CAPITOLO

9

L'ellisse

Due chiodi, un filo e una matita: con l'ellisse si disegna un'aiuola e si descrive il cammino della Terra intorno al Sole. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire l'ellisse come luogo geometrico e ricavarne l'equazione canonica, con i fuochi sull'asse x o sull'asse y.
2. Riconoscere semiassi, vertici, fuochi ed eccentricità di un'ellisse e collegare l'eccentricità alla sua forma e alle orbite dei pianeti.
3. Determinare l'equazione di un'ellisse a partire da due condizioni.
4. Stabilire la posizione di una retta rispetto a un'ellisse e scrivere le rette tangenti, in un punto e da un punto esterno.
5. Ottenere l'ellisse da una circonferenza con una dilatazione, calcolarne l'area e riconoscere un'ellisse traslata dalla sua equazione.
6. Usare le semiellissi per risolvere equazioni e disequazioni irrazionali e spiegare la proprietà focale dell'ellisse.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 L'ellisse come luogo geometrico 2
9.2 L'eccentricità e le orbite dei pianeti 6
9.3 Determinare l'equazione di un'ellisse 8
9.4 Retta ed ellisse 10
9.5 L'ellisse e le trasformazioni del piano 13
9.6 La proprietà focale 17

Matematica 3 · Parte III · Ellisse, iperbole e coniche · versione 1.0
Capitolo 9: L'ellisse · pagine 223–246 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda un piatto rotondo appoggiato sul tavolo, un po' di lato: il bordo che vedi non è più una circonferenza, ma una curva chiusa e allungata. La stessa forma ha il pelo dell'acqua in un bicchiere inclinato, l'ombra di un pallone su un pavimento illuminato di sbieco, e soprattutto l'orbita della Terra intorno al Sole. È l'**ellisse**, la terza curva che studiamo come luogo geometrico, dopo la parabola (capitolo 6) e la circonferenza (capitolo 7).

Seguiremo lo stesso percorso dei capitoli precedenti. Partiremo da una definizione geometrica, una proprietà delle distanze da due punti fissi, e da quella ricaveremo un'equazione; poi useremo l'equazione per calcolare: fuochi, vertici, eccentricità, rette tangenti, aree. Lungo la strada scopriremo che l'ellisse non è altro che una circonferenza «schiacciata» da una dilatazione, come quelle del capitolo 3, e che ha una proprietà ottica sorprendente, che la fa usare in medicina e in architettura.

9.1 L'ellisse come luogo geometrico

9.1.1 La definizione e la costruzione del giardiniere

Fissiamo nel piano due punti F_1 e F_2 e una lunghezza, che per comodità chiamiamo $2a$, maggiore della distanza F_1F_2.

Definizione. Si chiama **ellisse** di fuochi F_1 e F_2 il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante, e uguale a $2a$, la somma delle distanze da F_1 e da F_2:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad \text{con } 2a > F_1F_2.$$

I due punti fissi si chiamano **fuochi** dell'ellisse; la loro distanza $F_1F_2 = 2c$ è la **distanza focale** e c la **semidistanza focale**. I segmenti PF_1 e PF_2 sono i **raggi focali** del punto P.

La condizione $2a > 2c$, cioè $a > c$, non è un dettaglio. Per la disuguaglianza triangolare, in qualunque triangolo PF_1F_2 vale $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$; se fosse $2a = 2c$, il luogo si ridurrebbe al segmento F_1F_2 (solo i suoi punti hanno somma delle distanze uguale a F_1F_2); se fosse $2a < 2c$, nessun punto soddisferebbe la condizione e il luogo sarebbe vuoto. Se invece i due fuochi coincidono ($c = 0$), la condizione diventa $2PF = 2a$, cioè $PF = a$: l'ellisse è una circonferenza di centro F e raggio a. La circonferenza è quindi un caso particolare di ellisse.

La definizione suggerisce un modo per disegnare l'ellisse, usato davvero per tracciare le aiuole e noto come **costruzione del giardiniere** (Figura 9.1). Si piantano due picchetti nei fuochi, si legano ai picchetti gli estremi di un filo inestensibile lungo $2a$ e si fa scorrere una matita (o un bastoncino) tenendo il filo sempre teso. In ogni posizione i due tratti di filo sono i raggi focali PF_1 e PF_2, e la loro somma è la lunghezza del filo: la matita descrive proprio l'ellisse. Avvicinando i picchetti la curva si arrotonda; allontanandoli, a parità di filo, si allunga.

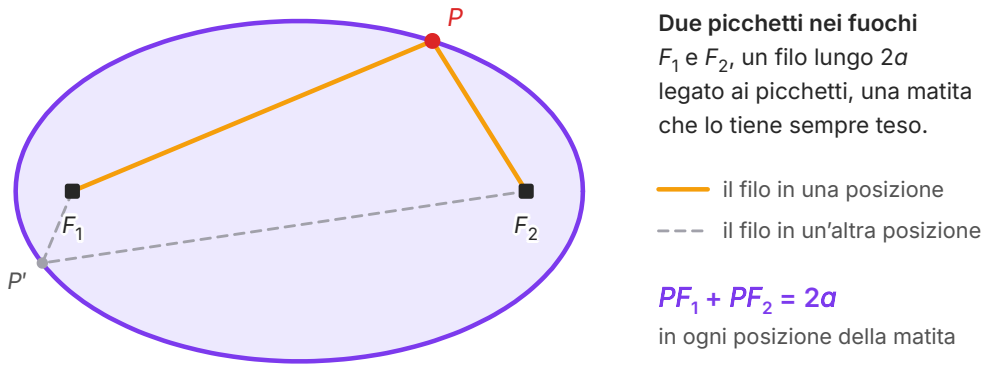


Figura 9.1 La costruzione del giardiniere. Il filo, fissato nei fuochi F_1 e F_2, è lungo $2a$: in qualunque posizione la matita lo tenga teso, la somma dei due tratti PF_1 e PF_2 resta $2a$. Nel disegno $a = 5$ e $c = 4$ (in unità arbitrarie).

9.1.2 L'equazione canonica

Per trovare l'equazione dell'ellisse scegliamo un riferimento comodo: l'asse x sulla retta dei fuochi e l'origine nel loro punto medio, così che $F_1(-c;\,0)$ e $F_2(c;\,0)$. Un punto $P(x;\,y)$ appartiene all'ellisse se e solo se

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Per liberarci dei radicali procediamo come per le equazioni irrazionali del capitolo 2: isoliamo un radicale ed eleviamo al quadrato.

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Sviluppando i quadrati, i termini x^2, c^2 e y^2 si cancellano e rimane $4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, cioè, dividendo per 4,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Eleviamo di nuovo al quadrato: $a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$. I termini $-2a^2cx$ si cancellano e, raccogliendo,

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Poiché $a > c$, il numero $a^2 - c^2$ è positivo e possiamo chiamarlo b^2, con $b > 0$. L'equazione diventa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e, dividendo per a^2b^2, assume la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } b^2 = a^2 - c^2.$$

Abbiamo elevato al quadrato due volte, e sappiamo dal capitolo 2 che l'elevamento al quadrato può aggiungere soluzioni. Per essere certi che il luogo sia formato da *tutti e soli* i punti dell'equazione dobbiamo fare il cammino inverso. Se $P(x; y)$ soddisfa l'equazione, allora $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$ e un calcolo diretto (proposto negli esercizi) dà

$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x \quad PF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

Sui punti dell'equazione si ha $|x| \le a$, quindi $|cx/a| \le c < a$: i due secondi membri sono positivi, e sono davvero le distanze cercate. La loro somma è $2a$: ogni punto dell'equazione appartiene all'ellisse. Le due formule dei raggi focali, del resto, sono utili anche da sole: dicono, per esempio, che il punto dell'ellisse più vicino a F_2 è quello con x massima, cioè $x = a$, a distanza $a - c$.

IN SINTESI

Teorema (equazione canonica dell'ellisse).

Ipotesi: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, $a > c \ge 0$, $b^2 = a^2 - c^2$.

Tesi: $P(x; y)$ soddisfa $PF_1 + PF_2 = 2a$ se e solo se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'equazione si chiama **equazione canonica dell'ellisse** (o forma normale). Fra i tre parametri vale la relazione $a^2 = b^2 + c^2$.

9.1.3 Vertici, assi e simmetrie

Leggiamo l'equazione canonica. Per $y = 0$ si ottiene $x = \pm a$, per $x = 0$ si ottiene $y = \pm b$: l'ellisse taglia gli assi nei quattro **vertici** $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ (Figura 9.2). Il segmento A_1A_2, lungo $2a$, è l'**asse maggiore** e contiene i fuochi; il segmento B_1B_2, lungo $2b$, è l'**asse minore**. I numeri a e b sono i **semiassi**, e da $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ segue $b < a$ (se $c > 0$).

La relazione $a^2 = b^2 + c^2$ ha un significato geometrico semplice. Il vertice B_2 sta sull'asse del segmento F_1F_2, quindi è equidistante dai fuochi: $B_2F_1 = B_2F_2$, e poiché la somma è $2a$, ciascuno dei due raggi focali misura a. Il triangolo OF_2B_2 è rettangolo in O, con cateti c e b e ipotenusa a: è il teorema di Pitagora. Questo dà anche un modo rapido di trovare i fuochi con il compasso: con centro in B_2 e raggio a si taglia l'asse maggiore.

