CAPITOLO

8

Il cerchio, il numero π e i numeri reali

Un poligono non diventa mai un cerchio, ma due poligoni bastano a dire dove il cerchio si trova.
(testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire lunghezza della circonferenza e area del cerchio con le classi contigue dei poligoni regolari inscritti e circoscritti.
2. Dimostrare che l'area del cerchio è $\tfrac{1}{2}Cr = \pi r^2$ e ricostruire il calcolo di Archimede con la formula di duplicazione.
3. Calcolare archi, settori, segmenti circolari e corone, in gradi e in radianti.
4. Distinguere numeri razionali, irrazionali algebrici e trascendenti, e spiegare perché la quadratura del cerchio è impossibile.
5. Valutare l'errore di un'approssimazione di π e scegliere le cifre necessarie in un calcolo.
6. Descrivere la costruzione dei numeri reali di Dedekind e confrontare la cardinalità di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 Il problema dell'area del cerchio 2
8.2 Il metodo di Archimede 6
8.3 Archi, settori, segmenti e corone 9
8.4 Il numero π 11
8.5 I numeri reali 14
8.6 L'infinito matematico 16

Matematica 3 · Parte II · Retta, parabola e circonferenza · versione 1.0
Capitolo 8: Il cerchio, il numero π e i numeri reali · pagine 195–218 del volume completo · estratto per lo studio

Che cos'è, esattamente, l'area di un cerchio? Per un rettangolo la risposta è semplice: si conta quante volte ci sta dentro un quadratino unitario, e se i lati non sono interi si ricorre alle classi contigue che conosci dal volume dello scorso anno. Ma un cerchio non si lascia scomporre in quadratini, né in triangoli, né in alcun numero finito di poligoni: il suo bordo è curvo in ogni punto. Le formule $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, che usi dalla scuola media, presuppongono quindi che lunghezza della circonferenza e area del cerchio abbiano già un significato. In questo capitolo lo costruiamo, seguendo l'idea con cui Archimede, nel III secolo a.C., chiuse il cerchio tra due famiglie di poligoni.

Il problema dell'area del cerchio porta lontano. Il numero π che ne esce non è razionale e non è nemmeno la soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi: è un numero **trascendente**, e per questo il problema classico della quadratura del cerchio non ha soluzione con riga e compasso. Per dire che cosa sia un numero come π dovremo poi rispondere a una domanda più radicale: che cos'è un numero reale? Infine scopriremo che gli infiniti non sono tutti uguali: i numeri reali sono «più numerosi» dei razionali, in un senso preciso che Georg Cantor rese rigoroso alla fine dell'Ottocento. È il momento del corso in cui la matematica incontra più da vicino la filosofia.

8.1 Il problema dell'area del cerchio

8.1.1 Poligoni inscritti e circoscritti

Fissiamo una circonferenza di centro O e raggio r. Nel volume dello scorso anno hai studiato i poligoni regolari inscritti e circoscritti: il poligono regolare di n lati **inscritto** ha i vertici sulla circonferenza; quello **circoscritto** ha i lati tangenti alla circonferenza, e il suo apotema è il raggio r. Indichiamo con l_n il lato dell'n-agono inscritto, con p_n il suo **semiperimetro** e con P_n il semiperimetro dell'n-agono circoscritto. Usiamo i semiperimetri, invece dei perimetri, perché i numeri che otterremo andranno confrontati con π.

Partiamo dall'esagono (Figura 8.1). L'esagono regolare inscritto è formato da sei triangoli equilateri di lato r, quindi $l_6 = r$ e $p_6 = 3r$. L'esagono circoscritto è formato da sei triangoli equilateri di altezza r: il loro lato è $\dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} r$, e il semiperimetro è $P_6 = 2\sqrt{3}\, r \approx 3{,}464\, r$. Raddoppiando il numero dei lati otteniamo il dodecagono, poi il poligono di 24 lati, e così via: i poligoni inscritti si allargano verso la circonferenza, quelli circoscritti si stringono attorno a essa.

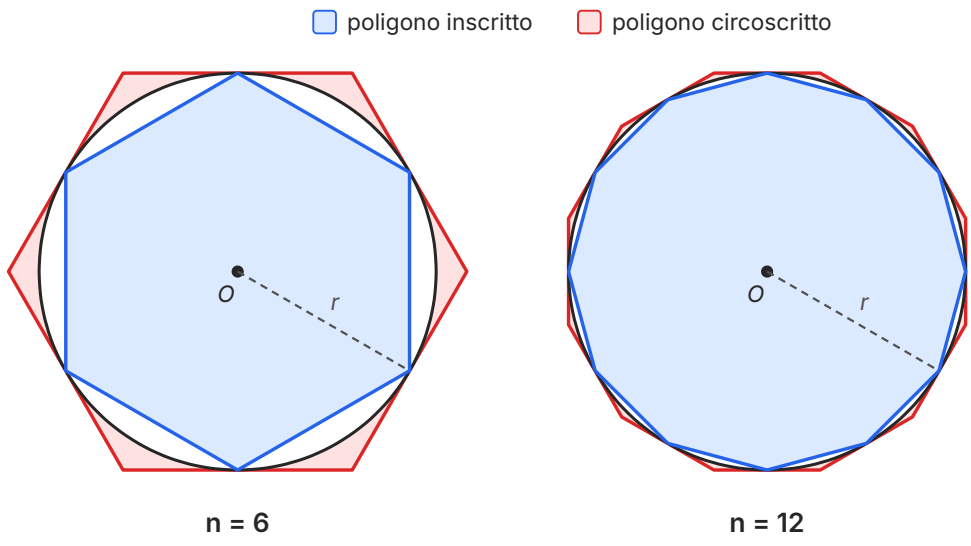


Figura 8.1 Esagono e dodecagono regolari, inscritti (azzurro) e circoscritti (rosso) alla stessa circonferenza di raggio r. Raddoppiando il numero dei lati, il poligono inscritto e quello circoscritto si avvicinano alla circonferenza e tra loro.

8.1.2 Due successioni che si stringono

Consideriamo le due successioni dei semiperimetri, ottenute raddoppiando ogni volta il numero dei lati:

$$p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ p_{48},\ \ldots \qquad P_6,\ P_{12},\ P_{24},\ P_{48},\ \ldots$$

Nel capitolo 4 hai visto che cosa vuol dire che una successione è crescente, decrescente, limitata. Qui le due successioni hanno tre proprietà.

- **La prima è crescente.** Quando si passa dall'n-agono al $2n$-agono inscritto, ogni lato AB viene sostituito dalla spezzata $AM + MB$, dove M è il punto medio dell'arco AB. Per la disuguaglianza triangolare $AM + MB > AB$: il perimetro aumenta.
- **La seconda è decrescente.** Passando dall'n-agono al $2n$-agono circoscritto si «tagliano gli spigoli»: in ogni vertice, due mezzi lati che formano un angolo sono sostituiti da un unico segmento che li congiunge, più corto per la disuguaglianza triangolare (lo dimostrerai negli esercizi).
- **Ogni elemento della prima è minore di ogni elemento della seconda**, e la differenza $P_n - p_n$ diventa piccola quanto si vuole al crescere di n. Infatti il poligono circoscritto è l'ingrandimento di quello inscritto nel rapporto $r : a_n$, dove a_n è l'apotema del poligono inscritto, e questo rapporto si avvicina a 1 quanto si vuole quando i lati si accorciano.

Le due successioni formano quindi due **classi contigue** di numeri reali. Ricorda dal volume dello scorso anno che due classi contigue hanno uno e un solo **elemento separatore**: un numero maggiore o uguale a tutti gli elementi della prima classe e minore o uguale a tutti quelli della seconda. L'intuizione dice che la circonferenza «sta in mezzo» tra i poligoni inscritti e i circoscritti; la matematica trasforma l'intuizione in una definizione.

IN SINTESI

Definizione. La **lunghezza della circonferenza** è l'elemento separatore delle classi contigue formate dai perimetri dei poligoni regolari inscritti e dai perimetri dei poligoni regolari circoscritti (ottenuti raddoppiando il numero dei lati).

L'**area del cerchio** è l'elemento separatore delle classi contigue formate dalle aree dei poligoni regolari inscritti e dalle aree dei poligoni regolari circoscritti.

Pi greco (π) è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro; non dipende dalla circonferenza scelta.

Perché il rapporto tra circonferenza e diametro non cambia da una circonferenza all'altra? Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili, e i loro perimetri stanno nel rapporto dei raggi delle circonferenze circoscritte. Se raddoppiamo il raggio raddoppiano tutti i perimetri p_n e P_n, quindi raddoppia anche l'elemento separatore. Il rapporto $C : (2r)$ è perciò lo stesso per tutte le circonferenze, e lo chiamiamo π:

$$C = 2\pi r.$$

Con $r = 1$ il semiperimetro p_n è un'approssimazione per difetto di π e P_n un'approssimazione per eccesso. L'esagono dice già che $3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.

8.1.3 Dall'area dei poligoni all'area del cerchio

Un poligono regolare di n lati si scompone in n triangoli isosceli con il vertice nel centro; ciascuno ha per base un lato e per altezza l'apotema. Sommando le aree si trova la formula che conosci: **l'area di un poligono regolare è il prodotto del semiperimetro per l'apotema**. Per il poligono circoscritto l'apotema è il raggio, quindi la sua area è $P_n \cdot r$; per quello inscritto l'area è $p_n \cdot a_n$, con $a_n < r$.

