali del rettangolo fondamentale; la curva vi si avvicina indefinitamente senza toccarli.
- L'eccentricità è $e = c/a > 1$; vale $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$: più e è grande, più i rami sono aperti.
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ è l'iperbole coniugata, con i fuochi sull'asse y e gli stessi asintoti.
- Una retta parallela a un asintoto (diversa da esso) incontra l'iperbole in un solo punto e non è tangente; negli altri casi decide il discriminante dell'equazione risolvente.
- La tangente in $P_0(x_0; y_0)$ si ottiene per sdoppiamento: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.
- L'iperbole equilatera ha $a = b$, asintoti perpendicolari ed $e = \sqrt{2}$; riferita agli asintoti ha equazione $xy = k$, con $|k| = a^2/2$: è il grafico della proporzionalità inversa.
- La funzione omografica $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, ha per grafico un'iperbole equilatera con centro $(-d/c; a/c)$ e asintoti paralleli agli assi.
- Un'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con A, B discordi rappresenta, completando i quadrati, un'iperbole traslata oppure, nel caso degenere, una coppia di rette.
- L'iperbole descrive la legge di Boyle, il principio della radionavigazione a differenza di tempi e le orbite dei corpi non catturati dal Sole.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● I fuochi dell'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ sono:

   A. $(\pm\sqrt{7}; 0)$
   B. $(\pm 5; 0)$
   C. $(0; \pm 5)$
   D. $(\pm 4; 0)$

2. ● Gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ sono:

   A. $y = \pm\frac{2}{5}x$

   B. $y = \pm\frac{25}{4}x$

   C. $y = \pm\frac{5}{2}x$

   D. $x = \pm 2$

3. ●● L'eccentricità dell'iperbole $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ è:

   A. $\sqrt{2}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. $\sqrt{3}$

   D. 2

4. ●● Quale di queste equazioni rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse y?

   A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$

   B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

   C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

   D. $x^2 - y^2 = 1$

5. ●● Il centro della funzione omografica $y = \frac{3x-1}{x+2}$ è:

   A. $(2; 3)$

   B. $(-2; -\frac{1}{2})$

   C. $(-2; 3)$

   D. $(3; -2)$

6. ●● La retta $y = 2x + 1$ e l'iperbole $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$:

   A. sono tangenti

   B. hanno un solo punto comune, ma la retta non è tangente

   C. hanno due punti comuni

   D. non hanno punti comuni

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) In un'iperbole il semiasse trasverso è sempre maggiore dell'altro semiasse. b) Per l'iperbole vale $c^2 = a^2 + b^2$. c) Le iperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ hanno gli stessi asintoti. d) Ogni retta per il centro di un'iperbole la interseca in due punti. e) I rami dell'iperbole $xy = -3$ stanno nel secondo e nel quarto quadrante.

8. ● Completa. a) L'iperbole è il luogo dei punti per i quali è costante _____ delle distanze da due punti fissi. b) Un'iperbole equilatera ha eccentricità _____ e asintoti _____ tra loro. c) Il grafico di $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ è un'iperbole se _____ e _____ .

Calcolare

9. ● Per ciascuna iperbole trova vertici, fuochi, asintoti ed eccentricità. a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; b) $9x^2 - 16y^2 = 144$; c) $x^2 - \frac{y^2}{8} = -1$.

10. ● Scrivi l'equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x che ha: a) vertici $(\pm 3; 0)$ e fuochi $(\pm 5; 0)$; b) semiasse trasverso 2 e asintoti $y = \pm \frac{3}{2}x$; c) fuochi $(\pm\sqrt{10}; 0)$ ed eccentricità $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

11. ●● Scrivi l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ che passa per i punti $(2\sqrt{2}; 3)$ e $(2\sqrt{5}; 6)$.

12. ●● Un'iperbole ha i fuochi in $(\pm 3; 0)$ e passa per $P(3; \frac{5}{2})$. Trova la sua equazione in due modi: con la definizione (calcola PF_1 e PF_2) e con l'equazione canonica.