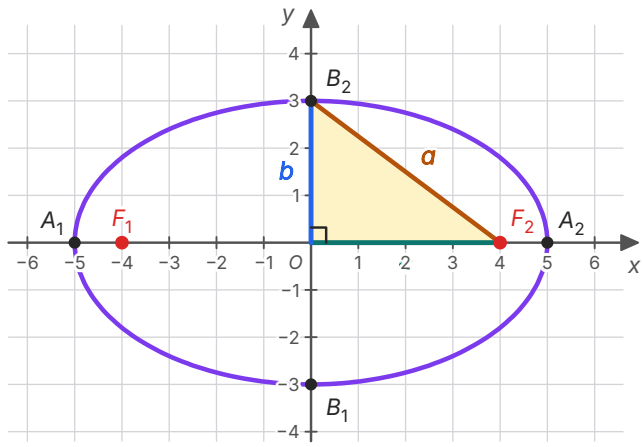


Figura 9.2 L'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, calcolata dall'equazione: semiassi $a = 5$ e $b = 3$, fuochi $F_{1,2}(\pm 4; 0)$. Il triangolo rettangolo OF_2B_2 ha cateti $c = 4$ e $b = 3$ e ipotenusa $B_2F_2 = a = 5$.

L'equazione contiene x e y solo al quadrato. Se $(x; y)$ la soddisfa, la soddisfano anche $(-x; y)$, $(x; -y)$ e $(-x; -y)$: l'ellisse è **simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine**, che si chiama **centro dell'ellisse**. Inoltre i due addendi $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$ sono non negativi e hanno somma 1, quindi nessuno dei due supera 1: $|x| \le a$ e $|y| \le b$. L'ellisse è una curva **limitata**, tutta contenuta nel rettangolo di lati $2a$ e $2b$ con i lati per i vertici: a differenza della parabola, non si allontana mai all'infinito.

Ogni ellisse è una curva chiusa, ma non è il grafico di una funzione: a ogni x compreso tra $-a$ e a corrispondono due valori di y. Risolvendo rispetto a y si ottengono due funzioni, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, le cui curve sono le due metà dell'ellisse: le ritroveremo alla fine del capitolo.

9.1.4 Fuochi sull'asse y

Se i fuochi stanno sull'asse y, in $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$, lo stesso calcolo con i ruoli di x e y scambiati porta ancora a un'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ma ora il semiasse maggiore è b, sull'asse y: la definizione è $PF_1 + PF_2 = 2b$ e vale $c^2 = b^2 - a^2$, con $b > a$. Per esempio $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ha $a = 3$, $b = 5$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$ e fuochi $(0; \pm 4)$.

La regola pratica è una sola: **i fuochi stanno sull'asse del denominatore maggiore**, e c^2 è la differenza tra il denominatore maggiore e quello minore. Se i due denominatori sono uguali,

$c = 0$ e l'ellisse è una circonferenza.

Studiamo, per esempio, l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$. Per prima cosa la portiamo in forma canonica: dividiamo i due membri per 36: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Il denominatore maggiore è quello di x^2: i fuochi stanno sull'asse x. Poi leggiamo i semiassi: $a^2 = 9$, $b^2 = 4$: $a = 3$, $b = 2$. Vertici $A_{1,2}(\pm 3; 0)$ e $B_{1,2}(0; \pm 2)$. Infine i fuochi: $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5} \approx 2{,}24$: $F_{1,2}(\pm\sqrt{5}; 0)$.

Come controllo, il punto $P(\sqrt{5}; 4/3)$ sta sull'ellisse: $4 \cdot 5 + 9 \cdot 16/9 = 20 + 16 = 36$. Le formule dei raggi focali danno $PF_1 = 3 + (\sqrt{5}/3) \cdot \sqrt{5} = 14/3$ e $PF_2 = 3 - 5/3 = 4/3$: la somma è $18/3 = 6 = 2a$. Infatti P ha la stessa ascissa di F_2, e PF_2 è proprio la sua ordinata 4/3.

ERRORE FREQUENTE

Leggere i semiassi dai coefficienti, e sbagliare la relazione tra *a*, *b*, *c*. Nell'equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ il semiasse orizzontale non è 4, il coefficiente di x^2, né 2 «perché $4 = 2^2$»: è 3, perché nella forma canonica, con secondo membro 1, sotto x^2 compare 9. I semiassi si leggono solo dopo aver portato l'equazione in quella forma. Nell'ellisse c^2 è una **differenza**: $c^2 = a^2 - b^2$ (o $b^2 - a^2$ se i fuochi stanno sull'asse y), mai una somma; $c^2 = a^2 + b^2$ è la relazione dell'iperbole, che vedremo nel capitolo 10. Un controllo rapido: i fuochi stanno *dentro* l'ellisse, quindi c deve essere minore del semiasse maggiore.

9.2 L'eccentricità e le orbite dei pianeti

9.2.1 Quanto è schiacciata un'ellisse

Due ellissi con lo stesso semiasse maggiore possono avere forme molto diverse: dipende da quanto i fuochi sono lontani dal centro rispetto alle dimensioni della curva. Questa misura si chiama **eccentricità**: è il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore,

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{(fuochi sull'asse } x\text{)} \qquad e = \frac{c}{b} \quad \text{(fuochi sull'asse } y\text{)}$$

Poiché $0 \le c < a$, l'eccentricità di un'ellisse è sempre compresa tra 0 e 1: $0 \le e < 1$. È un numero puro, senza unità di misura, e non cambia se ingrandiamo o rimpiccioliamo la figura: due ellissi con la stessa eccentricità sono simili. Dalla relazione $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2$ si ricava

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

che lega l'eccentricità alla forma. Se $e = 0$, i fuochi coincidono con il centro, $b = a$ e l'ellisse è una circonferenza. Al crescere di e il rapporto b/a diminuisce: per $e = 0{,}6$ vale 0,8, per $e = 0{,}8$ vale 0,6, per $e = 0{,}95$ circa 0,31. Quando e si avvicina a 1 l'ellisse si schiaccia sempre più sull'asse maggiore (Figura 9.3). Nel capitolo 11 vedremo che l'eccentricità ha anche un'altra interpretazione, che la collega alla parabola ($e = 1$) e all'iperbole ($e > 1$).

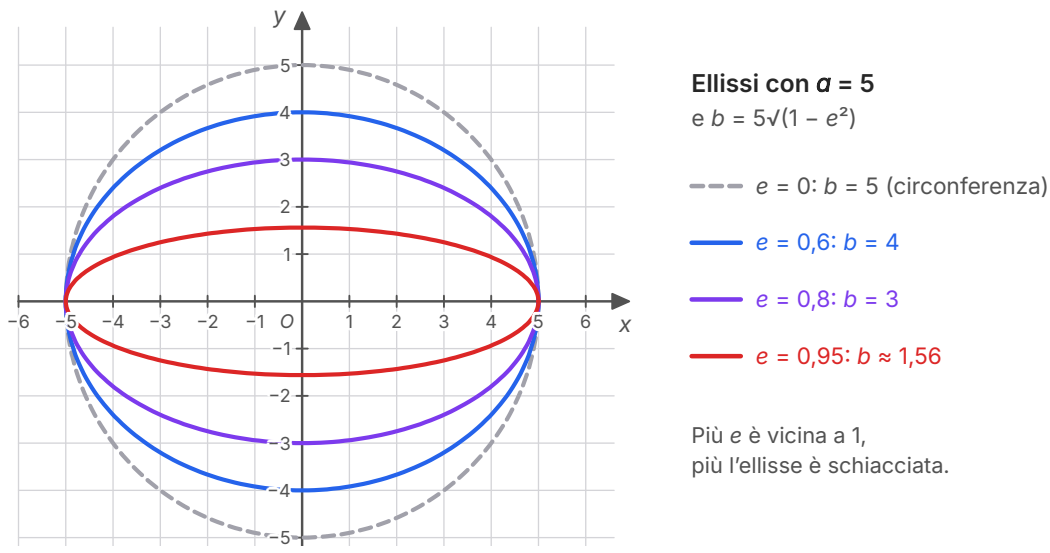


Figura 9.3 Quattro ellissi con lo stesso semiasse maggiore $a = 5$ ed eccentricità crescente, calcolate dalle equazioni $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $b = 5\sqrt{1 - e^2}$. Per $e = 0$ si ha la circonferenza (tratteggiata); per $e = 0{,}95$ l'ellisse è molto schiacciata.

9.2.2 La prima legge di Keplero

L'ellisse è entrata nella fisica con Giovanni Keplero. Nell'*Astronomia nova*, pubblicata nel 1609, Keplero mostrò, studiando le osservazioni di Marte, che le orbite dei pianeti non sono circonferenze, come si era creduto per secoli, ma ellissi. È la **prima legge di Keplero**: *ogni pianeta descrive un'orbita ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi*. Il punto dell'orbita più vicino al Sole si chiama **perielio**, quello più lontano **afelio**: sono i due vertici dell'asse maggiore.