IN SINTESI

Teorema (Archimede). **Ipotesi:** un cerchio di raggio r e la sua circonferenza, lunga C. **Tesi:** l'area del cerchio è $A = \frac{1}{2} C \cdot r$, cioè l'area di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio e la circonferenza rettificata. Di conseguenza $A = \pi r^2$.

Dimostrazione. Basta mostrare che il numero $\frac{1}{2}Cr$ è un elemento separatore delle due classi di aree: poiché l'elemento separatore è unico, sarà l'area del cerchio. Per ogni n, il semiperimetro inscritto è minore di metà circonferenza, $p_n < \frac{C}{2}$, e l'apotema è minore del raggio; quindi l'area del poligono inscritto è $p_n \cdot a_n < \frac{C}{2} \cdot r$. Il semiperimetro circoscritto è maggiore di metà circonferenza, $P_n > \frac{C}{2}$, quindi l'area del poligono circoscritto è $P_n \cdot r > \frac{C}{2} \cdot r$. Il numero $\frac{1}{2}Cr$ sta dunque tra tutte le aree inscritte e tutte le aree circoscritte. Infine, sostituendo $C = 2\pi r$, si ha $A = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$. c.v.d.

La Figura 8.2 mostra l'idea in modo visivo. Tagliamo il cerchio in molti settori uguali e accostiamoli a incastro, una volta con la punta in su e una volta con la punta in giù. La figura che si ottiene somiglia a un parallelogramma con base uguale a metà circonferenza, πr, e altezza quasi uguale al raggio. Più i settori sono sottili, più la somiglianza migliora: è l'immagine del cerchio come «poligono regolare con infiniti lati», il cui apotema è il raggio. L'immagine aiuta a ricordare la formula, ma non la dimostra: la dimostrazione è quella con le classi contigue.

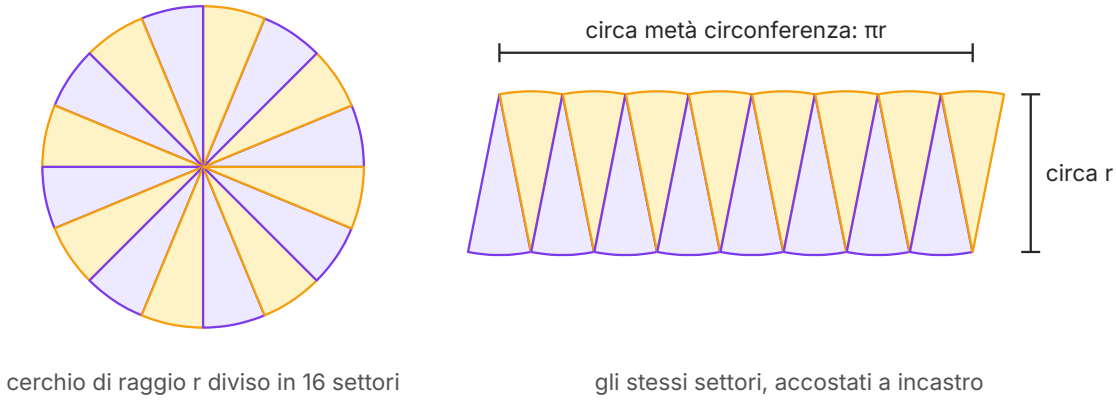


Figura 8.2 Il cerchio diviso in 16 settori uguali (a sinistra) e gli stessi settori accostati a incastro (a destra). La figura ha la stessa area del cerchio e somiglia a un parallelogramma di base πr (metà circonferenza) e altezza circa r; con settori sempre più sottili la somiglianza migliora.

Lunghezza della circonferenza e area del cerchio, dunque, non si «misurano»: si **definiscono**, e le formule $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$ sono teoremi. Lo stesso numero π compare in entrambe proprio grazie al teorema di Archimede.

8.2 Il metodo di Archimede

8.2.1 La formula di duplicazione

Per stimare π servono i lati dei poligoni con 12, 24, 48, … lati. Non occorre la trigonometria: basta il teorema di Pitagora. Sia $AB = l_n$ il lato dell'n-agono regolare inscritto, sia M il punto medio dell'arco AB e H il punto medio della corda (Figura 8.3). Il raggio OM è perpendicolare alla corda in H, e AM è il lato l_{2n} del $2n$-agono inscritto.

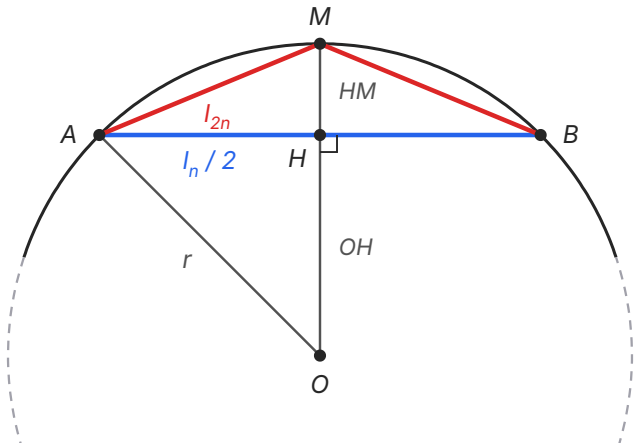


Figura 8.3 Dalla corda AB, lato del poligono di n lati, alla corda AM, lato del poligono di $2n$ lati. Il raggio OM passa per il punto medio M dell'arco ed è perpendicolare alla corda nel suo punto medio H. Nella figura $n = 4$: AB è il lato del quadrato inscritto e AM quello dell'ottagono.

Nel triangolo rettangolo OAH: $OH = \sqrt{r^2 - l_n^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$. Quindi $HM = r - OH$. Nel triangolo rettangolo AHM:

$$l_{2n}^2 = AH^2 + HM^2 = \frac{l_n^2}{4} + r^2 - 2r \cdot OH + OH^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2},$$

perché $OH^2 = r^2 - l_n^2/4$ e i termini con $l_n^2/4$ si cancellano. Abbiamo ottenuto la **formula di duplicazione**:

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

Per il poligono circoscritto ricorriamo alla similitudine: l'n-agono circoscritto è l'ingrandimento dell'n-agono inscritto nel rapporto tra il raggio e l'apotema OH, quindi il suo lato è $L_n = l_n \cdot \frac{r}{OH} = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$.

ESEMPIO SVOLTO

Dal quadrato all'ottagono e dall'esagono al dodecagono. In una circonferenza di raggio $r = 1$ calcola in forma esatta il lato dell'ottagono e del dodecagono regolari inscritti, e le stime di π che danno.

Ottagono. Il lato del quadrato inscritto è la corda di un angolo retto: $l_4 = \sqrt{2}$. La formula di duplicazione dà $l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0{,}7654$. Il semiperimetro dell'ottagono è $4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3{,}0615$: quindi $\pi > 3{,}06$.

Dodecagono. Dall'esagono, $l_6 = 1$: $l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}517\,638$. Il semiperimetro è $6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}105\,829$, e per il dodecagono circoscritto $P_{12} = \dfrac{6 \cdot 2l_{12}}{\sqrt{4 - l_{12}^2}} \approx 3{,}215\,390$. Quindi $3{,}1058 < \pi < 3{,}2154$.

Controllo. Si può verificare che $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$: elevando al quadrato il secondo membro si ottiene $\dfrac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{4} = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$.

8.2.2 Fino al poligono di 96 lati

Ripetendo la duplicazione a partire dall'esagono si ottengono i valori della Tabella 8.1, rappresentati nella Figura 8.4. A ogni passo la forbice tra p_n e P_n si riduce a circa un quarto: con 96 lati π è determinato con due cifre decimali esatte, $3{,}1410 < \pi < 3{,}1428$.

Tabella 8.1 Il metodo di Archimede con i calcoli di oggi ($r = 1$): lato l_n del poligono inscritto, semiperimetri p_n del poligono inscritto e P_n del poligono circoscritto, arrotondati alla sesta cifra decimale.

n	l_n	p_n	P_n	$P_n - p_n$
6	1,000000	3,000000	3,464102	0,464102
12	0,517638	3,105829	3,215390	0,109562
24	0,261052	3,132629	3,159660	0,027031
48	0,130806	3,139350	3,146086	0,006736
96	0,065438	3,141032	3,142715	0,001683

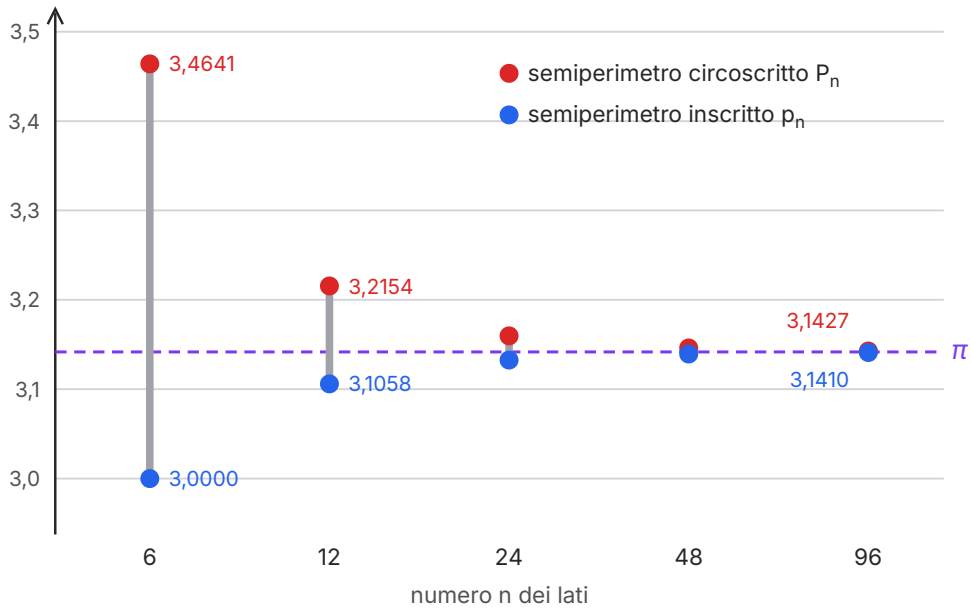


Figura 8.4 Le stime di π date dai semiperimetri dei poligoni regolari inscritti (azzurro) e circoscritti (rosso) in una circonferenza di raggio 1, da 6 a 96 lati. I valori sono quelli della Tabella 8.1; la retta tratteggiata è π.