13. ●● Gli asintoti di un'iperbole sono $y = \pm \frac{1}{2}x$. Scrivi la sua equazione sapendo che passa: a) per $(4; 1)$; b) per $(2; 2)$. In quale dei due casi i fuochi stanno sull'asse y? (Suggerimento: tutte queste iperboli hanno equazione $x^2 - 4y^2 = h$, con $h \neq 0$.)

14. ●● Studia la posizione rispetto all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ delle rette: a) $y = x - 1$; b) $y = \frac{2}{3}x + 1$; c) $y = 2x$; d) $y = x + \sqrt{5}$. Trova gli eventuali punti comuni.

15. ●● Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ nel suo punto $(4; 6)$, prima con la formula di sdoppiamento e poi verificando che il sistema retta-iperbole ha una sola soluzione doppia.

16. ●● Trova le tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ condotte dal punto $P(1; 0)$ e i punti di tangenza.

17. ●● a) Trova vertici, fuochi e asintoti dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 9$ e scrivi l'equazione $xy = k$ della curva ottenuta ruotandola di 45° in senso antiorario. b) Trova vertici e fuochi dell'iperbole $xy = -8$.

18. ●● Per ciascuna funzione verifica che il grafico è un'iperbole (o spiega perché non lo è), trova dominio, centro, asintoti e intersezioni con gli assi. a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$; b) $y = \dfrac{2x-4}{x-2}$; c) $y = \dfrac{4-2x}{x+1}$.

19. ●● Riconosci le curve, completando i quadrati, e trova centro, vertici e fuochi quando si tratta di iperboli. a) $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$; b) $4x^2 - y^2 + 8x + 2y + 7 = 0$; c) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che i fuochi dell'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ stanno sulla circonferenza con centro nell'origine che passa per i vertici del rettangolo fondamentale.

21. ●● Dimostra che gli asintoti di un'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ sono perpendicolari se e solo se $a = b$, e che in questo caso l'eccentricità vale $\sqrt{2}$.

22. ●● Trova l'errore. «La retta $y = 2x + 1$ ha in comune con l'iperbole $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$ un solo punto; quindi è tangente all'iperbole in quel punto.»

23. ●●● Dimostra che il prodotto delle distanze di un punto qualsiasi dell'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dai due asintoti è costante, e vale $\dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$. (Usa la formula della distanza di un punto da una retta del capitolo 5.)

24. ●●● Sia $P_0(x_0; y_0)$ un punto dell'iperbole $xy = k$. a) Dimostra, con la condizione $\Delta = 0$, che la tangente in P_0 ha coefficiente angolare $m = -\dfrac{k}{x_0^2}$. b) Dimostra che la tangente incontra gli asintoti in due punti di cui P_0 è il punto medio, e che il triangolo che forma con gli asintoti ha area $2|k|$, indipendente dal punto scelto.

Problemi

25. ●● Una certa quantità di gas, a temperatura costante, occupa un volume di 6,0 L alla pressione di 2,0 atm. a) Trova la costante k della legge di Boyle $pV = k$, con le unità di misura. b) Quale volume occupa il gas alla pressione di 3,0 atm? c) A quale pressione il volume si dimezza rispetto a quello iniziale? d) Che curva rappresenta la legge nel piano $(V; p)$, e quale parte della curva ha senso fisico?

26. ●● Due stazioni radio A e B distano 100 km; in un riferimento con l'unità di 1 km sono $A(-50; 0)$ e $B(50; 0)$. Una nave riceve il segnale di B 100 μs (microsecondi) prima di quello di A; le onde radio percorrono circa 0,3 km in un microsecondo. a) Quanto vale $PA - PB$? b) Scrivi l'equazione del ramo d'iperbole su cui si trova la nave. c) Se la nave è a 40 km a nord della retta AB (cioè $y = 40$), qual è la sua ascissa? Arrotonda al decimo di km.

27. ●● Un laboratorio artigianale ha un costo fisso mensile di 2000 € e un costo di 5 € per ogni oggetto prodotto (dati inventati). a) Scrivi il costo medio $C(x)$ per oggetto quando ne produce x in un mese, e descrivi il suo grafico. b) Quanti oggetti deve produrre perché il costo medio non superi 9 €? c) Quanto vale il costo medio con 1000 oggetti? Può scendere sotto i 5 €?