Le formule dei raggi focali danno subito le due distanze. Se il Sole è nel fuoco F_2, la distanza del pianeta dal Sole varia tra $a - c = a(1 - e)$ al perielio e $a + c = a(1 + e)$ all'afelio. Viceversa, conoscendo le due distanze estreme si trovano il semiasse maggiore, che ne è la media, e la semidistanza focale, che ne è la semidifferenza.

ESEMPIO SVOLTO

L'orbita della Terra. Secondo la scheda dei dati planetari della NASA (*Earth Fact Sheet*, consultata nel 2026), l'orbita terrestre ha semiasse maggiore di circa 149,6 milioni di chilometri ed eccentricità circa 0,0167. Calcola le distanze Terra–Sole al perielio e all'afelio, la distanza del Sole dal centro dell'orbita e il semiasse minore.

Semidistanza focale. $c = ae \approx 149{,}6 \cdot 0{,}0167 \approx 2{,}50$ milioni di km: il Sole dista dal centro dell'orbita circa due milioni e mezzo di chilometri.

Perielio e afelio. $a - c \approx 147{,}1$ milioni di km; $a + c \approx 152{,}1$ milioni di km. La scheda della NASA riporta proprio 147,1 e 152,1 milioni di km.

Semiasse minore. $b = a\sqrt{1 - e^2} \approx 149{,}6 \cdot 0{,}99986 \approx 149{,}58$ milioni di km.

Interpretazione. Il rapporto $b/a \approx 0{,}99986$ dice che l'orbita, disegnata in scala, sarebbe indistinguibile da una circonferenza: su un foglio con $a = 10$ cm, i due semiassi differirebbero di poco più di un centesimo di millimetro, mentre il Sole sarebbe spostato dal centro di quasi 2 mm. L'orbita è «eccentrica» non perché sia schiacciata, ma perché il Sole non sta nel centro.

COLLEGAMENTI

Astronomia: dalle orbite quasi circolari alle comete. Le orbite dei pianeti hanno eccentricità piccole: quella di Marte, il pianeta su cui Keplero scoprì la legge, è circa 0,093 (NASA, *Mars Fact Sheet*), una delle più grandi tra i pianeti, ed è proprio questo che rese visibile a Keplero che l'orbita non era una circonferenza. Le comete periodiche percorrono invece ellissi molto allungate. La cometa di Halley, secondo il database dei piccoli corpi del Jet Propulsion Laboratory della NASA (consultato nel 2026), ha eccentricità circa 0,97 e semiasse maggiore di circa 17,9 unità astronomiche (1 UA è circa la distanza media Terra–Sole): al perielio passa a poco più di mezza UA dal Sole, all'afelio arriva oltre l'orbita di Nettuno, a più di 35 UA. Perché le orbite siano proprio coniche lo spiegherà la legge di gravitazione di Newton, che studierai in fisica; ne parleremo nel capitolo 11.

9.3 Determinare l'equazione di un'ellisse

Un'ellisse con il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani ha equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: dipende da due parametri, a^2 e b^2. Per determinarla servono quindi **due condizioni** indipendenti. Le più comuni sono:

- la conoscenza dei due semiassi, oppure di un semiasse e della semidistanza focale (si usa $a^2 = b^2 + c^2$, con la lettera giusta come semiasse maggiore);
- un fuoco e un vertice, oppure un fuoco e l'eccentricità (da c ed e si ricava $a = c/e$);
- il passaggio per un punto, che dà un'equazione nelle incognite a^2 e b^2;

- l'eccentricità, che dà la relazione $b^2 = a^2(1 - e^2)$;
- la tangenza a una retta, che vedremo nel prossimo paragrafo.

Per esempio, l'ellisse con un fuoco in $(3; 0)$ e un vertice in $(0; 4)$ ha i fuochi sull'asse x, quindi $c = 3$; il vertice sull'asse y è un estremo dell'asse minore, quindi $b = 4$, e $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$. L'equazione è $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Quando le condizioni sono passaggi per punti conviene un piccolo trucco: le incognite a^2 e b^2 compaiono al denominatore, ma se poniamo $u = 1/a^2$ e $v = 1/b^2$ l'equazione diventa $ux^2 + vy^2 = 1$, **lineare** in u e v. Ogni punto dà un'equazione di primo grado e due punti danno un sistema lineare, da risolvere con i metodi di *Matematica 2*.

ESEMPIO SVOLTO

Trova l'ellisse, con centro nell'origine e assi sugli assi cartesiani, che passa per $P(3; \frac{12}{5})$ **e** $Q(4; \frac{9}{5})$.

Impostazione. Cerchiamo $ux^2 + vy^2 = 1$, con $u = 1/a^2$ e $v = 1/b^2$ positivi.

Sistema. Sostituendo le coordinate: $9u + \frac{144}{25}v = 1$ e $16u + \frac{81}{25}v = 1$. Moltiplichiamo per 25: $225u + 144v = 25$ e $400u + 81v = 25$.

Soluzione. Moltiplichiamo la prima per 9 e la seconda per 16 e sottraiamo: $(6400 - 2025)u = 400 - 225$, cioè $4375u = 175$, $u = \frac{1}{25}$. Nella prima: $9 + 144v = 25$, $v = \frac{1}{9}$.

Risultato. $a^2 = 25$, $b^2 = 9$: è l'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ della Figura 9.2. Verifica con Q: $\frac{16}{25} + \frac{81}{25 \cdot 9} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$.

ESEMPIO SVOLTO

Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, eccentricità $\frac{1}{2}$, che passa per $P(2; 3)$.

Eccentricità. $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}a^2$. L'equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}a^2} = 1$, cioè $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} = 1$.

Passaggio per P. $\frac{4}{a^2} + \frac{4 \cdot 9}{3a^2} = 1$, cioè $\frac{4}{a^2} + \frac{12}{a^2} = 1$, da cui $a^2 = 16$ e $b^2 = 12$.

Risultato. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Controllo: $c^2 = 16 - 12 = 4$, $c = 2$, $e = 2/4 = \frac{1}{2}$ ✓; $\frac{4}{16} + \frac{9}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓.

Con la definizione si ottiene un'altra verifica: $P(2; 3)$ ha la stessa ascissa del fuoco $F_2(2; 0)$, quindi $PF_2 = 3$, mentre $PF_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; la somma è $8 = 2a$.

9.4 Retta ed ellisse

9.4.1 Le posizioni reciproche

Una retta e un'ellisse possono avere due punti in comune (retta **secante**), uno solo (retta **tangente**) o nessuno (retta **esterna**). Come per la parabola e la circonferenza, i punti comuni sono le soluzioni del sistema formato dalle due equazioni. Sostituendo nell'equazione dell'ellisse la y ricavata dall'equazione della retta (o la x, se la retta è verticale) si ottiene l'**equazione risolvente**, di secondo grado: il segno del suo discriminante decide la posizione.

- $\Delta > 0$: due soluzioni distinte, la retta è secante;
- $\Delta = 0$: due soluzioni coincidenti, la retta è tangente;
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale, la retta è esterna.

Per l'ellisse non ci sono le eccezioni della parabola: poiché l'ellisse è una curva chiusa e limitata, l'equazione risolvente è sempre di secondo grado (il coefficiente di x^2 è la somma di due numeri positivi), e una retta che ha un solo punto in comune con l'ellisse è sempre tangente.

Per esempio, la retta $y = \frac{1}{2}x + 1$ e l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ danno $x^2 + 4\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 4$, cioè $2x^2 + 4x = 0$: le soluzioni $x = 0$ e $x = -2$ corrispondono ai punti $(0; 1)$ e $(-2; 0)$, due vertici. La retta è secante e il segmento che taglia è una *corda* dell'ellisse.

9.4.2 La tangente in un punto: la formula di sdoppiamento

Per la tangente in un punto $P_0(x_0; y_0)$ dell'ellisse si può usare il metodo del discriminante: si scrive il fascio di rette per P_0 e si impone $\Delta = 0$. C'è però una strada più rapida, la *formula di sdop-*

piamento, che hai già usato per la parabola nel capitolo 6: nell'equazione canonica si «sdoppiano» i quadrati, scrivendo x_0x al posto di x^2 e y_0y al posto di y^2.

IN SINTESI

Teorema (tangente all'ellisse in un suo punto).

Ipotesi: $P_0(x_0; y_0)$ appartiene all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tesi: la retta tangente all'ellisse in P_0 ha equazione

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Dimostrazione. La retta passa per P_0: sostituendo $(x_0; y_0)$ si ritrova l'equazione dell'ellisse, che P_0 soddisfa. È davvero una retta, perché x_0 e y_0 non sono entrambi nulli. Resta da vedere che non ha altri punti in comune con l'ellisse. Se $(x; y)$ sta sia sull'ellisse sia sulla retta, valgono tre uguaglianze: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Sommando le prime due e sottraendo il doppio della terza si ottiene

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 + 1 - 2 = 0$$

Una somma di due quadrati divisi per numeri positivi è nulla solo se entrambi i quadrati sono nulli: $x = x_0$ e $y = y_0$. La retta ha in comune con l'ellisse il solo punto P_0, quindi è tangente. c.v.d.