Archimede, nella sua opera *La misura del cerchio*, seguì proprio questo percorso, da 6 a 96 lati, ma senza calcolatrice e senza la nostra scrittura decimale. Ogni radice quadrata andava approssimata con una frazione, e ogni approssimazione doveva essere scelta nel verso giusto: per difetto quando serviva un numero più piccolo, per eccesso quando ne serviva uno più grande, così che le disuguaglianze restassero vere. Il risultato fu

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

ossia 3,1408… < π < 3,1428…: una forbice un po' più larga di quella della tabella, il prezzo pagato per le frazioni prudenti.

APPROFONDIMENTO · LA MISURA DEL CERCHIO

La *Misura del cerchio* di Archimede di Siracusa (III secolo a.C.) ci è giunta in forma breve e forse incompleta: contiene tre proposizioni. La prima afferma che ogni cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza: è il teorema dimostrato in questo capitolo. Archimede lo prova per assurdo, mostrando che l'area del cerchio non può essere né maggiore né minore di quella del triangolo, con il **metodo di esaustione**: i poligoni inscritti e circoscritti «esauriscono» la differenza tra il cerchio e il triangolo. La terza proposizione contiene le stime $223/71 < \pi < 22/7$, ottenute con i poligoni di 96 lati; per partire, Archimede usa due frazioni che racchiudono $\sqrt{3}$, cioè $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$.

Il ragionamento per esaustione fa a meno della nozione di numero reale, che i Greci non avevano: confronta grandezze geometriche, mai numeri irrazionali. Le classi contigue che abbiamo usato ne sono la traduzione moderna.

Con il computer

In un foglio di calcolo bastano poche celle: nella colonna A il numero dei lati (6, poi ogni cella è il doppio della precedente), nella colonna B il lato con $r = 1$ (1, poi la formula di duplicazione), nella colonna C il semiperimetro =A2*B2/2. Copiando le formule verso il basso, i valori si avvicinano a π fino a sette cifre decimali esatte, 3,141 592 6..., intorno ai 25 000 lati; poi, sorprendentemente, peggiorano. Con poco meno di un miliardo di lati il foglio dà 6, e subito dopo 0. Non è un errore di Archimede: è un errore di **calcolo approssimato**. Il computer memorizza circa 15–16 cifre significative; quando l_n è molto piccolo, $\sqrt{4 - l_n^2}$ è vicinissimo a 2 e nella differenza $2 - \sqrt{4 - l_n^2}$ quasi tutte le cifre si cancellano. Moltiplicando numeratore e denominatore per $2 + \sqrt{4 - l_n^2}$ si ottiene una formula equivalente che evita la sottrazione,

$$l_{2n} = \frac{l_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - l_n^2}}} \qquad (r = 1),$$

e con questa i valori si stabilizzano su 3,141 592 653 589 79, il massimo che il foglio può mostrare. Due formule algebricamente uguali possono comportarsi in modo molto diverso nel calcolo approssimato.

8.3 Archi, settori, segmenti e corone

Nel volume dello scorso anno hai definito la misura in radianti: un angolo al centro α insiste su un arco lungo $l = \alpha r$. Ora che l'area del cerchio è un teorema, possiamo calcolare l'area delle parti di cerchio della Figura 8.5. Un **settore circolare** è la parte di cerchio compresa tra due raggi; la sua area è proporzionale all'angolo al centro, perché settori con angoli uguali sono congruenti. L'intero cerchio corrisponde all'angolo 2π, quindi il settore di angolo α ha area

$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\alpha r^2$. Poiché $\alpha r = l$, l'area si scrive anche $\frac{1}{2}lr$: il settore si comporta come un triangolo di base l'arco e altezza il raggio, esattamente come il cerchio intero.

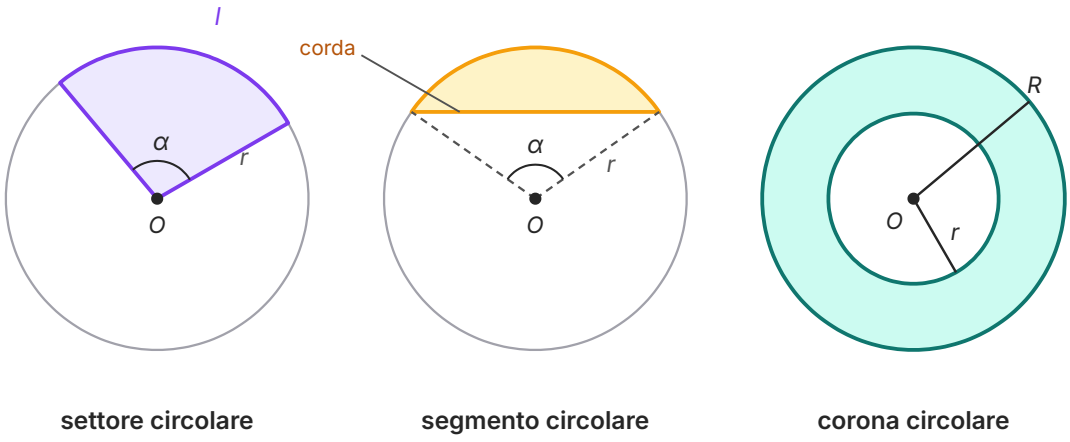


Figura 8.5 Tre parti di cerchio: il settore circolare di angolo al centro α e arco *l*; il segmento circolare a una base, compreso tra un arco e la sua corda; la corona circolare, compresa tra due circonferenze concentriche di raggi *R* e *r*.

Un **segmento circolare** (a una base) è la parte di cerchio compresa tra un arco e la sua corda: se $\alpha \le \pi$, la sua area è quella del settore meno quella del triangolo isoscele che ha per lati due raggi e la corda. L'area del triangolo è $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\alpha$, per la formula dell'area con il seno che conosci; se α è maggiore di un angolo piatto il triangolo va sommato al settore invece che sottratto, e la formula $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$ resta valida perché il seno diventa negativo. Una **corona circolare** è la parte di piano tra due circonferenze concentriche: la sua area è la differenza delle aree dei due cerchi.

IN SINTESI

Cerchio di raggio r, angolo al centro α in radianti (in gradi: $\alpha = \alpha^\circ \cdot \pi/180^\circ$):

- arco: $l = \alpha r$; in gradi $l = \dfrac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$;
- settore: $A_s = \dfrac{1}{2}\alpha r^2 = \dfrac{1}{2} l r$; in gradi $A_s = \dfrac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$;
- segmento circolare: $A_{seg} = \dfrac{1}{2} r^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$;
- corona di raggi $R > r$: $A = \pi(R^2 - r^2)$.

ERRORE FREQUENTE

Usare l'angolo in gradi nella formula $\dfrac{1}{2}\alpha r^2$. Per un settore di 60° in un cerchio di raggio 3 cm, scrivere $\tfrac{1}{2} \cdot 60 \cdot 9 = 270$ cm² dà un'area più grande del cerchio intero (circa 28 cm²)! Le formule con α «nudo» valgono solo in radianti: $60^\circ = \pi/3$, e l'area corretta è $\tfrac{1}{2} \cdot \pi/3 \cdot 9 = 3\pi/2$ cm² ≈ 4,71 cm². Un controllo di buon senso: un settore di 60° è un sesto del cerchio, e $9\pi/6 = 3\pi/2$.

ESEMPIO SVOLTO

Un segmento circolare. In un cerchio di raggio 6 cm una corda è lunga 6 cm. Calcola l'area del segmento circolare minore che essa stacca.

La corda è lunga quanto il raggio, quindi il triangolo formato dalla corda e dai due raggi è equilatero e l'angolo al centro è $\alpha = 60^\circ = \pi/3$. Il settore ha area $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{3} \cdot 36 = 6\pi$ cm²; il triangolo equilatero di lato 6 cm ha area $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$ cm². Il segmento ha area $6\pi - 9\sqrt{3} \approx 18{,}850 - 15{,}588 = 3{,}26$ cm². Con la formula generale: $\dfrac{1}{2} \cdot 36 \cdot \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi - 9\sqrt{3}$, lo stesso risultato.

8.4 Il numero π

8.4.1 Irrazionale e trascendente

Le stime di Archimede chiudono π tra due frazioni, ma π non è una frazione. Nel 1761 Johann Heinrich Lambert dimostrò che π è **irrazionale**: il suo sviluppo decimale è illimitato e non periodico, e nessuna frazione, per quanto complicata, gli è uguale. Le approssimazioni 22/7 e 355/113 sono ottime, ma restano approssimazioni.