28. ●● In fisica studierai che, per una lente sottile convergente di distanza focale f, la distanza q dell'immagine dalla lente dipende dalla distanza p dell'oggetto secondo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. Con $f = 10$ cm: a) ricava q in funzione di p e mostra che si tratta di una funzione omografica; trova centro e asintoti del suo grafico. b) Calcola q per $p = 15$ cm e per $p = 30$ cm. c) Per quali distanze $p > 10$ cm l'immagine si forma a meno di 20 cm dalla lente?

29. ●● Il profilo di una torre di raffreddamento (dati inventati) è, in un riferimento con l'asse y sull'asse della torre e l'unità di 1 m, il ramo destro dell'iperbole $\frac{x^2}{900} - \frac{(y-80)^2}{h} = 1$: la torre è più stretta a 80 m di altezza, dove il raggio è 30 m. a) Sapendo che alla base ($y = 0$) il raggio è 45 m, trova h. b) La torre è alta 120 m: quanto misura il raggio in cima? Arrotonda al decimetro.

30. ●●● Un corpo che non viene catturato dal Sole percorre un ramo di iperbole con il Sole in un fuoco. Considera un'orbita con eccentricità $e = 1{,}2$. a) Calcola il rapporto b/a, arrotondato al centesimo. b) Gli asintoti di questa iperbole formano, dalla parte del ramo percorso, un angolo maggiore o minore di 90°? Confronta con l'iperbole equilatera. c) Come cambierebbe la risposta b) per un'orbita con $e = 3$?

Verso la verifica

31. ●● È data l'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. a) Trova vertici, fuochi, asintoti ed eccentricità. b) Verifica che $P(5; \frac{9}{4})$ appartiene alla curva e scrivi la tangente in P. c) Trova i punti in cui la tangente incontra gli asintoti, verifica che P è il loro punto medio e calcola l'area del triangolo che la tangente forma con gli asintoti.

32. ●● Trova la funzione omografica $y = \frac{ax + b}{x + d}$ il cui grafico ha gli asintoti $x = 2$ e $y = 3$ e passa per $(3; 5)$. Disegnala, poi risolvi la disequazione $\frac{ax + b}{x + d} > 3$ sia algebricamente sia leggendo il grafico.

33. ●●● Al variare di m, discuti quanti punti comuni hanno la retta $y = mx + 1$ e l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, distinguendo i casi di retta secante, tangente, parallela a un asintoto ed esterna.

34. ●●● *Sfida.* Le circonferenze γ_1, con centro $C_1(-4; 0)$ e raggio 3, e γ_2, con centro $C_2(4; 0)$ e raggio 1, sono esterne l'una all'altra. Trova il luogo dei centri P delle circonferenze tangenti esternamente sia a γ_1 sia a γ_2. (Suggerimento: se r è il raggio della circonferenza di centro P, quanto valgono PC_1 e PC_2?) Verifica il risultato con il punto $(4; 15)$.

PER APPROFONDIRE

- [HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*: le coniche, le loro proprietà focali e le costruzioni con fili e aste.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Apollonio di Perga e lo studio delle coniche nell'antichità; la nascita della geometria analitica.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: scegliere il riferimento e le incognite più convenienti, e controllare il risultato.

Glossario del capitolo

Asintoti dell'iperbole
Le rette $y = \pm(b/a)x$, a cui i rami dell'iperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1$ si avvicinano indefinitamente senza incontrarle.

Asse non trasverso
Per l'iperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, il segmento di estremi $(0; -b)$ e $(0; b)$, lungo $2b$, i cui estremi non appartengono alla curva.

Asse trasverso
Il segmento che unisce i vertici di un'iperbole; per $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ è lungo $2a$.

Centro dell'iperbole
Il punto medio del segmento che unisce i fuochi; è centro di simmetria della curva.

Equazione canonica dell'iperbole
L'equazione $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ dell'iperbole con i fuochi sull'asse x, simmetrici rispetto all'origine.

Funzione omografica
Funzione $y = (ax + b)/(cx + d)$ con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$; il suo grafico è un'iperbole equilatera con centro $(-d/c; a/c)$ e asintoti paralleli agli assi.

Fuochi dell'iperbole
I due punti fissi F_1 e F_2 della definizione dell'iperbole; nell'equazione canonica sono $(\pm c; 0)$, con $c^2 = a^2 + b^2$.