Per esempio, cerchiamo la tangente all'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ nel punto $P_0(3; \frac{12}{5})$. Il punto sta sull'ellisse: $\frac{9}{25} + \frac{144}{25 \cdot 9} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$. Con lo sdoppiamento: $\frac{3x}{25} + \frac{12y}{45} = 1$, cioè $\frac{3x}{25} + \frac{4y}{15} = 1$. Moltiplicando per 75: $9x + 20y = 75$. Per controllo ricaviamo $y = (75 - 9x)/20$ e sostituiamo in $9x^2 + 25y^2 = 225$: dopo i calcoli si ottiene $x^2 - 6x + 9 = 0$, cioè $(x - 3)^2 = 0$. Il discriminante è nullo e la soluzione doppia $x = 3$ è proprio l'ascissa di P_0.

9.4.3 Le tangenti da un punto esterno

Da un punto esterno all'ellisse si possono condurre due rette tangenti. Per trovarle si scrive il fascio di rette per il punto, $y - y_P = m(x - x_P)$, si sostituisce nell'equazione dell'ellisse e si impone che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo: si ottiene un'equazione di secondo grado in m, le cui soluzioni sono i coefficienti angolari delle due tangenti. Va sempre controllata a parte la retta verticale $x = x_P$, che il fascio scritto in questa forma non comprende: può essere una delle tangenti, se il punto ha la stessa ascissa di un vertice $(\pm a; 0)$.

ESEMPIO SVOLTO

Trova le tangenti all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ condotte dal punto $P(0; 3)$ e i punti di contatto (Figura 9.4).

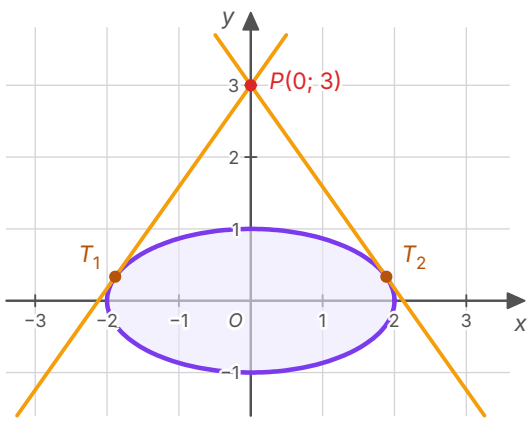
Il punto è esterno: $0 + 4 \cdot 9 = 36 > 4$. La retta verticale per P è l'asse y, che è secante: le tangenti sono nel fascio $y = mx + 3$.

Equazione risolvente. $x^2 + 4(mx + 3)^2 = 4$, cioè $(1 + 4m^2)x^2 + 24mx + 32 = 0$.

Condizione di tangenza. $\frac{\Delta}{4} = 144m^2 - 32(1 + 4m^2) = 16m^2 - 32$. Imponendo $16m^2 - 32 = 0$ si ottiene $m^2 = 2$, $m = \pm\sqrt{2}$. Le tangenti sono $y = \sqrt{2}x + 3$ e $y = -\sqrt{2}x + 3$.

Punti di contatto. Con $\Delta = 0$ la soluzione doppia è $x = -\frac{24m}{2(1 + 4m^2)} = -\frac{12m}{9} = -\frac{4m}{3}$. Per $m = \sqrt{2}$: $x = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $y = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}$; per $m = -\sqrt{2}$: $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Verifica. $(\frac{4\sqrt{2}}{3})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{32}{9} + \frac{4}{9} = 4$ ✓. Con lo sdoppiamento, la tangente in $T_2(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$ è $\frac{4\sqrt{2}}{3}x + \frac{4}{3}y = 4$, cioè $y = 3 - \sqrt{2}x$ ✓.



Ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$

Tangenti da $P(0; 3)$:

$y = \sqrt{2}\,x + 3$

$y = -\sqrt{2}\,x + 3$

Punti di contatto:

$T_1(-4\sqrt{2}/3;\ 1/3)$

$T_2(4\sqrt{2}/3;\ 1/3)$

le due tangenti sono simmetriche rispetto all'asse y

Figura 9.4 Le due tangenti condotte da $P(0; 3)$ all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ dell'esempio svolto, calcolate dalle equazioni: $y = \pm\sqrt{2}x + 3$, con punti di contatto $T_{1,2}(\mp\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$. La figura è simmetrica rispetto all'asse y, perché lo sono l'ellisse e il punto P.

9.5 L'ellisse e le trasformazioni del piano

9.5.1 Una circonferenza dilatata

Nel capitolo 3 abbiamo visto che il grafico di $y = k \cdot f(x)$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ con una *dilatazione verticale*: ogni ordinata viene moltiplicata per k, le ascisse non cambiano. Applichiamo questa trasformazione, $x' = x$, $y' = \dfrac{b}{a}y$, alla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$. Ricaviamo $x = x'$ e $y = \dfrac{a}{b}y'$ e sostituiamo:

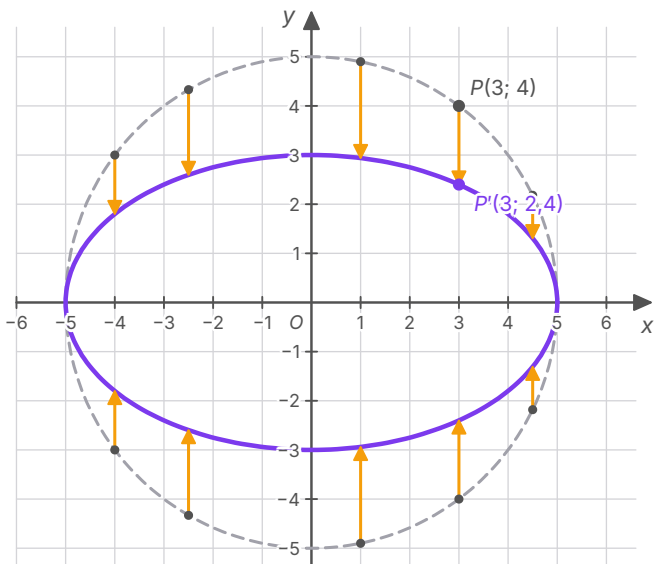
$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2 = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

L'immagine della circonferenza è l'ellisse di semiassi a e b (Figura 9.5). Ogni ellisse si ottiene quindi da una circonferenza «schiacciandola» (se $b < a$) o «stirandola» (se $b > a$) in una direzione. È anche ciò che vediamo quando guardiamo di sbieco un piatto rotondo: in prima approssimazione, l'inclinazione accorcia tutte le distanze in una direzione per lo stesso fattore.

La dilatazione spiega una proprietà che con la sola equazione sarebbe difficile da ottenere: l'**area dell'ellisse**. Pensiamo il cerchio diviso in sottilissime strisce verticali. La dilatazione lascia invariata la larghezza di ogni striscia e ne moltiplica l'altezza per b/a, quindi moltiplica l'area di ogni striscia, e dunque l'area totale, per b/a. Poiché il cerchio ha area πa^2 (capitolo 8), l'ellisse ha area

$$A = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

Per $a = b = r$ ritroviamo πr^2. L'ellisse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ha area $15\pi \approx 47{,}1$, esattamente i $\dfrac{3}{5}$ del cerchio di raggio 5. Il ragionamento per strisce è un'idea, non una dimostrazione completa: la renderanno rigorosa il calcolo integrale del quinto anno e, in modo sintetico, il principio di Cavalieri che incontrerai nella geometria dello spazio.



$x^2 + y^2 = 25$

dilatazione $x' = x$, $y' = 3/5\ y$

$x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1$

Ogni ordinata è moltiplicata per 3/5: anche l'area.

cerchio: $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$

ellisse: $25\pi \cdot 3/5 = 15\pi$

Figura 9.5 La dilatazione verticale $x' = x$, $y' = \frac{3}{5}y$ trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ (tratteggiata) nell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: ogni punto si sposta verticalmente verso l'asse x, per esempio $P(3; 4)$ va in $P'(3; 2{,}4)$. Le frecce sono calcolate dalle equazioni.

APPROFONDIMENTO · IL PERIMETRO DELL'ELLISSE

L'area dell'ellisse ha una formula semplicissima, il perimetro no. Si può dimostrare che, se $a \neq b$, la lunghezza dell'ellisse non si esprime con un numero finito di operazioni elementari (somme, prodotti, radici, π) a partire dai semiassi: è un esempio di *integrale ellittico*, un argomento dell'analisi superiore. Esistono però formule approssimate molto precise. Una delle più famose, dovuta al matematico indiano Srinivasa Ramanujan, è

$$p \approx \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

Per $a = 5$, $b = 3$ dà $p \approx 25{,}52699$, mentre il valore calcolato con un metodo numerico è 25,52700 (alla quinta cifra decimale): l'errore relativo è inferiore a un milionesimo. Per la circonferenza ($a = b = r$) la formula restituisce esattamente $2\pi r$.