Più di un secolo dopo si scoprì qualcosa di più profondo. Per capirlo dobbiamo dividere i numeri reali in due grandi famiglie. Un numero reale si dice **numero algebrico** se è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi, non tutti nulli; in caso contrario si dice **numero trascendente**. Ogni razionale a/b è algebrico, perché è soluzione di $bx - a = 0$. Molti irrazionali sono algebrici: $\sqrt{2}$ è soluzione di $x^2 - 2 = 0$, $\sqrt[3]{5}$ di $x^3 - 5 = 0$, il numero aureo di $x^2 - x - 1 = 0$.

Anche numeri dall'aspetto più complicato possono essere algebrici. Se $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, allora $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, cioè $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$; elevando ancora al quadrato si ottiene $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$: ogni elevamento al quadrato toglie una radice, come nelle equazioni irrazionali del capitolo 2 percorse al contrario. Ogni numero trascendente è irrazionale, ma non ogni irrazionale è trascendente: $\sqrt{2}$ è irrazionale e algebrico.

Nel 1873 Charles Hermite dimostrò che il numero e, che incontreremo nel capitolo 12, è trascendente: fu il primo numero importante della matematica, non costruito apposta, di cui si dimostrò la trascendenza (i primi esempi di numeri trascendenti erano stati costruiti artificialmente da Joseph Liouville). Nel 1882 Ferdinand von Lindemann fece lo stesso per π.

> **IN SINTESI**
> **Teorema** (Lindemann, 1882). π è un numero trascendente: non esiste alcun polinomio a coefficienti interi, non tutti nulli, che si annulli in π.

8.4.2 L'impossibile quadratura del cerchio

Il teorema di Lindemann chiuse un problema aperto da più di duemila anni: la **quadratura del cerchio**, cioè la costruzione con riga e compasso, in un numero finito di passi, di un quadrato equivalente a un cerchio dato. Se il cerchio ha raggio 1, il quadrato deve avere lato $\sqrt{\pi}$. Le costruzioni con riga e compasso intersecano rette e circonferenze, cioè risolvono equazioni di primo e di secondo grado: si dimostra che, partendo da un segmento unitario, si possono costruire solo segmenti la cui lunghezza è un numero algebrico (enunciamo il fatto senza dimostrarlo). Se si potesse costruire un segmento lungo $\sqrt{\pi}$, si potrebbe costruire anche un segmento lungo π, con la costruzione del prodotto basata sul teorema di Talete; ma π non è algebrico. Quindi **la quadratura del cerchio con riga e compasso è impossibile**. Non è un problema ancora non risolto: è un problema risolto, con risposta negativa.

8.4.3 Calcolo approssimato: quante cifre di π servono?

Ricordi dal volume dello scorso anno l'**errore assoluto** $|x - a|$ e l'**errore relativo**, il rapporto tra errore assoluto e valore esatto. La Tabella 8.2 confronta quattro approssimazioni di π. Nota che 22/7, l'approssimazione per eccesso di Archimede, è un po' migliore di 3,14, e che 355/113, attribuita al matematico cinese Zu Chongzhi (V secolo), sbaglia meno di tre decimilionesimi con sole sei cifre tra numeratore e denominatore.

Tabella 8.2 Quattro approssimazioni di π e i loro errori (π = 3,141 592 653 5…).

Approssimazione	Errore assoluto	Errore relativo
3,14 (per difetto)	0,001 59	0,051%
22/7 = 3,142 857… (per eccesso)	0,001 26	0,040%
3,1416 (per eccesso)	0,000 007 3	0,000 23%
355/113 = 3,141 592 9… (per eccesso)	0,000 000 27	0,000 008 5%

Quante cifre di π occorrono in un calcolo dipende dalla precisione che si vuole nel risultato. In un prodotto come $C = 2\pi R$ l'errore relativo di π passa, praticamente invariato, al risultato: l'errore assoluto viene invece moltiplicato per $2R$.

ESEMPIO SVOLTO

La circonferenza della Terra. Assumiamo per la Terra una sfera di raggio $R = 6371$ km (il raggio medio terrestre, arrotondato al chilometro). Calcola la lunghezza di una circonferenza massima con $\pi \approx 3{,}14$ e con $\pi \approx 3{,}1416$. Quante cifre di π servono per avere il risultato con un errore minore di un metro?

Con 3,14: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 6371$ km = 40 009,88 km. Con 3,1416: $2 \cdot 3{,}1416 \cdot 6371$ km = 40 030,27 km. Il valore che si ottiene con π alla precisione della calcolatrice è 40 030,17 km. Il primo risultato sbaglia di circa 20 km, il secondo di circa 94 m: in entrambi i casi l'errore relativo è quello di π (0,051% e 0,000 23%).

Per un errore minore di 1 m su circa 40 030 000 m serve un errore relativo minore di $1/40\,030\,000 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-8}$, cioè un errore assoluto su π minore di $\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-8}$. L'approssimazione 3,141 593 (errore $3{,}5 \cdot 10^{-7}$) non basta; 3,141 592 7 (errore $4{,}6 \cdot 10^{-8}$) sì: servono sette cifre decimali. Naturalmente il risultato è significativo solo se anche il raggio è noto al metro, e qui non lo è: con R arrotondato al chilometro, l'incertezza sulla circonferenza è di qualche chilometro, e scrivere più di cinque cifre di π è inutile.

APPROFONDIMENTO · UNA SERIE PER Π

Oltre ai poligoni esistono altri modi di approssimare π. Uno dei più semplici da scrivere è la **serie di Leibniz**: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$, dove i termini continuano all'infinito con segni alterni (lo dimostrerai al quinto anno). È però lentissima: moltiplicando per 4 la somma dei primi 10 termini si ottiene 3,0418..., con 100 termini 3,1316..., con 1000 termini 3,1406...: l'errore è circa 1 diviso per il numero dei termini. Per avere sette cifre esatte servirebbero decine di milioni di termini, mentre la duplicazione di Archimede ne dà altrettante in una decina di passi. Tra due procedimenti che convergono allo stesso numero conta anche la *velocità* con cui convergono.

8.5 I numeri reali

8.5.1 Che cos'è un numero reale?

Nel volume dello scorso anno abbiamo descritto i numeri reali come i punti della retta, o come gli sviluppi decimali limitati, periodici e illimitati non periodici, e abbiamo usato *senza dimostrarla* una proprietà: due classi contigue hanno sempre un elemento separatore. In questo capitolo l'abbiamo usata di nuovo, in modo essenziale, per definire π. Ma da dove viene? Se i numeri reali sono «i punti della retta», la proprietà dice soltanto che la retta non ha buchi, e questa è un'intuizione geometrica, non una dimostrazione. Nell'Ottocento i matematici si posero il problema di **costruire** i numeri reali a partire dai razionali, che sono ben definiti come frazioni. Una delle costruzioni, proposta da Richard Dedekind nel 1872 nell'opuscolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* («Continuità e numeri irrazionali»), si basa su un'idea semplicissima: tagliare la retta in due.

8.5.2 Le sezioni di Dedekind

Una **sezione di Dedekind** (o taglio) di $\mathbb{Q}$ è una coppia $(A; B)$ di insiemi di numeri razionali tali che:

- A e B non sono vuoti, sono disgiunti e la loro unione è tutto $\mathbb{Q}$;
- ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B.

Le sezioni sono di due tipi. Se tagliamo $\mathbb{Q}$ in corrispondenza di un razionale, per esempio $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 3\}$ e $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 3\}$, il numero 3 è il minimo di B (oppure, con un'altra scelta, il massimo di A): la sezione «individua» il razionale 3. Ma consideriamo (Figura 8.6)

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0 \text{ oppure } q^2 < 2\}, \qquad B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \text{ e } q^2 > 2\}.$$

Poiché nessun razionale ha quadrato 2, ogni razionale sta in A o in B, e la coppia è una sezione. Ma A non ha un massimo e B non ha un minimo: dato un razionale positivo con quadrato minore di 2, se ne trova sempre uno un po' più grande con la stessa proprietà, e lo stesso vale, all'indietro, per B. Il taglio passa in un punto in cui non c'è alcun razionale: è il «buco» che chiamiamo $\sqrt{2}$.

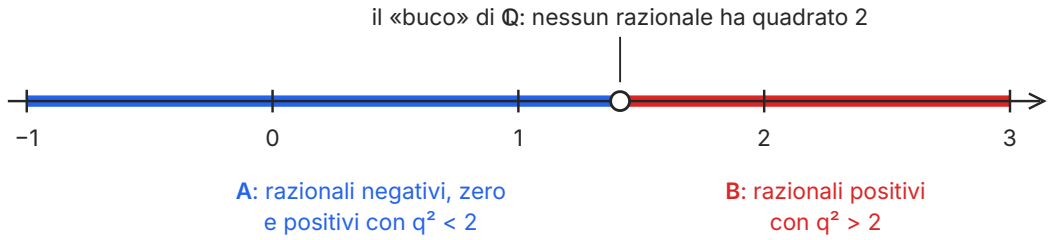


Figura 8.6 La sezione di Dedekind che definisce $\sqrt{2}$. I razionali sono divisi in due classi: A (azzurro) e B (rosso). Ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, ma A non ha massimo e B non ha minimo: il taglio cade dove $\mathbb{Q}$ ha un buco.

L'idea di Dedekind è audace: invece di cercare un numero che riempia il buco, **definisce** il numero come il taglio stesso. Un numero reale è, per definizione, una sezione di $\mathbb{Q}$; le sezioni del primo tipo corrispondono ai razionali, quelle senza massimo né minimo sono i numeri irrazionali. Si definiscono poi l'ordine (una sezione è minore di un'altra se la sua classe A è contenuta nell'altra), la somma e il prodotto, e si verifica che valgono tutte le proprietà che conosci. L'insieme $\mathbb{R}$ costruito così ha la proprietà che $\mathbb{Q}$ non ha:

IN SINTESI

Teorema (completezza di $\mathbb{R}$). Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un elemento separatore: se $(A; B)$ è una coppia di insiemi non vuoti di numeri reali, la cui unione è $\mathbb{R}$ e tale che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, allora esiste uno e un solo numero reale che è il massimo di A o il minimo di B.