Iperbole
Luogo dei punti del piano per i quali è costante, e uguale a $2a$, il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi, con $2a$ minore della distanza tra i fuochi.

Iperbole degenere
La coppia di rette incidenti rappresentata da un'equazione $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = 0$ con A e B discordi.

Iperbole equilatera
Iperbole con i semiassi uguali ($a = b$); ha gli asintoti perpendicolari ed eccentricità $\sqrt{2}$.

Iperbole equilatera riferita agli asintoti
L'iperbole equilatera di equazione $xy = k$ ($k \neq 0$), che ha come asintoti gli assi cartesiani; è il grafico della proporzionalità inversa.

Iperbole traslata
Iperbole ottenuta per traslazione da quella canonica: $(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = \pm 1$, con centro $(x_0; y_0)$.

Iperboli coniugate
Le iperboli $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$, che hanno lo stesso rettangolo fondamentale e gli stessi asintoti, con i fuochi su assi diversi.

Isoterma
In un diagramma pressione-volume, la curva degli stati di un gas a temperatura costante; per la legge di Boyle è un ramo di iperbole equilatera.

Ramo
Ciascuna delle due parti, separate e illimitate, di cui è formata un'iperbole.

Rettangolo fondamentale
Il rettangolo con i lati paralleli agli assi e i vertici nei punti $(\pm a; \pm b)$; le rette delle sue diagonali sono gli asintoti dell'iperbole.

Vertici dell'iperbole
I punti in cui l'iperbole interseca la retta dei fuochi; per $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ sono $(\pm a; 0)$.

Soluzioni

1. B. $c^2 = 16 + 9 = 25$, $c = 5$.

2. C. $a = 2$, $b = 5$: $y = \pm\frac{5}{2}x$.

3. D. $a = 1$, $b^2 = 3$, $c^2 = 4$, $e = c/a = 2$.

4. A. È $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$: il termine positivo è quello in y. (C è un'ellisse; B e D hanno i fuochi sull'asse x.)

5. C. $C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ con $a = 3$, $c = 1$, $d = 2$.

6. B. Gli asintoti sono $y = \pm 2x$: la retta è parallela a $y = 2x$. Sostituendo, $4x^2 - (2x + 1)^2 = 4$ diventa $-4x - 1 = 4$: un solo punto, $(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{2})$, ma la retta non è tangente.

7. a) Falso: per esempio $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ ha semiasse trasverso 2 e l'altro 5. b) Vero. c) Vero: sono iperboli coniugate. d) Falso: solo le rette $y = mx$ con $|m| < b/a$; le altre (asintoti compresi) non la incontrano. e) Vero: $k = -3 < 0$.

8. a) il valore assoluto della differenza. b) $\sqrt{2}$; perpendicolari. c) $c \neq 0$; $ad - bc \neq 0$.

9. a) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$: vertici $(\pm 5; 0)$, fuochi $(\pm 13; 0)$, asintoti $y = \pm\frac{12}{5}x$, $e = \frac{13}{5}$. b) Dividendo per 144: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$: vertici $(\pm 4; 0)$, fuochi $(\pm 5; 0)$, asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$, $e = \frac{5}{4}$. c) È $\frac{y^2}{8} - x^2 = 1$: fuochi sull'asse y, $a = 1$, $b = 2\sqrt{2}$, $c^2 = 1 + 8 = 9$: vertici $(0; \pm 2\sqrt{2})$, fuochi $(0; \pm 3)$, asintoti $y = \pm 2\sqrt{2}x$, $e = \frac{c}{b} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

10. a) $a = 3$, $c = 5$, $b^2 = 16$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. b) $a = 2$, $b = 3$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. c) $a = \frac{c}{e} = 3$, $b^2 = 10 - 9 = 1$: $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$.