9.5.2 L'ellisse traslata

Se trasliamo l'ellisse canonica con il vettore $(x_0; y_0)$, sostituendo $x - x_0$ a x e $y - y_0$ a y come nel capitolo 3, otteniamo l'**ellisse traslata**

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

con centro $C(x_0; y_0)$ e assi di simmetria le rette $x = x_0$ e $y = y_0$. Semiassi, semidistanza focale ed eccentricità non cambiano; i vertici e i fuochi si ottengono traslando quelli dell'ellisse canonica. Sviluppando i quadrati e liberando dai denominatori, l'equazione assume la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad \text{con } A \text{ e } B \text{ dello stesso segno}$$

e senza termine in xy. Il viceversa vale solo in parte: un'equazione di questo tipo, con A e B concordi, si riconduce con il **completamento dei quadrati** alla forma $A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = k$, e rappresenta un'ellisse se k ha lo stesso segno di A e B, un solo punto se $k = 0$, nessun punto se k ha segno opposto. Se poi $A = B$ è una circonferenza, come nel capitolo 7.

ESEMPIO SVOLTO

Riconosci la curva $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ e determinane centro, semiassi, vertici e fuochi (Figura 9.6).

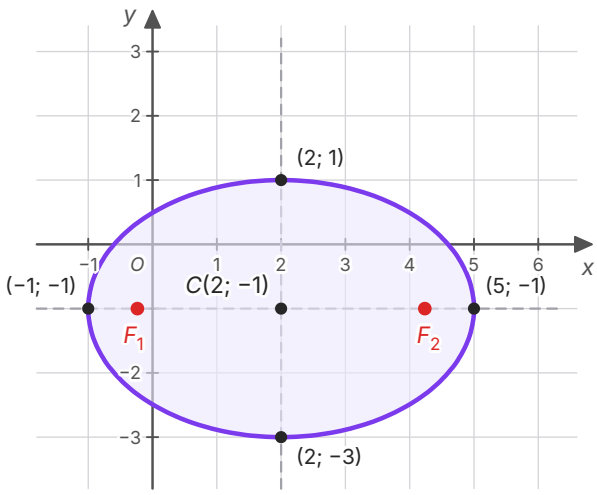
Raccogliamo i coefficienti dei quadrati: $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11$.

Completiamo i quadrati dentro le parentesi, aggiungendo 4 nella prima e 1 nella seconda; al secondo membro aggiungiamo quindi $4 \cdot 4 = 16$ e $9 \cdot 1 = 9$: $4(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 11 + 16 + 9 = 36$.

Forma canonica. Dividendo per 36: $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$. È un'ellisse di centro $C(2; -1)$, con $a = 3$ (orizzontale) e $b = 2$.

Vertici e fuochi. Vertici $(2 \pm 3; -1)$, cioè $(-1; -1)$ e $(5; -1)$, e $(2; -1 \pm 2)$, cioè $(2; 1)$ e $(2; -3)$. $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$: fuochi $(2 \pm \sqrt{5}; -1)$. Eccentricità $\dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$.

Controllo. Il vertice $(5; -1)$ soddisfa l'equazione data: $100 + 9 - 80 - 18 - 11 = 0$ ✓. È il controllo più sicuro contro l'errore tipico del completamento dei quadrati: in $4(x^2 - 4x)$ si aggiunge 4 dentro la parentesi, ma al primo membro si è aggiunto $4 \cdot 4 = 16$, e proprio 16 (non 4) va aggiunto al secondo membro.



$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

$\Updownarrow$

$\mathbf{(x-2)^2/9 + (y+1)^2/4 = 1}$

centro $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = 2$

$c = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

fuochi $(2 \pm \sqrt{5}; -1)$

assi di simmetria $x = 2$ e $y = -1$

Figura 9.6 L'ellisse traslata dell'esempio svolto, calcolata dall'equazione: centro $C(2; -1)$, semiassi 3 e 2, fuochi $(2 \pm \sqrt{5}; -1)$. Gli assi di simmetria (tratteggiati) sono le rette $x = 2$ e $y = -1$.

9.5.3 Semiellissi ed equazioni irrazionali

Le due metà dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sono i grafici delle funzioni $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semiellisse superiore) e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (semiellisse inferiore), entrambe con dominio $[-a; a]$. Riconoscerle permette di risolvere graficamente molte equazioni e disequazioni irrazionali, come nel capitolo 7 abbiamo fatto con le semicirconferenze.

Consideriamo la disequazione $\sqrt{16 - x^2} \geq x + 4$. Dividendo per 2 diventa $\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \geq \frac{1}{2}x + 2$: il primo membro è la semiellisse superiore di $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, il secondo la retta che passa per il vertice $(-4; 0)$ e per il vertice $(0; 2)$. La semiellisse sta sopra la retta, o la tocca, proprio sull'arco compreso tra questi due vertici: la soluzione è $-4 \leq x \leq 0$, cioè $[-4; 0]$. Il metodo algebrico del capitolo 2 conferma: nel dominio $[-4; 4]$ il secondo membro $x + 4$ non è mai negativo, quindi possiamo elevare al quadrato e otteniamo $16 - x^2 \geq x^2 + 8x + 16$, cioè $2x(x + 4) \leq 0$, vera per $-4 \leq x \leq 0$. Il grafico, però, mostra anche *perché* la soluzione è un intervallo con estremi nei vertici.

9.6 La proprietà focale

La parabola concentra nel fuoco i raggi paralleli all'asse (capitolo 6). L'ellisse ha una proprietà analoga, che riguarda i suoi due fuochi.

IN SINTESI

Teorema (proprietà focale dell'ellisse).

Ipotesi: P è un punto dell'ellisse di fuochi F_1 e F_2, t la tangente in P.

Tesi: t forma angoli uguali con i raggi focali PF_1 e PF_2. Equivalentemente, la normale in P (la perpendicolare a t) è la bisettrice dell'angolo F_1PF_2.

Dimostrazione. Cominciamo da un'osservazione sulla regione delimitata dall'ellisse. Se Q è un punto **esterno** all'ellisse, il segmento QF_1 taglia l'ellisse in un punto R (perché F_1 è interno). Allora $QF_1 + QF_2 = QR + RF_1 + QF_2$ e, per la disuguaglianza triangolare nel triangolo QRF_2, $QR + QF_2 > RF_2$. Quindi $QF_1 + QF_2 > RF_1 + RF_2 = 2a$: per i punti esterni la somma delle distanze dai fuochi supera $2a$.

Ora, la tangente t ha in comune con l'ellisse il solo punto P e tutti gli altri suoi punti sono esterni (l'ellisse sta tutta da una parte della tangente). Per ogni Q di t diverso da P vale quindi $QF_1 + QF_2 > 2a = PF_1 + PF_2$: fra tutti i punti di t, P è quello che rende minima la somma delle distanze dai due fuochi, che stanno dalla stessa parte di t. Nel capitolo 5 abbiamo risolto proprio questo problema, il percorso minimo di Erone: il punto di minimo è quello in cui i segmenti verso i due punti formano angoli uguali con la retta. Quindi t forma angoli uguali con PF_1 e PF_2. c.v.d.

In termini fisici: per la legge della riflessione, un raggio di luce, o un'onda sonora, che parte da un fuoco e incontra una superficie ellittica riflettente viene rinviato **nell'altro fuoco**, qualunque sia la direzione in cui è partito (Figura 9.7). E poiché tutti i percorsi $F_1 \to P \to F_2$ hanno la stessa lunghezza $2a$, i segnali partiti insieme da un fuoco arrivano insieme all'altro.

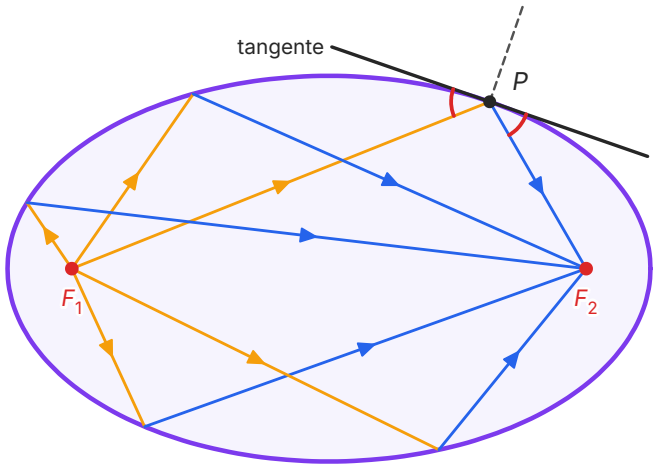


Figura 9.7 La proprietà focale nell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: i raggi che partono da F_1 (in arancio) si riflettono sull'ellisse e passano tutti per F_2 (in blu). Nel punto P sono disegnate la tangente e la normale: gli angoli segnati in rosso, tra la tangente e i due raggi focali, sono uguali. Punti e tangente sono calcolati dall'equazione.

COLLEGAMENTI

Medicina e architettura. Nella *litotrissia extracorporea*, una tecnica usata per frantumare i calcoli renali senza intervento chirurgico, in alcune apparecchiature un'onda d'urto viene generata nel fuoco di un riflettore a forma di ellissoide (la superficie che si ottiene facendo ruotare un'ellisse attorno al suo asse maggiore); il paziente viene posizionato in modo che il calcolo si trovi nell'altro fuoco, dove l'energia si concentra, mentre i tessuti attraversati ricevono un'onda molto meno intensa. In architettura, sotto alcune volte a forma di ellissoide si osserva l'effetto delle *gallerie dei sussurri*: chi parla a bassa voce in un fuoco viene sentito chiaramente nell'altro fuoco, anche a molti metri di distanza, mentre chi sta in mezzo quasi non sente nulla.