In altre parole, tagliando $\mathbb{R}$ non si trovano buchi: la retta reale è **continua**. Da qui segue la proprietà delle classi contigue che abbiamo usato per definire π.

Le **classi contigue** sono un modo equivalente di dire la stessa cosa: invece di tutto $\mathbb{Q}$ diviso in due, si usano due successioni di razionali che si avvicinano da parti opposte, come le approssimazioni decimali per difetto e per eccesso. Ogni sviluppo decimale è, in questo senso, una successione di **intervalli inscatolati**, ciascuno contenuto nel precedente e dieci volte più corto: π

sta in [3; 4], in [3,1; 3,2], in [3,14; 3,15], in [3,141; 3,142], e così via. La completezza garantisce che esiste uno e un solo numero reale comune a tutti questi intervalli.

Estremo superiore

Un altro modo di enunciare la completezza usa gli insiemi limitati. Un numero M è un **maggiorante** di un insieme S se nessun elemento di S supera M; l'insieme è limitato superiormente se ha almeno un maggiorante. Il più piccolo dei maggioranti, se esiste, si chiama **estremo superiore** di S (sup S). L'insieme $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ è limitato superiormente (2 è un maggiorante), ma tra i razionali non ha un maggiorante minimo: il suo estremo superiore sarebbe $\sqrt{2}$. In $\mathbb{R}$ invece vale la proprietà dell'estremo superiore: **ogni insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente ha un estremo superiore in** $\mathbb{R}$. L'estremo superiore può non appartenere all'insieme: l'intervallo]0; 1[ha estremo superiore 1 ma non ha massimo. Anche π è un estremo superiore: quello dell'insieme dei semiperimetri p_n dei poligoni inscritti nella circonferenza di raggio 1.

Gli intervalli inscatolati spiegano anche perché 0,999… = 1, che nel capitolo 4 hai ottenuto sommando una serie geometrica: lo sviluppo 0,999… colloca il numero in [0,9; 1], [0,99; 1], [0,999; 1], …, e anche 1 sta in tutti questi intervalli, le cui lunghezze diventano piccole quanto si vuole. Quindi i due sviluppi indicano lo stesso numero. Ogni numero con uno sviluppo decimale limitato ha due scritture di questo tipo, per esempio 0,5 = 0,4999…: ne terremo conto tra poco.

8.6 L'infinito matematico

8.6.1 Contare senza contare

Quanti sono i numeri naturali? Infiniti. E i numeri pari? Anche loro infiniti. Ma sono «tanti quanti» i naturali, o la metà? Per gli insiemi finiti, due insiemi hanno lo stesso numero di elementi se si possono mettere in **corrispondenza biunivoca**: così un bambino sa che le sedie bastano per gli invitati, senza contare né le une né gli altri. Georg Cantor prese questa idea come definizione anche per gli insiemi infiniti: due insiemi sono **equipotenti** (hanno la stessa **cardinalità**) se esiste una corrispondenza biunivoca tra di essi.

Con questa definizione i pari sono tanti quanti i naturali: la funzione $n \mapsto 2n$ associa 0 a 0, 1 a 2, 2 a 4, … ed è una biiezione tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei pari. Un insieme infinito può quindi essere equipotente a una sua parte propria: per gli insiemi infiniti il principio «il tutto è maggiore della parte», valido per quelli finiti, non vale più. Dedekind prese proprio questa proprietà come definizione di insieme infinito.

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA

Aristotele, nella *Fisica*, distingue l'**infinito potenziale** da quello **attuale**. L'infinito potenziale è quello di un processo che non finisce mai: si può sempre aggiungere 1 a un numero, raddoppiare i lati di un poligono, scrivere una cifra decimale in più. L'infinito attuale è un infinito dato tutto insieme, come totalità compiuta. Aristotele ammette il primo e respinge il secondo, e la sua posizione dominò il pensiero occidentale per secoli: anche il metodo di esaustione di Archimede usa soltanto l'infinito potenziale.

Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) Galileo Galilei, per bocca del suo personaggio Salviati, osserva che i quadrati perfetti 1, 4, 9, 16, … si possono accoppiare uno per uno con i numeri 1, 2, 3, 4, …, loro radici: dunque non sono meno numerosi di tutti i numeri, anche se sono solo una parte di essi e diventano sempre più radi. Galileo ne conclude che gli attributi di «maggiore», «minore» e «uguale» non si applicano alle quantità infinite. Cantor, due secoli e mezzo dopo, trasse la conclusione opposta: si possono confrontare gli infiniti, a patto di confrontarli con le corrispondenze biunivoche e non con l'inclusione. È il passaggio all'infinito attuale, su cui si basa la matematica moderna.

8.6.2 Insiemi numerabili

Un insieme si dice **numerabile** se è equipotente a $\mathbb{N}$: i suoi elementi si possono disporre in una lista $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nella quale ciascuno compare una volta, prima o poi. I numeri pari, i quadrati perfetti, i numeri primi sono numerabili. Anche $\mathbb{Z}$ lo è, benché si estenda in due direzioni: basta elencarlo alternando i segni, $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ La corrispondenza associa al naturale n il numero $(n+1)/2$ se n è dispari e $-n/2$ se n è pari.

Più sorprendente è che sia numerabile $\mathbb{Q}$, che è denso: tra due razionali ce ne sono infiniti altri, e non esiste «il razionale successivo» di un razionale. Il trucco di Cantor consiste nel non elencare i razionali in ordine di grandezza. Disponiamo le frazioni positive p/q in una tabella infinita, con il numeratore p sulla riga e il denominatore q sulla colonna, e percorriamola a zigzag lungo le diagonali, sulle quali $p+q$ è costante (Figura 8.7). Saltando le frazioni non ridotte, che rappresentano numeri già elencati, otteniamo la lista

$$1,\ 1/2,\ 2,\ 3,\ 1/3,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4,\ 5,\ 1/5,\ \ldots$$

in cui ogni razionale positivo compare esattamente una volta: la frazione ridotta p/q si trova sulla diagonale $p+q$, e prima di essa ci sono solo un numero finito di diagonali, ciascuna finita. Per avere tutto $\mathbb{Q}$ basta mettere 0 in testa e far seguire a ogni razionale positivo il suo opposto: $0, 1, -1, 1/2, -1/2, 2, -2, \ldots$

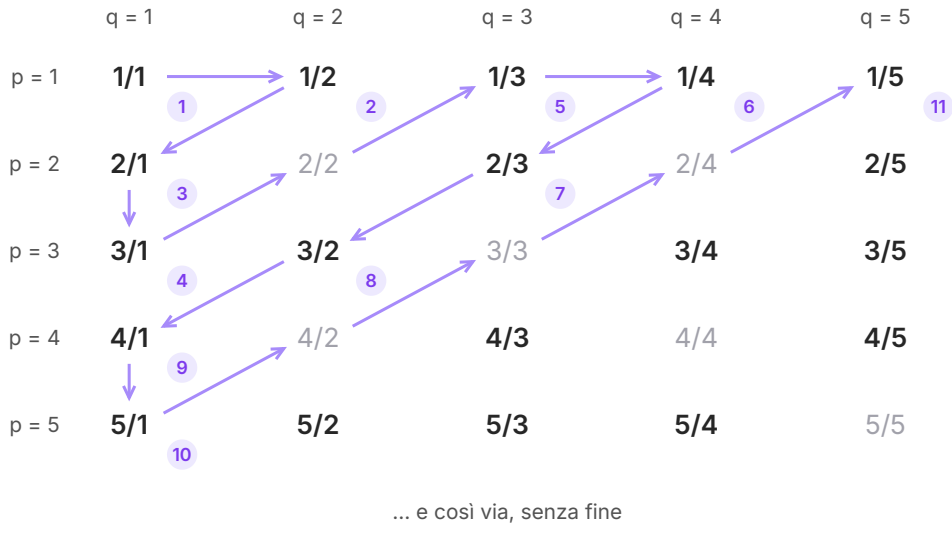


Figura 8.7 L'enumerazione a zig-zag dei razionali positivi. Le frazioni p/q sono disposte con il numeratore sulle righe e il denominatore sulle colonne; il percorso segue le diagonali. Le frazioni in grigio non sono ridotte (2/2, 4/2, 2/4, ...) e vengono saltate; i numeri nei cerchietti danno la posizione nella lista.

8.6.3 I numeri reali non sono numerabili

A questo punto si potrebbe pensare che tutti gli insiemi infiniti siano numerabili. Cantor dimostrò che non è così, con un argomento del 1891 diventato celebre, l'**argomento diagonale**.

IN SINTESI

Teorema (Cantor). **Ipotesi:** l'insieme dei numeri reali dell'intervallo $]0;1[$. **Tesi:** l'insieme non è numerabile; di conseguenza neppure $\mathbb{R}$ è numerabile.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: supponiamo che esista una lista $x_1, x_2, x_3, \ldots$ che contiene tutti i reali tra 0 e 1. Scriviamo ciascuno con il suo sviluppo decimale, scegliendo, per i numeri che ne hanno due, quello che non termina con infiniti 9 (Figura 8.8). Costruiamo ora un numero $y = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$ con questa regola: la cifra c_n è 5 se la n-esima cifra di x_n è diversa da 5, ed è 4 se la n-esima cifra di x_n è 5. Il numero y è compreso tra 0 e 1, ed è diverso da x_1 perché differisce nella prima cifra, da x_2 perché differisce nella seconda, e in generale da ogni x_n nella cifra n-esima. Poiché le cifre di y sono solo 4 e 5, il suo sviluppo è l'unico possibile (non termina con infiniti 9 né con infiniti 0), quindi cifre diverse significano davvero numeri diversi. Dunque y non compare nella lista, contro l'ipotesi che la lista li contenesse tutti. c.v.d.