11. Con $u = 1/a^2$, $v = 1/b^2$: $8u - 9v = 1$ e $20u - 36v = 1$. Moltiplicando la prima per 4 e sottraendo: $12u = 3$, $u = \frac{1}{4}$, poi $v = \frac{1}{9}$. L'iperbole è $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

12. Con la definizione: $PF_1 = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2}$, $PF_2 = \frac{5}{2}$; $2a = 4$, $a = 2$, $b^2 = 9 - 4 = 5$. Con l'equazione: $a^2 + b^2 = 9$ e $\frac{9}{a^2} - \frac{25}{4b^2} = 1$; sostituendo $b^2 = 9 - a^2$ si ottiene $4a^4 - 97a^2 + 324 = 0$, con $a^2 = 4$ oppure $a^2 = \frac{81}{4}$, da scartare perché darebbe $b^2 < 0$. In entrambi i modi: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

13. Le iperboli con quegli asintoti hanno equazione $x^2 - 4y^2 = h$. a) $h = 16 - 4 = 12$: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$, fuochi sull'asse x. b) $h = 4 - 16 = -12$: $x^2 - 4y^2 = -12$, cioè $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{12} = 1$, con i fuochi sull'asse y, in $(0; \pm\sqrt{15})$.

14. Si usa $4x^2 - 9y^2 = 36$. a) $-5x^2 + 18x - 45 = 0$, $\Delta/4 = 81 - 225 < 0$: esterna. b) Retta parallela all'asintoto $y = \frac{2}{3}x$: $-12x - 45 = 0$, un solo punto $(-\frac{15}{4}; -\frac{3}{2})$, non tangente. c) $-32x^2 - 36 = 0$: nessuna soluzione, esterna (passa per il centro con $|m| = 2 > \frac{2}{3}$). d) $-5x^2 - 18\sqrt{5}x - 81 = 0$, $\Delta/4 = 405 - 405 = 0$: tangente nel punto $(-\frac{9\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5})$.

15. Sdoppiamento: $\frac{4x}{4} - \frac{6y}{12} = 1$, cioè $y = 2x - 2$. Sostituendo in $3x^2 - y^2 = 12$: $3x^2 - (2x - 2)^2 = 12$, $-x^2 + 8x - 16 = 0$, $(x - 4)^2 = 0$: una sola soluzione doppia $x = 4$.

16. Rette per P: $y = m(x - 1)$ (la retta $x = 1$ non incontra la curva, perché $1 < a = 2$). Da $3x^2 - m^2(x - 1)^2 = 12$: $(3 - m^2)x^2 + 2m^2x - m^2 - 12 = 0$; con $m^2 \neq 3$, $\Delta/4 = m^4 + (3 - m^2)(m^2 + 12) = 36 - 9m^2 = 0$:

$m = \pm 2$. Tangenti $y = 2x - 2$ e $y = -2x + 2$, con punti di tangenza $(4; 6)$ e $(4; -6)$.

17. a) $a = b = 3$: vertici $(\pm 3; 0)$, $c = 3\sqrt{2}$, fuochi $(\pm 3\sqrt{2}; 0)$, asintoti $y = \pm x$. Ruotata: $xy = \frac{9}{2}$. b) $k = -8$: rami nel secondo e quarto quadrante; $a^2 = 2|k| = 16$, $a = 4$, $c = 4\sqrt{2}$. Vertici su $y = -x$ con $-x^2 = -8$: $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; fuochi su $y = -x$ a distanza $4\sqrt{2}$ dall'origine: $(4; -4)$ e $(-4; 4)$.

18. a) $ad - bc = -1 - 3 = -4 \neq 0$: iperbole. Dominio $x \neq 1$, centro $(1; 1)$, asintoti $x = 1$, $y = 1$ $\left(y = 1 + \frac{4}{x - 1}\right)$; intersezioni $(-3; 0)$ e $(0; -3)$. b) $ad - bc = -4 + 4 = 0$: non è un'iperbole; $y = 2$ per $x \neq 2$, retta privata del punto $(2; 2)$. c) $y = (-2x + 4)/(x + 1)$: $ad - bc = -2 - 4 = -6 \neq 0$, iperbole. Dominio $x \neq -1$, centro $(-1; -2)$, asintoti $x = -1$, $y = -2$ $\left(y = -2 + \frac{6}{x + 1}\right)$; intersezioni $(2; 0)$ e $(0; 4)$.