SINTESI

- L'**ellisse** di fuochi F_1, F_2 è il luogo dei punti P con $PF_1 + PF_2 = 2a$, dove $2a > F_1F_2 = 2c$; si disegna con la costruzione del giardiniere.
- Con i fuochi in $(\pm c; 0)$ l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $b^2 = a^2 - c^2$; vertici $(\pm a; 0)$ e $(0; \pm b)$.
- Se $b > a$ i fuochi sono sull'asse y, in $(0; \pm c)$, con $c^2 = b^2 - a^2$: i fuochi stanno sull'asse del denominatore maggiore.
- L'ellisse è simmetrica rispetto ai due assi e al centro, ed è limitata: $|x| \le a$, $|y| \le b$.
- I raggi focali del punto $P(x; y)$ sono $a + (c/a)x$ e $a - (c/a)x$ (fuochi sull'asse x).
- L'eccentricità e (semidistanza focale : semiasse maggiore) è compresa tra 0 (circonferenza) e 1 esclusa; $b/a = \sqrt{1 - e^2}$.
- Prima legge di Keplero (1609): i pianeti percorrono ellissi di cui il Sole occupa un fuoco; perielio e afelio distano dal Sole $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$.
- L'equazione canonica dipende da due parametri: per determinarla servono due condizioni; i passaggi per punti diventano lineari nelle incognite $1/a^2$ e $1/b^2$.
- La posizione di una retta rispetto a un'ellisse si legge dal discriminante dell'equazione risolvente; la tangente in P_0 è $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 = 1$ (sdoppiamento).
- L'ellisse è l'immagine di una circonferenza di raggio a con la dilatazione $y' = (b/a)y$; la sua area è πab.
- Un'equazione $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con A, B concordi rappresenta, dopo il completamento dei quadrati, un'ellisse traslata, un punto o nessun punto.
- Proprietà focale: la tangente forma angoli uguali con i raggi focali, quindi ciò che parte da un fuoco si riflette nell'altro.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● I fuochi dell'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ sono:

   A. $(0; \pm 3)$
   B. $(\pm\sqrt{23}; 0)$
   C. $(\pm 3; 0)$
   D. $(\pm 4; 0)$

2. ● L'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ è:

   A. $\frac{3}{5}$

   B. $\frac{4}{5}$

   C. $\frac{3}{4}$

   D. $\frac{5}{3}$

3. ● Quale equazione rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y?

   A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

   B. $4x^2 + y^2 = 16$

   C. $x^2 + y^2 = 9$

   D. $x^2 - 4y^2 = 4$

4. ● Un'ellisse ha semiassi 6 e 2. La sua area è:

   A. 12

   B. 24π

   C. 8π

   D. 12π

5. ●● La retta tangente all'ellisse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ nel punto $(2; 1)$ è:

   A. $x + y = 3$

   B. $2x + y = 5$

   C. $x + 2y - 4 = 0$

   D. $x - 2y = 0$

6. ●● Il centro dell'ellisse $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$ è:

   A. $(-2; 1)$

   B. $(2; -1)$

   C. $(4; -2)$

   D. $(-18; -4)$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) In un'ellisse con i fuochi sull'asse x la semidistanza focale c può essere maggiore di a.
   b) Una circonferenza è un'ellisse con eccentricità 0.
   c) I vertici $(0; \pm b)$ dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, sono i suoi punti più vicini ai fuochi.
   d) Ogni retta che passa per il centro di un'ellisse la taglia in due punti simmetrici rispetto al centro.
   e) L'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ha l'asse maggiore sull'asse x.
   f) Se i fuochi sono sull'asse x, il semiasse minore, la semidistanza focale e il semiasse maggiore sono i lati di un triangolo rettangolo con ipotenusa a.

8. ● Completa.
   a) L'ellisse è il luogo dei punti per i quali è costante la _____ delle distanze da due punti fissi, detti _____ .
   b) Nell'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$, la semidistanza focale è $c =$ _____ .
   c) L'eccentricità di un'ellisse è sempre compresa tra _____ (incluso) e _____ (escluso).
   d) Il punto dell'orbita di un pianeta più vicino al Sole si chiama _____ , quello più lontano _____ .
   e) L'area dell'ellisse di semiassi a e b è _____ .

9. ● Quali di queste equazioni rappresentano un'ellisse? Per ciascuna indica di che curva si tratta (o se non rappresenta alcun punto) e, per le ellissi, dove stanno i fuochi.
   a) $2x^2 + 3y^2 = 6$; b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; c) $3x^2 - y^2 = 3$; d) $x^2 + 4y^2 + 1 = 0$; e) $4x^2 + y^2 - 8x = 0$.

Calcolare

10. ● Per ciascuna ellisse determina i semiassi, i vertici, i fuochi e l'eccentricità.
    a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$; b) $16x^2 + 25y^2 = 400$; c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; d) $x^2 + 4y^2 = 1$.

11. ● Scrivi l'equazione canonica dell'ellisse con centro nell'origine e assi sugli assi cartesiani che ha:
    a) i fuochi sull'asse x, $a = 5$ e $c = 3$;
    b) i fuochi in $(0; \pm 5)$ e il semiasse maggiore lungo 13;
    c) un fuoco in $(2; 0)$ ed eccentricità $\frac{1}{3}$;
    d) l'asse minore lungo 6 e un fuoco in $(-4; 0)$.

12. ●● Trova l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e assi sugli assi cartesiani che passa per i punti $A(2; \sqrt{2})$ e $B(\sqrt{6}; 1)$. Calcolane l'eccentricità.

13. ●● L'ellisse ha i fuochi in $(\pm 3; 0)$ e passa per $P(3; \frac{16}{5})$. Trova la sua equazione in due modi: a) con la definizione, calcolando PF_1 e PF_2; b) con il sistema delle condizioni $a^2 - b^2 = 9$ e passaggio per P.

14. ●● Stabilisci la posizione di ciascuna retta rispetto all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 20$ e trova gli eventuali punti comuni.
a) $y = x - 5$; b) $y = 2$; c) $x + y = 6$.

15. ●● Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse nel punto indicato, dopo aver verificato che il punto le appartiene.
a) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, $(4; 1)$; b) $9x^2 + 16y^2 = 144$, $(-4; 0)$; c) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $(3; -1)$.

16. ●● Trova le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 36$ condotte dal punto $P(5; 0)$ e i punti di contatto.

17. ●● Determina centro, semiassi, vertici, fuochi ed eccentricità dell'ellisse $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ e disegnala.

18. ●● Scrivi, nella forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con coefficienti interi, l'equazione dell'ellisse con centro $(-1; 2)$, semiasse orizzontale 4 e semiasse verticale 3. Trova i fuochi.

19. ●● Riconosci le curve rappresentate dalle equazioni, completando i quadrati.
a) $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$; b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$; c) $x^2 + 3y^2 + 6x + 12 = 0$.

20. ●● a) Quale ellisse si ottiene applicando alla circonferenza $x^2 + y^2 = 16$ la dilatazione $x' = x$, $y' = \frac{1}{2}y$? Qual è la sua area? b) Quale dilatazione verticale trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ nell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$? Confronta le due aree.

21. ●●● a) Risolvi graficamente e algebricamente la disequazione $\sqrt{9 - x^2} > 3 - x$, interpretando $\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ come semiellisse. b) Risolvi l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} = x$ e interpreta la soluzione come intersezione di una semiellisse e di una retta.

Dimostrare e argomentare

22. ● Spiega, con la disuguaglianza triangolare, perché nella definizione di ellisse deve essere $2a > F_1F_2$. Che cosa diventa il luogo se $2a = F_1F_2$?

23. ●● Dimostra che, se $P(x; y)$ appartiene all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con fuochi $F_{1,2}(\mp c; 0)$, allora $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$. *Suggerimento:* sostituisci $y^2 = (a^2 - c^2)(1 - x^2/a^2)$ in $PF_2{}^2$. Deduci che i punti dell'ellisse più vicino e più lontano da F_2 sono i vertici dell'asse maggiore.

24. ●● Dimostra che l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è simmetrica rispetto all'origine e che ogni corda passante per l'origine ha il punto medio nell'origine.

25. ●● Trova l'errore. «Nell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ è $a = 3$ e $b = 5$, quindi $c^2 = a^2 - b^2 = -16$: questa ellisse non ha fuochi.» Correggi e trova fuochi ed eccentricità.

26. ●●● Dimostra che le rette tangenti a un'ellisse negli estremi $P_0(x_0; y_0)$ e $P_1(-x_0; -y_0)$ di una corda passante per il centro sono parallele. *Suggerimento:* usa la formula di sdoppiamento.