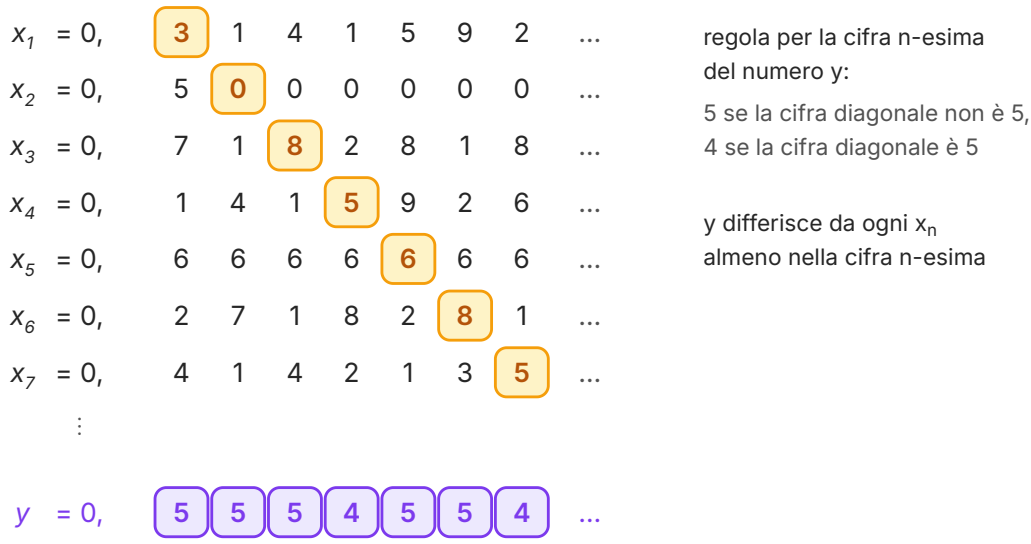


Figura 8.8 L'argomento diagonale di Cantor su una lista di esempio. Le cifre evidenziate formano la diagonale; il numero *y* si costruisce cambiando ogni cifra diagonale con la regola indicata, quindi differisce dal numero *n*-esimo della lista almeno nella cifra *n*-esima. Qualunque lista si scelga, *y* non vi compare.

ERRORE FREQUENTE

Costruire la cifra di *y* con la regola «aggiungi 1 alla cifra diagonale» (e 9 diventa 0). Allora potrebbe uscire un numero come 0,1999..., che è uguale a 0,2000... pur avendo cifre diverse: due sviluppi diversi non garantiscono numeri diversi. Usare solo le cifre 4 e 5 evita il problema. Un secondo errore è concludere che la dimostrazione fallisce perché «basta aggiungere *y* alla lista»: la nuova lista ha a sua volta un numero diagonale che le sfugge. Il teorema dice che *ogni* lista è incompleta.

L'infinito dei reali è dunque «più grande» dell'infinito dei naturali: si dice che $\mathbb{R}$ ha la **potenza del continuo**. Ne segue un fatto curioso. Cantor dimostrò anche che i numeri algebrici sono numerabili: le equazioni polinomiali a coefficienti interi si possono elencare (a ciascuna si associa un numero naturale, come per i razionali) e ciascuna ha un numero finito di soluzioni. Se anche i trascendenti fossero numerabili, $\mathbb{R}$ sarebbe l'unione di due insiemi numerabili, e quindi numerabile. Dunque i trascendenti non solo esistono, ma sono «quasi tutti» i numeri reali, anche se è difficilissimo dimostrare che un numero particolare, come π o *e*, lo è.

SINTESI

- I semiperimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti, ottenuti raddoppiando i lati, formano due classi contigue.
- La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio sono definite come elementi separatori di classi contigue di poligoni.
- π è il rapporto, uguale per tutte le circonferenze, tra circonferenza e diametro: $C = 2\pi r$.
- Teorema di Archimede: $A = \frac{1}{2} Cr$, quindi $A = \pi r^2$.
- Formula di duplicazione: $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$; con 96 lati Archimede ottenne $223/71 < \pi < 22/7$.
- Con α in radianti: arco αr, settore $\frac{1}{2}\alpha r^2$, segmento $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$; corona $\pi(R^2 - r^2)$.
- Un numero è algebrico se risolve un'equazione polinomiale a coefficienti interi non tutti nulli, trascendente altrimenti. π è irrazionale (Lambert, 1761) e trascendente (Lindemann, 1882); e è trascendente (Hermite, 1873).
- La quadratura del cerchio con riga e compasso è impossibile, perché con riga e compasso si costruiscono solo lunghezze algebriche.
- In un prodotto l'errore relativo di π passa al risultato: le cifre di π si scelgono in base alla precisione richiesta.
- Dedekind definisce i numeri reali come sezioni di $\mathbb{Q}$; in $\mathbb{R}$ ogni sezione ha un elemento separatore e ogni insieme limitato superiormente ha un estremo superiore (completezza).
- Due insiemi sono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.
- $\mathbb{R}$ non è numerabile (argomento diagonale di Cantor, 1891): gli infiniti non sono tutti uguali.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La successione dei semiperimetri dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza, ottenuti raddoppiando ogni volta il numero dei lati, è:

   A. decrescente

   B. crescente, e ogni suo termine è minore di πr

   C. crescente e non limitata

   D. costante, uguale a πr

2. ● Quale dei seguenti numeri è trascendente?

   A. $\sqrt{2}$

   B. $22/7$

   C. $\sqrt[3]{5}$

   D. π

3. ● Un settore circolare di raggio 4 cm ha l'angolo al centro di 1 radiante. La sua area è:

   A. 8 cm²

   B. 16 cm²

   C. 4 cm²

   D. 8π cm²

4. ●● Quale dei seguenti insiemi **non** è numerabile?

   A. l'insieme dei numeri naturali pari

   B. $\mathbb{Q}$

   C. l'insieme dei numeri reali dell'intervallo $]0; 1[$

   D. $\mathbb{Z}$

5. ●● Si considera la sezione di $\mathbb{Q}$ con $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 3\}$ e $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 3\}$. Quale affermazione è vera?

   A. A ha massimo

   B. B ha minimo, quindi la sezione individua il numero razionale 3

   C. né A ha massimo né B ha minimo: la sezione definisce un irrazionale

   D. non è una sezione, perché 3 appartiene a B

6. ●● Approssimando π con $22/7$ si commette un errore relativo di circa:

   A. 0,4%

   B. 4%

   C. 0,0013%

   D. 0,04%

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $\pi = 22/7$.

   b) Ogni numero razionale è algebrico.

   c) La somma di due numeri trascendenti è sempre trascendente.

   d) L'insieme dei naturali e quello dei quadrati perfetti sono equipotenti.

   e) Ogni insieme di numeri reali limitato superiormente ha massimo.

   f) Il segmento circolare con angolo al centro di 180° è metà del cerchio.

8. ● Completa.
   a) Un numero reale si dice algebrico se _____ .
   b) Due insiemi sono equipotenti se _____ .
   c) La lunghezza della circonferenza è l'elemento separatore delle classi contigue formate da _____ .
   d) Un insieme si dice numerabile se _____ .
   e) Lo sviluppo decimale 0,4999... rappresenta il numero _____ .

Calcolare

9. ● In una circonferenza di raggio 9 cm l'angolo al centro misura 40°. Calcola la lunghezza dell'arco e l'area del settore, in forma esatta e approssimata.

10. ● Un arco di una circonferenza di raggio 5 cm è lungo 7,5 cm. Quanto misura l'angolo al centro in radianti e in gradi? Qual è l'area del settore?

11. ●● Calcola l'area del segmento circolare minore staccato in un cerchio di raggio 10 cm da una corda che sottende un angolo al centro di: a) 90°; b) 120°.

12. ● Due circonferenze concentriche hanno raggi 7 cm e 4 cm. a) Calcola l'area della corona circolare. b) Quale raggio deve avere la circonferenza esterna perché la corona abbia la stessa area del cerchio interno?

13. ●● In una circonferenza di raggio r considera il quadrato inscritto e il quadrato circoscritto. a) Confrontando i loro perimetri con la circonferenza, ricava una stima di π. b) Fai lo stesso con le aree. c) Quale stima è migliore?

14. ●● Partendo dal lato del quadrato inscritto in una circonferenza di raggio 1, calcola con la formula di duplicazione il lato dell'ottagono e del poligono di 16 lati inscritti, in forma esatta, e le stime per difetto di π che ne seguono.

15. ●● Calcola in funzione di r le aree dell'esagono regolare inscritto e dell'esagono regolare circoscritto a una circonferenza di raggio r, e deduci una stima di π.

16. ●● Dimostra che i numeri seguenti sono algebrici, scrivendo un'equazione polinomiale a coefficienti interi di cui sono soluzione: a) $2/3$; b) $\sqrt[3]{2}$; c) $1 + \sqrt{3}$; d) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

17. ●● Calcola l'errore assoluto e l'errore relativo (in percentuale) delle approssimazioni 3,1 e 3,142 di π. Quale delle due è per eccesso?