19. a) $(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = 4$, cioè $\frac{(x - 1)^2}{4} - (y + 2)^2 = 1$: centro $(1; -2)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{5}$; vertici $(3; -2)$ e $(-1; -2)$, fuochi $(1 \pm \sqrt{5}; -2)$. b) $4(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = -4$, cioè $\frac{(y - 1)^2}{4} - (x + 1)^2 = 1$: fuochi sulla retta $x = -1$; centro $(-1; 1)$, vertici $(-1; 3)$ e $(-1; -1)$, $c = \sqrt{5}$, fuochi $(-1; 1 \pm \sqrt{5})$. c) $(x - 2)^2 - (y - 1)^2 = 0$: iperbole degenere, le due rette $y = x - 1$ e $y = -x + 3$.

20. La circonferenza con centro O per il vertice $(a; b)$ del rettangolo ha raggio $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$; i fuochi $(\pm c; 0)$ distano c da O, quindi le appartengono.

21. Gli asintoti hanno coefficienti b/a e $-b/a$; sono perpendicolari se e solo se $(b/a)(-b/a) = -1$, cioè $b^2 = a^2$, cioè $a = b$ (sono positivi). Allora $c^2 = 2a^2$ ed $e = c/a = \sqrt{2}$.

22. La retta è parallela all'asintoto $y = 2x$: incontra la curva in un solo punto, $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}\right)$, ma la attraversa (vicino a quel punto ha punti da entrambe le parti della curva) e l'equazione risolvente è di primo grado, non di secondo con $\Delta = 0$. «Un solo punto comune» basta per la tangenza solo se la risolvente è di secondo grado.

23. Gli asintoti sono $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$. Il prodotto delle distanze di $P(x; y)$ è $\frac{|bx - ay| \cdot |bx + ay|}{a^2 + b^2} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2}$. Se P sta sulla curva, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, quindi il prodotto vale $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ per ogni punto.

24. a) La retta $y = y_0 + m(x - x_0)$ con $y_0 = k/x_0$, sostituita in $xy = k$, dà $mx^2 + (y_0 - mx_0)x - k = 0$; $\Delta = (y_0 - mx_0)^2 + 4mk = (y_0 + mx_0)^2$ (perché $4mk = 4mx_0y_0$), che è zero per $m = -y_0/x_0 = -k/x_0{}^2$. b) La tangente $y - y_0 = -(y_0/x_0)(x - x_0)$ incontra l'asse x $(y = 0)$ in $x = 2x_0$ e l'asse y in $y = 2y_0$: i punti $(2x_0; 0)$ e $(0; 2y_0)$ hanno punto medio $(x_0; y_0)$. Il triangolo con gli assi ha area $\frac{1}{2}|2x_0| \cdot |2y_0| = 2|x_0y_0| = 2|k|$.

25. a) $k = 2{,}0 \cdot 6{,}0 = 12$ atm · L. b) $V = 12/3{,}0 = 4{,}0$ L. c) $V = 3{,}0$ L, $p = 12/3{,}0 = 4{,}0$ atm: la pressione raddoppia. d) Un ramo dell'iperbole equilatera $pV = 12$, riferita agli asintoti; ha senso fisico solo il ramo con $V > 0$, $p > 0$, e solo nell'intervallo in cui il gas si comporta come previsto dalla legge.

26. a) La differenza dei percorsi è $100 \cdot 0{,}3 = 30$ km; la nave è più vicina a B: $PA - PB = 30$ km. b) $2a = 30$, $a = 15$, $c = 50$, $b^2 = 2500 - 225 = 2275$: ramo destro $(x > 0)$ di $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{2275} = 1$. c) $x^2 = 225\left(1 + \frac{1600}{2275}\right) \approx 383{,}2$, $x \approx 19{,}6$ km.

27. a) $C(x) = \frac{5x + 2000}{x} = 5 + \frac{2000}{x}$, per $x > 0$: un ramo di iperbole equilatera con asintoti $x = 0$ e $y = 5$. b) $5x + 2000 \leq 9x$ (con $x > 0$): $x \geq 500$ oggetti. c) $C(1000) = 7$ €. No: $2000/x > 0$, quindi $C(x) > 5$ sempre; 5 € è l'asintoto.