Problemi

27. ●● Secondo la NASA (*Mars Fact Sheet*), la distanza di Marte dal Sole varia tra circa 206,65 milioni di km al perielio e circa 249,26 milioni di km all'afelio. Calcola il semiasse maggiore, la semidistanza focale, l'eccentricità e il semiasse minore dell'orbita (in milioni di km, con due decimali). *(Dati NASA, consultati nel 2026.)*

28. ●● Secondo il database del Jet Propulsion Laboratory (consultato nel 2026), la cometa di Halley ha una distanza minima dal Sole di circa 0,575 UA e una distanza massima di circa 35,3 UA. a) Calcola il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita. b) Dimostra che in ogni ellisse $b^2 = (a - c)(a + c)$ e usa questa relazione per calcolare il semiasse minore. Quanto vale b/a?

29. ●● Un giardiniere vuole un'aiuola ellittica con l'asse maggiore di 8 m e l'asse minore di 5 m. A che distanza deve piantare i due picchetti e quanto deve essere lungo il filo legato ai picchetti? Quanti metri quadrati misura l'aiuola?

30. ●● Una sala ha la pianta a forma di ellisse con gli assi di 30 m e di 18 m e un soffitto che riflette il suono. Dove devono mettersi due persone per sentirsi parlando sottovoce? A che distanza stanno l'una dall'altra e dalle pareti più vicine, lungo l'asse maggiore?

31. ●● L'arco di un sottopassaggio ha la forma di una semiellisse larga 12 m alla base e alta 4 m al centro. a) Un camion largo 4 m e alto 3 m, che passa al centro della carreggiata, può transitare? b) Qual è la larghezza massima di un veicolo alto 3 m che passa al centro?

Verso la verifica

32. ●● Un'ellisse con centro nell'origine ha un fuoco in $F(0; 4)$ e passa per $P(\frac{12}{5}; 3)$. a) Trova la sua equazione. b) Calcola l'eccentricità. c) Scrivi la tangente in P. d) Calcola l'area del triangolo che la tangente forma con gli assi cartesiani.

33. ●● Data l'ellisse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 189 = 0$: a) scrivila in forma canonica traslata; b) trova centro, vertici, fuochi ed eccentricità; c) trova i punti in cui taglia l'asse y; d) calcola la sua area.

34. ●●● **Sfida.** Un segmento AB lungo 6 si muove con l'estremo A sull'asse x e l'estremo B sull'asse y. Dimostra che il punto P del segmento con $PA = 2$ descrive un'ellisse e trova i suoi semiassi. *Suggerimento:* poni $A(u; 0)$, $B(0; v)$ con $u^2 + v^2 = 36$ ed esprimi le coordinate di P in funzione di u e v.

PER APPROFONDIRE

- [HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*: il primo capitolo, sulle coniche, con la costruzione del giardiniere e la proprietà focale.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: le coniche nell'antichità e il lavoro di Keplero.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il problema di Erone e il metodo di «guardare l'incognita», che stanno dietro la dimostrazione della proprietà focale.

Glossario del capitolo

Afelio
Punto dell'orbita ellittica di un pianeta (o di una cometa) più lontano dal Sole; dista $a(1 + e)$ dal Sole.

Asse maggiore
Il segmento che congiunge i due vertici dell'ellisse allineati con i fuochi; misura $2a$ (o $2b$, se i fuochi stanno sull'asse y).

Asse minore
Il segmento che congiunge i due vertici dell'ellisse sulla perpendicolare all'asse maggiore per il centro.

Centro dell'ellisse
Il punto medio del segmento che congiunge i fuochi; è centro di simmetria della curva.

Costruzione del giardiniere
Costruzione dell'ellisse con un filo lungo $2a$ fissato nei due fuochi e tenuto teso da una matita.

Distanza focale
La distanza $2c$ tra i due fuochi di un'ellisse.

Eccentricità
Il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore; per l'ellisse è compresa tra 0 (circonferenza) e 1 esclusa.

Ellisse
Luogo dei punti del piano per cui è costante, e maggiore della distanza tra i fuochi, la somma delle distanze da due punti fissi.

Ellisse traslata
Ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani e il centro $C(x_0; y_0)$: $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$.

Equazione canonica dell'ellisse
L'equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani.

Fuochi dell'ellisse
I due punti fissi dai quali ogni punto dell'ellisse ha la stessa somma delle distanze, $2a$.

Perielio
Punto dell'orbita ellittica di un pianeta (o di una cometa) più vicino al Sole; dista $a(1 - e)$ dal Sole.

Prima legge di Keplero
Ogni pianeta descrive un'orbita ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi (Keplero, 1609).

Raggi focali
I segmenti che congiungono un punto dell'ellisse con i due fuochi; la loro somma è $2a$.

Semiassi
Le metà a e b degli assi dell'ellisse; nell'equazione canonica sono le radici dei denominatori.

Semidistanza focale
La distanza c del centro dell'ellisse da ciascun fuoco; $c^2 = a^2 - b^2$ se i fuochi stanno sull'asse x.

Vertici dell'ellisse
I quattro punti in cui l'ellisse taglia i suoi assi di simmetria: $(\pm a; 0)$ e $(0; \pm b)$ per l'equazione canonica.

Soluzioni

1. C. $c^2 = 16 - 7 = 9$, $c = 3$; il denominatore maggiore è quello di x^2.

2. A. $c^2 = 25 - 16 = 9$, $e = c/a = \frac{3}{5}$.

3. B. $4x^2 + y^2 = 16$ è $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$: il denominatore maggiore è quello di y^2. (A ha i fuochi sull'asse x, C è una circonferenza, D non è un'ellisse.)

4. D. $\pi ab = \pi \cdot 6 \cdot 2 = 12\pi$.

5. C. Sdoppiamento: $\frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1$, cioè $x + 2y = 4$. (La retta A passa per il punto ma è secante: l'equazione risolvente $5x^2 - 24x + 28 = 0$ ha $\Delta = 16 > 0$.)

6. B. $9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) = -4$, $9(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = -4 + 36 + 4 = 36$: centro $(2; -1)$.

7. a) F: $c < a$ sempre, perché $a^2 = b^2 + c^2$. b) V. c) F: i punti più vicini ai fuochi sono i vertici $(\pm a; 0)$, a distanza $a - c$ dal fuoco più vicino; $(0; \pm b)$ distano a da entrambi. d) V: l'ellisse è limitata e simmetrica rispetto al centro, e la retta passa per un punto interno. e) F: il denominatore maggiore è quello di y^2, l'asse maggiore è sull'asse y. f) V: $a^2 = b^2 + c^2$.

8. a) somma; fuochi. b) $\sqrt{a^2 - b^2}$. c) 0; 1. d) perielio; afelio. e) πab.

9. a) Ellisse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, fuochi sull'asse x in $(\pm 1; 0)$. b) Circonferenza di centro O e raggio 2 (ellisse con $e = 0$, fuochi coincidenti nel centro). c) Non è un'ellisse: i coefficienti di x^2 e y^2 hanno segno opposto (è un'iperbole, capitolo 10). d) Nessun punto: il primo membro è sempre almeno 1. e) $4(x - 1)^2 + y^2 = 4$, cioè $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$: ellisse traslata di centro $(1; 0)$, fuochi sulla retta $x = 1$, in $(1; \pm\sqrt{3})$.

10. a) $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$, $c = 4$; vertici $(\pm 6; 0)$, $(0; \pm 2\sqrt{5})$; fuochi $(\pm 4; 0)$; $e = \frac{2}{3}$. b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$: $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$; vertici $(\pm 5; 0)$, $(0; \pm 4)$; fuochi $(\pm 3; 0)$; $e = \frac{3}{5}$. c) $a = 3$, $b = 5$, fuochi sull'asse y: $c = 4$; vertici $(\pm 3; 0)$, $(0; \pm 5)$; fuochi $(0; \pm 4)$; $e = \frac{4}{5}$. d) $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$; vertici $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm\frac{1}{2})$; fuochi $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$.

11. a) $b^2 = 25 - 9 = 16$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. b) Fuochi sull'asse y, $b = 13$, $c = 5$, $a^2 = 169 - 25 = 144$: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$. c) $c = 2$, $a = c/e = 6$, $b^2 = 36 - 4 = 32$: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$. d) $b = 3$, $c = 4$, $a^2 = 9 + 16 = 25$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

12. $ux^2 + vy^2 = 1$: $4u + 2v = 1$, $6u + v = 1$; dalla seconda $v = 1 - 6u$, quindi $4u + 2 - 12u = 1$, $u = \frac{1}{8}$, $v = \frac{1}{4}$. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$; $c^2 = 4$, $e = 2/\sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$.

13. a) $PF_2 = \frac{16}{5}$ (stessa ascissa del fuoco), $PF_1 = \sqrt{6^2 + (16/5)^2} = \sqrt{\frac{1156}{25}} = \frac{34}{5}$; $2a = \frac{50}{5} = 10$, $a = 5$, $b^2 = 25 - 9 = 16$. b) $\frac{9}{a^2} + \frac{256}{25b^2} = 1$ con $a^2 = b^2 + 9$: si verifica che $b^2 = 16$, $a^2 = 25$ soddisfa il sistema ($\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$), ed è l'unica soluzione con $b^2 > 0$ (l'equazione in b^2 diventa $25b^4 - 256b^2 - 2304 = 0$, con radici 16 e $-5{,}76$). In entrambi i modi: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

14. a) $x^2 + 4(x - 5)^2 = 20$, $x^2 - 8x + 16 = 0$: $\Delta = 0$, tangente in $(4; -1)$. b) $x^2 + 16 = 20$, $x = \pm 2$: secante, in $(-2; 2)$ e $(2; 2)$. c) $x^2 + 4(6 - x)^2 = 20$, $5x^2 - 48x + 124 = 0$: $\Delta = 2304 - 2480 = -176 < 0$, esterna.