18. ●● Considera la corrispondenza $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ del testo, che associa a n il numero $(n+1)/2$ se n è dispari e $-n/2$ se n è pari. a) Calcola $f(0), f(1), \ldots, f(6)$. b) Quale naturale corrisponde a -10? E a 7? c) Spiega perché f è biiettiva.

19. ●● Nell'enumerazione a zig-zag dei razionali positivi della Figura 8.7, prosegui la lista fino al 15° termine. In quale posizione compare 2/5?

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che, raddoppiando il numero dei lati, il perimetro del poligono regolare circoscritto diminuisce. (Suggerimento: in ogni vertice del poligono di n lati la tangente nel punto medio dell'arco «taglia lo spigolo»; usa la disuguaglianza triangolare.)

21. ●● Dimostra che, se x è algebrico, anche $x - 1$ e $x/2$ sono algebrici. Deduci che $\pi + 1$ e 2π sono trascendenti.

22. ●●● Spiega perché dal teorema di Lindemann segue che con riga e compasso non si può costruire un segmento lungo $\sqrt{\pi}$ a partire da un segmento unitario. Usa il fatto che con riga e compasso si costruiscono solo lunghezze algebriche e che, dati segmenti lunghi 1, a e b, con il teorema di Talete si costruisce un segmento lungo ab.

23. ●● Dimostra che l'insieme dei naturali dispari è equipotente a $\mathbb{N}$, scrivendo esplicitamente una biiezione. Perché questo non contraddice il fatto che i dispari sono una parte propria di $\mathbb{N}$?

24. ●●● I primi sei numeri di una lista di reali compresi tra 0 e 1 sono 0,250000…; 0,333333…; 0,505050…; 0,123456…; 0,555555…; 0,707070…. Scrivi le prime sei cifre del numero y costruito con la regola diagonale del testo. Spiega perché y non può comparire in nessuna posizione della lista, nemmeno dopo la sesta.

25. ●● Trova l'errore. «Tra due naturali consecutivi ci sono infiniti razionali; quindi $\mathbb{Q}$ ha infinitamente più elementi di $\mathbb{N}$ e non può essere numerabile.»

Problemi

26. ● È meglio una pizza tonda di 30 cm di diametro o due pizze di 21 cm di diametro? Confronta le aree.

27. ●● La ruota di una bicicletta ha il diametro di 70 cm. Quanti giri compie la ruota in un percorso di 1 km?

28. ●● Una corda è tesa lungo l'equatore di una Terra immaginata perfettamente sferica. La si allunga in modo che, tutto intorno, stia sollevata di 1 m dal suolo. Di quanto è stata allungata? Ripeti il calcolo per una palla da tennis. Commenta.

29. ●● Un irrigatore ruota avanti e indietro su un angolo di 135° e bagna il prato fino a 6 m di distanza. Qual è l'area della zona bagnata?

30. ●●● La sezione di una galleria è un segmento circolare: la base è una corda lunga 8 m e l'altezza massima (la «freccia») è 2 m. a) Calcola il raggio della circonferenza. b) Calcola l'angolo al centro. c) Calcola l'area della sezione.

Con il computer

31. ●● Con un foglio di calcolo realizza la tabella del metodo di Archimede descritta nel testo (lati da 6 fino a circa 10^{10}), una volta con la formula di duplicazione e una volta con la formula equivalente senza sottrazione. a) Per quale numero di lati la prima formula dà il valore più vicino a π? b) Che cosa succede dopo? c) Spiega perché la seconda formula non ha lo stesso problema.

32. ●● Con un foglio di calcolo somma i primi 10, 100, 1000 e 10 000 termini della serie di Leibniz e moltiplica per 4. Quante cifre decimali esatte di π ottieni ogni volta? Come cresce, all'incirca, il numero di termini necessario per guadagnare una cifra?

Verso la verifica

33. ●● Un quadrato è inscritto in una circonferenza di raggio 6 cm. a) Calcola l'area della parte di cerchio esterna al quadrato. b) Calcola l'area di uno dei quattro segmenti circolari e verifica il risultato con la formula del segmento.

34. ●● Siano AB il lato dell'n-agono regolare inscritto in una circonferenza di centro O e raggio r, e M il punto medio dell'arco AB. a) Dimostra che l'area del quadrilatero $OAMB$ è $\frac{1}{2}r \cdot AB$. b) Deduci che l'area del $2n$-agono inscritto è $r \cdot p_n$. c) Controlla la formula con la Tabella 8.1 per $n = 6$ e $n = 12$.

35. ●●● (Sfida) Due circonferenze di raggio 6 cm sono tali che ciascuna passa per il centro dell'altra. Calcola l'area della parte di piano comune ai due cerchi (la «lente»), in forma esatta e approssimata.

PER APPROFONDIRE

- [ARC] Archimede, *Opere*: *La misura del cerchio*, con il metodo di esaustione e i poligoni di 96 lati.
- [BEC] Beckmann, *A History of π*: la storia delle approssimazioni di π, da Archimede alle dimostrazioni di Lambert e Lindemann.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: i capitoli sui numeri reali, sulle sezioni di Dedekind, sugli insiemi numerabili e sull'impossibilità di alcune costruzioni con riga e compasso.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Archimede, e la rifondazione dell'analisi nell'Ottocento con Dedekind e Cantor.

Glossario del capitolo

Area del cerchio
Elemento separatore delle classi contigue delle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti; vale πr^2.

Argomento diagonale
Dimostrazione di Cantor (1891) che i reali di $]0; 1[$ non sono numerabili: da ogni lista si costruisce un numero che differisce dall'n-esimo nella cifra n-esima.

Cardinalità
Ciò che hanno in comune tutti gli insiemi equipotenti a un insieme dato; per un insieme finito è il numero dei suoi elementi.

Completezza di $\mathbb{R}$
Proprietà per cui ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un elemento separatore; equivale alla proprietà dell'estremo superiore.

Estremo superiore
Il minimo dei maggioranti di un insieme (sup); in $\mathbb{R}$ esiste per ogni insieme non vuoto limitato superiormente, anche se l'insieme non ha massimo.

Formula di duplicazione
Formula che dà il lato del $2n$-agono regolare inscritto a partire da quello dell'n-agono: $l_{2n} = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - l_n{}^2)})}$.

Infinito attuale
Infinito considerato come totalità compiuta, data tutta insieme; è quello della teoria degli insiemi di Cantor.

Infinito potenziale
Infinito di un processo che si può proseguire senza fine (Aristotele).

Insieme numerabile
Insieme equipotente a $\mathbb{N}$, cioè i cui elementi si possono disporre in una lista; sono numerabili $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e l'insieme dei numeri algebrici.

Insiemi equipotenti
Insiemi tra i quali esiste una corrispondenza biunivoca; si dice che hanno la stessa cardinalità.

Intervalli inscatolati
Successione di intervalli chiusi, ciascuno contenuto nel precedente, con lunghezze piccole quanto si vuole; in $\mathbb{R}$ hanno uno e un solo punto in comune.

Lunghezza della circonferenza
Elemento separatore delle classi contigue dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti; vale $2\pi r$.

Maggiorante
Numero che non è superato da nessun elemento di un insieme dato.

Metodo di esaustione
Procedimento dei matematici greci che determina un'area o un volume avvicinandolo con figure inscritte e circoscritte e dimostrando per assurdo che non può essere né maggiore né minore di un valore dato.

Numero algebrico
Numero reale che è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi non tutti nulli; per esempio $2/3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Numero trascendente
Numero reale che non è algebrico; per esempio π ed e.

Pi greco (π)
Rapporto, uguale per tutte le circonferenze, tra la lunghezza della circonferenza e il diametro; $\pi = 3{,}141\,59\ldots$, irrazionale e trascendente.

Potenza del continuo
La cardinalità di $\mathbb{R}$, maggiore di quella di $\mathbb{N}$.

Quadratura del cerchio
Costruzione con riga e compasso di un quadrato equivalente a un cerchio dato; è impossibile perché π è trascendente.

Sezione di Dedekind
Coppia $(A; B)$ di insiemi non vuoti di razionali, disgiunti e con unione $\mathbb{Q}$, tali che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; secondo Dedekind, un numero reale.

Soluzioni

1. B. Il perimetro inscritto cresce a ogni raddoppio ed è sempre minore della circonferenza $2\pi r$, quindi il semiperimetro è minore di πr.

2. D. Gli altri tre sono algebrici: radici di $x^2 - 2$, $7x - 22$, $x^3 - 5$.

3. A. $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 8\ \text{cm}^2$.

4. C. È il teorema di Cantor; pari, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili.

5. B. $3 \in B$ ed è il suo minimo; A non ha massimo.

6. D. $|22/7 - \pi| \approx 0{,}001\,26$; $0{,}001\,26/\pi \approx 0{,}000\,40 = 0{,}04\%$.

7. a) F: 22/7 è un'approssimazione per eccesso di π, che è irrazionale. b) V: a/b risolve $bx - a = 0$. c) F: π e $-\pi$ sono trascendenti, ma la loro somma è 0. d) V: $n \mapsto n^2$ è una biiezione. e) F: ha estremo superiore, ma non sempre massimo $(]0;\,1[)$. f) V: $\alpha = \pi$, $\operatorname{sen}\pi = 0$, area $\frac{1}{2}r^2\pi$.

8. a) è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi non tutti nulli; b) esiste una corrispondenza biunivoca tra di essi; c) i perimetri dei poligoni regolari inscritti e quelli dei circoscritti (raddoppiando i lati); d) è equipotente a $\mathbb{N}$; e) 0,5.