28. a) $\frac{1}{q} = \frac{1}{10} - \frac{1}{p} = \frac{p - 10}{10p}$, quindi $q = \frac{10p}{p - 10}$: omografica con $a = 10$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -10$, $ad - bc = -100 \neq 0$; infatti $q = 10 + \frac{100}{p - 10}$: centro $(10; 10)$, asintoti $p = 10$, $q = 10$. b) $q(15) = 30$ cm, $q(30) = 15$ cm. c) $10 + 100/(p - 10) < 20$ con $p > 10$: $100 < 10(p - 10)$, $p > 20$ cm.

29. a) $2025 = 900(1 + \frac{6400}{h})$: $\frac{6400}{h} = 1{,}25$, $h = 5120$.

b) $x^2 = 900(1 + \frac{1600}{5120}) = 1181{,}25$, $x \approx 34{,}4$ m.

30. a) $\frac{b}{a} = \sqrt{1{,}2^2 - 1} = \sqrt{0{,}44} \approx 0{,}66$. b) Il ramo sta nell'angolo tra gli asintoti che contiene l'asse trasverso; ciascun asintoto forma con l'asse un angolo la cui tangente è b/a. Per l'iperbole equilatera $b/a = 1$ e l'angolo è 90°; qui $b/a < 1$, quindi l'angolo è minore di 90°: il ramo è stretto e il corpo viene deviato molto. c) Con $e = 3$: $b/a = \sqrt{8} \approx 2{,}83 > 1$, angolo maggiore di 90°: ramo aperto, deviazione minore.

31. a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$: vertici $(\pm 4; 0)$, fuochi $(\pm 5; 0)$, asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$, $e = \frac{5}{4}$. b) $\frac{25}{16} - \frac{81}{144} = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$. Tangente: $\frac{5x}{16} - \frac{9}{4} \cdot \frac{y}{9} = 1$, cioè $y = \frac{5}{4}x - 4$. c) Con $y = \frac{3}{4}x$: $x = 8$, punto $(8; 6)$; con $y = -\frac{3}{4}x$: $2x = 4$, punto $(2; -\frac{3}{2})$. Punto medio $(5; \frac{9}{4}) = P$. Area con vertice O: $\frac{1}{2}|8 \cdot (-\frac{3}{2}) - 2 \cdot 6| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (cioè ab).

32. Asintoto verticale $x = -d = 2$, quindi $d = -2$; asintoto orizzontale $y = a = 3$. Passaggio per $(3; 5)$: $5 = (9 + b)/1$, $b = -4$. $y = \frac{3x - 4}{x - 2} = 3 + \frac{2}{x - 2}$ ($ad - bc = -6 + 4 = -2 \neq 0$). Disequazione: $\frac{2}{x - 2} > 0$, cioè $x > 2$: è il ramo che sta sopra l'asintoto $y = 3$.

33. Sostituendo: $(1 - m^2)x^2 - 2mx - 2 = 0$. Se $m = \pm 1$ (rette parallele agli asintoti) l'equazione è $\mp 2x - 2 = 0$: un solo punto, non tangente. Se $m \neq \pm 1$: $\Delta/4 = m^2 + 2(1 - m^2) = 2 - m^2$. Quindi: $|m| < \sqrt{2}$ e $m \neq \pm 1$, due punti (secante); $m = \pm 1$, un punto (parallela a un asintoto); $m = \pm\sqrt{2}$, tangente; $|m| > \sqrt{2}$, esterna.

34. Se r è il raggio, la tangenza esterna dà $PC_1 = r + 3$ e $PC_2 = r + 1$, quindi $PC_1 - PC_2 = 2$. Il luogo è contenuto nel ramo, più vicino a C_2, dell'iperbole con fuochi C_1, C_2, $2a = 2$, $c = 4$, $b^2 = 15$: $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ con $x \geq 1$. Viceversa, ogni punto P di quel ramo ha $PC_2 \geq c - a = 3 > 1$, quindi $r = PC_2 - 1 > 0$ e la circonferenza di centro P e raggio r è tangente esternamente a entrambe: il luogo è l'intero ramo. Verifica con $(4; 15)$: $16 - 225/15 = 1$; $PC_1 = \sqrt{(64 + 225)} = 17$, $PC_2 = 15$, $r = 14$ in entrambi i casi.