15. a) $\frac{16}{20} + \frac{1}{5} = 1$ ✓; $\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1$, cioè $x + y = 5$. b) $144 + 0 = 144$ ✓; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, tangente $\frac{-4x}{16} = 1$, cioè $x = -4$ (verticale, nel vertice). c) $\frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1$ ✓; $\frac{3x}{12} - \frac{y}{4} = 1$, cioè $x - y = 4$.

16. Fascio $y = m(x - 5)$ (la retta $x = 5$ è esterna): $(4 + 9m^2)x^2 - 90m^2x + 225m^2 - 36 = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 2025m^4 - (4 + 9m^2)(225m^2 - 36) = 144 - 576m^2 = 0$ per $m = \pm\frac{1}{2}$. Tangenti $y = \frac{1}{2}(x - 5)$ e $y = -\frac{1}{2}(x - 5)$, cioè $x - 2y - 5 = 0$ e $x + 2y - 5 = 0$; punti di contatto $(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5})$ e $(\frac{9}{5}; \frac{8}{5})$.

17. $(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 1 + 16 - 13 = 4$, $\frac{(x-1)^2}{4} + (y - 2)^2 = 1$. Centro $(1; 2)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$; vertici $(-1; 2)$, $(3; 2)$, $(1; 1)$, $(1; 3)$; fuochi $(1 \pm \sqrt{3}; 2)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$; $9(x + 1)^2 + 16(y - 2)^2 = 144$, $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$. $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$: fuochi $(-1 \pm \sqrt{7}; 2)$.

19. a) $4(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = -9 + 4 + 9 = 4$: ellisse $(x + 1)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, centro $(-1; 3)$, semiassi 1 e 2. b) $(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = -6 + 4 + 2 = 0$: il solo punto $(2; -1)$. c) $(x + 3)^2 + 3y^2 = -12 + 9 = -3$: nessun punto.

20. a) $x = x'$, $y = 2y'$: $x'^2 + 4y'^2 = 16$, cioè $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; area $\pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi$, metà del cerchio (16π). b) $y' = \frac{5}{3}y$; area $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi = \frac{5}{3} \cdot 9\pi$.

21. a) C.E. $-3 \le x \le 3$; moltiplicando i due membri per $\frac{2}{3}$ si ottiene $\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} > 2 - \frac{2}{3}x$. A sinistra la semiellisse superiore di $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, a destra la retta per i vertici $(3; 0)$ e $(0; 2)$: la semiellisse sta sopra la corda tra questi vertici, cioè per $0 < x < 3$. Algebricamente: nel dominio $3 - x \ge 0$, si può elevare al quadrato: $9 - x^2 > 9 - 6x + x^2$, $2x(x - 3) < 0$, $0 < x < 3$. b) Serve $x \ge 0$; $4(9 - x^2) = 9x^2$, $x^2 = \frac{36}{13}$, $x = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13} \approx 1{,}66$ (la radice negativa è da scartare): è l'ascissa del punto in cui la retta $y = x$ taglia la semiellisse.

22. Nel triangolo PF_1F_2 ogni lato è minore della somma degli altri due: $F_1F_2 < PF_1 + PF_2 = 2a$. Se $2a = F_1F_2$, vale l'uguaglianza solo per i punti allineati e compresi fra i fuochi: il luogo è il segmento F_1F_2.

23. $PF_2{}^2 = (x - c)^2 + (a^2 - c^2)(1 - x^2/a^2) = x^2 - 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + c^2x^2/a^2 = a^2 - 2cx + c^2x^2/a^2 = (a - cx/a)^2$. Poiché $|x| \le a$, $|cx/a| \le c < a$ e $a - cx/a > 0$: $PF_2 = a - (c/a)x$. La distanza decresce al crescere di x: è minima $(a - c)$ per $x = a$, nel vertice A_2, e massima $(a + c)$ per $x = -a$, nel vertice A_1. c.v.d.

24. Se $(x; y)$ soddisfa l'equazione, anche $(-x; -y)$ la soddisfa, perché $(-x)^2 = x^2$ e $(-y)^2 = y^2$: l'ellisse è simmetrica rispetto all'origine. Una retta per l'origine la taglia in due punti (l'origine è interna) e, per la simmetria, se $P(x_1; y_1)$ è uno dei due, l'altro è $(-x_1; -y_1)$: il punto medio della corda è $(0; 0)$. c.v.d.

25. L'errore è usare $c^2 = a^2 - b^2$ anche quando i fuochi sono sull'asse y. Qui il denominatore maggiore è quello di y^2: $c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$, fuochi $(0; \pm 4)$, $e = c/b = \frac{4}{5}$.

26. Le tangenti sono $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ e $\frac{-x_0x}{a^2} + \frac{-y_0y}{b^2} = 1$, cioè $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = -1$. I primi membri sono uguali e i termini noti diversi: le due rette hanno gli stessi coefficienti di x e di y, quindi sono parallele (e distinte). c.v.d.

27. $a = (206{,}65 + 249{,}26) : 2 \approx 227{,}96$ milioni di km; $c = (249{,}26 - 206{,}65) : 2 \approx 21{,}31$ milioni di km; $e = c/a \approx 0{,}0935$; $b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx 226{,}96$ milioni di km. Il Sole dista circa 21,31 milioni di km dal centro dell'orbita.

28. a) $a = (0{,}575 + 35{,}3) : 2 \approx 17{,}94$ UA, $c = (35{,}3 - 0{,}575) : 2 \approx 17{,}36$ UA, $e \approx 0{,}968$. b) $b^2 = a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$: il prodotto delle distanze al perielio e all'afelio. $b = \sqrt{0{,}575 \cdot 35{,}3} \approx 4{,}51$ UA; $b/a \approx 0{,}25$: l'orbita è circa quattro volte più lunga che larga.

29. $a = 4$ m, $b = 2{,}5$ m, $c = \sqrt{16 - 6{,}25} = \sqrt{9{,}75} \approx 3{,}12$ m: i picchetti vanno piantati sull'asse maggiore a circa 3,12 m dal centro, cioè a circa 6,24 m l'uno dall'altro. Il filo è lungo $2a = 8$ m. Area $\pi \cdot 4 \cdot 2{,}5 = 10\pi \approx 31{,}4$ m^2.

30. Nei fuochi: $a = 15$ m, $b = 9$ m, $c = \sqrt{225 - 81} = 12$ m. Le due persone stanno sull'asse maggiore, a 12 m dal centro da parti opposte, cioè a 24 m l'una dall'altra e a $15 - 12 = 3$ m dalla parete più vicina.

31. Riferimento: centro della base nell'origine, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ con $y \geq 0$. a) A $x = \pm 2$ l'altezza è $4\sqrt{1 - 4/36} \approx 3{,}77$ m > 3 m: il camion passa. b) $y = 3$: $x^2/36 = 1 - 9/16$, $x = \frac{6\sqrt{7}}{4} \approx 3{,}97$ m: larghezza massima circa 7,94 m.

32. a) Fuochi sull'asse y, $c = 4$, $b^2 = a^2 + 16$; passaggio per P: $\frac{144}{25a^2} + \frac{9}{a^2 + 16} = 1$, che dà $25a^4 + 31a^2 - 2304 = 0$, con l'unica radice positiva $a^2 = 9$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. b) $e = c/b = \frac{4}{5}$. c) $\frac{\frac{12}{5}x}{9} + \frac{3y}{25} = 1$, cioè $20x + 9y = 75$. d) Intersezioni con gli assi $(\frac{15}{4}; 0)$ e $(0; \frac{25}{3})$: area $\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{25}{3} = \frac{125}{8} = 15{,}625$.

33. a) $9(x - 2)^2 + 25y^2 = 189 + 36 = 225$: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. b) Centro $(2; 0)$, vertici $(-3; 0)$, $(7; 0)$, $(2; \pm 3)$; $c = 4$, fuochi $(-2; 0)$ e $(6; 0)$; $e = \frac{4}{5}$. c) $x = 0$: $25y^2 = 189$, $y = \pm\frac{3\sqrt{21}}{5} \approx \pm 2{,}75$. d) $15\pi \approx 47{,}1$.

34. Da $PA = 2$ e $AB = 6$: $P = A + \frac{1}{3}(B - A)$, cioè $P(\frac{2u}{3}; \frac{v}{3})$. Quindi $u = \frac{3x}{2}$, $v = 3y$ e $u^2 + v^2 = 36$ diventa $\frac{9x^2}{4} + 9y^2 = 36$, cioè $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viceversa, ogni punto di questa ellisse si ottiene da una posizione del segmento (basta porre $u = 3x/2$, $v = 3y$). È un'ellisse di semiassi $a = 4 = PB$ e $b = 2 = PA$.