9. $\alpha = 40° = 2\pi/9$. Arco $l = 9 \cdot 2\pi/9 = 2\pi$ cm $\approx 6{,}28$ cm; settore $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 9 = 9\pi\ \text{cm}^2 \approx 28{,}27\ \text{cm}^2$.

10. $\alpha = 7{,}5/5 = 1{,}5$ rad $\approx 85{,}94°$; settore $\frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 5 = 18{,}75\ \text{cm}^2$.

11. a) $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (\pi/2 - 1) = 25\pi - 50 \approx 28{,}54\ \text{cm}^2$. b) $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (2\pi/3 - \sqrt{3}/2) = 100\pi/3 - 25\sqrt{3} \approx 61{,}42\ \text{cm}^2$.

12. a) $\pi(49 - 16) = 33\pi\ \text{cm}^2 \approx 103{,}67\ \text{cm}^2$. b) $\pi(R^2 - 16) = 16\pi \Rightarrow R^2 = 32$, $R = 4\sqrt{2}$ cm $\approx 5{,}66$ cm.

13. a) Lato inscritto $r\sqrt{2}$, circoscritto $2r$: $4\sqrt{2}r < 2\pi r < 8r$, cioè $2\sqrt{2} \approx 2{,}83 < \pi < 4$. b) Aree $2r^2 < \pi r^2 < 4r^2$, cioè $2 < \pi < 4$. c) La prima (forbice più stretta).

14. $l_8 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 0{,}765\,367$, semiperimetro $4\sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 3{,}061\,467$; $l_{16} = \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - (2 - \sqrt{2}))})} = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2})})} \approx 0{,}390\,181$, semiperimetro $8\sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2})})} \approx 3{,}121\,445$. Quindi $\pi > 3{,}06$ e $\pi > 3{,}12$.

15. Inscritto: 6 triangoli equilateri di lato r, area $(3\sqrt{3}/2)r^2 \approx 2{,}598r^2$. Circoscritto: semiperimetro $2\sqrt{3}r$ per apotema r, area $2\sqrt{3}r^2 \approx 3{,}464r^2$. Quindi $2{,}598 < \pi < 3{,}464$.

16. a) $3x - 2 = 0$. b) $x^3 - 2 = 0$. c) $(x - 1)^2 = 3$: $x^2 - 2x - 2 = 0$. d) $x^2 = 7 - 2\sqrt{10}$, $(x^2 - 7)^2 = 40$: $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$.

17. 3,1: errore assoluto $\approx 0{,}041\,59$, relativo $\approx 1{,}32\%$. 3,142: errore assoluto $\approx 0{,}000\,41$, relativo $\approx 0{,}013\%$; 3,142 è per eccesso (3,1 per difetto).

18. a) 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3. b) $-10 = -n/2$ con n pari $\Rightarrow n = 20$; $7 = (n + 1)/2 \Rightarrow n = 13$. c) I dispari vanno sugli interi positivi e i pari sugli interi negativi e lo 0, in modo iniettivo; ogni intero $k > 0$ proviene da $2k - 1$, ogni $k \le 0$ da $-2k$: la funzione è suriettiva.

19. 1, 1/2, 2, 3, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 5, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3. 2/5 è il 13° termine (diagonale $p + q = 7$, percorsa da 1/6 verso 6/1).

20. Nel passaggio da n a $2n$ lati, la tangente nel punto medio dell'arco tra due punti di tangenza consecutivi taglia il vertice V del poligono in due punti E, F dei lati che vi concorrono. Il contorno perde $EV + VF$ e guadagna EF, e per la disuguaglianza triangolare nel triangolo EVF si ha $EF < EV + VF$. Ciò accade in ogni vertice, quindi il perimetro diminuisce.

21. Se $p(x) = 0$ con p a coefficienti interi non tutti nulli, allora $x - 1$ è soluzione di $p(t + 1) = 0$ e $x/2$ di $p(2t) = 0$: sviluppando le potenze si ottengono polinomi in t a coefficienti interi, dello stesso grado di p e con coefficiente direttivo non nullo, quindi non nulli. Se $\pi + 1$ fosse algebrico, lo sarebbe anche $(\pi + 1) - 1 = \pi$; se 2π fosse algebrico, lo sarebbe anche $2\pi/2 = \pi$. Entrambe le conclusioni contraddicono il teorema di Lindemann.

22. Traccia: se si costruisse un segmento lungo $\sqrt{\pi}$, con la costruzione di Talete applicata a 1, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$ si costruirebbe un segmento lungo $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \pi$. Ma con riga e compasso si costruiscono solo lunghezze algebriche, e π è trascendente: assurdo. Quindi la quadratura del cerchio di raggio 1 è impossibile.

23. $f(n) = 2n + 1$ è iniettiva ($2n + 1 = 2m + 1 \Rightarrow n = m$) e suriettiva (il dispari d proviene da $(d - 1)/2$). Il principio «il tutto è maggiore della parte» vale per gli insiemi finiti; un insieme infinito può essere equipotente a una sua parte propria, anzi questa proprietà caratterizza gli insiemi infiniti.

24. Le cifre diagonali sono 2, 3, 5, 4, 5, 0 (la sesta cifra di 0,707070... è 0); con la regola del testo $y = 0{,}554545...$ Per ogni n, y differisce dal numero n-esimo della lista nella cifra n-esima; poiché le sue cifre sono solo 4 e 5, il suo sviluppo è l'unico possibile, quindi cifre diverse danno numeri diversi: y non coincide con nessun elemento della lista, in nessuna posizione.

25. L'errore è usare l'ordine (o l'inclusione) per confrontare insiemi infiniti. La numerabilità chiede soltanto una lista in cui ogni elemento compaia una volta, non una lista in ordine crescente: l'enumerazione a zig-zag elenca tutti i razionali, quindi $\mathbb{Q}$ è numerabile.

26. Una pizza: $\pi \cdot 15^2 = 225\pi \approx 706{,}9$ cm^2. Due pizze: $2 \cdot \pi \cdot 10{,}5^2 = 220{,}5\pi \approx 692{,}7$ cm^2. Conviene, di poco, la pizza grande.

27. Circonferenza $0{,}7\pi$ m $\approx 2{,}199$ m; $1000/2{,}199 \approx 454{,}7$: circa 455 giri.

28. La lunghezza passa da $2\pi R$ a $2\pi(R + 1\text{ m})$: l'allungamento è 2π m $\approx 6{,}28$ m, qualunque sia il raggio, quindi anche per la palla da tennis. Sorprende perché si confonde l'allungamento assoluto (sempre 6,28 m) con quello relativo, piccolissimo per la Terra e enorme per la palla.

29. $\alpha = 135° = 3\pi/4$; area $\frac{1}{2} \cdot 3\pi/4 \cdot 36 = 13{,}5\pi$ m$^2 \approx 42{,}41$ m^2.

30. a) Metà corda 4 m, distanza della corda dal centro $r - 2$: $r^2 = 16 + (r - 2)^2$, $4r = 20$, $r = 5$ m. b) $\text{sen}(\alpha/2) = 4/5$, $\cos(\alpha/2) = 3/5$; $\alpha \approx 106{,}26° \approx 1{,}8546$ rad. c) $\text{sen}\,\alpha = 2 \cdot 4/5 \cdot 3/5 = 0{,}96$; area $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (1{,}8546 - 0{,}96) \approx 11{,}18$ m^2.

31. a) Con la formula di duplicazione il valore migliore si ha da 24 576 a circa 200 000 lati: 3,141 592 645..., sette cifre decimali esatte (i dettagli possono cambiare da un programma all'altro). b) Le cifre peggiorano: con 100 663 296 lati si ottiene circa 3,18, con 805 306 368 lati 6, poi 0. c) La sottrazione $2 - \sqrt{(4 - l_n^2)}$ fra numeri quasi uguali cancella le cifre significative; la formula $l_n/\sqrt{(2 + \sqrt{(4 - l_n^2)})}$ contiene solo somme, divisioni e radici, e i valori restano 3,141 592 653 589 79.

32. 10 termini: 3,0418 (nessuna cifra decimale esatta); 100: 3,1316 (una, 3,1); 1000: 3,1406 (due, 3,14); 10 000: 3,1415 (tre, 3,141). L'errore è circa $1/N$: per ogni cifra in più servono circa dieci volte i termini.

33. a) Quadrato di lato $6\sqrt{2}$, area 72 cm^2; parte esterna $36\pi - 72 \approx 41{,}10$ cm^2. b) Un segmento: $(36\pi - 72)/4 = 9\pi - 18 \approx 10{,}27$ cm^2; con la formula, $\alpha = \pi/2$: $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (\pi/2 - 1) = 9\pi - 18$.

34. a) Le diagonali OM e AB del quadrilatero sono perpendicolari, quindi l'area è $\frac{1}{2} \cdot OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB$. b) Il $2n$-agono inscritto è l'unione di n quadrilateri come $OAMB$: area $n \cdot \frac{1}{2} r l_n = r \cdot p_n$. c) Con $r = 1$: area del dodecagono $= p_6 = 3$ (infatti $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,30° = 3$); area del 24-agono $= p_{12} \approx 3{,}105\,829$.

35. I due centri e un punto d'intersezione formano un triangolo equilatero di lato 6, quindi ciascun arco della lente sottende un angolo di $120° = 2\pi/3$ nel suo cerchio. La lente è formata da due segmenti circolari: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (2\pi/3 - \sqrt{3}/2) = 24\pi - 18\sqrt{3} \approx 44{,}22$ cm^2.